自发规范对称性破缺的梯度流序参量

Kengo Kikuchi，*Kenji Nishiwaki，† 和 Kin-ya Oda‡

2023年6月14日

* *RIKEN iTHEMS*，日本埼玉县和光市 *351-0198*

† *Shiv Nadar* 卓越学术机构物理系，印度 *Gautam BuddhaNagar 201314*

‡ 日本东京*167-8585*，东京女子基督教大学数学系

arXiv:2303.10841v2 [hep-th] 13 Jun 2023

摘要

希格斯场在同一时空点的规范不变二点函数，可自然地作为自发规范对称性破缺的规范不变序参量。然而，这个复合算符存在紫外发散，因而定义不良。我们提出使用梯度流来消除将场置于同一时空点所导致的发散。作为第一步，我们采用鞍点方法估算有限部分，计算了连续理论中具有正质量平方的阿贝尔希格斯模型在单圈阶的结果。在无限流时间的红外极限下，序参量始终趋于零。

*电子邮箱：kengo@yukawa.kyoto-u.ac.jp

†电子邮箱：kenji.nishiwaki@snu.edu.in

‡电子邮箱：odakin@lab.twcu.ac.jp

目录

1 引言 3

2 阿贝尔希格斯模型的梯度流 4

2.1 设定.4 2.2 梯度流.5

3 规范场二点函数的紫外有限性 **8**

3.1 构型.9

4 作为流动序参量的希格斯二点函数 12

4.1 构型.13 4.2 动量积分的计算.14 4.2.1 鞍点近似下的发散部分.17 4.2.2 无近似时的紫外发散部分.18 4.3 大流时间下的渐近形式.19

5 总结与讨论 **20**

A 细节 希格斯二点函数：单圈 22

A.1 领先阶.22 A.2 单圈阶.23 A.2.1 图 A.23 A.2.2 图 B.25 A.2.3 图 C.26 A.2.4 图 D.28 A.2.5 图 E.30 A.2.6 图 F.31 A.2.7 图 a.31 A.2.8 图 b.32 A.2.9 图 c.33

1 引言

迄今为止，规范理论的非微扰定义仅在晶格上给出。当路径积分遍历晶格上的全部规范场构型时，规范对称性不能通过希格斯机制发生自发破缺 [1]。在连续时空的微扰计算中，希格斯场的真空期望值（VEV） $\langle\widehat{\Phi}(x)\rangle$被视为自发对称性破缺（SSB）的序参量。$\widehat{\ }$认为非微扰晶格规范理论中不可能发生自发对称性破缺的关键论据是， $\Phi(x)$并非规范不变算符，因此，当路径积分在未进行规范固定的情况下遍历所有规范场构型时，根据 Elitzur 定理，其期望值 $\langle\widehat{\Phi}(x)\rangle = \int \mathcal{D}\Phi\,\Phi(x)\,e^{-S[\Phi]}$为零 [1–3]。在晶格规范理论中，例如，可以通过将路径积分限制在一个特定的固定规范切片上，测量希格斯场在两个不同点处的二点关联函数；该函数并非规范不变。参见文献 [4] ，以及近期综述 [5] 。理想情况下，应当存在一种无需规范固定的规范不变序参量。

$\Phi(x)$。自然的规范不变算符是 $\widehat{\Phi}^\dagger(x)$ 和 $\widehat{\Phi}(x)$ 放置在同一个时空点 $\widehat{\ }x$ 会使该算符产生紫外（UV）发散。于是，人们可能会转而考虑在红外（IR）极限 $|x-y|\to\infty$ 下插入路径有序威尔逊线 $\widehat{\Phi}^\dagger(x)\,\mathrm{P}\exp\left(ig\int_y^x \mathrm{d}z^\mu \widehat{A}_\mu(z)\right)\widehat{\Phi}(y)$ 的二点函数。该算符同时包含希格斯真空期望值（VEV）和威尔逊线的贡献。因此，为了区分对称相、希格斯相和禁闭相，必须考察极限 $|x-y|\to\infty$ 下的标度行为。[1] 如果能为 $\widehat{\Phi}^\dagger(x)\,\widehat{\Phi}(x)$ 提供一个经过正则化的复合算符，将会很有价值。[2]

梯度流通过涂抹场并沿额外的流时间方向延伸 [10–13]，是消除紫外发散的有力工具。特别是，它可以彻底消除关联函数中规范场位于同一时空点所导致的紫外发散 [12, 13]。同样的论证也适用于夸克场，但还需要额外进行场（波函数）重整化 [14]。（梯度流的其他多个方面也已得到研究，例如非微扰重整化群 [15–26], 、全息理论 [27–33], 、 $O(N)$ 非线性 σ 模型及其大-N 展开 [34–37], 、超对称梯度流 [38–49], 、现象学应用 [50–58], ，以及量子场论中的形式问题 [59–63]。）

本文提出一种利用梯度流构造的自发对称性破缺（SSB）规范不变序参量——流动序参量， $\left\langle\widehat{\Psi}^\dagger(t,\ x)\ \widehat{\Psi}(s,\ x)\right\rangle$，其中 $\Psi^\dagger(t,\ x)$ 和 $\Psi(s,\ x)$ 分别是满足边界条件 $\Psi^\dagger(0,\ x) = \Phi^\dagger(x)$ 和 $\Psi(0,\ x) = \Phi(x)$、并分别沿流时间 t 和 s 趋向梯度流方程解的经典解。得益于梯度流的涂抹作用，该序参量自然消除了上述希格斯场位于同一时空点所导致的紫外发散。

作为最简单的例子之一，我们首先在渐近非自由的阿贝尔希格斯模型中，计算对称相下规范固定微扰论中的规范不变流动序参量。

本文的结构安排如下。在第2节中，我们介绍模型的设定

[1]这里，禁闭相指威尔逊线获得非平凡（非单位）的期望值；希格斯相指只有希格斯场获得期望值；对称相指希格斯场和威尔逊线的期望值均为零。[2]关于相结构中规范依赖性的其他讨论，参见例如 [6–9]。

及其梯度流方程。在第3节中，我们展示规范玻色子二点函数在单圈阶的紫外有限性。在第4节中，我们将希格斯二点函数视为流动序参量，并分析大流时间极限下有限部分的行为。第5节总结并讨论相关问题。在附录 A 中，我们详细介绍单圈阶希格斯二点函数的计算。

2 阿贝尔希格斯模型的梯度流

我们首先介绍本文分析所采用的设定，然后给出梯度流方程及其解。

2.1 设定

我们研究欧几里得d维时空中的阿贝尔希格斯模型，其中希格斯场为 Φ (1) U，规范场为 A_μ ，度量为 $\delta_{\mu\nu}=\delta^{\mu\nu}=(\mathrm{I}_d)_{\mu\nu}=(\mathrm{I}_d)^{\mu\nu}$，

$$S := S_A + S_\Phi, \tag{1}$$

$$S_A := \frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^d x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi_0}\left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 \right\}, \tag{2}$$

$$S_\Phi := \frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^d x \left\{ \left(D_\mu \Phi\right)^\dagger D_\mu \Phi + m_0^2\left(\Phi^\dagger\Phi\right) + \frac{\lambda_0}{g_0^2}\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 \right\}, \tag{3}$$

其中 I_d 是 d维单位矩阵； Φ 是带单位电荷的复标量场； g_0、m_0、 ξ_0和 λ_0 分别是 Φ的裸规范耦合、裸质量、裸规范固定参数和裸自耦合； $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$是阿贝尔场强；协变导数 D_μ 的形式为

$$D_\mu := \partial_\mu - iA_\mu. \tag{4}$$

我们采用非正则归一化场 $\Phi = g_0\Phi^{\mathrm{can}}$ 和 $A_\mu = g_0 A_\mu^{\mathrm{can}}$，其中上标“can”表示正则归一化场，因此圈数的计数与梯度流中的 g_0 一致，后文将会看到这一点。此处及下文中，我们将裸场（如 Φ 和 A_μ ）写作不带下标的形式，而将重整化场写作带下标“R”的形式，例如 Φ_{R} 和 $A_{\mathrm{R}\mu}$。

下文中，我们将频繁使用动量积分的简记：

$$\int_p := \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}, \tag{5}$$

其中 d $=4-2\varepsilon$ 其中无穷小变量为 $\varepsilon>0$。传播子表示为

$$\langle A_\mu(x)\, A_\nu(y)\rangle_0 = \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)+\xi_0\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right], \tag{6}$$

$$\langle \Phi(x)\, \Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m_0^2}, \tag{7}$$

其中，期望值用路径积分的语言定义为

$$\langle \mathcal{O}\rangle_0 := \frac{\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{O}\, e^{-S_{\mathrm{free}}}}{\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^\dagger e^{-S_{\mathrm{free}}}}, \tag{8}$$

其中， S_{free} 表示作用量 (1) 的自由二次部分。在此，我们引入重整化尺度 μ ，以补偿规范耦合 g_0的物理量纲。

引入裸场与重整化场之间的关系

，

$$A_\mu = \sqrt{Z_A} A_{\mathrm{R}\mu}, \qquad \Phi = \sqrt{Z_\Phi}\Phi_{\mathrm{R}}, \tag{9}$$

其中，波函数重整化因子参数化为

$$Z_A := 1 + \delta Z_A, \qquad Z_\Phi := 1 + \delta Z_\Phi. \tag{10}$$

并引入裸耦合与重整化耦合之间的关系：

$$\begin{aligned} m_0^2 &= Z_\Phi^{-1}\left(m^2 + \delta m^2\right), & g_0 &= Z_A^{-1/2}\left(g + \delta g\right), \\ \xi_0 &= 1 + \delta\xi, & \lambda_0 &= Z_\Phi^{-2}\left(\lambda + \delta\lambda\right), \end{aligned} \tag{11}$$

其中，我们采用如下耦合常数记号：重整化耦合不带任何下标，例如 m 和 g； δm^2、 δg、 $\delta\xi$和 $\delta\lambda$ 分别对应标量质量、规范耦合、规范固定参数和标量自耦合。

在最小减除方案中，单圈阶下这些对应量可表示为

$$\begin{aligned} \delta Z_A &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(-\frac{g^2}{3}\right), & \delta Z_\Phi &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(2g^2\right), \\ \delta m^2 &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(4\lambda m^2 - g^2 m^2\right), & \delta g &= 0, \\ \delta\xi &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(-\frac{g^2}{3}\right), & \delta\lambda &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(10\lambda^2 + 5g^4 - 2g^2\lambda\right), \end{aligned} \tag{12}$$

由此得到[3]

$$m_0^2 = m^2 + \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(4\lambda m^2 - 3g^2 m^2\right), \tag{13}$$

$$g_0 = g + \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(\frac{g^3}{6}\right), \tag{14}$$

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\left(10\lambda^2 + 5g^4 - 6g^2\lambda\right). \tag{15}$$

2.2 梯度流

梯度流是一种高效的方法，通过沿流时间 t 的方向扩散，来描述复合算符定义良好的期望值；该流时间称为流时间 [10–14]。[4]对于 $A_\mu(x)$ 和 $\Phi(x)$，我们分别引入依赖于流时间的规范场 $B_\mu(t,x)$ 和复标量场 $\Psi(t,x)$，以便在 $t=0$ 处满足初始条件：

$$B_\mu(t=0,x) = A_\mu(x), \qquad \Psi(t=0,x) = \Phi(x), \qquad \Psi^\dagger(t=0,x) = \Phi^\dagger(x). \tag{16}$$

[3] λ_0 与 λ 之间的单圈关系对以下讨论并非必要。[4]您可以参考 Hiroshi Suzuki 为 11 月 14 日至 16, 2018 [64,65]在大阪大学所作讲座提供的资料。

我们引入一个流动作用量:

$$\widetilde{S}=\frac{1}{g_0^2}\int_0^\infty \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^d x\left\{\frac{1}{4}G_{\mu\nu}(t,x)\,G_{\mu\nu}(t,x)+\frac{\alpha_0}{2}\big(\partial_\mu B_\mu(t,x)\big)^2+\big(D_\mu\Psi(t,x)\big)^\dagger D_\mu\Psi(t,x)\right\}, \tag{17}$$

其中 $G_{\mu\nu}:=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$，而 α_0 是体区中的无量纲规范固定常数（$t>0$）。在流动作用量中，我们略去了标量质量项和自相互作用项；这些项包含裸参数，而裸参数中含有发散反项，目的是使其在 $t=0$ 处与边界理论的相应参数相联系。体区中不存在可用于抵消这类反项的发散（ [49,66]）。

梯度流方程是一类扩散方程，其形式如下:

$$\begin{aligned}\partial_t B_\mu(t,x)&=-g_0^2\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta B_\mu(t,x)}\\&=\left(\delta_{\mu\nu}\,\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu\right)B_\nu(t,x)+\alpha_0\,\partial_\mu\partial_\nu B_\nu(t,x)+R_\mu^B(t,x)\,,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\Psi(t,x)&=-g_0^2\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\Psi^\dagger(t,x)}\\&=\partial^2\Psi(t,x)+R^\Psi(t,x)\,,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\Psi^\dagger(t,x)&=-g_0^2\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\Psi(t,x)}\\&=\partial^2\Psi^\dagger(t,x)+R^{\Psi^\dagger}(t,x)\,,\end{aligned} \tag{20}$$

其中包含非线性交互项:

$$R_\mu^B:=i\left(\Psi^\dagger\partial_\mu\Psi-\left(\partial_\mu\Psi^\dagger\right)\Psi\right)+2B_\mu\Psi^\dagger\Psi, \tag{21}$$

$$R^\Psi:=-2i\,B_\mu\partial_\mu\Psi-i\,(\partial_\mu B_\mu)\,\Psi-B_\mu B_\mu\Psi, \tag{22}$$

$$R^{\Psi^\dagger}:=2i\,B_\mu\partial_\mu\Psi^\dagger+i\,(\partial_\mu B_\mu)\,\Psi^\dagger-B_\mu B_\mu\Psi^\dagger, \tag{23}$$

其中，符号 δ 表示变分，并引入 $\partial^2:=\partial_\mu\partial_\mu$。

我们注意到，若所有流动场在 $t\to\infty$ 处都取固定值，梯度流方程的左端便变为零，因此流动场的极限值由流动作用量（17）的变分给出。由于流动作用量中没有希格斯场的势，只要 B_μ 的极限值为零，在极限 $t\to\infty$ 下，任何常量流动希格斯场（与 x 无关）都可以是流动作用量变分的解。也就是说，在流动规范场消失的情况下，这一设定允许流动希格斯场在大 t 极限下取任意值。流动序参量是否取非零值并非显而易见。

流方程可形式化地求解为

$$B_\mu(t,x)=\int \mathrm{d}^d y\left\{\left[K_t^{(\alpha_0)}(x-y)\right]_{\mu\nu}A_\nu(y)+\int_0^t \mathrm{d}s\left[K_{t-s}^{(\alpha_0)}(x-y)\right]_{\mu\nu}R_\nu^B(s,y)\right\}, \tag{24}$$

$$\Psi(t,x)=\int \mathrm{d}^d y\left\{K_t(x-y)\,\Phi(y)+\int_0^t \mathrm{d}s K_{t-s}(x-y)\,R^\Psi(s,y)\right\}, \tag{25}$$

$$\Psi^\dagger(t,x)=\int \mathrm{d}^d y\left\{K_t(x-y)\,\Phi^\dagger(y)+\int_0^t \mathrm{d}s K_{t-s}(x-y)\,R^{\Psi^\dagger}(s,y)\right\}, \tag{26}$$

其中包含以下热核:

$$\left[K_t^{(\alpha_0)}(x)\right]_{\mu\nu} := \int_p e^{ip\cdot x}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)e^{-tp^2}+\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}e^{-\alpha_0 tp^2}\right], \tag{27}$$

$$K_t(x) := \int_p e^{ip\cdot x}e^{-tp^2}. \tag{28}$$

方程（24）、（25）和（26）中的经典形式解的具体形式，可以通过递归方式推导出来；递归过程取决于方程（21）、（22）和（23）中相应非线性交互项的纳入次数及其纳入顺序。为简化以下描述，我们采用如下简记:

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_\mu(t,x) &:= \int \mathrm{d}^d y\left[K_t(x-y)\right]_{\mu\nu}A_\nu(y),\\ \widetilde{\Psi}(t,x) &:= \int \mathrm{d}^d y K_t(x-y)\,\Phi(y),\\ \widetilde{\Psi}^\dagger(t,x) &:= \int \mathrm{d}^d y K_t(x-y)\,\Phi^\dagger(y),\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\left[K_t(x)\right]_{\mu\nu} := \left[K_t^{(\alpha_0=1)}(x)\right]_{\mu\nu} = \int_p e^{ip\cdot x}\delta_{\mu\nu}e^{-tp^2}. \tag{30}$$

流动规范玻色子和流动希格斯玻色子的量子二点关联函数，通过方程（8）中的路径积分运算估算如下:

$$\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\,\mathcal{X}\rangle_0, \qquad \langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\,\mathcal{X}\rangle_0, \tag{31}$$

其中， $\mathcal{X}$ 以符号形式表示 $e^{-S_{\mathrm{int}}}$的微扰展开可能产生的贡献； S_{int} 是式（1）中原始作用量的相互作用部分：在领先阶（LO）计算中， $\mathcal{X}$ 为 1，而在圈阶计算中， $\mathcal{X}$ 可能变得非平凡（不等于 1）。二点函数的领先阶结果很容易推导得出:

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{LO}} &= \left\langle \widetilde{B}_\mu(t,x)\,\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_0\\ &= \left\langle \int \mathrm{d}^d z\left[K_t^{(\alpha_0)}(x-z)\right]_{\mu\rho}A_\rho(z)\int \mathrm{d}^d\widetilde{z}\left[K_s^{(\alpha_0)}(y-\widetilde{z})\right]_{\nu\sigma}A_\sigma(\widetilde{z})\right\rangle_0\\ &= \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)e^{-(t+s)p^2}+\xi_0\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}e^{-\alpha_0(t+s)p^2}\right],\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\right\rangle_{\mathrm{LO}} &= \left\langle \widetilde{\Psi}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^\dagger(s,y)\right\rangle_0\\ &= \left\langle \int \mathrm{d}^d z K_t(x-z)\,\Phi(z)\int \mathrm{d}^d\widetilde{z}K_s(y-\widetilde{z})\,\Phi^\dagger(\widetilde{z})\right\rangle_0\\ &= \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2},\end{aligned} \tag{33}$$

其中我们用到了运算（8）的定义、维克定理，以及式（27）和（28）中的热核形式。[5]

正如我们很快将看到的，流动无质量规范玻色子 B_μ 的二点函数无需对流动场进行波函数重整化便会变为有限，而流动复标量场 Ψ 的二点函数仍含有发散部分。为系统地消除这部分，我们为 Ψ 引入如下波函数重整化因子：

$$\Psi = \sqrt{\mathcal{Z}_\Psi}\Psi_{\mathrm{R}}, \tag{34}$$

其对应项 $\delta\mathcal{Z}_\Psi$ 定义为

$$\mathcal{Z}_\Psi := 1 + \delta\mathcal{Z}_\Psi. \tag{35}$$

最后，除了式 (29) 外，为方便后续使用，我们还引入以下符号：

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\mu(u,z) &:= \int \mathrm{d}^d w \int_0^u \mathrm{d}u' K_{u-u'}(z-w) \left[i\left(\widetilde{\Psi}^\dagger \partial_\mu \widetilde{\Psi} - \left(\partial_\mu \widetilde{\Psi}^\dagger\right)\widetilde{\Psi}\right)\right]_{(u',w)}, \\
\mathcal{P}(u,z) &:= \int \mathrm{d}^d w \int_0^u \mathrm{d}u' K_{u-u'}(z-w) \left[-2i\,\widetilde{B}_\mu \partial_\mu \widetilde{\Psi} - i\left(\partial_\mu \widetilde{B}_\mu\right)\widetilde{\Psi}\right]_{(u',w)}, \\
\mathcal{P}^\dagger(u,z) &:= \int \mathrm{d}^d w \int_0^u \mathrm{d}u' K_{u-u'}(z-w) \left[2i\,\widetilde{B}_\mu \partial_\mu \widetilde{\Psi}^\dagger + i\left(\partial_\mu \widetilde{B}_\mu\right)\widetilde{\Psi}^\dagger\right]_{(u',w)},
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，我们引入了流动场函数 f 的简记

$$f\Big(B_\mu(u,z), \Psi(u,z), \Psi^\dagger(u,z)\Big) = \Big[f\Big(B_\mu, \Psi, \Psi^\dagger\Big)\Big]_{(u,z)}. \tag{37}$$

3 规范场二点函数的紫外有限性

正如我们在式 (32) 和 (33) 中所见，在领先阶，规范场和希格斯场的二点函数由梯度流方程 (18)–(20) 的领先阶解构成，如式 (29) 所示。流动场的次领头阶二点函数也可以用类似的方法计算，即取两个逐次近似解的期望值 [参见式 (8)，以及式 (24)–(26)]。在这里，单圈阶下可能的构型分为两类：

(i) 它至少涉及一个在其流方程中经过非线性演化的场。

(ii) 它不涉及在各自流方程中经过非线性演化的场，但在流时间为零的边界处可以观察到单圈结构。

对称相中的规范场二点函数没有蝌蚪图。对于标量二点函数，我们将明确说明蝌蚪图如何变为零。在单圈阶，用流费曼图的语言表示，对规范玻色子二点函数有贡献的 [13], 可能构型可归纳为11个费曼图，具体如下：

[5] 目前，由于我们考虑的是阿贝尔规范理论，因此实现了 $\langle\Psi(t,x)\ \Psi^\dagger(s,y)\rangle = \langle\Psi^\dagger(s,y)\,\Psi(t,x)\rangle$。对于一个属于非阿贝尔规范理论 $SU(N)$ 的基本表示、并满足 $\Psi_a\,(a = 1, 2, ..., N)$ 的流动复标量场，相应的序参量应为 $\left\langle\sum_{a=1}^N \Psi_a(t,x)\,\Psi_a^\dagger(s,y)\right\rangle = \left\langle\sum_{a=1}^N \Psi_a^\dagger(s,y)\,\Psi_a(t,x)\right\rangle$。

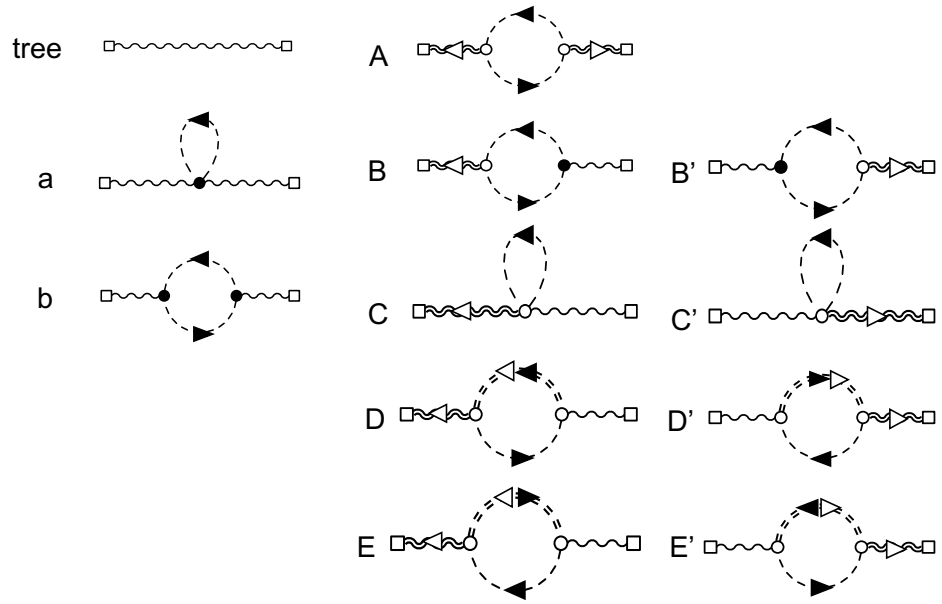

图1：以流费曼图的形式展示了规范玻色子二点函数在单圈阶的所有构型 [13]。在每个流费曼图中，左侧和右侧方框分别表示 (t,x) 和 (s,y) 的时空位置。双实线和波浪线分别表示标量场和矢量场的流传播子，即它们依据非线性项（18）–（20）进行的流时间演化，其中两个端点均位于体区（流时间为 $t>0$）。黑色箭头和白色空心箭头分别表示希格斯粒子数和流时间的方向。每个白色圆圈称为流顶点，表示由于流方程中的一种可能非线性交互而在体区发生的分支。每个黑点表示边界处（$t=0$）的一个普通顶点。所有费曼图均使用 feynMF 宏包绘制 [67]。

如图1所示。在接下来的圈计算中，我们将两个规范固定参数设为

$$\alpha_0 = \xi_0 = 1, \tag{38}$$

这是一种类似费曼规范的构型，适用于体区（在流时间 $t>0$）和边界（$t=0$）；另请参见树图计算中的（11）和（12）。

3.1 构型

采用方程 (29) 和 (36) 中的简记，可以高效地描述每种构型的细节。首先，写出归入类别 (i) 的五种构型，它们至少涉及一个在流方程中非线性演化的场：

$$\begin{aligned}\big\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\big\rangle_{\mathrm{A}} &:= \big\langle \mathcal{B}_\mu(t,x)\,\mathcal{B}_\nu(s,y)\big\rangle_{\mathrm{connected}} \\ &= \big(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\big)\int_{p,\ell}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^s \mathrm{d}u'\,\frac{(p+2\ell)_\mu\,(p+2\ell)_\nu\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{\big(\ell^2+m_0^2\big)\Big[(p+\ell)^2+m_0^2\Big]}e^{-2(u+u')\left(\ell^2+p\cdot\ell\right)},\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{B}} &:= \left\langle \mathcal{B}_\mu(t,x)\left\{-\frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^dX\left[iA_\sigma\left(\Phi^\dagger\partial_\alpha\Phi-\left(\partial_\alpha\Phi^\dagger\right)\Phi\right)\right]_{(X)}\right\}\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_{\text{connected}}\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\int_0^t \mathrm{d}u\frac{(p+2\ell)_\mu\,(p+2\ell)_\nu\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2\left(\ell^2+m_0^2\right)\left[(p+\ell)^2+m_0^2\right]}e^{-2u\left(\ell^2+p\cdot\ell\right)},\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{C}} &:= \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left[2\widetilde{B}_\mu\widetilde{\Psi}^\dagger\widetilde{\Psi}\right]_{(u,z)}\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_{\text{connected}}\\ &= \left(2g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\int_0^t \mathrm{d}u\frac{\delta_{\mu\nu}\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-2u\ell^2},\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{D}} &:= \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left\{i\left[\widetilde{\Psi}^\dagger\partial_\mu\mathcal{P}-\left(\partial_\mu\widetilde{\Psi}^\dagger\right)\mathcal{P}\right]_{(u,z)}\right\}\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_{\text{connected}}\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}\widehat{u}\frac{(2\ell-p)_\mu\,(2\ell-p)_\nu\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2\left[(p-\ell)^2+m_0^2\right]}e^{-2u\left(\ell^2-p\cdot\ell\right)-2\widehat{u}\left(p^2-p\cdot\ell\right)},\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{E}} &:= \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left\{i\left[\mathcal{P}^\dagger\partial_\mu\widetilde{\Psi}-\left(\partial_\mu\mathcal{P}^\dagger\right)\widetilde{\Psi}\right]_{(u,z)}\right\}\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_{\text{connected}}\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}\widehat{u}\frac{(2\ell-p)_\mu\,(2\ell-p)_\nu\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2\left[(p-\ell)^2+m_0^2\right]}e^{-2u\left(\ell^2-p\cdot\ell\right)-2\widehat{u}\left(p^2-p\cdot\ell\right)},\end{aligned} \tag{43}$$

其中，标签 (A) 至 (E) 表示它们与图1中的流动费曼图之间的对应关系，而标签“连通”表示从方程 (8) 中去除非连通构型所需的运算。这里，p 和 ℓ 分别表示从点 y 流向 x 的物理动量和圈动量。为简洁地描述构型 (B)，我们引入了与方程 (37) 中类似的边界场记法。注意，(D) 中的结果与 (E) 中的结果相同。归入类别 (i) 的其余四项贡献，即 (B′) 至 (E′)，只需通过参数替换即可得到:

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{B}'} &= \left(\langle B_\nu(s,y)\,B_\mu(t,x)\rangle_{\mathrm{B}}\right)^*,\quad \langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{C}'} = \left(\langle B_\nu(s,y)\,B_\mu(t,x)\rangle_{\mathrm{C}}\right)^*,\\ \langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{D}'} &= \left(\langle B_\nu(s,y)\,B_\mu(t,x)\rangle_{\mathrm{D}}\right)^*,\quad \langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{E}'} = \left(\langle B_\nu(s,y)\,B_\mu(t,x)\rangle_{\mathrm{E}}\right)^*.\end{aligned} \tag{44}$$

两个构型被归入类别（ii）“边界上带有一个圈”的情况，其对应的流费曼图分别标记为 (a) 和 (b)，如图1所示:

$$\begin{aligned}\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{a}} &:= \left\langle \widetilde{B}_\mu(t,x)\left\{-\frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^dX\left[A_\alpha A_\alpha\Phi^\dagger\Phi\right]_{(X)}\right\}\widetilde{B}_\nu(s,y)\right\rangle_{\text{connected}}\\ &= \left(-2g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{\delta_{\mu\nu}\,e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{\left(p^2\right)^2}\int_\ell\frac{1}{\ell^2+m_0^2},\end{aligned} \tag{45}$$

$$\langle B_\mu(t,x)\,B_\nu(s,y)\rangle_{\mathrm{b}} := \left\langle \widetilde{B}_\mu(t,x)\,\frac{1}{2!}\left\{-\frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^dX\left[iA_\alpha\left(\Phi^\dagger\partial_\alpha\Phi-\left(\partial_\alpha\Phi^\dagger\right)\Phi\right)\right]_{(X)}\right\}\right.$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{g_0^2} \int \mathrm{d}^d Y \left[i A_\beta \left(\Phi^\dagger \partial_\beta \Phi - \left(\partial_\beta \Phi^\dagger \right) \Phi \right) \right]_{(Y)} \right\} \widetilde{B}_\mu(s,y) \Bigg\rangle_{\text{connected}}$$

$$= \left(g_0^4 \mu^{4\varepsilon} \right) \int_{p,\ell} \frac{\delta_{\mu\nu}\, e^{-ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{\left(p^2\right)^2} \frac{\left(2\ell - p\right)_\mu \left(2\ell - p\right)_\nu}{\left(\ell^2 + m_0^2\right)\left[\left(\ell - p\right)^2 + m_0^2 \right]}. \tag{46}$$

从上述各项结果中，我们可以看出，极限 $y \to x$ 处的奇点因梯度流对 t， $s > 0$的涂抹作用而得到消除。

在逆傅里叶变换之前，我们可以识别出由圈动量积分 ℓ 导致的紫外极点。这里，即使在梯度流中，耦合常数也（至少）需要重整化。目前，我们的讨论处于单圈阶，因此对于领先阶部分（例如下文的式（53）），应使用式（13）、（14）和（15）中总结的单圈关系；而对于单圈部分，以下领先阶关系已足够：

$$m_0^2 \overset{\text{LO}}{=} m^2, \qquad g_0 \overset{\text{LO}}{=} g, \qquad \lambda_0 \overset{\text{LO}}{=} \lambda. \tag{47}$$

每个表达式都用重整化后的耦合常数表示，在乘法计算中我们忽略高阶部分：

$$\langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{A}} \big|_{\text{UV-div}} = 0, \tag{48}$$

$$\langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{B}} \big|_{\text{UV-div}} = \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{B}'} \big|_{\text{UV-div}} = \int_p \frac{\delta_{\mu\nu}\, e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2} \left(-\frac{g^4}{2\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \right), \tag{49}$$

$$\langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{C}} \big|_{\text{UV-div}} = \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{C}'} \big|_{\text{UV-div}} = \int_p \frac{\delta_{\mu\nu}\, e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2} \left(\frac{g^4}{\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \right), \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{D}} \big|_{\text{UV-div}} &= \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{D}'} \big|_{\text{UV-div}} \\ = \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{E}} \big|_{\text{UV-div}} &= \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{E}'} \big|_{\text{UV-div}} = \int_p \frac{\delta_{\mu\nu}\, e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2} \left(-\frac{g^4}{4\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \tag{51}$$

$$\langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{a+b}} \big|_{\text{UV-div}} = \int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2} \left[\frac{g^4}{\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \right], \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{LO}} \big|_{\text{UV-div}} &= \left(g_0^2 \mu^{2\varepsilon} \right) \int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \xi_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \Bigg|_{\text{UV-div}} \\ &= \int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)-(s+t)p^2}}{p^2} \left\{ \frac{g^4}{3\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] - \frac{g^4}{3\left(4\pi\right)^2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\}, \end{aligned} \tag{53}$$

这里我们使用了裸耦合与重整化耦合常数之间的单圈关系式，尤其是方程（12）中给出的 $\xi_0 = 1 + \delta\xi$ with $\delta\xi$。注意，方程（53）的第一项和第二项分别源自 g_0^2 和 ξ_0。将贡献（48）–（53）相加即可得出结论：

$$\langle B_\mu(t,x)\, B_\nu(s,y) \rangle_{\text{total}} \big|_{\text{UV-div}} = 0, \tag{54}$$

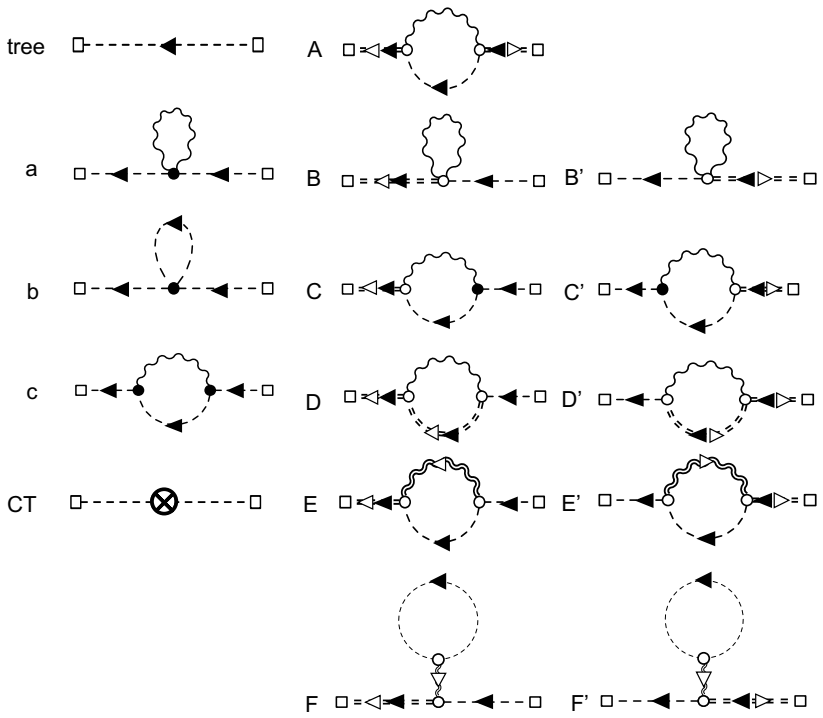

图 2：以流费曼图 [13] 的形式展示了希格斯二点函数在单圈阶的所有构型。在每个流费曼图中，左侧和右侧的方框分别表示 (t, x) 和 (s, y) 的时空位置。双实线和波浪线分别表示标量场和矢量场的流传播子，即它们在含有非线性项 (18)–(20) 时的流时间演化，其中两个端点都位于体区（流时间为 $(t > 0)$）。黑色箭头和白色空心箭头分别表示希格斯粒子数和流时间的方向。每个白色圆圈，即流顶点，都表示体区中因流方程的一种可能非线性交互而产生的分支。每个黑点表示边界 $(t = 0)$ 上的一个普通顶点。所有费曼图均由软件包 feynMF [67] 绘制。

这意味着无需额外的波函数重整化即可对规范玻色子的二点函数进行正则化；正如预期的那样，这是由（$d+1$）维 Becchi-Rouet-Stora-Tyutin（BRST）对称性所保证的，该对称性确保了 [12, 13]的抵消。

4 作为流动序参量的希格斯二点函数

$\mathbf{r}$

接下来，我们聚焦于单圈阶流动希格斯场的规范不变二点函数。与前一节相同，主要计算方法保持不变，并采用式 (11) 中相同的规范固定以及 $\alpha_0 = 1$ 。此外，我们还考虑体区波函数重整化 (34)；对于当前的单圈计算，使用以下关系（反项除外；见下文的式 (66) 和 (107)）：

$$\Psi(t, x) = \Psi_{\mathrm{R}}(t, x)\,. \tag{55}$$

4.1 构型

以下五种构型至少涉及一个在其流方程 [中以非线性方式演化的场，属于类别(i)]:

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{A}} := \left\langle \mathcal{P}(t,x)\,\mathcal{P}^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\text{connected}} = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^s \mathrm{d}\widetilde{u}\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2-2(u+\widetilde{u})\ell^2+2(u+\widetilde{u})\ell\cdot p}, \tag{56}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{B}} := \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left[-\widetilde{B}_\mu\widetilde{B}_\mu\widetilde{\Psi}\right]_{(u,z)}\widetilde{\Psi}(s,y)\right\rangle_{\text{connected}} = \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\int_\ell\frac{d}{\ell^2}e^{-2u\ell^2}, \tag{57}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{C}} := \left\langle \mathcal{P}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^{\dagger}(s,y)\left\{-\frac{1}{g_0^2}\int\mathrm{d}^dX\left[iA_\alpha\left(\Phi^\dagger\partial_\alpha\Phi-\left(\partial_\alpha\Phi^\dagger\right)\Phi\right)\right]_{(X)}\right\}\right\rangle_{\text{connected}}, = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\int_\ell\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-2u\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{58}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{D}} := \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left[-2i\,\widetilde{B}_\mu\partial_\mu\mathcal{P}-i\left(\partial_\mu\widetilde{B}_\mu\right)\mathcal{P}\right]_{(u,z)}\widetilde{\Psi}^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\text{connected}} = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}\widetilde{u}\int_\ell\frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2}e^{-2u\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)-2\widetilde{u}\left(p^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{59}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{E}} := \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left[-2i\,\mathcal{B}_\mu\partial_\mu\widetilde{\Psi}-i\left(\partial_\mu\mathcal{B}_\mu\right)\widetilde{\Psi}\right]_{(u,z)}\widetilde{\Psi}^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\text{1PI}} = \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}\widetilde{u}\int_\ell\frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}e^{-2u\ell^2+2(u-\widetilde{u})\ell\cdot p}, \tag{60}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\mathrm{F}} := \left\langle \int \mathrm{d}^dz\int_0^t \mathrm{d}uK_{t-u}(x-z)\left[-2i\,\mathcal{B}_\mu\partial_\mu\widetilde{\Psi}-i\left(\partial_\mu\mathcal{B}_\mu\right)\widetilde{\Psi}\right]_{(u,z)}\widetilde{\Psi}^{\dagger}(s,y)\right\rangle_{\text{tadpole}} = \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t du\int_0^u d\widetilde{u}\int_\ell\frac{4p_\mu\ell_\mu}{\ell^2+m_0^2}e^{-2\widetilde{u}\ell^2}, \tag{61}$$

相应的流费曼图如图2所示。在方程（60）和（61）中，我们引入了“单粒子不可约”和“蝌蚪图”这两个标签，用以区分单粒子不可约（单粒子不可约）部分和蝌蚪图部分。请注意，它们都属于连通构型的类别。

图2中的三种构型（a）至（c）不涉及在其流方程中经历非线性演化的场，而在零

流时间值 [（类别（ii））]处观察到了单圈结构：

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{a}} &:= \left\langle \widetilde{\Psi}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^\dagger(s,y)\left\{-\frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^dX\left[A_\alpha A_\alpha \Psi^\dagger\Psi\right]_{(X)}\right\}\right\rangle_{\text{connected}} \\
&= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2}\int_\ell \frac{d}{\ell^2+\mu_A^2}, \qquad (62)\\
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{b}} &:= \left\langle \widetilde{\Psi}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^\dagger(s,y)\left\{-\frac{\lambda_0}{g_0^4}\int \mathrm{d}^dX\left[\Psi^\dagger\Psi\Psi^\dagger\Psi\right]_{(X)}\right\}\right\rangle_{\text{connected}} \\
&= \left(-4\lambda_0 g_0^2\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2}\int_\ell \frac{1}{\ell^2+m_0^2}, \qquad (63)\\
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{c}} &:= \left\langle \widetilde{\Psi}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^\dagger(s,y)\,\frac{1}{2}\left\{(-1)\int \mathrm{d}^dX\left[iA_\alpha\left(\Phi^\dagger\partial_\alpha\Phi-\left(\partial_\alpha\Phi^\dagger\right)\Phi\right)_{(X)}\right]\right\}\right. \\
&\quad \left.\times\left\{(-1)\int \mathrm{d}^dY\left[iA_\beta\left(\Phi^\dagger\partial_\beta\Phi-\left(\partial_\beta\Phi^\dagger\right)\Phi\right)_{(Y)}\right]\right\}\right\rangle_{\text{connected}} \\
&= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{+ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}, \qquad (64)
\end{aligned}$$

其中引入了一个虚拟 规范玻色子质量 μ_A，用于计算图（a）。

最后五项贡献，即从 (B′) 到 (F′)，通过参数替换和复共轭得到：

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{B}'} = \left(\Big\langle \Psi(s,y)\,\Psi^\dagger(t,x)\Big\rangle_{\mathrm{B}}\right)^*, \quad \Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{C}'} = \left(\Big\langle \Psi(s,y)\,\Psi^\dagger(t,x)\Big\rangle_{\mathrm{C}}\right)^*, \\
&\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{D}'} = \left(\Big\langle \Psi(s,y)\,\Psi^\dagger(t,x)\Big\rangle_{\mathrm{D}}\right)^*, \quad \Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{E}'} = \left(\Big\langle \Psi(s,y)\,\Psi^\dagger(t,x)\Big\rangle_{\mathrm{E}}\right)^*, \\
&\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{F}'} = \left(\Big\langle \Psi(s,y)\,\Psi^\dagger(t,x)\Big\rangle_{\mathrm{F}}\right)^*. \qquad (65)
\end{aligned}$$

从上述形式可以看出，在极限 $y\to x$ 下不会出现奇点，因此复合算符 $\hat{\Psi}^\dagger(x)\ \hat{\Psi}(x)$ 的涂抹版本的期望值是良定义的。

此外，我们还需要流动场的体区波函数重整化所产生的反项（CT），根据式 (33) 和 (34) 可以很容易地估算为：

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,y)\Big\rangle_{\mathrm{CT}} &:= \delta\mathcal{Z}_\Psi\left\langle \widetilde{\Psi}(t,x)\,\widetilde{\Psi}^\dagger(s,y)\right\rangle_0 \\
&= \delta\mathcal{Z}_\Psi\left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}. \qquad (66)
\end{aligned}$$

4.2 动量积分的计算

涂抹二点函数在极限 $y\to x$ 下是正则的；当流时间 s 和 t 足够大时，我们可以利用鞍点法对其作出相当准确的近似估计，因为梯度流的解具有如下形式：$\int_p f(p)e^{-tp^2}$。我们经常使用鞍点近似公式，

$$\int_p f(p)\,e^{-\alpha(p-p_*)^2} \simeq \left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{d/2} f(p_*)\,, \qquad (67)$$

当正数 α 足够大时，这种近似效果很好； $f(p)$ 是 d 维动量 p 的有理函数，而 p_* 表示鞍点的位置。

在连续时空极限下进行的当前计算中，由于中间步骤涉及圈图，会出现紫外发散。此外，我们还会观察到红外发散的出现，它可能源自围绕 $p_* \simeq 0$ 进行的鞍点计算。这些被认为是采用鞍点法进行近似所产生的伪影。正如我们将看到的，若不采用近似来计算发散部分，则不会出现红外发散，这也在预料之中。[6] 后续计算的详细内容见附录 A。

在 ε 围绕零展开后，我们得到领先阶部分的形式，

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm LO} =& \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} m_0^2 e^{m_0^2(s+t)}\Gamma\big(-1, m_0^2\,(s+t)\big) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \xrightarrow[\text{large } s,t]{} & \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{m_0^2\,(s+t)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{68}$$

其中，我们取了 $e^{m_0^2\,(s+t)}\,\Gamma\big(-1,\ m_0^2\,(s+t)\big)$ 在无穷远处的级数展开的首项。这种形式适用于我们当前的策略：假设 s 和 t 足够大，对单圈图采用鞍点近似。此外，我们以同样的方式推导出反项按 ε 展开的形式，

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm CT} \xrightarrow[\text{large } s,t]{} \mathcal{Z}_\Psi \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{m_0^2\,(s+t)^2}\bigg|_{\rm CT} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{69}$$

对于贡献 (A) 至 (E)，结果如下:

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm A} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} & \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left[-1-\log(a)\right] \\ & - \frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(s+t)\right]+\log\left[\frac{32\pi^2\mu^4(s+t)}{m_0^2}\right]+e^{2m_0^2(s+t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\, 2m_0^2(s+t)\right)\right\} \\ & + \frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,s^2 m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(s+2t)\right]+\log\left[\frac{32\pi^2\mu^4 s}{m_0^2}\right]+e^{2m_0^2(s+2t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\, 2m_0^2(s+2t)\right)\right\} \\ & + \frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2 m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(2s+t)\right]+\log\left[\frac{32\pi^2\mu^4 t}{m_0^2}\right]+e^{2m_0^2(2s+t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\, 2m_0^2(2s+t)\right)\right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm B} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} -\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{\frac{2}{\varepsilon}+1+2\log\left[32\pi^2 t\,(s+t)\,\mu^4\right]\right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm C} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} & \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+1+\log\left[\frac{16\pi^2(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right\} \\ & + \frac{6g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2 m_0^2}e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)}\left[\Gamma\left(0,\frac{1}{2}m_0^2\,(2s+t)\right)-e^{\frac{3}{2}m_0^2(2s+t)}\Gamma\big(0,2m_0^2\,(2s+t)\big)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{72}$$

[6] 我们知道，式（62）中的红外发散由 μ_A 截断，这与通常的量子电动力学计算相同，因此我们可以安全地在积分后取极限 $\mu_A \to 0$ 。

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm D} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\log\left[\frac{16\pi^2(s+t)\,\mu^4}{\mu_{\rm IR}^2}\right]\right)$$
$$-\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2 m_0^2}\frac{9}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[16\pi^2 t(2s+t)\,\mu^4\right]+e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{matrix}1\\0,0\end{matrix}\middle|\,\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)\right)\right\}$$
$$-\frac{g_0^4(s+3t)^2(s+5t)^2}{(4\pi)^4\,8t(s+t)^5 m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[32\pi^2 t(s+t)\mu^4\right]+e^{\frac{m_0^2(s+t)(s+3t)}{2t}}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{matrix}1\\0,0\end{matrix}\middle|\,\frac{m_0^2(s+t)(s+3t)}{2t}\right)\right\}$$
$$+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{73}$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm E} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} -\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+1+\log\left[\frac{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right\}$$
$$-\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2 m_0^2}\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)}\left[\Gamma\left(0,\frac{1}{2}m_0^2\,(2s+t)\right)-\,e^{\frac{3}{2}m_0^2(2s+t)}\Gamma\big(0,2m_0^2\,(2s+t)\big)\right]+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{74}$$

其中，“s.p.”表示采用鞍点近似。这里， a 是用于处理红外发散的无量纲调节参数，而 $\mu_{\rm IR}$ 是无质量规范玻色子的虚质量，用于正则化红外发散。 $\Gamma(a,\ z)$ 是不完全伽马函数，定义为

$$\Gamma(a,z):=\int_z^\infty t^{a-1}e^{-t}{\rm d}t, \tag{75}$$

其中， $\Gamma(a,\ 0)$可化简为欧拉伽马函数 $\Gamma(a)$，而 γ 是欧拉–马歇罗尼常数。 $G^{2,\ 0\ 1,\ 2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\,z\right)$ 是指定参数下的 Meijer G 函数。 Meijer G 函数的定义为

$$G^{m,n}_{p,q}\left(\begin{smallmatrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{smallmatrix}\middle|\,z\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_L}\frac{\Pi_{j=1}^m\Gamma(b_j+s)\,\Pi_{j=1}^n\Gamma(1-a_j-s)}{\Pi_{j=n+1}^p\Gamma(a_j+s)\,\Pi_{j=m+1}^q\Gamma(1-a_j-s)}z^{-s}{\rm d}s, \tag{76}$$

其中， m、 n、 p和 q 均为整数，满足 $0\le n\le p$ 和 $0\le m\le q$，且积分轮廓 γ_L 位于 $\Gamma(1-a_j-s)$的极点与 $\Gamma(b_i+s)$的极点之间 [68]。利用式（65）中的替换规则，可以很容易地得到（B′）至（E′）对应的四个结果。

我们可以 证明体 tadpole 贡献（F）无需任何近似即可消失 ns:

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm F}=0. \tag{77}$$

这意味着只有 1PI 构型会对二点函数产生非零贡献。

对于构型 (a) 至 (c)，我们得到按 ε 展开的形式，

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm a}=0, \tag{78}$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm b}=4\lambda_0 g_0^2\frac{m_0^2}{(4\pi)^4}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[-1+e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right)E_1\big(m_0^2\,(s+t)\big)\right]\right.$$
$$+\left(2-\gamma+\log\left[\frac{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right)\left[-1+e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right)E_1\big(m_0^2\,(s+t)\big)\right]$$
$$\left.-e^{m_0^2(s+t)}E_1\big(m_0^2\,(s+t)\big)+e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right)G^{3,0}_{2,3}\left(\begin{matrix}1,1\\0,0,0\end{matrix}\middle|\,m_0^2\,(s+t)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{79}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{c}} \xrightarrow[\text{s.p.}]{} \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma-1+\log\left[\frac{m_0^2}{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{80}$$

其中 $E_n(z)$ 表示定义如下的指数积分函数

$$E_n(z) := \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n}\mathrm{d}t, \tag{81}$$

并且， $G^3{}_{,0\ 2,3}\left(\begin{smallmatrix}1,1\\0,0,0\end{smallmatrix}\middle|\, z\right)$ 是 Meijer G 函数在指定参数下的另一种特殊情形。

4.2.1 鞍点近似中的发散部分

以下每个用重整化耦合表示的最终表达式中，我们在乘法计算时忽略高阶部分：

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{A}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = \frac{g^4}{(4\pi)^4 m^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(t+s)^2}\right)\frac{9}{\varepsilon}+\frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\frac{1}{4}\log(a), \tag{82}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{B}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = -\frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\frac{2}{\varepsilon}, \tag{83}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{C}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = \frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{D}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} &= \frac{g^4}{(4\pi)^4 m^2}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{(t+s)^2}-\frac{9}{2}\frac{1}{t^2}+\frac{(s+3t)^2(s+5t)^2}{8t(s+t)^5}\right\}\frac{1}{\varepsilon}\\ &\quad+\frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\left[\frac{1}{4}\log\left(\frac{16\pi^2\,(t+s)\,\mu^4}{\mu_{\mathrm{IR}}^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{85}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{E}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = -\frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{86}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{F}}\Big|_{\text{UV-div}} = 0, \tag{87}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{a}}\Big|_{\text{div}} = 0, \tag{88}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{b}}\Big|_{\text{div}} = 4\lambda g^2\frac{m^2}{(4\pi)^4}\frac{1}{\varepsilon}\left\{-1+e^{m^2(t+s)}\left[1+m^2\,(t+s)\right]E_1\big(m^2\,(t+s)\big)\right\}, \tag{89}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{c}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = -\frac{g^4}{(4\pi)^4\,(t+s)^2\,m^2}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{90}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{LO}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{m_0^2\,(t+s)^2},\\ &= \frac{1}{(4\pi)^2\,(t+s)^2\,m^2}\left[\frac{g^4}{3\,(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{(4\pi)^2}\left(4g^2\lambda-3g^4\right)\frac{1}{\varepsilon}\right],\end{aligned} \tag{91}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{CT}}^{(\text{s.p.})}\Big|_{\text{div}} = \delta\mathcal{Z}_\Psi\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{m^2\,(t+s)^2}, \tag{92}$$

其中，领先阶部分结果中的第一项和第二项分别来自 g_0^2 和 m_0^2。在此，我们直接确定 $\delta\mathcal{Z}_\Psi$ 的条件，使其消除上述所有紫外发散和红外发散：

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{Z}_\Psi =& -\frac{g^2}{384\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{108\,s^6+435\,s^5t+1244\,s^4t^2+682\,s^3t^3+1244\,s^2t^4+435\,st^5+108\,t^6}{s^2t^2\,(t+s)^2}\\ &+\frac{\lambda}{4\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\left[1+m^4\,(t+s)^2\right]-\frac{\lambda}{4\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}m^4\,(t+s)^2\,e^{m^2(t+s)}\left[1+m^2\,(t+s)\right]E_1\big(m^2\,(t+s)\big)\\ &-\frac{g^2}{64\pi^2}\left\{\log(a)+2\log\left[\frac{16\pi^2\,(t+s)\,\mu^4}{\mu_{\rm IR}^2}\right]\right\}. \end{aligned}\tag{93}$$

4.2.2 未经近似的紫外发散部分

另一方面，在取安全极限 $y\to x$ 后，我们可以在逆傅里叶变换之前识别出由圈动量ℓ 的积分导致的紫外极点，如下所示：

$$\Big\langle \Psi(t,\ x)\ \Psi^\dagger(s,\ x)\Big\rangle_{\rm A}\Big|_{\text{UV-div}}=0,\tag{94}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm B}\Big|_{\text{UV-div}}=\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm B'}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}\left(\frac{-2g^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{95}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm C}\Big|_{\text{UV-div}}=\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm C'}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}\left(\frac{g^4}{2\,(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{96}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm D}\Big|_{\text{UV-div}}=\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm D'}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}\left(\frac{+g^4}{4\,(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{97}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm E}\Big|_{\text{UV-div}}=\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm E'}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}\left(\frac{-g^4}{4\,(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{98}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\ \Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm F}\Big|_{\text{UV-div}}=0,\tag{99}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\ \Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm a}\Big|_{\text{UV-div}}=0,\tag{100}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm b}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m^2\right)^2}\left(\frac{4\lambda g^2m^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{101}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm c}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m^2\right)^2}\left\{\frac{g^4\left[2\left(p^2+m^2\right)-3m^2\right]}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\right\},\tag{102}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\ \Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{领先阶}}\Big|_{\text{UV-div}}=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\Big|_{\left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)}\tag{103}$$

$$=\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}\left[\frac{g^4}{3\,(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{p^2+m^2}\frac{m^2}{(4\pi)^2}\left(4g^2\lambda-3g^4\right)\frac{1}{\varepsilon}\right],\tag{104}$$

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm CT}\Big|_{\text{UV-div}}=\left(\delta\mathcal{Z}_\Psi g^2\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2},\tag{105}$$

其中，我们忽略用重整化耦合表示的各表达式中的乘法计算高阶部分。

上述紫外发散部分的总和形式如下:

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{total}}\Big|_{\text{UV-div}} = \left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^4}{(4\pi)^2} + \delta\mathcal{Z}_\Psi g^2\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m^2}, \tag{106}$$

此时，与 m 或 λ 相关的发散均已消失，这正如预期。我们可以通过将体区对应项取为下式，消除与 g 相关的剩余发散:

$$\delta\mathcal{Z}_\Psi = \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon}. \tag{107}$$

请注意，我们没有采用任何近似来识别发散；其中只出现紫外发散。我们确认，先前采用鞍点近似进行计算时出现的红外发散只是伪象。

换言之，若将流场的额外波函数选为式（107），则流动希格斯场的二点函数可以视为有限。该结果表明，正如参考文献 [14] 中针对以费米子为物质场的非阿贝尔规范理论所展示的那样，梯度流在单圈阶的 $U(1)$ 希格斯模型中确实有效。减去发散部分后，我们将着重研究希格斯二点函数的有限部分。

4.3 大流时间下的渐近形式

在此，我们考虑 $s=t$ 在无穷远处的级数展开。耦合重整化后，并通过如式（93）所示适当地取体反项 $\delta\mathcal{Z}_\Psi$ 消除发散：对于对应于红外区域的大 s ，

$$\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{LO}} = \frac{g^2}{64m^2\pi^2s^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{108}$$

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{A}} = -\frac{g^4}{4096\pi^4m^2s^2}\Bigg[&-251+36\log\big(4m^2s\big)-288\log\big(6m^2s\big)\\ &-288\log\left(\frac{32\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)+36\log\left(\frac{64\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)\Bigg]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned} \tag{109}$$

$$\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{B}} = -\frac{g^4}{1024\pi^4m^2s^2}\left[1+2\log\big(64\pi^2s^2\mu^4\big)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{110}$$

$$\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{C}} = -\frac{g^4}{2048\pi^4m^2s^2}\left[-1+\gamma-\log\left(\frac{32\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{111}$$

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{D}} = -\frac{g^4}{4096\pi^4m^2s^2}\Bigg[&36+\gamma+72\log\left(\frac{3m^2s}{2}\right)-36\log\big(4m^2s\big)\\ &-36\log\left(\frac{16\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)+72\log\left(\frac{32\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)\Bigg]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned} \tag{112}$$

$$\Big\langle \Psi(s,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle^{(\text{s.p.})}_{\text{E}} = \frac{g^4}{4096\pi^4m^2s^2}\left[-1+\gamma-\log\left(\frac{32\pi^2s\mu^4}{m^2}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{113}$$

$$\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{F}} = \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{F'}} = 0, \tag{114}$$

$$\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{a}} = 0, \tag{115}$$

$$\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{b}} = -\frac{\lambda g^2}{256\pi^4 m^2 s^2}\left[-1+\gamma-\log\left(\frac{32\pi^2 s\mu^4}{m^2}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{116}$$

$$\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{s.p.})} = \frac{g^4}{1024\pi^4 m^2 s^2}\left[-1+\gamma-\log\left(\frac{32\pi^2 s\mu^4}{m^2}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \tag{117}$$

with

$$\begin{aligned}
&\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{B'}}^{(\mathrm{s.p.})} = \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{s.p.})}, \quad \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{C'}}^{(\mathrm{s.p.})} = \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{s.p.})},\\
&\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{D'}}^{(\mathrm{s.p.})} = \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{D}}^{(\mathrm{s.p.})}, \quad \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{E'}}^{(\mathrm{s.p.})} = \left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{s.p.})}.
\end{aligned} \tag{118}$$

因此，在领先阶和单圈两个层次上，我们可以得出结论：

$$\left\langle \Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle^{(\mathrm{s.p.})} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0, \tag{119}$$

在鞍点近似下。对于对称相中的自发规范对称性破缺序参量，这一结果正如预期。

5 总结与讨论

我们提出了自发规范对称性破缺的流动序参量：在同一时空点处，显然规范不变复合算符 $\widehat{\Phi}^{\dagger}(x)\,\widehat{\Phi}(x)$ 的期望值，在梯度流作用下沿流时间方向 t 进行平滑处理。经过流时间 t 和 s 的演化后得到的变形构型 $\Psi(t,\ x)$ 和 $\Psi^{\dagger}(s,\ y)$ 具有良好的性质：只要满足 $t,\ s>0$，就可以取极限 $y\to x$ ，而不会在其二点函数 $\langle\Psi(t,\ x)\ \Psi^{\dagger}(s,\ y)\rangle$ 中产生额外的紫外发散。

这里，$\langle\Psi(t,\ x)\ \Psi^{\dagger}(s,\ x)\rangle = \langle\Psi^{\dagger}(s,\ x)\,\Psi(t,\ x)\rangle$ 被解释为$\langle\widehat{\Phi}^{\dagger}(x)\,\widehat{\Phi}(x)\rangle$的一个定义良好的版本。梯度流沿 t 方向的扩散可以解释为物理参考能量的降低。因此，在极限 $t=s\to\infty$下，
$\langle\Psi\ s\ x\ \Psi^{\dagger}\ s\ x\ \rangle$ $\langle\widehat{\Phi}^{\dagger}\ x\ \widehat{\Phi}\ x\ \rangle$ (,) (,) 将与在基态下计算的 ( ) ( ) 相关。因此，判断 $\lim_{s\to\infty}\langle\Psi(s,\ x)\,\Psi^{\dagger}(s,\ x)\rangle$ 取零值还是非零值这一二元信息，或可用于确定其相。

首先，我们在单圈阶计算了连续理论中具有正质量平方参数的阿贝尔希格斯模型的流动序参量。借助鞍点近似，我们推导出了在 s较大时$\langle\Psi(s,\ x)\,\Psi^{\dagger}(s,\ x)\rangle$ 的渐近解析形式。

我们已检验以下内容：(i) 对于 $s\to\infty$，极限 $\langle\Psi(s,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\rangle\to 0$ 始终表明，在考虑有限正质量平方的单圈辐射修正后，该理论仍处于对称相；(ii) 单圈阶$U(1)$规范玻色子二点函数的紫外有限性，这具体证实了流动规范场的卓越性质，该性质最早在文献 [12, 13] 中讨论；

以及 (iii) 希格斯玻色子二点函数的紫外有限性，这通过波函数重整化实现，该重整化减去了源自圈积分的紫外极点 [14]。

本文是朝着新方向迈出的第一步：通过流动序参量，即同一时空点处希格斯场的流动双线性量，来确定物理系统所处的相。这或许能为识别物理系统所处的相带来新的启示。本文依赖于规范固定下的微扰，并采用鞍点近似推导解析形式。将其推广到非阿贝尔规范理论，并在无需规范固定的晶格规范理论中开展研究，将是接下来的重要工作。

即便是在最简单的阿贝尔希格斯情形中，仍有诸多方面有待进一步澄清：

- 确定阿贝尔希格斯模型所处相的标准微扰方法，是考察科尔曼–温伯格有效势 [69–71]的真空态；该方法表明，当希格斯质量平方为零或取足够小的正值时，会发生动力学规范对称性破缺。参数空间的这一区域超出了我们当前分析的范围，因为我们的分析依赖于鞍点近似，并假定流时间 t 和 s 远大于其他量纲参数，例如 $s,\ t \gg m^{-2}$。也就是说，对于形式为 $\int_p \frac{e^{-\left(t+s\right)p^2}}{p^2+m^2} g(p)$，的积分，我们的计算依赖于鞍点法 (68)，其中 $g(p)$ 是一个有理函数。研究无质量或近乎无质量的区域会很有意义，但这可能需要数值计算。

- 众所周知，当希格斯质量参数的平方为负时，规范对称性会通过希格斯机制自发破缺。研究破缺相中规范理论的梯度流的一般性质，是一项具有理论重要性的工作。

- 同一时空点处涂抹场的二点函数是良定义的。然而，梯度流的形变可能会改变原始场的某些性质。我们在所关注的参数区域得到的结果似乎是一致的，值得进一步开展理论研究。

我们预期，$t = 0$ 处的理论空间与 $t > 0$处的理论空间一一对应。对于非零的 t，即使在有限 t下质量平方较大且为正，方程（70）–（74）和（78）–（80）中的有限部分也不为零。不过，我们应当记住，只有在为 t处的理论确定重整化条件后，才能定义有限 t 下流动序参量的物理值；这将留待未来研究。正如文献 [15–26] 在不同背景下所提出的，这或许会揭示梯度流与重整化群之间的新关系。

致谢

感谢 Tetsuo Hatsuda、Etsuko Ito、Daisuke Kadoh 和 Naoya Ukita 提供了有益的讨论。本研究部分得到日本学术振兴会科研费项目 18K13546（KK）、19H01899（KO）和 21H01107（KN、KO）的资助。

附录

A 单圈阶希格斯二点函数的细节

本节将详细介绍单圈希格斯二点函数的计算，并讨论其发散部分和有限部分。

我们回顾一下关于 ε 展开的以下标准公式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\varepsilon} &= 1+\varepsilon+\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right),\\ A^{\varepsilon} &= 1+\varepsilon\log A+\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right),\\ \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\mathcal{O}(\varepsilon),\\ \Gamma(\varepsilon-1) &= -\frac{1}{\varepsilon}+\gamma-1+\mathcal{O}(\varepsilon),\end{aligned} \tag{120}$$

其中变量 A 为正。此外，我们略去费曼图 B′、C′、D′ 和 E′ 所代表贡献的显式形式，因为每一部分都可以根据下文给出的相应结果和式（65）中的替换规则轻松得到。

A.1 领先阶

对于式（33），在安全地取 $y\to x$ 极限后，计算 p 积分无需进行近似:

$$\begin{aligned}\left\langle\Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{LO}} &= \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\\ &= \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\int_0^{\infty}\mathrm{d}p p^{d-1}\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\\ &= \left(g_0^2\mu^{2\varepsilon}\right)\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\frac{1}{2}e^{m_0^2(s+t)}m_0^{d-2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2},m_0^2\,(s+t)\right),\end{aligned} \tag{121}$$

其中，在第二行和第三行中，我们分别对 d 维 p 积分的各向同性角向部分和径向部分进行了积分。

根据这一性质

$$\Gamma\left(1-\frac{d}{2},m_0^2\,(s+t)\right)=\Gamma\left(-1,m_0^2\,(s+t)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon), \tag{122}$$

可以直接得到按 ε 展开的形式，[7]

$$\begin{aligned}\left\langle\Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{LO}} &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}m_0^2e^{m_0^2(s+t)}\Gamma\left(-1,m_0^2\,(s+t)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ &\xrightarrow[\text{large } s,t]{} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{m_0^2\,(s+t)^2}+\mathcal{O}(\varepsilon),\end{aligned} \tag{123}$$

[7]对于较大的 t 和 s，还可以通过对式（121）倒数第二种形式中的 p 积分使用鞍点法，得到以下形式。

其中，我们取了 $e^{m_0^2(s+t)}\Gamma\left(-1, m_0^2\,(s+t)\right)$ 在无穷远处的级数展开的首项，

$$e^{m_0^2(s+t)}\Gamma\left(-1, m_0^2\,(s+t)\right) = \left(\frac{1}{m_0^2\,(s+t)}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{1}{m_0^2\,(s+t)}\right)^3\right]. \tag{124}$$

A.2 单圈阶

A.2.1 图 A

在式 (56) 中，安全地取极限 $y \to x$ safely 后，我们可以对流时间精确地进行积分，式 (56) 因而得到

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{A}} = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-(t+s)p^2} \\ \times\frac{1}{4\,(\ell^2-\ell\cdot p)^2}\left\{e^{-2(s+t)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)} - e^{-2s\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)} - e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)} + 1\right\},\end{aligned} \tag{125}$$

其中，我们将此形式分为以下四部分：

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{A-(i)}} := +\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-(t+s)p^2}\times\frac{1}{4\,(\ell^2-\ell\cdot p)^2}e^{-2(s+t)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{126}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{A-(ii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-(t+s)p^2}\times\frac{1}{4\,(\ell^2-\ell\cdot p)^2}e^{-2s\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{127}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{A-(iii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-(t+s)p^2}\times\frac{1}{4\,(\ell^2-\ell\cdot p)^2}e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{128}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{A-(iv)}} := +\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}e^{-(t+s)p^2}\times\frac{1}{4\,(\ell^2-\ell\cdot p)^2}. \tag{129}$$

对于式 (126)，对指数项进行配方，

$$-(t+s)\,p^2 - 2\,(s+t)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right) = -2\,(s+t)\left(\ell-\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\,(s+t)\,p^2, \tag{130}$$

告诉我们对该积分进行鞍点近似所需的有效信息

$\ell_\circ$。公式（67）中的公式与公式（126）中的 $\ell_* = p/2$ 将我们引向

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(i)}} &\simeq \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(9\cdot 4^2\right)\left(\frac{1}{8\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\int_p \frac{1}{(p^2)^2\left(p^2+4m_0^2\right)}e^{-\frac{1}{2}(s+t)p^2}\\
&= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(9\cdot 4^2\right)\left(\frac{1}{8\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\\
&\quad\times\int_0^\infty \mathrm{d}p\,p^{d-1}\int_p \frac{1}{(p^2)^2\left(p^2+4m_0^2\right)}e^{-\frac{1}{2}(s+t)p^2}\\
&= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(9\cdot 4^2\right)\left(\frac{1}{8\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\\
&\quad\times 2^{-7+d}e^{2m_0^2(s+t)}m_0^{-6+d}\Gamma\!\left(-2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\!\left(3-\frac{d}{2},2m_0^2\,(s+t)\right), \qquad (131)
\end{aligned}$$

其中，在第二行中我们对 d 维动量的各向同性角向部分进行了积分。方程 (127) 和 (128) 的计算可以采用相同的思路，其最终形式为

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(ii)}} &\simeq -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(9\cdot 4^2\right)\left(\frac{1}{8\pi s}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\\
&\quad\times 2^{-7+d}e^{2m_0^2(s+2t)}m_0^{-6+d}\Gamma\!\left(-2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\!\left(3-\frac{d}{2},2m_0^2\,(s+2t)\right), \qquad (132)\\
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(iii)}} &\simeq -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(9\cdot 4^2\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\\
&\quad\times 2^{-7+d}e^{2m_0^2(2s+t)}m_0^{-6+d}\Gamma\!\left(-2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\!\left(3-\frac{d}{2},2m_0^2\,(2s+t)\right). \qquad (133)
\end{aligned}$$

对于方程 (129)，直接应用关于鞍点 $p_*=0$ 附近 p 积分的公式即可，得到结果

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(vi)}} &\simeq \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\int_\ell \frac{1}{4}\frac{1}{(\ell^2)^2}\frac{1}{\ell^2+m_0^2}\\
&= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\frac{1}{4}\frac{2!}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-d/2)}{\Gamma(3)}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\left[\frac{1}{(1-x-y)\,m_0^2}\right]^{3-d/2}, \qquad (134)
\end{aligned}$$

其中，我们采用标准方法，借助费曼参数化进行了 ℓ 积分。

前面三项可直接按 ε 展开，这些公式很有用，

$$\frac{\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \varepsilon + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2\big)\,, \qquad (135)$$

$$\Gamma(\varepsilon+1,A) = e^{-A} + \Big[e^{-A}\log(A) + G^{2,0}_{1,2}\Big(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\Big|\,A\Big)\Big]\,\varepsilon + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2\big)\,, \qquad (136)$$

其中 A 为正变量。各项结果为

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(i)}} \simeq$$
$$-\frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(s+t)\right]+\log\left[\frac{32\pi^2\mu^4(s+t)}{m_0^2}\right]+e^{2m_0^2(s+t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\,2m_0^2(s+t)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{137}$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(ii)}} \simeq$$
$$+\frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,s^2m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(s+2t)\right]+\log\left(\frac{32\pi^2\mu^4 s}{m_0^2}\right)+e^{2m_0^2(s+2t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\,2m_0^2(s+2t)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{138}$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(iii)}} \simeq$$
$$+\frac{9g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2m_0^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left[2m_0^2(2s+t)\right]+\log\left(\frac{32\pi^2\mu^4 t}{m_0^2}\right)+e^{2m_0^2(2s+t)}G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0,0\end{smallmatrix}\middle|\,2m_0^2(2s+t)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{139}$$

式 (134) 中的形式在 $d\to 4$ 下没有紫外发散，但包含红外发散。为了对其进行正则化，我们用一个正的无量纲参数 a 对 y 的积分区间上限作如下变形:

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{A-(vi)}} &\simeq \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\left[\frac{1}{1-x-y}\right]\\ &\hookrightarrow \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x-a}\mathrm{d}y\left[\frac{1}{1-x-y}\right]\\ &= \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left[-1-\log(a)\right],\end{aligned} \tag{140}$$

其中，符号 $\hookrightarrow$ 所表示的步骤对应于对红外发散的正则化。

A.2.2 图 B

在公式（57）中，安全地取极限 $y\to x$ 后，我们得到如下形式

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{B}} &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\int_\ell\frac{d}{\ell^2}e^{-2u\ell^2}\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\left(\frac{2d}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\int_0^\infty\mathrm{d}\ell\ell^{d-3}e^{-2u\ell^2}\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t\mathrm{d}u\left(\frac{2d}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)2^{-d/2}u^{1-d/2}\Gamma\left(-1+\frac{d}{2}\right)\\ &= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^t\mathrm{d}u\frac{d}{d/2-1}\,(2u)^{1-d/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right) \int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{4-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{(2t)^\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&\simeq \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right) \left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2} \frac{1}{m_0^2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{4-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{(2t)^\varepsilon}{2\varepsilon},
\end{aligned} \tag{141}
$$

其中，在第二行和第三行中，我们分别对 d 维 ℓ 积分的各向同性角向部分和径向部分进行了积分；在最后一步中，我们采用公式（67）中的公式来计算鞍点 $p_*=0$ 附近的 p 积分。

很容易得到公式（141）的 ε 展开形式：

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{B}} \simeq -\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{\frac{2}{\varepsilon}+1+2\log\left[32\pi^2 t\,(s+t)\,\mu^4\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{142}
$$

A.2.3 图 C

在公式（58）中，安全地取 $y\to x$ 极限后，我们可以精确地对流时间进行积分，公式（58）由此得到

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\mathrm{C}} = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right) \int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2} \int_\ell \frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)} \times \frac{1}{2\,(\ell^2-\ell\cdot p)} \left[1-e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}\right], \tag{143}
$$

其中，我们将此形式分为以下两部分：

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{C-(i)}} := +\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right) \int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2} \int_\ell \frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)} \times \frac{1}{2\,(\ell^2-\ell\cdot p)}, \tag{144}
$$

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{C-(ii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right) \int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2} \int_\ell \frac{(p+\ell)^2}{(p-\ell)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)} \times \frac{1}{2\,(\ell^2-\ell\cdot p)} e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}. \tag{145}
$$

对于公式（144），很容易对鞍点 $p_*=0$ 附近的 p 鞍点积分进行计算，得到

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{C-(i)}} &\simeq \frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{2} \left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2} \frac{1}{m_0^2} \int_\ell \frac{1}{\left(\ell^2+m_0^2\right)\ell^2} \\
&= \frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{2} \left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2} \frac{1}{m_0^2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{1}{xm_0^2}\right)^{2-d/2},
\end{aligned} \tag{146}
$$

其中，在第二步中，我们采用标准方法，借助费曼参数化对 ℓ 部分进行积分。

对于公式（145），我们可以对鞍点附近的 ℓ 进行鞍点积分

$\ell_* = p/2$ 如下

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{C-(ii)}} &\simeq \frac{\left(9\cdot 4^2 g_0^4 \mu^{4\varepsilon}\right)}{2}\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\int_p \frac{1}{p^2\left(p^2+m_0^2\right)\left(p^2+4m_0^2\right)} e^{-\left(\frac{t}{2}+s\right)p^2} \\
&= \frac{\left(9\cdot 4^2 g_0^4 \mu^{4\varepsilon}\right)}{2}\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right) \\
&\quad\times \int_0^\infty \mathrm{d}p p^{d-1} \frac{1}{p^2\left(p^2+m_0^2\right)\left(p^2+4m_0^2\right)} e^{-\left(\frac{t}{2}+s\right)p^2} \\
&= \frac{\left(9\cdot 4^2 g_0^4 \mu^{4\varepsilon}\right)}{2}\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right) \\
&\quad\times \frac{1}{96\Gamma(2-d/2)} e^{\frac{1}{2}\left(-id\pi + m_0^2(2s+t)\right)} m_0^{-6+d}\pi\left[i+\cot\left(\frac{d\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad\times \left[-16\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{1}{2}m_0^2\left(2s+t\right)\right) + 2^d e^{3m_0^2(2s+t)/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2},2m_0^2\left(2s+t\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{147}$$

其中，第二行和第三行分别对 d 维 p 积分的各向同性角向部分和径向部分进行了积分。

方程 (146) 的 ε 展开可轻易得到：

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{C-(i)}} &\simeq \frac{g_0^4}{2}\left(\frac{1}{4\pi\left(s+t\right)}\right)^2 \frac{1}{m_0^2}\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\mu^{4\varepsilon}\left(4\pi\left(t+s\right)\right)^{\varepsilon}(4\pi)^{\varepsilon}\right]\Gamma(\varepsilon)\left[1+\varepsilon\left(1-\log m_0^2\right)\right] \\
&= \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\left(s+t\right)^2 m_0^2}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+1+\log\left[\frac{16\pi^2(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{148}$$

与此同时，以下展开形式：

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)\,\Gamma(2-\varepsilon)} = \varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{149}$$

$$e^{\pi i\varepsilon} = 1 + i\pi\varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{150}$$

$$\cot\left[\pi\left(2-\varepsilon\right)\right] = -\frac{1}{\pi\varepsilon}+\frac{\pi}{3}\varepsilon+\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{151}$$

$$\Gamma(\varepsilon,A) = \Gamma(0,A) + \left[\Gamma(0,A)\log A + G^{2,0}_{1,2}\left(\begin{matrix}1\\0,0\end{matrix}\middle|\, A\right)\right]\varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{152}$$

对于正的 A，可得到式 (147) 的 ε 展开的最终形式：

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{C-(ii)}} \\
&\simeq \frac{g_0^4}{(4\pi)^4 t^2 m_0^2}\frac{3}{8}e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)}\left\{16\Gamma\left(0,\frac{1}{2}m_0^2\left(2s+t\right)\right) - 16e^{\frac{3}{2}m_0^2(2s+t)}\Gamma\left(0,2m_0^2\left(2s+t\right)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{153}$$

A.2.4 图 D

在式 (59) 中，安全地取极限 $y \to x$ 后，我们可以精确地对流时间积分，式 (59) 因而得到

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{D}} = \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2} \times\left\{\frac{1}{4\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)(p-\ell)^2}-\frac{e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}}{4\left(p^2-p\cdot\ell\right)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}-\frac{e^{-2t(p-\ell)^2}}{4\left(p^2-p\cdot\ell\right)(p-\ell)^2}\right\}, \tag{154}$$

我们将此形式分为以下三部分:

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\text{D-(i)}} := +\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2}\times\frac{1}{4\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)(p-\ell)^2}, \tag{155}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\text{D-(ii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2}\times\frac{e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}}{4\left(p^2-p\cdot\ell\right)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \tag{156}$$

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\text{D-(iii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2}\times\frac{e^{-2t(p-\ell)^2}}{4\left(p^2-p\cdot\ell\right)(p-\ell)^2}. \tag{157}$$

对于公式（155），我们使用公式（67）在鞍点 $p_*=0$ 附近计算 p 积分，得到

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\text{D-(i)}} &\simeq \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\frac{1}{4m_0^2}\int_\ell\frac{1}{(\ell^2)^2}\\ &\hookrightarrow \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\frac{1}{4m_0^2}\int_\ell\frac{1}{\left(\ell^2+\mu_{\mathrm{IR}}^2\right)^2}\\ &= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\frac{1}{4m_0^2}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{IR}}^2}\right)^{2-d/2},\end{aligned} \tag{158}$$

其中，在第二行中我们引入了虚质量 μ_{IR}，以对积分进行正则化。第三行的计算采用了标准方法。

对于公式（156），可以在鞍点 $\ell_*=p/2$ 附近，使用公式（67）中的鞍点法计算 ℓ 积分:

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\text{D-(ii)}} &\simeq 18\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\int_p\frac{1}{(p^2)^2\left(p^2+m_0^2\right)}e^{-(s+t/2)p^2}\\ &= 18\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\int_0^\infty \mathrm{d}p\,p^{d-1}\frac{1}{(p^2)^2\left(p^2+m_0^2\right)}e^{-(s+t/2)p^2}\\ &= 18\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\\ &\quad\times\frac{1}{2}e^{m_0^2(2s+t)/2}m_0^{-6+d}\Gamma\left(-2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{d}{2},\frac{1}{2}m_0^2\,(2s+t)\right),\end{aligned} \tag{159}$$

其中，在第二行和第三行中，我们分别对 d 维 p 积分的各向同性角向部分和径向部分进行了积分。

对于公式（157），将指数项配方后可得

$$-(s+t)\,p^2-2t\,(p-\ell)^2=-(3t+s)\left[p-\frac{2t}{3t+s}\ell\right]^2-\frac{2t\,(t+s)}{3t+s}\ell^2, \tag{160}$$

这表明 p 积分的鞍点为 $p_*=[2t/(3t+s)]\,\ell$。利用公式（67）中的公式，我们得到

$$\begin{aligned}\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{D-(iii)}}\simeq\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\left(\frac{1}{4\pi\,(3t+s)}\right)^{d/2}\frac{\left(1+\frac{2t}{3t+s}\right)^2\left(-\frac{(3t+s)^2}{2t(t+s)}\right)}{\left(1-\frac{2t}{3t+s}\right)^4\left(\frac{2t}{3t+s}\right)^2}\\ \times\int_\ell\frac{1}{\left(\ell^2\right)^2}\frac{1}{\ell^2+\left(\frac{3t+s}{2t}\right)^2m_0^2}e^{-\frac{2t(t+s)}{3t+s}\ell^2}.\end{aligned} \tag{161}$$

上述 ℓ 积分的结构与 DiagramD-(ii) 相同，因此我们立即得到最终形式：

$$\begin{aligned}\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{D-(iii)}}\simeq\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\left(\frac{1}{4\pi\,(3t+s)}\right)^{d/2}\mathcal{A}\\ \times\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right)\frac{1}{2}e^{\mathcal{C}\mathcal{M}^2}\mathcal{M}^{-6+d}\Gamma\left(-2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{d}{2},\mathcal{C}\mathcal{M}^2\right),\end{aligned} \tag{162}$$

为方便起见，我们定义变量如下，

$$\mathcal{A}=-\frac{(s+3t)^4}{(2t)^3\,(s+t)}\frac{\left(1+\frac{2t}{s+3t}\right)^2}{\left(1-\frac{2t}{s+3t}\right)^4},\qquad\mathcal{M}=\left(\frac{s+3t}{2t}\right)m_0,\qquad\mathcal{C}=\frac{2t\,(s+t)}{s+3t}. \tag{163}$$

公式（158）的 ε 展开形式可直接计算为

$$\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{D-(i)}}\simeq\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\log\left[\frac{16\pi^2(s+t)\,\mu^4}{\mu_{\text{IR}}^2}\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{164}$$

借助公式（135）和（136），方程（159）和（162）中的形式也可直接计算为

$$\begin{aligned}&\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{D-(ii)}}\\ &\simeq-\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2m_0^2}\frac{9}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left(\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)\right)+\log\left(\frac{32\pi^2t\mu^4}{m_0^2}\right)+e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)}G_{1,2}^{2,0}\left(\left.{}_{0,0}^{1}\right|\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,,\end{aligned} \tag{165}$$

$$\begin{aligned}&\Big\langle\Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{D-(iii)}}\\ &\simeq-\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+3t)^2\,\mathcal{M}^2}\frac{\mathcal{A}}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\left(\mathcal{C}\mathcal{M}^2\right)+\log\left[\frac{16\pi^2(s+3t)\,\mu^4}{\mathcal{M}^2}\right]+e^{\mathcal{C}\mathcal{M}^2}G_{1,2}^{2,0}\left(\left.{}_{0,0}^{1}\right|\mathcal{C}\mathcal{M}^2\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{166}$$

A.2.5 图 E

取方程（60）中的安全极限 $y \to x$ 后，我们得到

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\mathrm{E}} = \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}\widetilde{u}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}e^{-2u\ell^2+2(u-\widetilde{u})\ell\cdot p}. \quad (167)$$

我们可以精确地对流时间进行积分，公式（167）给出 to

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\mathrm{E}} = \left(-g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)&\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}\\ &\times\left[\frac{1}{4\ell^2\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}-\frac{1}{4\left(\ell\cdot p\right)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}+\frac{1}{4\left(\ell\cdot p\right)\ell^2}e^{-2t\ell^2}\right],\end{aligned} \quad (168)$$

其中，我们将该形式分为以下三部分：

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{E-(i)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}\times\frac{1}{4\ell^2\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \quad (169)$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{E-(ii)}} := +\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}\times\frac{1}{4\left(\ell\cdot p\right)\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}e^{-2t\left(\ell^2-\ell\cdot p\right)}, \quad (170)$$

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{E-(iii)}} := -\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{\ell^2+m_0^2}\times\frac{1}{4\left(\ell\cdot p\right)\ell^2}e^{-2t\ell^2}. \quad (171)$$

对于公式（169），我们很容易找到鞍点 $p_*=0$，并利用公式（67）得到

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{E-(i)}} &\simeq -\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\left(\frac{1}{4\pi\left(t+s\right)}\right)^{d/2}\frac{1}{m_0^2}\int_\ell \frac{1}{\ell^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}\\ &= -\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\left(\frac{1}{4\pi\left(t+s\right)}\right)^{d/2}\frac{1}{m_0^2}\frac{1}{\left(4\pi\right)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{xm_0^2}\right)^{2-d/2},\end{aligned} \quad (172)$$

其中第二步借助费曼参数化进行常规计算即可得出。

对于式（170），ℓ 的鞍点位于 $\ell_* = p/2$，式中的公式可得 (67)

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\text{E-(ii)}} &\simeq -\left(9\cdot 2g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\int_p \frac{1}{p^2\left(p^2+m_0^2\right)\left(p^2+4m_0^2\right)}e^{-(s+t/2)p^2}\\ &= -\left(18g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{\left(4\pi\right)^{d/2}\Gamma(d/2)}\right)\\ &\quad\times\int_0^\infty \mathrm{d}p p^{d-1}\frac{1}{p^2\left(p^2+m_0^2\right)\left(p^2+4m_0^2\right)}e^{-\left(\frac{t}{2}+s\right)p^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(18 g_0^4 \mu^{4\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{8\pi t}\right)^{d/2}\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right) \\
&\quad\times \frac{1}{96\Gamma(2-d/2)} e^{\frac{1}{2}\left(-id\pi + m_0^2(2s+t)\right)} m_0^{-6+d}\pi\left[i+\cot\left(\frac{d\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad\times \left[-16\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{1}{2}m_0^2\,(2s+t)\right)+2^d e^{3m_0^2(2s+t)/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2},2m_0^2\,(2s+t)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{173}
$$

其中，第二行和第三行分别对 d维 p 积分中的各向同性角向部分和径向部分进行了积分。

对于公式（171），我们可以借助费曼参数积分进行变形，

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{E-(iii)}} &= -\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\int_{p,\ell}\frac{(p+\ell)^2}{p^2+m_0^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\frac{2!e^{-(t+s)p^2-2t\ell^2}}{\left[(x+y)\,\ell^2+ym_0^2+(1-x-y)\,(p\cdot\ell)\right]^3} \\
&\simeq -\frac{\left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)}{4}\int_\ell\frac{\ell^2}{m_0^2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\frac{2!e^{-2t\ell^2}}{\left[(x+y)\,\ell^2+ym_0^2\right]^3} \\
&\simeq 0,
\end{aligned}
\tag{174}
$$

其中，在第二步和第三步中，我们分别围绕鞍点 $p_*=0$ 和 $\ell_*=0$，利用公式（67）计算了 p 和 ℓ 积分。

公式（172）的 ε 展开很直接，而公式（173）的展开可按照公式（147）的处理过程进行，其结果为

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{E-(i)}} \simeq -\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+1+\log\left[\frac{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,,
\tag{175}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{E-(ii)}} &\simeq -\frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,t^2 m_0^2}\frac{3}{32}e^{\frac{1}{2}m_0^2(2s+t)} \\
&\quad\times\left[16\Gamma\left(0,\frac{1}{2}m_0^2\,(2s+t)\right)-16\,e^{\frac{3}{2}m_0^2(2s+t)}\Gamma\left(0,2m_0^2\,(2s+t)\right)\right]+\mathcal{O}(\varepsilon)\,.
\end{aligned}
\tag{176}
$$

A.2.6 图 F

我们可以精确地对流时间积分进行计算，公式（61）给出

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{F}} = \left(-4g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_{p,\ell}\frac{e^{-(t+s)p^2}}{p^2+m_0^2}\frac{p_\mu\ell_\mu}{\ell^2+m_0^2}\times\left[\frac{2\ell^2t-1}{4\left(\ell^2\right)^2}+\frac{1}{4\left(\ell^2\right)^2}e^{-2t\ell^2}\right],
\tag{177}
$$

对于 p_μ 和 ℓ_μ，该积分是奇函数，因此结果为零。

A.2.7 图 a

对于公式 (62)，安全地取极限 $y\to x$ 后，我们发现 p 积分部分和 ℓ 积分部分可以分离，

$$
\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\right\rangle_{\text{a}} = \left(-dg_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p\frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2}\int_\ell\frac{1}{\ell^2+\mu_A^2},
\tag{178}
$$

其中，后者的计算很容易完成，

$$\int_\ell \frac{1}{\ell^2+\mu_A^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\mu_A^2\right)^{1-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon-1)\,, \tag{179}$$

其中不含红外发散，因此我们可以安全地取极限 $\mu_A \to 0$。由此，我们得出

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm a} \xrightarrow[\mu_A\to 0]{} 0. \tag{180}$$

A.2.8 图 b

对于公式（63），安全地取极限 $y \to x$ 后，我们可以分别计算 p 积分部分和 ℓ 积分部分，

$$\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm b} = \left(-4\lambda_0 g_0^2 \mu^{4\varepsilon}\right) \int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2} \int_\ell \frac{1}{\ell^2+m_0^2}, \tag{181}$$

后者部分可以按照公式（179）进行计算。借助指数积分函数 $E_n(z)$，前一个积分也可以解析求得：

$$\begin{aligned}\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2} = &\left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}\right) \frac{1}{8}\,(d-4)\,(s+t)^{2-d/2}\,\Gamma\!\left(-2+\frac{d}{2}\right) \\ &\times \left\{-2+e^{m_0^2(s+t)}\left[-2+d+2m_0^2\,(s+t)\right] E_{\frac{d-2}{2}}\!\left(m_0^2\,(s+t)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{182}$$

总形式为

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm b} = &\left(-4\lambda_0 g_0^2 \mu^{4\varepsilon}\right) \frac{\left(m_0^2\right)^{1-\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} \Gamma(\varepsilon-1)\,\Gamma(-\varepsilon)\,\frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)} \left(-\frac{\varepsilon}{4}\right)(s+t)^{\varepsilon} \\ &\times \left\{-2+e^{m_0^2(s+t)}\left[2-2\varepsilon+2m_0^2\,(s+t)\right] E_{1-\varepsilon}\!\left(m_0^2\,(s+t)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{183}$$

借助以下公式，

$$\frac{\Gamma(\varepsilon-1)\,\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2-\gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{12}\left(36-24\gamma+6\gamma^2+\pi^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{184}$$

$$E_{1-\varepsilon}\!\left(m_0^2\,(s+t)\right) = E_1\!\left(m_0^2\,(s+t)\right) + G_{2,3}^{3,0}\!\left(\left.\begin{matrix}1,1\\0,0,0\end{matrix}\right| m_0^2\,(s+t)\right)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \tag{185}$$

我们得到按 ε 展开的形式，

$$\begin{aligned}\Big\langle \Psi(t,x)\,\Psi^\dagger(s,x)\Big\rangle_{\rm b} = 4\lambda_0 g_0^2 \frac{m_0^2}{(4\pi)^4} \Bigg\{ &\frac{1}{\varepsilon}\left[-1+e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right) E_1\!\left(m_0^2\,(s+t)\right)\right] \\ &+ \left(2-\gamma+\log\left[\frac{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}{m_0^2}\right]\right)\left[-1+e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right) E_1\!\left(m_0^2\,(s+t)\right)\right] \\ &- e^{m_0^2(s+t)} E_1\!\left(m_0^2\,(s+t)\right) + e^{m_0^2(s+t)}\left(1+m_0^2\,(s+t)\right) G_{2,3}^{3,0}\!\left(\left.\begin{matrix}1,1\\0,0,0\end{matrix}\right| m_0^2\,(s+t)\right)\Bigg\} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{186}$$

A.2.9 图 C

对于公式 (64)，安全地取 $y \to x$ 极限后的形式为

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{c}} &= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\int_p \frac{e^{-(t+s)p^2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^2}\int_\ell \frac{(\ell+p)^2}{(\ell-p)^2\left(\ell^2+m_0^2\right)}\\ &\simeq \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\frac{1}{m_0^4}\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\int_\ell \frac{1}{\left(\ell^2+m_0^2\right)}\\ &= \left(g_0^4\mu^{4\varepsilon}\right)\frac{1}{m_0^4}\left(\frac{1}{4\pi\,(s+t)}\right)^{d/2}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\left(m_0^2\right)^{1-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon-1)\,, \end{aligned} \tag{187}$$

其中，第二行使用 $p_*=0$并根据公式（67）进行了鞍点积分，第三行则应用了公式（179）。

对 ε展开形式的估值很直接，其结果形式为 is

$$\left\langle \Psi(t,x)\,\Psi^{\dagger}(s,x)\right\rangle_{\mathrm{c}} \simeq \frac{g_0^4}{(4\pi)^4\,(s+t)^2\,m_0^2}\left\{-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma-1+\log\left[\frac{m_0^2}{16\pi^2\,(s+t)\,\mu^4}\right]\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{188}$$

参考文献

[1] S. Elitzur，自发破缺局域对称性的不可能性，《物理评论*D*》**12**（1975）3978–3982。

[2] J. Frohlich、G. Morchio 和 F. Strocchi，没有对称性破缺序参量的希格斯现象，《物理快报 *B*》**97** (1980)249–252.[3] J. Frohlich、G. Morchio 和 F. Strocchi，没有对称性破缺

g

序参量，*Nucl. Phys. B* **190** (1981)553–582.[4] E. H. Fradkin 和 S.H. Shenker，含希格斯现象的格点规范理论相图

s

场，《物理评论*D*》*19 (1979) 3682–3697*。[5] *A. Maas*，布鲁特-恩格勒-希格斯物理：从基础到唯象学，《粒子与核物理进展》*106 (2019) 132*–209, [*arXiv:1712.*04721].[6] *W. Buchmuller*、*Z. Fodor* 和 *A. Hebecker*，电弱相变的规范不变处理，《物理快报 *B*》*331 (1994) 131*–136, [*hep-ph/*9403391].[7] *Y. Hu*，复合算符的有效势，《物理评论*D*》*54 (1996) 1614*–1625, [*hep-ph/*9602435].[8] *L. Di Luzio* 和 *L. Mihaila*，论标准模型真空不稳定性尺度的规范依赖性，*JHEP 06 (2014)* 079, [*arXiv:1404.*7450].[9] *S. Dittmaier* 和 *H. Rzehak*，基于非线性希格斯表示的规范不变真空期望值的电弱重整化。第一部分：标准模型，*JHEP 05 (2022)* 125, [*arXiv:2203.*07236]。

[10] *R. Narayanan* 和 *H. Neuberger*，连续威尔逊环算符中的无限 *N* 相变，*JHEP 03 (2006)* 064, [*hep-th*/0601210],[11] *M. Luscher*，平凡化映射、威尔逊流与 *HMC* 算法，《数学物理通讯》*293 (2010) 899*–919, [*arXiv:0907*.5491],[12] *M. L¨uscher*，威尔逊流在晶格 *QCD* 中的性质与应用，*JHEP 08 (2010)*071, [*arXiv:1006*.4518]。 [勘误：*JHEP 03, 092 (2014)*],[13] *M. Luscher* 和 *P. Weisz*，非阿贝尔规范理论中梯度流的微扰分析，*JHEP 02 (2011)* 051, [*arXiv:1101*.0963],[14] *M. Luscher*，手征对称性与杨-米尔斯梯度流，*JHEP 04 (2013) 123*，[*arXiv:1302*.5246],[15] *S. Sint* 和 *A. Ramos*，梯度流可观测量中的 *O*(a^2) 效应，*PoS LATTICE2014 (2015)* 329, [*arXiv:1411*.6706],[16] *H. Makino*、*O. Morikawa* 和 *H. Suzuki*，梯度流与威尔逊重整化群流，*PTEP 2018 (2018)*，第 *5* 期 *053B*02, [*arXiv:1802*.07897],[17] *Y. Abe* 和 *M. Fukuma*，梯度流与重整化群，*PTEP 2018 (2018)*，第 *8* 期 *083B*02, [*arXiv:1805*.12094],[18] *A. Carosso*、*A. Hasenfratz* 和 *E. T. Neil*，利用梯度流对近共形系统中的算符进行非微扰重整化，《物理评论快报》*121 (2018)*，第 20 201601, [期，*arXiv:1806*.01385],[19] *H. Sonoda* 和 *H. Suzuki*，从精确重整化群推导梯度流，*PTEP 2019 (2019)*，第 *3* 期 *033B*05, [*arXiv:1901*.05169],[20] *H. Sonoda* 和 *H. Suzuki*，梯度流精确重整化群，*PTEP 2021 (2021)*，第 *2* 期 *023B*05, [*arXiv:2012*.03568],[21] *Y. Miyakawa* 和 *H. Suzuki*，梯度流精确重整化群：纳入费米子场，*PTEP 2021 (2021)*，第 *8* 期 *083B*04, [*arXiv:2106*.11142],[22] *Y. Miyakawa*、*H. Sonoda* 和 *H. Suzuki*，量子电动力学中显式规范不变的精确重整化群，*PTEP 2022 (2022)*，第 *2* 期 *023B02*，[*arXiv:2111*.15529],[23] *Y. Abe*、*Y. Hamada* 和 *J. Haruna*，标量场论梯度流精确重整化群的定点结构，*PTEP 2022 (2022)*，第 *3* 期 *033B03*，[*arXiv:2201*.04111],[24] *H. Sonoda* 和 *H. Suzuki*，梯度流精确重整化群形式中的单粒子不可约威尔逊作用量，*PTEP 2022 (2022)*，第 *5* 期 *053B01*，[*arXiv:2201*.04448],[25] *Y. Miyakawa*，梯度流精确重整化群中的轴反常，*arXiv:2201.08181*。

[26] A. Hasenfratz、C. J. Monahan、M. D. Rizik、A. Shindler 和 O. Witzel，局域算符的一种新型非微扰重整化方案，PoS **LATTICE2021**(2022) 155, [arXiv:2201.09740].[27] S. Aoki、K. Kikuchi 和 T. Onogi，场论中的几何，$PTEP$ **2015年** (2015)

，

第 10 期，101B01, [arXiv:1505.00131].[28] S. Aoki、J. Balog、T. Onogi 和 P. Weisz，大 N 标量模型的流方程与诱导几何，*PTEP* **2016年** (2016), 第 8 期，083B04, [arXiv:1605.02413].[29] S. Aoki 和 S. Yokoyama，流方程、共形对称性与反德西特几何，*PTEP* **2018年** (2018), 第 3 期，031B01, [arXiv:1707.03982].[30] S. Aoki 和 S. Yokoyama，一般共形平坦流形上的共形场论所产生的 *AdS*几何，*Nucl. Phys. B* **933** (2018)262–274, [arXiv:1709.07281].[31] S. Aoki、J. Balog 和 S. Yokoyama，量子修正的全息计算 *t*

O

体宇宙学常数，*PTEP* **2019年** (2019),no. 4043B06, [arXiv:1804.04636]

.

[32] *S. Aoki*、*S. Yokoyama* 和 *K. Yoshida*，广义流方程所涌现的非相对论系统的全息几何，《物理评论*D*》*99*（*2019*年），第*12*期126002, [*arXiv:1902.*02578].[33] *S. Aoki*、*J. Balog*、*T. Onogi* 和 *S. Yokoyama*，特殊流方程与*GKP–Witten*关系，*PTEP 2023*（*2023*年），第*1*期 *013B*03, [*arXiv:2204.*06855].[34] *H. Makino* 和 *H. Suzuki*，二维 $O(N)$非线性*σ*模型中梯度流的可重整化性，*PTEP 2015*（*2015*年），第*3*期 *033B*08, [*arXiv:1410.*7538].[35] *H. Makino*、*F. Sugino* 和 *H. Suzuki*，二维*O(N)*非线性*σ*模型中梯度流的大-N 极限，*PTEP 2015*（*2015*年），第*4*期 *043B*07, [*arXiv:1412.*8218].[36] *S. Aoki*、*K. Kikuchi* 和 *T. Onogi*，大*N*极限下*O(N)* 非线性*σ*模型的梯度流，*JHEP 04 (2015)* 156, [*arXiv:1412.*8249].[37] *S. Aoki*、*J. Balog*、*T. Onogi* 和 *P. Weisz*，大 N 展开下标量模型的流方程及其应用，*PTEP 2017*（*2017*年），第*4*期 *043B01*，[*arXiv:1701.*00046].[38] *N. Nakazawa*，伊藤演算中的*N=1* 超杨–米尔斯理论，*Prog. Theor. Phys. 110 (2004) 1117*–1150, [*hep-th*/0302138].[39] *N. Nakazawa*，*N=1* 超对称杨–米尔斯理论中的随机规范固定，*Prog. Theor. Phys. 116 (2007) 883*–917, [*hep-th*/0308081].[40] *K. Kikuchi* 和 *T. Onogi*，广义梯度流方程及其在超杨–米尔斯理论中的应用，*JHEP 11 (2014)* 094, [*arXiv:1408.*2185].[41] *K. Hieda*、*A. Kasai*、*H. Makino* 和 *H. Suzuki*，以梯度流表示的四维 $\mathcal{N}=1$ 超杨–米尔斯理论超流，*PTEP 2017*（*2017*年），第*6*期 *063B*03, [*arXiv:1703.*04802].[42] *S. Aoki*、*K. Kikuchi* 和 *T. Onogi*，二维 $\mathcal{N}=1$ 超对称*O(N)* 非线性*σ*模型的流方程，*JHEP 02 (2018)* 128, [*arXiv:1704.*03717].

[43] *A. Kasai*、*O. Morikawa* 和 *H. Suzuki*，四维 $\mathcal{N}=2$ 超杨–米尔斯理论超流的梯度流表示，*PTEP 2018*（*2018*年），第*11*期 *113B*02, [*arXiv:1808.*07300],[44] *D. Kadoh* 和 *N. Ukita*，$\mathcal{N}=1$ 超杨–米尔斯理论中的超对称梯度流，《欧洲物理学杂志 *C*》*82*（*2022*年），第 5 435, [*arXiv:1812.*02351],[45] *G. Bergner*、*C.L´opez* 和 *S.Piemonte*，利用梯度流研究热超杨–米尔斯理论中的中心对称性和手征对称性的实现，《物理评论*D*》*100*（*2019*年），第 7 074501, [*arXiv:1902.*08469],[46] *D. Kadoh*、*K. Kikuchi* 和 *N. Ukita*，韦斯–祖米诺模型中的超对称梯度流，《物理评论*D*》*100*（*2019*年），第 1 014501, [*arXiv:1904.*06582],[47] *D. Kadoh* 和 *N. Ukita*，超对称量子色动力学中的梯度流方程，*PoS LATTICE2019 (2020*

)

199, [arXiv:1912.13247].[48] D. Kadoh、N. Maru、M.Suzuki 和 N.Ukita，超对称量子色动力学中的超对称梯度流微扰计算，*PTEP* **2023年**（2023），第 1 期，013B02。[49] D. Kadoh、K. Kikuchi 和 N. Ukita，韦斯–祖米诺流的微扰分析，arXiv:2302.06955。[50] S. Chigusa、T. Moroi 和 Y. Shoji，梯度流得到的反弹构型，《物理快报 *B*》**800**（2020） 135115, [arXiv:1906.10829]。[51] R.Sato，反弹解的简单梯度流方程，《物理评论*D*》**101**（2020），第 1 016012, [arXiv:1907.02417]。[52] D. L. J.Ho 和 A. Rajantie，*'t Hooft–Polyakov* 单极子的经典产生 *fro*

m

磁场，《物理评论*D*》**101**（2020），第 5 055003, [arXiv:1911.06088]。[53] Y. Hamada 和 K. Kikuchi，利用梯度流获得鞍点子场构型，《物理评论*D*》**101**（2020），第 9 096014, [arXiv:2003.02070]。[54] **SymLat** 合作组，M. D. Rizik、C. J. Monahan 和 A. Shindler，短流时

e

CP 破坏算符的系数，《物理评论*D*》**102**（2020），第 3 期，034509，[arXiv:2005.04199]。[55] A. Suzuki、Y. Taniguchi、H. Suzuki 和 K. Kanaya，用于 *kaon ba* 的四夸克算符

g

具有梯度流的参数，《物理评论*D*》**102年** (2020)，第3期，034508，[arXiv:2006.06999]。[56] N. Brambilla、H. S. Chung、A. Vairo 和 X.-P. Wang，梯度流中的量子色动力学静态力，*JHEP* **01** (2022年) 184, [arXiv:2111.07811]。[57] E. Mereghetti、C. J. Monahan、M. D. Rizik、A. Shindler 和 P. Stoffer，梯度流方案中夸克偶极算符的单圈匹配，*JHEP* **04** (2022年) 050，[arXiv:2111.11449]。[58] R. V. Harlander 和 F. Lange，梯度流形式体系中的有效电弱哈密顿量，《物理评论*D*》**105** (2022年)，第7期 L071504, [arXiv:2201.08618]。

[59] H. Suzuki，杨-米尔斯梯度流导出的能量-动量张量，PTEP 2013 (2013) 083B03, [arXiv:1304.0533]. [勘误：PTEP 2015, 079201 (2015)].[60] H. Makino 和 H. Suzuki，杨-米尔斯梯度流导出的格点能量-动量张量——纳入费米子场，PTEP 2014 (2014) 063B02，[arXiv:1403.4772]。 [勘误：PTEP 2015，079202 (2015)].[61] K. Fujikawa， $\lambda\phi^4$ 理论中的梯度流，JHEP 03 (2016) 021，[arXiv:1601.01578].[62] K. Hieda、H. Makino 和 H. Suzuki，梯度流可重整化性的证明，Nucl. Phys. B 918 (2017) 23–51, [arXiv:1604.06200].[63] O. Morikawa 和 H. Suzuki，通过梯度流研究引力场中的轴 $U(1)$反常，PTEP 2018 (2018)，第7期 073B02, [arXiv:1803.04132].[64] http://kabuto.phys.sci.osaka-u.ac.jp/lecture/suzuki/osaka1 handout.pdf.[65] http://kabuto.phys.sci.osaka-u.ac.jp/lecture/suzuki/lectures.pdf.[66] F. Capponi、A. Rago、L. Del Debbio、S. Ehret 和 R. Pellegrini，使用威尔逊流重整化标量场论中的能量-动量张量，PoS LATTICE2015 (2016) 306, [arXiv:1512.02851].[67] T. Ohl，使用 LaTeX 和 Metafont 绘制费曼图，Comput. Phys. Commun. 90 (1995) 340–354, [hep-ph/9505351].[68] https://mathworld.wolfram.com/MeijerG-Function.html.[69] S. R. Coleman 和 E. J. Weinberg，辐射修正是自发对称性破缺的起源，《物理评论D》7 (1973) 1888–1910。[70] E. J. Weinberg，辐射修正是自发对称性破缺的起源。博士论文，哈佛大学，1973。hep-th/0507214。[71] E. J. Weinberg，Coleman-Weinberg机制，Scholarpedia 10 (2015)，第7期 7484。修订版 # 150734，http://www.scholarpedia.org/article/Coleman-Weinberg mechanism。