arXiv:2303.10905v1 [math.OA] 20 Mar 2023

C^*代数的非周期动力学包含

JONATHAN TAYLOR

摘要

我们仿照 C^*代数的局部乘子代数，定义了 Hilbert 模的局部乘子模。我们利用局部乘子模的性质，将 C^*代数上由希尔伯特双模给出的非闭作用提升为局部乘子代数上的闭作用，并将这类闭作用的已知结果下推至相应的非闭作用。我们定义了非周期动力包含，并将其刻画为逆半群作用的交叉积。我们描述了这类包含的切片结构，并证明所有切片都可表示为逆半群作用中已有切片的线性组合。

1. 引言

构造有趣的 C^*代数，最常见的方法之一是从动力系统构造交叉积。给定一对 C^*代数 $A \subseteq B$，我们可以问B 是否以某种有意义的方式“作用”于 A，若是，能否用这些动力学显式描述 B 。若对 C^*代数 $A \subseteq B$不作任何额外限制，答案恐怕是否定的。因此，许多作者通过在包含 $A \subseteq B$ 上增添若干辅助条件来探讨这个问题，并在不同情形下给出了肯定答案。

迄今为止，这些辅助条件中有两个始终不可或缺。第一个条件是， A 应包含 B 的一个近似单位（非退化性）；第二个条件是， B 应由 A的正规化子作为一个 C^*-代数生成。包含 $A \subseteq B$ 的一个正规化子 是指满足以下条件的元素 $m \in B$： m^*Am 和 mAm^* 都包含在 A中。这样便可以考虑由正规化子构成的闭 A-子模，称为切片，而不会丢失关于 B 中未由这些正规化子编码的信息。这类配对的定义通常还包含另外两个要素，不过在相关论文中，这些条件往往是最常被修改的。通常要求 A 以某种方式在 B中极大，并要求存在某种条件期望 $P\colon B \to A$。不同作者对极大性的理解各异；许多论文基于相同条件得出更强的结果，或证明在较弱条件下也能得到类似结果。有时，表面上会以其他条件取代条件期望，但通常可以利用替代条件构造某种形式的条件期望。

最早尝试描述这类 C^*-代数对的工作之一，是 Kumjian [13] 和 Renault [22] 对交换 Cartan 子代数的研究。Renault 考虑了这样的对： $A \subseteq B$ 其中 A 是 B中的极大交换子代数（极大阿贝尔子代数），并且存在忠实条件期望 $P\colon B \to A$。结合 [13], 的结果, Renault 得以用扭曲群胚 C^*-代数来描述这些对，其中群胚 ´是 étale、局部紧、豪斯多夫、第二可数且有效的。后来 Exel [7] 进一步拓展了这一研究：他以虚拟极大性条件取代（极大阿贝尔子代数），从而将非交换 Cartan 子代数也纳入其中，并将其描述为逆半群上的 Fell 丛的约化截面代数。此后 Kwa´sniewski 和 Meyer 进一步拓展了这项工作

作者获得了德国学术交流服务中心（DAAD）资助项目 57450037 提供的奖学金。

在 [15], 中，他们证明 Exel 的 Cartan 对可描述为由闭且纯外作用产生的交叉积，并且还表明 Exel 的虚拟极大性条件等价于关于该包含的若干其他条件。

对偶 $A \subseteq B$ 还可以满足另一个条件，即非周期性； [14], [16], 和 [17]对此有更详细的探讨。该条件保证伪期望至多只有一个 $E\colon B \to I(A)$，也就是说，一个取值于 Hamana 的 A内射包中的条件期望。这些期望中有一个特别的子集，其取值于 A的局部乘子代数 $M_{\mathrm{loc}}(A)$；该代数嵌入 A 的内射包中（参见 [9]）。

本文旨在借鉴前述作者和论文的研究成果，同时对部分条件作出调整。我们将考察非周期的包含 $A \subseteq B$，并且其忠实条件期望取值于 A的局部乘子代数。由此产生的挑战之一是，条件期望$E\colon B \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 将 B 的一部分同构地映射到 $M_{\mathrm{loc}}(A)$的一个子代数中。这并不理想，因为包含 $A \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$ 的性质相当糟糕： $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 在 A上没有有趣的动力学。因此，我们将坚持采用一项技术条件，以限制 Choi [6]所描述的 E 的乘法域。这样可以确保 B 与 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 之间的“交集”尽可能小，也就是说，它恰好就是 A 本身。

本文中贯穿始终的一项主要工具，是将局部乘子代数的类似构造应用于希尔伯特双模。给定一个希尔伯特 A–B-双模 X，可以仿照局部乘子代数的构造，构造一个希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(A)$–$M_{\mathrm{loc}}(B)$-双模，称为的局部乘子模。我们沿着 Ara 和 Matthiew [1]的工作，证明了希尔伯特双模的局部乘子模的一些有用性质。我们还说明了双模特有的一些性质如何与局部乘子模的构造相互作用。

局部乘子模构造的主要应用，是将逆半群通过希尔伯特双模在一个 C^*-代数 A 上的非周期作用，转化为一个相应的、定义在逆半群上的 Fell 丛，其单位纤维为 $M_{\mathrm{loc}}(A)$。进而得到一个在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的逆半群作用并非显而易见，但可通过应用 [3]的主定理得出。随后我们可以证明，这个诱导作用在$M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上产生一个 Exel-Cartan 包含，因此可以将 [7], [15]的结果应用于这个诱导包含。最后我们证明，在再加上一项技术条件（即典范条件期望具有最小乘法定义域）后，诱导 Cartan 包含的大部分结构都能传递到我们关注的原始作用上。

致谢。 作者谨向博士生导师 Ralf Meyer 致以谢意，感谢他提供的所有帮助与专业知识。本文包含作者博士论文 [24]中的研究成果。

2. 局部乘子模与作用

仿照 a C^*-代数的局部乘子代数的构造（参见 [1,定义 2.3.1]），我们为 Hilbert C^*-模定义局部乘子模。我们回顾局部乘子代数的一些关键性质，包括 [1] 中的相关性质，以及通过简短论证可得的其他性质。我们还简要研究 C^*-代数与其局部乘子代数之间的关系，并说明其中一些性质如何推广到 Hilbert 模的情形。此外，我们讨论 Hilbert（双）模特有的一些性质，以及这些性质如何影响局部乘子模的性质。

2.1. 局部乘子代数。 在全文中， A 表示一个固定的 C^*代数，而 $\mathrm{I}_e(A)$ 表示 A 的本质理想按包含关系构成的格。注意，$\mathrm{I}_e(A)$是有向的，因为两个本质理想的交本身也是本质理想。

定义 2.1 ([1, 定义 2.3.1])。 设 $I, J \in \mathbf{I}_e(A)$ 且 $J \subseteq I$。限制映射$M(I) \to M(J)$是单射，这些限制映射在本质理想网上构成归纳极限

$$M_{\mathrm{loc}}(A) := \varinjlim_{I \in \mathcal{I}_e(A)} M(I),$$

我们称其为 A的局部乘子代数。

根据定义，对于所有本质理想 $I \lhd A$，乘子代数 $M(I)$ 都典范地嵌入到 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中。此外，如果 $J \lhd A$ 不是本质理想，则理想 $J \oplus J^{\perp}$ 是本质理想，并且我们有 $M(J) \subseteq M(J) \oplus M(J^{\perp}) = M(J \oplus J^{\perp})$，它随后包含于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$中。由此，可以将 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 视为由 A的理想上的乘子生成的 C^*代数。考虑到 A 的理想与 A的谱 $\hat{A}$ 的开子集一一对应，我们看到 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 由定义在这些开子集上的乘子稠密张成，因此得名局部。

引理 2.2 ([1, 引理 2.3。2])。 设 $I \lhd M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是一个理想。那么， $I \cap A = \{0\}$ 当且仅当 $I = 0$。此外，如果 I 是 $M_{\mathrm{loc}}(A)$的本质理想，那么 $I \cap A$ 是 A的本质理想。

引理 2.3 ([1, 引理 2.3。6])。 对于每个 $I \in \mathcal{I}_e(A)$ ，我们都有 $M_{\mathrm{loc}}(I) = M_{\mathrm{loc}}(A)$。设$(A_i)$是一个由 C^*-代数组成的族。那么

$$M_{\mathrm{loc}}\left(\bigoplus_i A_i\right) = \prod_i M_{\mathrm{loc}}(A_i).$$

这里， C^*-代数的乘积 $\prod_{i \in I} A_i$ A_i 由元素的有界族$(a_i)_{i \in I}$组成；也就是说，每个 a_i 都是 C^*-代数 A_i中的一个元素，并且存在常数 $C \in \mathbb{R}$，使得对所有 $i \in I$都有 $||a_i|| \leqslant C$ 。这不同于将这些 A_i视为集合时的笛卡尔积，因为该乘积可能包含无界族。此有界性条件是确保乘积具有范数所必需的，即上确界范数 $||(a_i)_{i \in I}|| := \sup_{i \in I} ||a_i||$。

在 $A = C_0(U)$ 为交换 C^*-代数的情形下，本质理想具有如下形式：对于稠密开子集 $V \subseteq U$，有 $C_0(V)$；因此， A的局部乘子代数会丢失每个稠密开 $V \subseteq U$对应的 ∂V 的信息。在非交换情形下，可以将关于本质理想 $I \in \mathbf{I}_e(A)$ 的商 A/I 视为 I的“边界”。引理 2.3 表明，即使 A/I 非平凡，商 $M_{\mathrm{loc}}(A)/M_{\mathrm{loc}}(I)$ 也总是零。

引理 2.4。 设 $I \lhd A$ 是一个理想。则 $A \cap M_{\mathrm{loc}}(I) = A \cap M(I)$，其中交集是在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中取的。

证明。 由于 $I \oplus I^{\perp}$ 是 A 中的本质理想，我们有包含关系 $A \subseteq M(I \oplus I^{\perp}) = M(I) \oplus M(I)^{\perp}$ 属于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$。左、右直和项分别嵌入正交直和项 $M_{\mathrm{loc}}(I)$ 和 $M_{\mathrm{loc}}(I^{\perp})$，因此 $A \cap M_{\mathrm{loc}}(I) \subseteq (M(I) \oplus M(I^{\perp})) \cap M_{\mathrm{loc}}(I) = M(I)$。于是 $A \cap M_{\mathrm{loc}}(I) = A \cap A \cap M_{\mathrm{loc}}(I) \subseteq A \cap M(I)$。由于 $M(I) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(I)$，反向包含成立。□

引理 2.5。 设 $I \lhd M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是一个理想。则 $I \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A \cap I)$。

证明。 引理 2.3 蕴含 $M_{\mathrm{loc}}(A) = M_{\mathrm{loc}}(\tilde{I} \cap A) \oplus M_{\mathrm{loc}}((\tilde{I} \cap A)^{\perp})$。令 $K := \tilde{I} \cap M_{\mathrm{loc}}((\tilde{I} \cap A)^{\perp})$。这是 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中的一个理想，因此引理 2.2 给出 $K \cap A = \{0\}$ 当且仅当 $K = \{0\}$。接着由引理 2.4 可得 $K \cap A = \tilde{I} \cap M_{\mathrm{loc}}((\tilde{I} \cap A)^{\perp}) \cap A = (\tilde{I} \cap A) \cap M((\tilde{I} \cap A)^{\perp}) = \{0\}$。因此， I 必包含于 $M_{\mathrm{loc}}((I \cap A))$。□

2.2. **局部乘子模**。设 A 和 B 为 C^*-代数。若 X 是一个 Hilbert A–B-双模，我们用单尖括号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示右内积，用双尖括号 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$表示左内积。我们将源理想和值域理想分别记为$s(X) = \text{span}\{\langle x,y\rangle\colon\ x,y\in X\}$和 $r(X) = \text{span}\{\langle\langle x,y\rangle\rangle\colon\ x,y\in X\}$。根据这些理想的定义，双模 X 总是在 $s(X)$ 和 $r(X)$之间诱导 Morita 等价。

双模结构还使我们能够根据值域理想和源理想对所有子双模进行分类。若 $Y\subseteq X$ 是一个 Hilbert A–B-子双模，则很容易看出 $Y\subseteq r(Y)\cdot X$ 和 $Y\subseteq X\cdot s(Y)$。事实上，这里是等号，因为对于 $x\in X$ 和 $y,\ z\in Y$，我们有 $x\cdot\langle y,\ z\rangle = \langle\langle x,\ y\rangle\rangle\cdot z\in A\cdot Y\subseteq Y$，所以 $X\cdot s(Y)\subseteq Y$（$r(Y)\cdot X\subseteq X$ 也同理）。

对于 Hilbert A–B-双模 X，我们用 $X^* = \{x^*\colon\ x\in X\}$ 表示它的对偶模。对偶模 X^* 具有 B–A- 双模结构。X^* 中的加法定义为 $x^*+y^* = (x+y)^*$，其中 x、$y\in X$；左侧 B-作用定义为 $b\cdot x^* = (x\cdot b^*)^*$，其中 $b\in B$ 和 $x\in X$；右侧 A-作用定义为 $x^*\cdot a = (a^*\cdot x)^*$，其中 $a\in A$ 和 $x\in X$。左、右内积分别定义为 $\langle\langle x^*,\ y^*\rangle\rangle = \langle x,\ y\rangle$ 和 $\langle x^*,\ y^*\rangle = \langle\langle x,\ y\rangle\rangle$。对偶双模满足 $X\otimes_B X^*\cong r(X)$ 和 $X^*\otimes_A X\cong s(X)$；相应的映射分别在初等张量上定义为 $x\otimes y^*\mapsto\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$ 和 $x^*\otimes y\mapsto\langle x,\ y\rangle$，其中 $x,\ y\in X$。

我们总可以将 A 视为配备典范双模结构，该结构由左乘和右乘给出，并带有内积 $\langle a,\ b\rangle = a^*b$和 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle = ab^*$。于是，$A$ 的乘子代数 $M(A)$ 可视为从左作用时相对于右内积可伴随的算子 $A\to A$（见 [18,定理 2.4]）。若想深入了解希尔伯特模，我们推荐参考文献 [18]。

记号 2.6。设 X 和 Y 是右 Hilbert B-模。秩一算子 $X\to Y$具有如下形式：$z\mapsto y\cdot\langle x,\ z\rangle$其中 $x,\ z\in X$且 $y\in Y$。紧算子 $X\to Y$ 组成的空间 $\mathrm{K}(X,\ Y)$ 是秩一算子 $X\to Y$张成空间在算子范数 $||T|| = \sup_{||x||=1}||Tx||$下的完备化。我们用 $\mathrm{L}(X,\ Y)$表示可伴随算子组成的空间 $X\to Y$。若 X 和 Y是 Hilbert A–B-双模，并且我们希望区分左可伴随算子和右可伴随算子，则记作

$$\mathrm{K}_R(X,\ Y) = \{f\colon\ X\to Y | f\text{ 在右希尔伯特模结构下是紧的}\}\mathrm{L}_R(X,\ Y) = \{f\colon\ X\to Y | f\text{ 在右希尔伯特模结构下是可伴随的}\}\mathrm{K}_L(X,\ Y) = \{f\colon\ X\to Y | f\text{ 在左希尔伯特模结构下是紧的}\}\mathrm{L}_L(X,\ Y) = \{f\colon\ X\to Y | f\text{ 在左希尔伯特模结构下是可伴随的}\}.$$

当 X 和 Y 是双模，且未指定 L 或 R 的下标（如 $\mathrm{K}(X,\ Y)$ 和 $\mathrm{L}(X,\ Y)$）时，我们假定它们指的是与 X 和 Y的右希尔伯特模结构相容的映射空间。若 $X = Y$，则对于 $* = L,\ R$，空间 $\mathrm{K}_*(X)$ 和 $\mathrm{L}_*(X)$是 C^*-代数，其乘法由复合给出，*-运算由取伴随给出，并配备算子范数。在这种情况下，根据 [18, 定理 2.4]，有 $\mathrm{L}_L(X)\cong M(\mathrm{K}_L(X))\cong M(s(X))$和 $\mathrm{L}_R(X)\cong M(\mathrm{K}_R(X))\cong M(r(X))$。

设 X是一个希尔伯特 A–B-双模。空间 $\mathrm{L}_R(s(X),X)$ 通过如下定义，具有 $M(r(X))$–$M(s(X))$-双模结构：

$$(\tau\cdot T\cdot\sigma)a = \tau(T(\sigma a)),$$

对于 $\tau\in M(r(X))$、$\sigma\in M(s(X))$ 和 $a\in s(X)$。对于 $S,T\in\mathrm{L}_R(s(X),X)$，我们看到 S^*T是 $s(X)$上的可伴随算子，因此唯一确定了 $s(X)$的一个乘子 $\langle S,T\rangle$。类似地，ST^* 定义了 X 上的一个可伴随算子，进而唯一确定了 $r(X)\cong X\otimes_B X^*$上的一个乘子，我们将其记为 $\langle\langle S,T\rangle\rangle$。映射 $(S,T)\mapsto\langle S,T\rangle$和 $(S,T)\mapsto\langle\langle S,T\rangle\rangle$在 $\mathrm{L}_R(s(X),X)$上定义了一个希尔伯特 $M(r(X))$–$M(s(X))$-双模结构。

我们在 $\mathrm{L}_L(r(X),X)$ 上定义一个 Hilbert $M(r(X))$–$M(s(X))$ 双模结构；类似地，这一结构可通过使用后缀记法表示 $\mathrm{L}_L(r(X),X)$ 中的可伴随映射来简洁地表示：对于 $P\in\mathrm{L}_L(r(X),X)$ 和 $a\in r(X)$，映射 P：在 a 处取值为 $r(X)\to X$，记作 aP。

对于 $\tau \in M(r(X))$、$\sigma \in M(s(X))$ 和 $P \in \mathrm{L}_L(r(X), X)$，我们将 $\tau \cdot P \cdot \sigma$ 定义为映射 $a \mapsto ((a\tau)P)\sigma$。这为 $\mathrm{L}_L(r(X), X)$ 赋予了一个 $M(r(X))$–$M(s(X))$ 双模结构。对于 $P, Q \in \mathrm{L}_L(r(X), X)$，复合 P^*Q 和 PQ^* 分别定义了唯一的乘子 $\langle P, Q\rangle \in M(s(X))$ 和 $\langle\langle P, Q\rangle\rangle \in r(X)$，从而在 $\mathrm{L}_L(r(X), X)$ 上诱导出一个 Hilbert $M(r(X))$–$M(s(X))$ 双模结构。

存在两个同构 $X \cong \mathrm{K}_R(s(X), X)$ 和 $X \cong \mathrm{K}_L(r(X), X)$，它们分别将$x \in X$ 映射为 x的左生成算子和右生成算子。也就是说，$x \mapsto |x\rangle \in \mathrm{K}_R(s(X), X)$，其中 $|x\rangle$ 是将 $b \in s(X)$ 映射到 $|x\rangle b = x \cdot b$的函数。类似地，$\langle\langle x| \in \mathrm{K}_L(r(X), X)$ 是将 $a \in r(X)$ 映射到 $a\langle\langle x| := a \cdot x$的算子。分别用 $\Xi_R \colon \mathrm{K}_R(s(X), X) \to X$和 $\Xi_L \colon \mathrm{K}_L(r(X), X) \to X$表示这两个同构的逆映射。

引理 2.7。设 X是一个 *Hilbert* A–B-双模。那么，$\mathcal{L}_R(s(X), X)$ 和 $\mathcal{L}_L(r(X), X)$作为 *Hilbert* $M(s(X))$–$M(r(X))$-双模，经由将$T \in \mathcal{L}_R(s(X), X)$ 映射到算子 $\check{T} \colon r(X) \to X$ 的映射而等距同构，其中该算子由下式给出

$$r(X) \ni a \mapsto \Xi_R(aT) \in X.$$

该映射的逆映射由以下方式给出：将 $P \in \mathcal{L}_L(r(X), X)$ 映射到由下式给出的映射 $\hat{P} \in \mathcal{L}_R(s(X), X)$

$$s(X) \ni b \mapsto \Xi_L(Pb) \in X.$$

证明。固定 $T \in \mathrm{L}_R(s(X), X)$。由于 X 和 $\mathrm{K}_R(s(X), X)$ 同构，它们具有相同的值域理想。因此，映射 $a \mapsto \Xi_R(aT)$ 是良定义的，因为 $aT \in r(X) \cdot \mathrm{L}_R(s(X), X) = \mathrm{K}_R(s(X), X)$。为证明 $\check{T}$ 可伴随，固定 $x \in X$ 和 $a \in r(X)$。那么

$$\langle\langle a\check{T}, x\rangle\rangle = \langle\langle \Xi_R(aT), x\rangle\rangle = \langle\langle aT, |x\rangle\rangle\rangle,$$

这是由 $aT|x\rangle^* = a(|x\rangle \circ T^*)^*$ 指定的 $r(X)$ 上的唯一乘子（注意，这确实是一个乘子，因为我们可以将其表示为可伴随映射的复合）。因此，$\check{T}$ 的伴随为 $X \to r(X)$，它将 x 映射到与 $|x\rangle \circ T^*$ 相关联的 $r(X)$ 的唯一乘子。它属于 $r(X) = r(X)^* r(X) = \mathrm{K}(r(X))$，而不只是 $M(r(X))$，因为$|x\rangle$ 是一个紧算子，所以该复合也是如此。

对于 $S, T \in \mathrm{L}_R(s(X), X)$和 $x \in X$，根据定义有 $x\langle S^*, T\rangle = x(S^* \circ T)$，这恰好是

$$\Xi_R((|x\rangle \circ S^*) \circ T) = \Xi_R(|x\rangle S^* T) = \Xi_R(|x\rangle)\langle S, T\rangle = x\langle S, T\rangle.$$

因此 $S^* \circ T = \check{S}^* \circ \check{T}$，由此 $\langle S, T\rangle = \langle \check{S}, \check{T}\rangle$，且赋值 $T \mapsto \check{T}$是等距的。

最后我们证明 $\check{\hat{P}} = P$ 对所有 $P \in \mathrm{L}_L(r(X), X)$均成立。这将证明映射 $\check{} \circ \hat{} \colon T \mapsto T$ 是满射，因此是同构，而映射 $P \mapsto \hat{P}$是它的逆映射。固定 $\check{P} \in \mathrm{L}_L(r(X), X)$。对所有 $a \in r(X)$，我们有 $a\hat{P} = \Xi_R(a\hat{P})$。这是 X中满足 $\langle\langle \Xi_R(a\hat{P})| = a\hat{P}$的唯一元素 $\check{}$。因此，$\Xi_R(a\hat{P})b$是 X中满足 $\check{\Xi}_R(a\hat{P})b = a\hat{P}b = a\Xi_L(Pb) = \Xi_L(aPb)$（对所有 $b \in s(X)$）的唯一元素。因此 $a\hat{P} = \Xi_R(a\hat{P}) = aP\check{\hat{}}$，由此 $P = P$。□

引理 2.7 使我们能够将 $\mathrm{L}_R(s(X), X)$ 和 $\mathrm{L}_L(r(X), X)$ 视为 Hilbert 模的乘子代数的一个类比。

若 $K \subseteq J \lhd B$ 都是本质理想，则任意可伴随算子 $T \in \mathrm{L}(J, X \cdot J)$ 都限制为映射 $T|_K \colon K \to X \cdot J$。此外，$T|_K$ 的值域包含于 $X \cdot K$，因为每个 $a \in K$ 都可写为 $a = a_1 a_2$，其中 $a_1, a_2 \in K$，并且有 $T|_K a = (Ta_1)a_2 \in X \cdot J \cdot K = X \cdot K$。限制 $T|_K$ 是从 $K \to X \cdot K$ 到 K 的可伴随算子，其伴随为 $T^*|_{X \cdot K}$，因为 $T^*(X \cdot K) = T^*(X \cdot J) \cdot K \subseteq K$，其值也属于 K。因此，算子的限制给出了一个模同态 $\mathrm{L}(J, X \cdot J) \to \mathrm{L}(K, X \cdot K)$。若 $T \in \mathrm{L}(J, X \cdot J)$ 在 K 上限制为零算子，则 $\{0\} = T^*(X \cdot K) = T^*(X \cdot J) \cdot K$，因此 $T^*(X \cdot J)$ 是湮灭 K 的理想。但由于 K 在 J 中是

本质的，故 $T^* = 0$。特别地， $T = 0$ 当且仅当 $T|_K = 0$，且映射 $\mathrm{L}(J,\ X \cdot J) \to \mathrm{L}(K,\ X \cdot K)$ 是单射。这些限制映射在 B 的本质理想上构成一个以反向包含为序的归纳系统： $I \leqslant J$ 当且仅当 $J \subseteq I$。

定义 2.8。 设 X 是一个右 Hilbert B-模。我们将 X 的（右）局部乘子模 定义为归纳极限

$$X_{\mathrm{loc}} := \varinjlim_{J \in \mathcal{I}_e(B)} \mathcal{L}_R(J, X \cdot J)$$

该归纳极限取遍本质理想 $J \lhd B$。

类似地，若 X 是一个左 Hilbert A-模，我们将 X 的（左）局部乘子模定义为

$${}_{\mathrm{loc}}X := \varinjlim_{I \in \mathcal{I}_e(A)} \mathcal{L}_L(I, I \cdot X).$$

考虑情形 $X = B$，其具有由乘法继承的典范 B-双模结构，我们有 $\mathrm{L}_R(I, B \cdot I) = \mathrm{L}_R(I, I) = M(I) = \mathrm{L}_L(I, I) = \mathrm{L}_L(I, I \cdot B)$，因此$B_{\mathrm{loc}} = {}_{\mathrm{loc}}B = M_{\mathrm{loc}}(B)$，这些构造推广了局部乘子代数。

引理 2.9。 设 X 是一个右 *Hilbert* B-模。对于每个理想 $J \lhd B$，存在一个左 *Hilbert* B-模同构$\mathcal{L}_R(J, X \cdot J)^* \cong \mathcal{L}_L(J, J \cdot X^*)$。特别地$(X_{\mathrm{loc}})^* \cong {}_{\mathrm{loc}}(X^*)$。

证明。 对于 $T \in \mathrm{L}_R(J,\ X \cdot J)$，定义 $S_T \colon J \to J \cdot X^* = (X \cdot J)^*$ by $S_T a := (Ta^*)^*$。于是，映射 $T \mapsto S_T$在 $\mathrm{L}_R(J,\ X \cdot J)$ 和 $\mathrm{L}_L(J,\ J \cdot X^*)$ 之间给出一个反同构。此外，这些反同构与归纳极限中的限制映射相协调，因此归纳极限同构。□

以下许多结果都可以借助引理 2.9 或对称性论证推广到左 Hilbert 模。

引理 2.10。 设 X 是一个右 *Hilbert* B-模。对于任意 $J \in \mathcal{I}_e(B)$，有 $(X \cdot J)_{\mathrm{loc}} = X_{\mathrm{loc}}$。

证明。 这是因为 J 的本质理想构成的集合在 $\mathrm{I}_e(A)$ 中共尾，而归纳极限正是沿着该集合取的。□

当 X 是希尔伯特双模时，所有子双模都具有 $X \cdot J$ 的形式，其中 J 是某个理想。特别地，子双模 $Y \subseteq X$ 在 X 中具有零正交补，当且仅当 Y 的源理想是 X 的源中的本质理想。在双模的情形下，这意味着任何具有零正交补的子双模的局部乘子模都等于整个原始模的局部乘子模。

推论 2.11. 对于任意理想 $J \lhd B$，我们有 $X_{\mathrm{loc}} = (X \cdot (J \oplus J^{\perp}))_{\mathrm{loc}}$。

Le引理 2.12. 设 X 和 Y 是右希尔伯特 B-模。则 $(X \oplus Y)_{\mathrm{loc}} = X_{\mathrm{loc}} \oplus Y_{\mathrm{lo}}$ c·

证明。 这是因为映射 $\mathrm{L}(J, X \cdot J) \oplus \mathrm{L}(J, Y \cdot J) \to \mathrm{L}(J, (X \oplus Y) \cdot J)$, $(T, S) \mapsto T + S$ 是一个同构，并与所有理想 $J \lhd B$ 的限制映射相协调。□

引理 *2.13*。 *</style}*模块 X_{loc} 是一个右 *Hilbert* $M_{\mathrm{loc}}(B)$-模。

证明。 本节开头的论证表明，对于每个本质理想 $J \lhd B$，$\mathrm{L}_R(J, X \cdot J)$ 都是一个右希尔伯特$M(J)$-模。归纳极限结构得以保留，因为所有归纳极限映射都是算子的限制，显然会保留右作用和内积。因此， X_{loc}上诱导出一个右希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(B)$-模结构。□

在希尔伯特双模中，乍看之下，对子双模取正交补有两种方式（每种内积对应一种）。若 $Y \subseteq X$ 是希尔伯特双模 X的希尔伯特子双模，且 $x \in X$ 满足对所有 $y \in Y$都有 $\langle x, y\rangle = 0$，那么我们也可得出，对所有 y都有 $\langle\langle y, x\rangle\rangle \cdot z = y\langle x, z\rangle = 0$。因此，对于所有 $y \in Y$，$\langle\langle y, x\rangle\rangle$属于值域理想 $r(Y)$ 的湮灭子。然而，内积 $\langle\langle y, x\rangle\rangle$ 也必定属于$r(Y)$，因为根据科恩–休伊特分解定理（例如，参见 [18, 引理 4.4]），总可以将 $y = ay'$ 写成某个 $a \in r(Y)$ 与 $y' \in Y$的形式。因此，若 $x \in X$ 在右内积中湮灭 Y，它在左内积中也会如此。对称地可知，相对于两种内积的正交补相同。我们将二者都记为 $Y^\perp$。

引理 2.14. 设 X 是一个希尔伯特 A–B 双模，$Y \subseteq X$ 是一个闭希尔伯特子双模。那么 $(Y^\perp)_{\mathrm{loc}} = (Y_{\mathrm{loc}})^\perp$ 和 $X_{\mathrm{loc}} = Y_{\mathrm{loc}} \oplus Y_{\mathrm{loc}}^\perp$。

证明。 我们有 $Y = X \cdot s(Y)$，因此由引理 2.12 可得

$$X_{\mathrm{loc}} = (X \cdot (s(Y) \oplus s(Y)^\perp))_{\mathrm{loc}} = Y_{\mathrm{loc}} \oplus (X \cdot s(Y)^\perp)_{\mathrm{loc}}.$$

于是，右侧直和项必定同时等于 $(Y^\perp)_{\mathrm{loc}}$ 和 $(Y_{\mathrm{loc}})^\perp$。 □

引理 2.15. 设 X 是一个希尔伯特 A–B 双模，$J \lhd B$ 是一个理想。那么 $(X \cdot J)_{\mathrm{loc}} = X_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J)$。

证明。 首先，我们证明 $(X\cdot J)_{\mathrm{loc}} \subseteq X_{\mathrm{loc}}\cdot M_{\mathrm{loc}}(J)$。取一个本质理想 $J' \lhd B$，并定义$J'_{\text{本质}}$：$= JJ' \oplus (JJ')^\perp$，注意到 $J'_{\text{本质}}$是 A 的一个本质理想。取 $\xi \in \mathbf{L}(J'_{\text{本质}}\ (X \cdot J) \cdot J'_{\text{本质}})$。于是 $\xi = \xi|_{JJ'} \oplus \xi|_{(JJ')^\perp}$，且由于 $JJ'_{\mathrm{ess}} = JJ'$，我们有 $\xi|_{(JJ')^\perp} = 0$，从而得到 $\xi = \xi \cdot 1_J$。因此

$$\xi \in \mathcal{L}(J'_{\mathrm{ess}}, (X \cdot J)J'_{\mathrm{ess}}) \cdot M_{\mathrm{loc}}(J) \subseteq (X \cdot J)_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J).$$

由此得到 $(X \cdot J)_{\mathrm{loc}} \subseteq X_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J)$。

引理 2.12 和 2.14 共同推出 $X_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J) \oplus X_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J^\perp) = X_{\mathrm{loc}} =(X \cdot J)_{\mathrm{loc}} \oplus (X \cdot J^\perp)_{\mathrm{loc}}$。对于 $\xi \in X_{\mathrm{loc}}$、$\tau \in M_{\mathrm{loc}}(J)$ 和 $\eta \in (X \cdot J^\perp)_{\mathrm{loc}}$，我们有

$$\langle \eta, \xi \cdot \tau\rangle = \langle \eta, \xi\rangle\tau \in \langle (X \cdot J^\perp)_{\mathrm{loc}}, X_{\mathrm{loc}}\rangle \cdot M_{\mathrm{loc}}(J).$$

由上述论证可知，集合 $\langle (X \cdot J^\perp)_{\mathrm{loc}},\ X_{\mathrm{loc}}\rangle$包含于 $M_{\mathrm{loc}}(J^\perp)$，因此内积 $\langle \eta,\ \xi \cdot \tau\rangle$包含于 $M_{\mathrm{loc}}(J^\perp) \cdot M_{\mathrm{loc}}(J)$，而根据引理 2.3，$M_{\mathrm{loc}}(J^\perp) \cdot M_{\mathrm{loc}}(J)$为零。因此必有 $X_{\mathrm{loc}} \cdot M_{\mathrm{loc}}(J) \subseteq (X \cdot J)_{\mathrm{loc}}$。 □

引理 2.16。 设 X 是一个 ***Hilbert*** A–B-双模。那么 X_{loc} 和 局部X 是 ***Hilbert*** $M_{\mathrm{loc}}(A)$–$M_{\mathrm{loc}}(B)$-双模。

证明。 我们证明 X_{loc} 是一个左 $M_{\mathrm{loc}}(A)$-希尔伯特模。关于 $_{\mathrm{loc}}X$ 的情形可用对称论证得出，也可由引理 2.9 得出。对于每个本质理想 $J \lhd B$，令 $I_J := r(X \cdot J) \oplus r(X \cdot J)^\perp$。那么 I_J是 A中的一个本质理想，并且我们断言 $I_J \cdot X = X \cdot J$。为此，注意到 I_J 满足 $I_J \cdot X = r(X \cdot J) \cdot X \oplus r(X \cdot J)^\perp \cdot X$。$r(X \cdot J)^\perp \cdot X \cdot J$的值域理想是 $r(X \cdot J)^\perp \cdot r(X \cdot J) = \{0\}$，因此 $r(X \cdot J)^\perp \cdot X \subseteq (X \cdot J)^\perp$。由于 J在 $s(X)$中是本质的，我们看到 $s((X \cdot J)^\perp) \cap J = \{0\}$ 蕴含 $s((X \cdot J)^\perp) = \{0\}$，从而$(X \cdot J)^\perp = \{0\}$且 $I_J \cdot X = X \cdot J$。

对于 $\tau \in M(I_J)$和 $T \in \mathbf{L}_R(J, X \cdot J)$，我们定义 $(\tau T)a := \tau(Ta)$。这个双线性映射与归纳系统中的映射相容，从而给出了 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 对X_{loc}的左作用。对于 $T, S \in \mathbf{L}_R(J, X \cdot J)$，我们将左内积 $\langle\langle T, S\rangle\rangle$定义为$M(r(X \cdot J))$中对应于 TS^*的元素，其中对应关系由源自 $X \cdot J \cong \mathbf{K}_R(J, X \cdot J)$的同构 $\mathbf{L}(X \cdot J) \cong M(r(X \cdot J))$给出。

我们也可以从构造中清楚地看出，对于所有 $T, S, P \in X_{\mathrm{loc}}$，都有 $\langle\langle T, S\rangle\rangle P = TS^*P = T\langle S, P\rangle$，这确保了左、右内积之间必要的相容性。□

现在我们证明，如果 X 是希尔伯特双模，那么左、右局部乘子模相同。

命题 2.17。 设 X 是一个希尔伯特 A–B-双模。对于每个理想 $J \lhd s(X)$ 及相应的理想 $I_J := r(X \cdot J)$，引理2.7中的希尔伯特 $M(I_J)$–$M(J)$-双模同构$\mathcal{L}_R(J, X \cdot J) \cong \mathcal{L}_L(I_J, I_J \cdot X)$ 保持X_{loc} 和局部X的归纳极限结构。特别地，局部$X \cong X_{\mathrm{loc}}$。

证明。 令 $\mathrm{L}_R(J, X\cdot J) \ni T \mapsto \check{T} \in \mathrm{L}_L(I_J, I_J \cdot X)$ 表示引理 2.7 中的同构。

固定一个本质理想 $J' \lhd J$，并注意到 $I' = r(X \cdot J')$ 是 I中的本质理想。若 $T \in \mathrm{L}_R(J, X \cdot J)$，则 $T|_{J'}$给出算子 $T|_{J'} \in \mathrm{L}_L(I', I' \cdot X)$。对于任意 $a \in I'$和 $b \in J'$，我们有 $[\widecheck{aT|_{J'}}]b = aT|_{J'}b = aTb = [a\check{T}]b$，因此 $\widecheck{T|_{J'}} = \check{T}|_{I'}$。于是，由引理 2.7 得到的同构 $\mathrm{L}_R(J, X \cdot J) \cong \mathrm{L}_L(I_J, I_J \cdot X)$ 保留归纳极限结构，并诱导出$\mathrm{loc}X$ 与 X_{loc}之间的同构。 □

命题 2.17 使我们可以省略双模的局部乘子模中表示左侧和右侧的前缀。原则上，它们作为集合并不相同，但我们将通过上述指定的同构将二者视为相同。这一问题在局部乘子代数的情形中并不存在，因为局部乘子代数（视为希尔伯特双模时）是对称的，也就是说， $M_{\mathrm{loc}}(A)^* = M_{\mathrm{loc}}(A)$ 明确地。

引理 2.18. 设 X 是一个希尔伯特 A–B-双模，且 $Y \subseteq X_{\mathrm{loc}}$ 是 X_{loc}的一个希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(A)$–$M_{\mathrm{loc}}(B)$-子双模。那么 $Y = \{0\}$ 当且仅当 $Y \cap X = \{0\}$。

证明。 假设 $X \cap Y = \{0\}$。根据希尔伯特子双模的分类，我们有 $Y = X_{\mathrm{loc}} \cdot s(Y)$，因此

$$\begin{aligned}\{0\} &= X \cap Y \\ &= X \cap (X_{\mathrm{loc}} \cdot s(Y)) \\ &\supseteq (X \cdot (s(Y) \cap B)) \cap (X_{\mathrm{loc}} \cdot s(Y)) \\ &= X \cdot (s(Y) \cap B).\end{aligned}$$

因此 $s(Y) \cap B \subseteq s(X)^\perp$，由引理 2.5 可得 $s(Y) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(s(X)^\perp)$。于是，根据引理 2.15，有 $Y = X_{\mathrm{loc}} \cdot s(Y) \subseteq X_{\mathrm{loc}} M_{\mathrm{loc}}(s(X)^\perp) = (X \cdot s(X)^\perp)_{\mathrm{loc}} = \{0\}$。 □

引理 2.18 是包含 $A \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$时理想检测的双模类比。值得注意的是，这个论证要求 X 是希尔伯特双模，因为若不满足这一条件，通常就不再成立： $Y = X \cdot s(Y)$ （例如，希尔伯特空间的所有闭子空间都有相同的源理想 $\mathbb{C}$）。这对我们而言不会构成问题，因为在后续各节中，我们将只考察希尔伯特双模。

尽管局部乘子模的构造与理想的右乘相交换（如引理 2.15 所示），但希尔伯特双模的平衡张量积并非如此。由此产生的一个特殊结果是，若 X 是一个 Morita 等价 A–B-双模，则 X_{loc} 并不总能在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 与 $M_{\mathrm{loc}}(B)$之间诱导 Morita 等价。这种失败是因为 X_{loc} 未必是满的，即使 X 是满的。

例 2.19. 设 $X = \mathrm{H}$ 是一个无限维希尔伯特空间。则 H 在 $\mathbb{C}$ 与 H 上的紧算子代数 K(H) 之间诱导 Morita 等价，其中 $s(\mathrm{H}) = \mathbb{C}$ 和 $r(\mathrm{H}) = \mathrm{K}(\mathrm{H})$。显然，$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}} = \mathrm{L}(\mathbb{C}, \mathrm{H}) \cong \mathrm{H}$，因为 $\mathbb{C}$ 是单且含幺的。因此，$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^*_{\mathrm{loc}} \cong \mathrm{K}(\mathrm{H})$。然而， $(\mathrm{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^*)_{\mathrm{loc}} \cong \mathrm{K}(\mathrm{H})_{\mathrm{loc}} = \mathrm{B}(\mathrm{H})$，即 H 上有界算子代数（视为 $M_{\mathrm{loc}}(\mathrm{K}(\mathrm{H})) = \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 上的希尔伯特双模），它严格大于 K(H)，因为 H 是无限维的。

命题 2.20. 设 X 是一个希尔伯特 A–B 双模，且 Y 是一个希尔伯特 B–C 双模。存在一个等距双模映射 $\Phi: X_{\mathrm{loc}} \otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}} \to (X \otimes_B Y)_{\mathrm{loc}}$，它延拓典范嵌入 $X \otimes_B Y \subseteq X_{\mathrm{loc}} \otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}}$。

证明。 固定 $J \in \mathrm{I}_e(B)$和 $K \in \mathrm{I}_e(C)$。于是，存在 $J' \in \mathrm{I}_e(C)$使得 $J \cdot Y = Y \cdot J'$，因此 $X \cdot J \otimes_B Y \cdot K = X \otimes_B J \cdot Y \cdot K = X \otimes_B Y \cdot J'K$。固定 $\xi \in \mathrm{L}(J, X \cdot J)$

以及 $\eta \in \mathrm{L}(K,\ Y\cdot K)$。用 $\mathrm{mult}_{J'K,\ Y}$: $J'K\otimes_B Y \to J'K\cdot Y$表示实现 B在 Y上的左乘的酉映射。将 η与 $\eta|_{J'K}\in\mathrm{L}(J'K,\ Y\cdot J'K)$等同，并定义

$$\varphi_{\xi,\eta} := (\xi\otimes 1)\circ \mathrm{mult}^{-1}_{J'K,Y}\circ\eta : J'K \to (X\otimes_B Y)J'K.$$

这是一个可伴随映射，因为 $\xi\otimes 1$、$\mathrm{mult}_{J'K}$、$_Y$ 和 η 各自都是可伴随的。我们声称存在一个双模同态 Φ: $X_{\mathrm{loc}}\otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}} \to (X\otimes_B Y)_{\mathrm{loc}}$，它将初等张量 $\xi\otimes\eta$ 映射为$\varphi_{\xi、\ \eta}$，其中 $\xi\in\mathrm{L}(J、\ X\cdot J)$ 和 $\eta\in\mathrm{L}(Y、\ Y\cdot K)$。首先，根据定义可知，对于 $\tau\in M(r(X\cdot J))$、$\omega\in M(J\cap r(Y\cdot J'K))$ 和 $\sigma\in M(J'K)$，有$\varphi_{\tau\xi\omega、\ \eta\sigma} = \tau\varphi_{\xi、\ \omega\eta}\sigma$。因此，赋值 $(\xi、\eta)\mapsto\varphi_{\xi、\ \eta}$ 保持平衡张量积结构，且 Φ 将是一个双模同态。为说明该赋值是等距的，考虑上述 J'，并固定 $\xi_1、\ \xi_2\in\mathrm{L}(J、\ X\cdot J)$ 和 $\eta_1、\ \eta_2\in\mathrm{L}(J'K、\ Y\cdot J'K)$。对于 $b\in J'K$，我们计算

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_{\xi_1,\eta_1},\varphi_{\xi_2,\eta_2}\rangle(b) &= \varphi^*_{\xi_1,\eta_1}\varphi_{\xi_2,\eta_2}(b)\\
&= (\eta_1^*\circ\mathrm{mult}_{J'K,Y}\circ\xi_1^*\otimes 1)(\xi_2(a)\otimes y), \qquad \text{where } a\cdot y=\eta_2(b),\\
&= \eta_1^*(\xi_1^*\xi_2(a)y)\\
&= \eta_1^*\xi_1^*\xi_2\eta_2(b)\\
&= \langle\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\rangle(b).
\end{aligned}$$

最后，对于 $x\in X、\ y\in Y$ 和 $c\in C$，我们有 $\varphi_{x,\ y}(c) = x\otimes y\cdot c$，因此 Φ 限制为从 $X\otimes_B Y$到 $(X\otimes_B Y)_{\mathrm{loc}}$的典范嵌入。□

命题 2.20 中给出的映射在许多情况下并非可伴随。为说明这一点，回顾例 2.19，并注意到 K(H) 恒等嵌入到 B(H)中；但由于 K(H) 是本质理想，该映射不可能有伴随。

然而， $X_{\mathrm{loc}}\otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}}$ 在张量积的局部化中的像确实能“检测” $(X\otimes_B Y)_{\mathrm{loc}}$的所有希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(A)$–$M_{\mathrm{loc}}(C)$ 子双模。这是因为 $X_{\mathrm{loc}}\otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}}$ 包含 $X\otimes_B Y$，而根据引理 2.18， $X\otimes_B Y$能够检测此类子双模。由此可得 $(X_{\mathrm{loc}}\otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}})^\perp = \{0\}$，因此 $s(X_{\mathrm{loc}}\otimes_{M_{\mathrm{loc}}(B)} Y_{\mathrm{loc}})$ 是 $s((X\otimes_B Y)_{\mathrm{loc}})$的本质理想。

2.3. **双模的非平凡性条件**。我们也可以探讨局部乘子模的构造过程会如何改变双模的非平凡性条件。我们关注希尔伯特双模的两个特定条件：纯外性和非周期性。纯外性对于非交换 Cartan 对的分类很重要（参见 [7], [15]）。 [16] 探讨了非周期性，并由此得到两个我们感兴趣的性质：取值于某个 C^*-代数的内射包中的条件期望的唯一性，特别是取值于局部乘子代数中的条件期望的唯一性（[9, 定理 1], [17]）；以及双模的局部乘子模具有纯外性（见下文命题 2.24）。在后续各节中，我们将利用这一点，对一类特殊作用应用局部乘子模构造，以构造 Cartan 对；这类作用最初并不会产生 Cartan 包含。

定义 2.21 ([14, 定义 4.3])。 设 X 是一个 Banach A-双模。若 $J\lhd A$ 中唯一满足 $X\cdot J\cong J$ 为 $J=\{0\}$的理想是.....，则称 X为纯外 。

定义 2.22 ([14])。 设 X 是一个赋范 A-双模。若对任意 $\varepsilon>0$ 及任意非零遗传子代数 $D\subseteq A$，都存在 $a\in D$ 满足 $a\geqslant 0$ 且 $||a||=1$ ，使得 $||axa||<\varepsilon$，则称 $x\in X$ 满足*Kishimoto* 条件 。若所有 $x\in X$ 都满足 Kishimoto 条件，则称 X 为非周期 。

引理 2.23 ([16, 引理 5.12])。 非周期范数 A-双模的子双模、商双模、扩张、有限直和和归纳极限仍然是非周期的。如果$f: X\to Y$是一个具有稠密值域的有界 A-双模同态，且 X 是非周期的，那么 Y也是非周期的。如果 $D\subseteq A$ 是遗传的，那么非周期的 A-双模作为一个也非周期的

D-双模。如果 $J \in \mathcal{I}_e(A)$ 且 X 是一个 A-双模，那么 JXJ 作为 J-双模是非周期的，当且仅当 X 作为一个 A-双模是非周期的。

根据 [16, 引理 5.10]，当将 A 视为 A-双模时，A 没有满足 Kishimoto 条件的非零正元素。特别地，除零理想外，A 没有非周期理想。因此，若 X 是非周期 Banach 双模，且 $J \lhd A$ 是满足 $X \cdot J \cong J$的理想，那么 J 也是非周期的，从而得到 $J = 0$。这表明非周期 Banach 双模是纯外的。反之通常不成立。然而，若 X 是 Hilbert A-双模，且 A 包含一个单或 I 型的本质理想，那么根据 [14, 定理 8.1]，二者等价。

命题 2.24。设 X 是一个非周期 *Hilbert* A-双模。那么 X_{loc} 是一个纯外的$M_{\mathrm{loc}}(A)$-双模。

证明。设 $I \lhd M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是一个理想，使得 $X_{\mathrm{loc}} \cdot I \cong I$。设 $\Phi\colon X_{\mathrm{loc}} \cdot I \to I$ 是一个同构。于是 Φ 限制为一个单射的 A-双模映射 $\phi\colon X \cap (X_{\mathrm{loc}} \cdot I) \to M_{\mathrm{loc}}(A)$。根据 [16, 引理 5.12]，$\phi$ 的像是一个非周期的 A-双模。根据 [17, 命题 3.16]，代数 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 不含非零的非周期 A-双模。因此，ϕ 的像为零，从而 $X \cap (X_{\mathrm{loc}} \cdot I) = \{0\}$。于是，由引理 2.18 得到 $I \cong X_{\mathrm{loc}} \cdot I = \{0\}$。□

2.4. **Hilbert 模的伽罗瓦连接**。设 $A \subseteq B$ 是 C^*-代数，令 $\mathrm{I}(A)$ 和 $\mathrm{I}(B)$ 分别为它们的理想格。存在映射 $i : \mathrm{I}(A) \to \mathrm{I}(B)$ 和$r : \mathrm{I}(B) \to \mathrm{I}(A)$，定义如下：

$$r(J) = A \cap J, \qquad i(I) = BIB,$$

对于 $I \in \mathrm{I}(A)$ 和 $J \in \mathrm{I}(B)$，其中 $BIB := \overline{\operatorname{span}}\, BIB$ 是由 I 在 B 中生成的理想。Green [10]注意到，这些映射构成一个单调伽罗瓦连接。也就是说，映射 r 和 i 具有如下性质：对于任意 $I \in \mathrm{I}(A)$ 和 $J \in \mathrm{I}(B)$，包含关系 $I \subseteq r(J)$ 成立当且仅当 $i(I) \subseteq J$。由此可知，映射 i 和 r 也满足 $i \circ r \circ i = i$ 和 $r \circ i \circ r = r$。映射 i 保持并（理想的和闭包），而映射 r 保持交（理想的交），并且这两个映射进一步限制为互逆同构

$$i(\mathcal{I}(A)) \cong r(\mathcal{I}(B)).$$

这一论证可以推广到希尔伯特模。设 X 是一个 Hilbert A-模，Y 是一个 Hilbert B-模。假设存在一个等距嵌入 $X \subseteq Y$。分别用 $\mathrm{Mod}_A(X)$ 和 $\mathrm{Mod}_B(Y)$ 表示 X 的 A-子模与 Y 的 B-子模的集合。类似地，可以定义限制映射和诱导映射 $r : \mathrm{Mod}_B(Y) \to \mathrm{Mod}_A(X)$ 以及 $i : \mathrm{Mod}_A(X) \to \mathrm{Mod}_B(Y)$，如下所示：

$$r(Z) = Z \cap X, \qquad i(W) = W \cdot B,$$

其中 $W \cdot B = \overline{\operatorname{span}}\, W \cdot B$ 是由 W 在 Y 中生成的希尔伯特 B-模。接下来很容易验证

$$\begin{aligned} W \subseteq r(Z) &\implies i(W) = W \cdot B \subseteq r(Z) \cdot B \subseteq Z, \text{ and} \\ i(W) \subseteq Z &\implies i(W) \cap X \subseteq Z \cap X \\ &\implies W \subseteq r(W), \end{aligned}$$

因此，这些映射也诱导出一个单调伽罗瓦对应。对于包含 $A_i \subseteq B_i$ for $i = 1,2$ 和希尔伯特双模 $X \subseteq Y$，类似的论证同样成立，其中 X 是希尔伯特A_1–A_2-双模，而 Y 是希尔伯特 B_1–B_2-双模。因此，我们已经证明 r 是 i_的右伴随。

在包含 $A \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$ 的情形下，我们有另一种方式，可以诱导出 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 的理想以及希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(A)$-(双)模。若 $I \lhd A$ 是一个理想，且 X 是一个希尔伯特 A-模，我们便得到 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 的一个理想 $i_+(I) := M_{\mathrm{loc}}(I)$，还可以诱导出希尔伯特

$M_{\mathrm{loc}}(A)$-(双)模 $i_+(X) := X_{\mathrm{loc}}$ ，它来自 X。然而，这些映射 i_+ 并不能通过限制 r 诱导出伽罗瓦对应。一个反例是考虑例 2.19 中的紧算子 $\mathsf{K}(\mathsf{H})$ 。由于 $\mathsf{K}(\mathsf{H})$ 的局部乘子代数是有界算子 $\mathsf{B}(\mathsf{H})$，且 $\mathsf{K}(\mathsf{H})$ 也是 $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ 的一个理想，我们看到 $\mathsf{K}(\mathsf{H})$ $=\mathsf{K}(\mathsf{H}) \cap \mathsf{B}(\mathsf{H}) = r(\mathsf{K}(\mathsf{H}))$，但若 H 是无限维的，则 $i_+(\mathsf{K}(\mathsf{H})) = \mathsf{B}(\mathsf{H})$ 不包含于 $\mathsf{K}(\mathsf{H})$，这违反了伽罗瓦对应条件。

然而，若我们将范围限制在满足 $W = r(i_+(W))$和 $Z = i_+(r(Z))$的希尔伯特子双模 $W \subseteq X$, $Z \subseteq Y$ 上，就能获得

$$r(Z) \subseteq W \iff Z \subseteq i_+(W).$$

将范围限制在这一类理想上，我们便得到伽罗瓦对应，因此，对于这一受限类别， i_+ 是 r 的右伴随。

3. 在局部乘子代数上诱导逆半群作用

我们将给出 C^*-代数 A上的逆半群作用的定义，该作用由希尔伯特双模给出，定义和用法见 [5], [15], [16], ；随后应用我们的局部乘子模构造。这将产生一个以作用逆半群为底空间的 Fell 丛，经过一些细化后，便得到逆半群在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$上的作用。

3.1. 逆半群作用与交叉积。在本文余下部分， A 表示一个 C^*-代数， S 表示一个含幺逆半群。在 S 上存在一个典范偏序，定义为：当且仅当 u， $t \in S$时， $t \leqslant u$ $t = ut^*t$ 。

定义3.1 （参见 [5, 定义4.7]）。由希尔伯特双模构成的 S 对 A 的作用 $\mathsf{E} = (\mathsf{E}_t, \mu_{t,\,u})_{t,\,u\in S}$ 由以下部分组成:

• 对每个 $t \in S$，都有希尔伯特 A双模 E_t ； 以及•

双模同构 $\mu_{t,\,u} : \mathsf{E}_t \otimes_A \mathsf{E}_u \to \mathsf{E}_{tu}$;

满足

(i) $\mathsf{E}_1 = A$，具有典范的 A-双模结构；(ii) 映射 $\mu_{1,\,t}$： $A \otimes_A \mathsf{E}_t \to \mathsf{E}_t$ 和 $\mu_{t,\,1} : \mathsf{E}_t \otimes_A A \to \mathsf{E}_t$ 是由 A 在 E_t 上的相应左作用和右作用所导出的典范同构；以及 (iii) 结合律：对所有 t， u， $v \in S$，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}_t \otimes_A \mathcal{E}_u) \otimes_A \mathcal{E}_v & \xrightarrow{\mu_{t,u} \otimes_A \mathrm{id}_{\mathcal{E}_v}} & \mathcal{E}_{tu} \otimes_A \mathcal{E}_v \\ \text{ass.}\updownarrow & & \searrow^{\mu_{tu,v}} \\ \mathcal{E}_t \otimes_A (\mathcal{E}_u \otimes_A \mathcal{E}_v) & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathcal{E}_t} \otimes_A \mu_{u,v}]{} & \mathcal{E}_t \otimes_A \mathcal{E}_{uv} \end{array} \qquad \mathcal{E}_{tuv} \qquad \nearrow_{\mu_{t,uv}}$$

现在我们将介绍构建逆半群作用的满交叉积和本质交叉积所需的概念。这些定义与 [15, 第2.2] 节和[16, 第 4], 节中的定义相同，更深入的解释请参阅相应章节。

若 $t \leqslant u$ 对于 t， $u \in S$ 且 E 是 S 在 A上的一个作用，则可由乘法映射得到一个包含映射 $\mathsf{E}_t \hookrightarrow \mathsf{E}_u$。这些包含映射随后限制为同构$j_{u,\,t} : \mathsf{E}_t \to \mathsf{E}_u \cdot s(\mathsf{E}_t) = r(\mathsf{E}_t) \cdot \mathsf{E}_u$。对于每个 $v \leqslant t$， u，映射 $j_{t,\,v}$ 和 $j_{u,\,v}$ 通过定义 $\vartheta^v_{t,\,u} := j_{t,\,v} \circ j^{-1}_{u\,v,}$ ，诱导出一个同构 $\vartheta^v_{t,\,u} : \mathsf{E}_u \cdot s(\mathsf{E}_v) \to \mathsf{E}_t \cdot s(\mathsf{E}_v)$ 。定义

$$I_{t,u} = \overline{\sum_{v \leqslant t,u} s(\mathcal{E}_v)},$$

由所有 $v \leqslant t, u$ 生成的闭理想 $s(\mathsf{E}_v)$ 。我们称理想 $I_{t,u}$ 为 t, u 的交理想。它包含于 $s(\mathsf{E}_u) \cap s(\mathsf{E}_t)$ 中，且该包含可能是严格的。存在唯一的希尔伯特双模同构 $\vartheta_{t,u} : \mathsf{E}_u \cdot I_{t,u} \to \mathsf{E}_v \cdot I_{t,u}$ ，对于每个 $v \leqslant t, u$， 它在 $\mathsf{E}_t \cdot s(\mathsf{E}_v)$ 上由 [5, 引理 2.4] 限制为 $\vartheta^v_{t,u}$ 。代数交叉积 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 定义为 $\bigoplus_{t\in S} \mathsf{E}_t$ 对 $\vartheta_{u,t}(\xi)\delta_u - \xi\delta_t$ （其中 $t, u \in S$ ）的线性张成取商所得的商，并且

$\xi \in \mathrm{E}_t \cdot I_{t,\ u}$。 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 上存在一种 *-代数结构，其乘法和对合由映射 $\mu_{t,\ u}$ 以及 $\mathrm{E}_t^* \to \mathrm{E}_{t^*}$ 的对合诱导。因此， $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 上存在一个最大 C^*-范数。

定义 3.2 ([15, 定义 2.7])。 作用 E 的全交叉积 $A \rtimes S$ 定义为 *-代数 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 的最大 C^*-完备化。

我们还为逆半群作用定义了一些非平凡性条件。Kwa´sniewski 和 Meyer（[15], [16]）表明，满足这些条件的作用会产生 C^*-代数的包含，并满足某些极大性条件，这些条件对于分析 Cartan 类对很有用。

定义 3.3 ([16, 定义 6.1、6.9])。 设 E 是逆半群 S在 A上的一个作用。若对每个 $t \in S$, $\mathrm{E}_t \cdot I_{1,t}^{\perp}$ 都是纯外的 A-双模，则称该作用为纯外 。若对每个 $t \in S$, $\mathrm{E}_t \cdot I_{1,t}^{\perp}$ 都是非周期的 A-双模，则称该作用为非周期 。

关于此类作用的约化交叉积定义见 [15,第 2 节2]。这涉及构造一个弱条件期望 E: $A \rtimes S \to A''$ ，其取值于 A的包络冯·诺依曼代数。也可以考虑本质定义的条件期望或局部期望，它们的取值则属于 A的局部乘子代数 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 。

回顾一下，对于一个 C^*-代数 A，我们用 $I(A)$ [12]表示 Hamana 的内射包。

定义 3.4 （[16, 定义 3.1、3.7]）。 设 $A \subseteq B$ 是一个 C^*-包含。 $A \subseteq B$ 的一个广义˜期望由另一个 C^*-包含 $A \subseteq A$ 以及一个完全正˜压缩线性映射 $E : B \to A$ 构成，且 E 在 A上的限制为恒等映射。若对所有 $b \in B$， $E(b^*b) = 0$ 蕴含 $b = 0$ ，则称 E 是忠实的；若对所有 $a \in B$ ，˙$E((ba)^*ba) = 0$ 蕴含对所有 $b \in B$都有 $b = 0$ ，则称 E 是几乎忠实的。若 $A = M_{\mathrm{loc}}(A)$ ，则称 E 为本质定义的条件期望或局部期望。若 $A = I(A)$ ，则称E 为伪期望。

根据 Frank 的一个结果， $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 典范嵌入到 $I(A)$ 中 [9] ，因此我们可以考虑 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq I(A)$。据此，可以将局部期望视为伪期望的一种特殊情形。

$A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 在 $A \rtimes S$ 中的稠密子代数，恰好是双模 E_t 在典范包含 $\mathrm{E}_t \to A \rtimes_{\mathrm{alg}} S, \xi \mapsto [\xi\delta_t]$下的张成空间。这些映射都是单射，因此我们将每个 E_t 与其在 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$中的像等同。我们如下定义局部期望 EL： $A \rtimes S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$。令 $t \in S$。回顾同构$\vartheta_{1,t} : \mathrm{E}_t \cdot I_{1,t} \to I_{1,t}$，每个 $\xi \in \mathrm{E}_t$ 都通过 $EL(\xi) : a \mapsto \vartheta_{1,t}(\xi \cdot a)$定义了 $\mathbf{M}(I_{1,t}) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中的一个元素。根据 [16, 命题 4.4] ，此映射可延拓为局部期望 EL： $A \rtimes S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$，我们称之为典范局部期望。我们用 $\mathbf{N}_{EL}$ 表示包含在 $\ker(EL)$中的最大理想。

定义 3.5. 本质交叉积定义为商

$$A \rtimes_{\mathrm{ess}} S := (A \rtimes S)/\mathcal{N}_{EL}.$$

局部期望 EL 下降为局部期望 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$，我们也将其记为 EL。

定理 3.6 ([16, 定理 4.12])**.** 典范局部期望 EL： $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是忠实的。

Renault [22], 和更早的 Kumjian [13] 研究了 C^*-代数的包含 $A \subseteq B$ ，其中较大的代数 B 由正规化 A 的元素稠密张成，其含义如下：若 $n \in B$ 满足 $n^*An,\ nAn^* \subseteq A$，则称其为正规化子。此后，这已成为 [7], [15], 及许多其他 Cartan 对类对象的一项标准假设。对于含幺逆半群 S 对 C^*-代数 A 的作用 E（或者更一般地，对于定义在 S 上的 Fell 丛

其单位纤维为 A），包含 $A \subseteq A \rtimes S$ 具有这一性质。这是因为每个 E_t 都具有 A-双模结构，并且它们共同张成 $A \rtimes S$的一个稠密子空间。

定义 3.7。设 $A \subseteq B$ 是一个 C^*-代数的包含。若正规化子集合 $N(A,B) = \{n \in B: n^*An, nAn^* \subseteq A\}$ 张成 B的一个稠密子空间，则称该包含为正则的。满足 $AM, MA \subseteq M$的闭子空间 $M \subseteq N(A,B)$ 称为切片，该包含的切片全体记作 $\mathrm{S}(A,B)$。$\mathrm{S}(A,B)$ 的一个子切片 N 是指包含于 M中的切片 N。

若 $A \subseteq B$是非退化包含，则 $M^*M, MM^* \subseteq A$对任意切片 $M \in \mathrm{S}(A,B)$均成立，从而每个切片都具有 Hilbert A-双模结构，其内积由 B中的乘法诱导。于是集合 $\mathrm{S}(A,B)$ 在运算 $M \cdot N := $ 张成下成为一个逆半群，而 *-运算由 B中的伴随给出。为简洁起见，我们用 MN表示 M和 N中元素乘积的闭线性张成。由此得到 $\mathrm{S}(A,B)$ 在 A上的典范作用，其中作用的双模就是这些切片，而乘法同构由 B中的乘法诱导。对于 S 在 A上的闭且纯外作用 E，Kwa´sniewski 和 Meyer [15] 证明，可以根据双模 E_t重构该包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的切片。

一般而言，若 $A \subseteq B$ 是正则的非退化包含，则切片逆半群 $\mathrm{S}(A,\ B)$ 通过作用 $\mathrm{E}_X = X$ 在 A 上作平凡作用，其中切片为 $X \in \mathrm{S}(A,\ B)$，乘法映射则由 B中的乘法给出。

由此，我们可以通过逆半群的作用，对某些 C^*-包含进行如下分类。

定理 3.8。设 $A \subseteq B$ 是 C^*代数的非退化包含，且 $E: B \to I(A)$ 是忠实伪期望。假设存在一个稠密张成的逆子半群 $S \subseteq \mathcal{S}(A,B)$，其在 A上非周期地作用。那么存在一个同构φ： $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to B$，它在 A 上限制为恒等映射，并使 E 与典范局部期望 EL相协调。特别地，期望 E 的取值落在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中，且包含 $A \subseteq B$ 是非周期的。

证明。由 [16, 命题 6.3], 可知，包含 $A \subseteq A \rtimes S$ 是非周期的，因此根据 [17, 定理 3.6], 局部期望 $EL: A \rtimes S \to M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq I(A)$ 是该包含的唯一伪期望。令 $\Phi: A \rtimes S \to B$ 为典范的 *-同态。由于它张成了 S 中的每个切片，因此它是满射。于是 $E \circ \Phi: A \rtimes S \to I(A)$ 是一个伪期望，故根据唯一性，它等于 EL 。

于是映射 Φ 下降为同构 $\varphi: A \rtimes S/\ker(\Phi) \to B$，因此只需证明 Φ 的核是 N_{EL}，即包含在 EL 的核中的最大理想，因为对该理想取商即可得到本质交叉积。固定 $x \in \ker(\Phi)$。则$EL(x^*x) = E(\Phi(x^*x)) = 0$，所以 $x \in \mathrm{N}_{EL}$。反过来，$x \in \mathrm{N}_{EL}$ 当且仅当$0 = EL((xy)^*xy)$；根据 [16, 命题 3.5], ，可知 $0 = EL((xy)^*xy) = E(\Phi(xy)^*\Phi(xy))$。由于$E$ 是忠实的，因此根据 [16, 推论 3.7], ，它几乎忠实；又由于 Φ 是满射，我们可得 $\Phi(x) = 0$。因此，Φ 下降为同构 $\varphi: A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to B$。于是，包含$A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是非周期的，因为商映射 $q: A \rtimes S \to A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 下降为有界满射双模映射 $(A \rtimes S)/A \to (A \rtimes_{\mathrm{ess}} S)/A$, ，而非周期双模的像仍是非周期的（引理 2.23）。□

$I(A)$ 的泛性质保证，对于任意 C^*-包含 $A \subseteq B$，总存在一个伪期望 $E: B \to I(A)$，它在 A 上延拓恒等映射。在定理 3.8 的条件下，我们进一步得到 E 实际上必须取值于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$，正如与本质交叉积相关联的典范伪期望所具有的性质。

3.2. **逆半群作用的对偶群胚**。若 E 是 S 在A上的一个作用，则存在一个诱导作用 $\hat{}\mathrm{E} = (\hat{}\mathrm{E}_t)_{t \in S}$，使得 S 作用于 $\hat{}A$，并且对每个 $\hat{}\mathrm{E}_t$，都有： $\widehat{s(\ \ \mathrm{E}_t)} \to \widehat{r(\ \ \mathrm{E}_t)}$

$\hat{}t \in S$。与 E 相关的变换群胚 $A \rtimes S$ 的构造可见 [15, 第 2.3]节。

定义 3.9 ([16])。 我们称 $\hat{}$E 为 S 在 A 上的作用 E 的对偶作用。变换群胚 $A \rtimes S$ 称为对偶群胚。

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 对偶群胚 $A \rtimes S$ 的单位空间通过映射 $A \to (\hat{}A \rtimes S)^{(0)}, [\pi] \mapsto [1, [\pi]]$ 与 A 同胚。我们通常在此映射下将 $\hat{}A$ 与 $(\hat{}A \rtimes S)^{(0)}$ 视为相同。根据 [15,命题 2.17], , 作用 $\mathsf{E}\colon S \curvearrowright A$ 是闭的，当且仅当 $\hat{}_{A \rtimes S}$ 的单位空间 $\hat{}A$ 是一个闭子集。

根据本质交叉积的构造，存在单射的 A-双模映射 $\mathsf{E}_t \to A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，其中每个 E_t 的像都是此包含的一个切片。令 $B := A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$。通过将 $t \in S$ 映射到 B 中 E_t 对应的 $\hat{}$ 像，我们得到一个典范同态 $S \to \mathsf{S}(A, B)$。接着，通过 $\phi[t, [\pi]] = [\mathsf{E}_t, [\pi]]$，我们得到一个典范群胚同态 $\phi\colon A \rtimes S \to \hat{}A \rtimes \mathsf{S}(A, B)$。逆半群 S 也通过将 $t \in S$ 映射到双截面 $\frown\!\!\!\!\!\!\smile\{[\mathsf{E}_t, [\pi]] : [\pi] \in s(\mathsf{E}_t)\}$，典范地映射到双截逆半群 $\mathsf{Bis}(\hat{}A \rtimes \mathsf{S}(A, B))$。一般而言，这些同态并非单射。例如，若 A_1 和 A_2 是 C^*-代数，考虑由 A_1 上的一个自逆自同构生成的作用，并将其延拓为 $A := A_1 \oplus A_2$ 上的自同构 α，使其在 A_2 上平凡作用。群作用的芽关系是平凡的，因为群只有一个幂等元：单位元。因此，在 A_2 的每个不可约表示上都有非平凡的各向同性；但若考虑 $\hat{}A \rtimes \mathsf{S}(A, A \rtimes_{\mathrm{ess}} \mathbb{Z}_2)$，我们会发现，对于所有 $[\pi] \in A_2$， $[\alpha, [\pi]] = [\mathrm{id}\ [\pi]]$，因为 $\alpha|_C = \mathrm{id}\ |_C$。这两个芽在 $\hat{}\ A \rtimes \mathbb{Z}_2$ 中不同，因为在那里唯一可取的芽关系是平凡关系，所以对于所有 $[\pi] \in \hat{}A$，在 $\hat{}\ A \rtimes \mathbb{Z}_2$ 中有 $[\alpha, [\pi]] \neq [\mathrm{id}\ [\pi]]$。

假设我们的作用具有足够多的幂等元，即可解决这一问题。

引理 3.10. 设 $\mathcal{E}$ 是 S 在 A 上的纯外作用，使得对于每个开集 $\hat{}\hat{}$ $\hat{}\mathcal{E}_e \subseteq A$，幂等元 $e \in S$ 构成 A 上拓扑的一个基。记 $B := A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$。则典范同态 $\phi : \hat{}A \rtimes S \to \hat{}A \rtimes \mathcal{S}(A, B)$ 是单射。

证明。 取定 $[t, [\pi]] \in \hat{}A \rtimes S$，使得 $[\hat{}\mathsf{E}_t, [\pi]] = [A, [\pi]]$，也就是说， $\phi[t, [\pi]]$ 是 $\hat{}A \rtimes \mathsf{S}(A, B)$ 中的一个单位元。于是存在开子集 $U \subseteq \hat{}A$，使得 $\hat{}\mathsf{E}_t|_U = \mathrm{id}_U$。令 $e \in S$ 为一个幂等元，使得 $\hat{}\mathsf{E}_e \subseteq U$ 且 $[\pi] \in \mathsf{E}_e$。则 $\mathsf{E}_t \cdot \mathsf{E}_e = \mathsf{E}_e$，从而得到 $\mathsf{E}_e = \mathsf{E}_t \cdot s(\mathsf{E}_e)$；由于作用 E 是纯外的，我们可知 $e = te$。因此 $[t, [\pi]] = [e, [\pi]]$ 是一个单位元，因为 e 是一个幂等元。□

我们注意到，根据 [2, 定理 7.2]，不失一般性，可以假设我们的逆半群有足够多的幂等元，因此引理 3.10 的判据总是成立。

3.3. **将作用扩展到局部乘子代数。** Exel 在 [7] 以及 Kwa´sniewski–Meyer 在 [15] 中的结果要求 S 在 A 上的作用是闭的，也就是说，条件期望 EL 的取值落在 A中。由于对我们的目的而言，典范期望EL 的取值未必落在 A中，我们无法直接使用这些结果。为绕过这一问题，我们从 A上的作用构造出 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的闭作用，随后证明包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 嵌入到与这一扩展作用相关的交叉积中。

遗憾的是，我们不能简单地取一个 S 在 A 上的作用 E，将模替换为相应的局部乘子模，就此得到在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的作用。其障碍在于命题 2.20 中的映射并不总是同构，因此我们并不总能得到 $(\mathsf{E}_t)_{\mathrm{loc}} \otimes_{M_{\mathrm{loc}}(A)} (\mathsf{E}_u)_{\mathrm{loc}} \cong (\mathsf{E}_t \otimes_A \mathsf{E}_u)_{\mathrm{loc}}$。我们的解决方案是改为利用这些局部乘子模构造一个非饱和 Fell 丛，然后利用 [3, 定理 7.2], 得到一个饱和 Fell 丛，而该丛等价于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的一个逆半群作用。

定义 3.11 ([2, 定义 2.10])。设 S 是一个逆半群。S 上的一个 ***Fell*** 丛是一族 Banach 空间 $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_t)_{t\in S}$，并配备乘法：$\mathrm{A}_t \times \mathrm{A}_u \to \mathrm{A}_{tu}$，对所有 $t,\ u \in S$，以及对合 *：$\mathrm{A}_t \to \mathrm{A}_{t^*}$，对每个 $t \in S$，还有线性映射$j_{t,\ u}$：$\mathrm{A}_u \to \mathrm{A}_t$，对 $t,\ u \in S$，其中 $u \leqslant t$ 满足以下条件：

(i) 对所有 t、$u \in S$，乘法满足双线性关系 $\mathrm{A}_t \times \mathrm{A}_u \to \mathrm{A}_{tu}$；**(ii)** 乘法满足结合律；**(iii)** 对所有 a、$b \in \bigcup_{t\in S} \mathrm{A}_t$，$||a \cdot b|| \leqslant ||a|| \cdot ||b||$；**(iv)** * 在每个 A_t 上均为共轭线性的；**(v)** 对所有 a、$b \in \bigcup_{t\in S} \mathrm{A}_t$，$(a^*)^* = a$、$||a^*|| = ||a||$，且 $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$；**(vi)** 对所有 $t \in S$ 和 $a \in \mathrm{A}_t$，$||a^*a|| = ||a||^2$，且 a^*a 是 C^*- 代数 A_{t^*t} 中的正元素；**(vii)** 对所有满足 $u \leqslant t$ 的 t、$u \in S$，$j_{t,\ u}$ 是等距线性映射；**(viii)** 若 $v \leqslant u \leqslant t$，则 $j_{t,\ v} = j_{t,\ u} \circ j_{u,\ v}$；**(ix)** 若 $s \leqslant t$，且 $u \leqslant v$ 属于 S，则对所有 $a \in \mathrm{A}_s$ 和 $b \in \mathrm{A}_v$，$j_{t,\ s}(a) \cdot j_{v,\ u}(b) = j_{tv,\ su}(a \cdot b)$；**(x)** 若 $s \leqslant t$，则对所有 $a \in \mathrm{A}_s$，$j_{t,\ s}(a)^* = j_{t^*,\ s^*}(a^*)$。

如果对所有 $s, t \in S$，$\mathrm{A}_s \cdot \mathrm{A}_t$ 张成 A_{st} 的稠密子空间，我们就称 Fell 丛 A 是饱和的。如果 S 含幺，我们就称 A_1 为 Fell 丛的单位纤维。

可以利用 Fell 丛的截面构造一个 C^*-代数。

定义 3.12 ([7, 定义3.4], [15, 定义2.7])。设 A 是定义在含幺逆半群 S 上的 Fell 丛，其单位纤维为 $\mathrm{A}_1 = A$。令 $\mathrm{L}(\mathrm{A}) := \bigoplus_{t\in S} \mathrm{A}_t$，且 N :=张成 $\{a_s\delta_s - j_{t,s}(a_s)\delta_t :\ s, t \in S,\ s \leqslant t,\ a_s \in \mathrm{A}_s\}$。其全截面 C^*-代数为 $C^*(\mathrm{A})$，定义为 $\mathrm{L}(\mathrm{A})/N$ 在继承自 Fell 丛的乘法和对合下的最大 C^*-完备化。

Fell 丛 A 的每个纤维 A_t 都通过 $\mathrm{A}_t \ni x \mapsto [x\delta_t] \in \mathrm{L}(\mathrm{A})/N$, 典范地嵌入 $\mathrm{L}(\mathrm{A})/N$，因此也嵌入全 C^*-代数 $C^*(\mathrm{A})$。将每个纤维与其在 $C^*(\mathrm{A})$ 中的像等同后，我们看到对每个 $t, u \in S$，$\mathrm{E}_t \cdot I_{t,u} = \mathrm{E}_u \cdot I_{t,u} = \mathrm{E}_t \cap \mathrm{E}_u$。特别地，我们有 $I_{1,t} = \mathrm{E}_t \cap A$。

命题 3.13。设 A 是一个 C^* 代数，S 是一个逆半群，且 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_t, \mu_{t,\ u})_{t,\ u\in S}$ 是 S 通过希尔伯特双模对 A 的一个作用。存在一个以 S 为底的 ***Fell*** 丛 $\mathcal{A}$，其单位纤维为 $M_{\mathrm{loc}}(A)$，使得对每个 $t \in S$，都有 $\mathcal{A}_t = (\mathcal{E}_t)_{\mathrm{loc}}$。

证明。定义 $\mathrm{A}_t := (\mathrm{E}_t)_{\mathrm{loc}}$。对于 $t,\ u \in S$，我们将乘法定义为

$$\xi_t \cdot \eta_u := \tilde{\mu}_{t,u}(\xi_t \otimes_{M_{\mathrm{loc}}(A)} \eta_u), \qquad \xi_t \in \mathcal{A}_t, \eta_u \in \mathcal{A}_u,$$

其中 $\tilde{\mu}_{t,\ u}$ 是利用命题 2.20 由 $\mu_{t,\ u}$ 诱导的映射。根据引理 2.9 和命题 2.17，我们可以将 $(\mathrm{E}_t)^*_{\mathrm{loc}}$ 与 $(\mathrm{E}_{t^*})_{\mathrm{loc}}$ 自然地识别，并通过将每个 $\xi_t \in (\mathrm{E}_t)_{\mathrm{loc}}$ 映射到相应的伴随元 $\xi_t^* \in (\mathrm{E}_t)^*_{\mathrm{loc}} = (\mathrm{E}_{t^*})_{\mathrm{loc}}$，定义映射 *：$\mathrm{A}_t \to \mathrm{A}_{t^*}$。

容易验证，这一结构满足 Fell 丛的公理。 □

定义 3.14. 我们将命题 3.13 中定义的 Fell 丛A称为作用 E 的诱导局部 ***Fell*** 丛。

诱导局部 Fell 丛的主要用途是“闭合”作用。这里的意思是，与该 Fell 丛关联的条件期望应当是一个真正的条件期望 $C^*(\mathrm{A}) \to M_{\mathrm{loc}}(A)$，而非取值于 $M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A))$ 的广义局部期望（请注意，此处“真正的”一词是相对于包含 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq C^*(\mathrm{A})$ 而言的）。然而，这一点并非立即成立，但可以在不失一般性的前提下做到。为此，我们回顾一下，任何此类逆半群作用都可以精细化为一个具有“足够多的幂等元”的作用。

命题 3.15 ([15, 命题 5.2])**.** 设 $\mathcal{E}$ 是含幺逆半群S 在 C^*-代数 A上的一个作用。令 ι：$S \to \mathrm{Bis}(\hat{A} \rtimes S)$ 为典范包含 $\iota(t) = U_t :=$

$\{[\hat{}\mathcal{E}_b\,[\pi]]\colon [\pi]\in\widehat{s(\quad\mathcal{E}_t)}\}$。存在一个作用 $\bar{}\mathcal{E}$，其定义在 $\bar{S}:=\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$ 上，使得 A 满足 $\bar{}\mathcal{E}_{\iota(t)}=\mathcal{E}_t$，对所有 $t\in S$ 均成立；并且存在一个典范同构 $A\rtimes S\cong A\rtimes \mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$，其在每个 $\mathcal{E}_t=\mathcal{E}_{\iota(t)}$上均限制为恒等映射。若映射 ι 是满射，则称$\mathcal{E}$ 是精细。

$\bar{}$命题 3.15 中的作用 E 称为 E 的细化 。 [15] 中命题 3.15 的证明表明，对于 $U\in\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$，每个双模 $\bar{}\mathrm{E}_U$ 都具有如下形式：

$$\bar{\mathcal{E}}_U=\overline{\sum_{i\in C}\mathcal{E}_{t_i}J_i},$$

对于某些 $t_i\in S$ 和 $J_i\lhd A$，其中 C 是某个指标集。

$\bar{}$**引理 3.16**。 作用 $\mathcal{E}$ 是非周期的，当且仅当其细化 $\mathcal{E}$ 是非周期的。

证明。 若细化后的作用 $\bar{}\mathrm{E}$ 是非周期的，则对于所有 $t\in S$，$\mathrm{E}_t\cdot I_{1,t}^{\perp}=\bar{}\mathrm{E}_{U_t}\cdot I_{1,U_t}^{\perp}$ 都是非周期的。因此 E 是非周期的。

假设作用 E 是非周期的。固定 $U\in\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$，并将 $\bar{}\mathrm{E}_U=\sum_{i\in C}\mathrm{E}_{t_i}\cdot J_i$ 写成某些 $t_i\in S$ 和 $J_i\lhd A$ 的形式，其中 $i\in C$ 和 C 是某个指标集。对于每个 $U\in\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$，对 $V\leqslant 1,U\in\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$ 取上确界，所得双截面为 $U\cap\hat{}A$。因此，交集$\bar{}$理想 $I_{1,U}$ 由 $\mathrm{E}_{U\cap\hat{A}}=\sum_i\mathrm{E}_{t_i}\cdot J_i\cap A$ 给出。对于每个 $i\in C$，我们有

$$\begin{aligned}J_i\cdot I_{1,U}^{\perp}&=J_i\cdot\left(\overline{\sum_{k\in C}\mathcal{E}_{t_k}\cdot J_k}\cap A\right)^{\perp}\\&\subseteq J_i\cdot(\mathcal{E}_{t_i}\cdot J_i\cap A)^{\perp}\\&=J_i\cdot(\mathcal{E}_{t_i}\cap J_i)^{\perp}.\end{aligned}$$

因此，对每个 $i\in C$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{t_i}\cdot J_i\cdot I_{1,U}^{\perp}&\subseteq\mathcal{E}_{t_i}\cdot J_i\cdot(\mathcal{E}_{t_i}\cap J_i)^{\perp}\\&=\mathcal{E}_{t_i}\cdot J_i\cdot I_{1,t}^{\perp}\\&\subseteq\mathcal{E}_{t_i}\cdot I_{1,t_i}^{\perp}.\end{aligned}$$

双模 $\mathrm{E}_{t_i}\cdot I_{1,t_i}^{\perp}$ 是非周期的，因为作用 E 是非周期的，因此我们看到每个 $\mathrm{E}_{t_i}\cdot J_i\cdot I_{1,U}^{\perp}$ 都是非周期双模。这些双模在 $i\in C$ 上的张成是 $\bar{}\mathrm{E}_U\cdot I_{1,U}^{\perp}$ 的稠密子空间。因此，根据 [14, 引理 4.2],，双模 $\bar{}\mathrm{E}_U\cdot I_{1,U}^{\perp}$ 是非周期的，所以作用 E 是非周期的。□

$\bar{}$**推论 3.17**。 典范同构 $A\rtimes_{\mathcal{E}}S\cong A\rtimes_{\bar{\mathcal{E}}}S$ 交织了与各个作用相对应的典范局部期望，因此该同构诱导出本质交叉积的一个$\bar{}$同构 $A\rtimes_{\mathcal{E},\mathrm{ess}}S\cong A\rtimes_{\bar{\mathcal{E}},\mathrm{ess}}S$。

$\bar{}$证明。 典范局部条件期望在每个 $\mathrm{E}_t=\mathrm{E}_{U_t}$ 上均一致，其中每个 $t\in S,\bar{}$，而这些元素张成了 $A\rtimes_{\mathcal{E}}S$ 和 $A\rtimes_{\bar{\mathcal{E}}}S$的稠密子空间。因此，该同构可下降到本质交叉积。□

命题 3.15、引理 3.16 和推论 3.17 共同使我们能够不失一般性地假设，所考虑的任意作用都是经过细化的。特别地，我们获得了交性质，从而可以将与$t,u\in S$相关的任意交理想写成 $I_{t,u}=\mathrm{E}_{t\cap u}$，其中 $t\cap u\in S$。从此处起，我们将作用 E 与其在细化中的像等同起来；或者，也可以假设作用 E 是精细的。

引理 3.18。 设 $\mathcal{E}\colon S\rightharpoonup A$ 是精细作用，因此 $S\cong\mathrm{Bis}(\hat{}A\rtimes S)$。对每个 $t\in S$，令$\mathcal{I}_{1,t}:=\sum_{v\leqslant 1,t}\overline{s(\mathcal{A}_v)}$ 为$\mathcal{A}$的诱导局部 *Fell* 丛对应于$1,t\in S$ 的交理想。假设作用$\mathcal{E}$ 是精细的。那么 $\mathcal{I}_{1,t}=M_{\mathrm{loc}}(I_{1,t})$。

证明。 将 S 与 Bis($\hat{A} \rtimes S$) 等同后，我们看到 $\mathrm{I}_{1,t} = \tilde{\mathrm{E}}_{t\cap\hat{A}} = (\mathrm{E}_{t\cap\hat{A}})_{\mathrm{loc}} = (I_{1,t})_{\mathrm{loc}} = M_{\mathrm{loc}}(I_{1,t})$。 □

推论 3.19. 典范弱条件期望 $\tilde{E}: C^*(\mathcal{A}) \to M_{\mathrm{loc}}(A)''$~和局部期望 $EL: C^*(\mathcal{A}) \to M_{\mathrm{loc}}(M_{\mathrm{loc}}(A))$ 都是真正的(也就是说，取值于$M_{\mathrm{loc}}(A)$，且彼此一致)。

~证明. 利用 EL 在 [4, 引理 4.5] 中的刻画以及 EL的定义，我们看到，对于 $t \in S$ 和 $\xi \in \mathrm{A}_t$，有

$$\tilde{E}(\xi) = \tilde{EL}(\xi) = \xi \cdot 1_{I_{1,t}},$$

其中 $1_{I_{1,t}}$ 是$M_{\mathrm{loc}}(I_{1,t})$中的单位元，它等于 $\mathrm{I}_{1,t}$，由引理 3.18 得出。 □

推论 3.19 中提到的典范弱期望，是在 [4,引理 4.5]中定义的期望。这里不再给出该期望的定义，因为在我们施加的条件下，该期望等于典范局部期望。

~现在我们将使用 [3, 定理 7.2]，得到一个定义在逆~半群 S上的饱和 Fell 丛 E，使得由 A 和 E 构造的任何 C^*代数都能通过一个与条件期望相容的同构相互同构。如果原作用是非周期的，我们构造的诱导局部作用将是闭且纯外的。

~**命题 3.20.** 设 $\mathcal{E}$ 是 A上的一个 S 作用。存在一个逆半群 S~和~以及一个定义在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的闭逆半群作用$\mathcal{E}$，使得 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes S \cong C^*(\mathcal{A})$，且存在一个将 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 恒等映射到自身并与典范局部条件期望相容的同构。此外，如果$\mathcal{E}$ 是非周期作用，那么作用$\mathcal{E}$ 是纯外的。

证明. 根据 [3, 定理 7.2]，饱和 Fell 丛存在，而与该作用相关的双模具有如下形式：E$_x = r(\mathrm{A}_{t_1}) \dots r(\mathrm{A}_{t_n})\mathrm{A}_t$，其中 $t_1, \dots, t_n, t \in S$。 [3, 定理 7.2] 中描述的同构将每个 A_t 恒等映射到自身。我们看到，同构 $C^*(\mathrm{E}) \to M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes S$必定保留条件期望，因为~在每个纤维 A_x 上，条件期望都是将 E 在 A_t上的限制到一个子双模所得。根据推论 3.19，条件期望在 C^*(A) 上是真正的，因此~作用 E 是闭的。如果 E 是非周期作用，那么这些双模各自都以纯外方式作用，因为每个 $\mathrm{A}_t \cdot \mathrm{I}^{\perp}_{1,t} = (\mathrm{E}t \cdot I^{\perp}_{1,t})_{\mathrm{loc}}$ 根据引理 2.24 都是纯外的。□

~注记 3.21。 命题 3.20 中的逆半群 S 称为 S 的前缀扩张，其构造见 [3]。 S 的前缀扩张是在替代关系下由 S 生成的逆半群。这些关系在 S中产生了更多~幂等元，以及一个规范的单射部分同态 $\pi : S \to S$，它是一个满足 $\pi(t)^* = \pi(t^*)$, $\pi(tu) \leqslant \pi(t)\pi(u)$ （对所有 $t, u \in S$）的单射映射；若 $t \leqslant u$，则 $\pi(t) \leqslant \pi(u)$。对于这个诱导局部 Fell 丛，我们已证明，对所有 $t, u \in S$，都有 $\tilde{\mathrm{E}}^*_t = \mathrm{E}_{t^*}$，$\mathrm{E}_t \otimes_{M_{\mathrm{loc}}(A)} \mathrm{E}_u \subseteq \mathrm{E}_{tu}$；并且只要 $t \leqslant u$，就有 $\mathrm{E}_t \subseteq \mathrm{E}_u$ 属于 C^*(E)，这恰好刻画了一个部分同态。

前缀扩张逆半群（记作 Pr(S)）通常不同于命题 3.15 中的细化 Bis($\hat{A} \rtimes S$)，主要有两个原因。前缀逆半群的构造仅取决于逆半群 S，因此独立于 C^*-代数 A 和作用 $S \curvearrowright A$；而细化 Bis($\hat{A} \rtimes S$)则可能因这两种选择而异。例如，Bis($\hat{A} \rtimes S$) 的幂等元格与 A 的理想格典范同构。Pr(S) 的构造有所不同的第二个方面，源于其泛性质。由于前缀逆半群对于从 S出发的次乘性映射具有泛性质，典范映射 $S \to \mathrm{Pr}(S)$ 可能不是半群同态，而是次乘性映射。不过，映射 $S \to$Bis($\hat{A} \rtimes S$)始终是半群同态。

定义 3.22。设 E 是 S 在 A上的一个作用。我们称 S 在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$上的作用 E 为诱导局部作用。

由非周期作用 E 诱导的局部作用，按照 Exel 的定理 4.3]，给出了一个 Cartan 包含 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$。然而，我们感兴趣的包含是 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，因此需要一种方法，将诱导包含的结构降到原始包含上。

定理 3.23。设$\mathcal{E}$ 是 A 上 S 的一个作用。存在一个单射同态 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \hookrightarrow M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$，它与包含$\mathcal{E}_t \hookrightarrow \mathcal{E}_t \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 对每个 $t \in S$ 都相容。也就是说，对每个 $t \in S$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_t & \longrightarrow & A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{E}}_t & \longrightarrow & M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} \tilde{S} \end{array}$$

证明。根据命题 3.15，我们可以假设作用 E 是精细的。回顾一下，$A \rtimes S$ 定义为 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 的极大 C^*-完备化，而 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S$ 又是 $\bigoplus_{t\in S} \mathsf{E}_t$ 对 $\mathsf{N} := \operatorname{span}\{\xi_t\delta_t - \vartheta_{s,t}(\xi_t)\delta_s : t, s \in S, \xi_t \in \mathsf{E}_t \cdot I_{t,s}\}$ 取商所得的商。类似地，$M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes \tilde{S}$ 是 $\bigoplus_{t\in\tilde{S}} \tilde{\mathsf{E}}_t$ 对理想 $\tilde{\mathsf{N}} = \operatorname{span}\{\xi_t\delta_t - \tilde{\vartheta}_{s,t}(\xi_t)\delta_s : t, s \in \tilde{S}, \xi_t \in \tilde{\mathsf{E}}_t \cdot M_{\mathrm{loc}}(I_{t,s})\}$ 取商所得的商。包含 $\bigoplus_{t\in S} \mathsf{E}_t \to \bigoplus_{t\in\tilde{S}} \mathsf{E}_t$ 能下降到这两个商上，因为在此包含下 $\mathsf{N} \subseteq \tilde{\mathsf{N}}$，从而得到一个映射 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{alg}} \tilde{S}$。此映射随后延拓为同态 $i : A \rtimes S \to M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes S$。

为了证明此映射进一步下降到本质交叉积和约化交叉积，我们首先证明该映射与条件期望相交织。对于 $\xi_t \in \mathsf{E}_t$，元素 $EL(\xi_t) \in M_{\mathrm{loc}}(A)$ 定义为 $M(I_{1,t})$ 中的乘子，它将 $a \mapsto \xi_t a$映射到其中，其中 $\mathsf{E}_t \cdot I_{1,t}$ 和 $I_{1,t}$通过 $\vartheta_{1,t}$识别。根据推论 3.19 的证明，元素 $E(\xi_t) \in M_{\mathrm{loc}}(A)$ 由 $E(\xi_t) = \xi_t \cdot 1_{I_{1,t_0}}$给出，为 $E(\xi_t) = \xi_t \cdot 1_{I_{1,t_0}}$。因此，对于 $a \in I_{1,t}$，有 $E(i(\xi_t))a = \xi_t \cdot a$，其中 $\mathsf{E}_t \cdot \mathsf{I}1_{,t}$ 通过将命题 2.20 应用于同构 $\vartheta_{1,t}$，与 $\mathsf{I}1_{,t}$ 识别。由于双模 E_t张成 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$的稠密子空间，我们得到 $EL = E \circ i$。由于 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$是 $A \rtimes S$对理想 $N_{EL} = \{a \in A \rtimes S : EL(a^*a) = 0\} = \{a \in A \rtimes S : E \circ i(a^*a) = 0\}$取商所得的商，因此有 $i(N_{EL}) \subseteq N_{\tilde{E}}$，于是 i 下降为 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$上的映射。

最后，我们证明 i 在 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$上是单射的。为此，注意到元素$a \in A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 在 i 下映射为零，当且仅当它满足 $E(i(a^*a)) = EL(a^*a) = 0$，从而得到 $a = 0$。□

定理 3.23 使得作用 E 和 E 的动力学结构与代数结构能够编码在同一个代数 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$中，并提供了一个有助于计算的框架。在本文余下部分中，我们将模 E_t，E_t以及代数A，$M_{\mathrm{loc}}(A)$ 和 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 与它们经由定理 3.23 在 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 中的像等同起来。

备注 3.24。必须将 S 细化为 $\mathrm{Bis}(\hat{A} \rtimes S)$，因为取局部乘子代数与取归纳极限并不交换。给定一个由非零 C^*-代数组成的可数集合$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，可以考虑由代数$B_n = \bigoplus_{j=1}^{n} A_j$及映射 $\iota_n = (\mathrm{id}_{B_n},\ 0) : B_n \to B_n \oplus A_{n+1} = B_{n+1}$给出的归纳系统。该系统的归纳极限是直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$。有限直和与有限直积一致，因此由引理 2.3 可知，$M_{\mathrm{loc}}(\cdot)$ 保持有限直和。由引理 2.3，该系统 B_n 的归纳极限的局部乘子代数于是为

$$M_{\mathrm{loc}}\left(\varinjlim B_n\right) = M_{\mathrm{loc}}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_{\mathrm{loc}}(A_n),$$

这是一个含幺的 C^*-代数。然而，局部乘子代数的归纳极限为

$$\varinjlim M_{\mathrm{loc}}(B_n) = \varinjlim \bigoplus_{j=1}^{n} M_{\mathrm{loc}}(A_j) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_{\mathrm{loc}}(A_n).$$

这不可能同归纳极限的局部乘子代数同构，因为由无限多个非零 C^*代数组成的直和永远不是含幺的。

4. 非周期动力学包含

利用定理 3.23，我们看到 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 以保留包含 $A \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$的方式嵌入 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$。如前所述，包含 $A \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$ 存在问题，因此我们希望确保 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 与 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 在$M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$中的交尽可能小。局部条件期望 $EL\colon\ A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 至少限制为 A上的一个 *-同态，因为 $EL|_A = \mathrm{id}_A$。因此，为了最小化 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 与 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 之间的交，我们考察 EL 仅在 A上限制为 *-同态的条件。

4.1. 具有最小乘法定义域的包含。

定义 4.1. 设 $A \subseteq B$ 是 C^*-代数的一个包含，且 $E\colon\ B \to A$ 是一个广义期望。若以下子集等于 A，则称 E 具有最小乘法定义域 (MMD)：

$$\mu(E) := \{b \in B : E(b^*b) = E(b^*)E(b), E(bb^*) = E(b)E(b^*)\}.$$

对于期望 E，集合 $\mu(E)$ 是 E的（双侧）乘法域；它是 B中最大的 C^*-子代数，在该子代数上，E 限制为一个 *-同态。这一刻画改编自 Choi [6, 定理 3.1]，该定理定义了 C^*-代数之间 2-正映射的乘法域。此表述适用于这里，因为广义期望按定义是完全正的，而双侧条件确保 $\mu(E)$ 是 *-闭的。定义中的“最小”一词源于这样一个事实：我们总有 $A \subseteq \mu(E)$，因为 E 在 A上限制为恒等映射。

如果 E 是忠实的，那么 E 在 A上限制为一个单射的 *-同态 $\mu(E)$ 的乘法域总是最小的。

引理 4.2. 设$\mathcal{E}$ 是 S 在 A 上的作用，且$\mathcal{E}$ 是其诱导局部作用。将$A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 视为 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的子代数，如定理3.23所述。那么，$EL\colon A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 的乘法域等于交集 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，其中该交集是在$M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$中取的。

证明。 设 $E : M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是作用 E 的典范条件期望。根据定理 3.23，包含$A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 交织条件期望，因此有 $E|_{A\rtimes_{\mathrm{ess}}S} = EL$。由于 E 是忠实的真正期望，我们有 $\mu(E) = M_{\mathrm{loc}}(A)$。因此

$$\mu(EL) = \mu(\tilde{E}|_{A\rtimes_{\mathrm{ess}}S}) = \mu(\tilde{E}) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S = M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S. \qquad \square$$

推论 4.3. 包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 的局部期望 EL 具有最小乘法定义域，当且仅当 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S = A$。

推论 4.3 对模 $\mathrm{E}_t \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$通常并不成立：对于非含幺理想 $I \lhd A$也会失效，因为引理 2.4 给出 $M_{\mathrm{loc}}(I) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S = M(I) \cap A \supseteq I$。不过，我们总有包含关系 $\mathrm{E}_t \subseteq \mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$。

引理 4.4. 设$\mathcal{E}$ 是一个作用，满足 $EL\colon\ A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 具有最小的多-重域。对于 $t \in S$，我们有 $\mathcal{E}_t = (\mathcal{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \cdot s(\mathcal{E}_t)$。

证明。 包含 $\mathrm{E}_t \subseteq (\mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \cdot s(\mathrm{E}_t)$ 成立，因为 E_t 同时包含于 E_t 和 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，且 $\mathrm{E}_t = \mathrm{E}_t \cdot s(\mathrm{E}_t)$。我们将证明 $\mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是一个希尔伯特 A-双模，然后由于源理想相等，反向包含也成立。

对于 $\xi,\ \eta \in \mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，$\langle \xi,\ \eta \rangle = \xi^* \eta$ 和 $\langle\langle \xi,\ \eta \rangle\rangle = \xi \eta^*$ 都属于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$，因为 E_t 是希尔伯特 $M_{\mathrm{loc}}(A)$-双模；它们也属于 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，因为 $\xi,\ \eta \in A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 在其自身乘法下封闭。因此，$\mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 的内积取值于 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，根据推论 4.3，该集合是 A。由于 E_t 和 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 都在 A 的左、右乘法下封闭，$\mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 也在 A 的左、右乘法下封闭；此外，作为 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 中闭子集的交集，$\mathrm{E}_t \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 在范数下闭。□

4.2. **切片重构**。 凭借这些关于乘法域最小的包含的更强结果，我们现在可以定义希望研究的包含类。

定义 4.5. 设 $A \subseteq B$ 是一个 C^* 代数的包含。若该包含满足以下条件，我们称其为非周期动力包含：

(1) $A \subseteq B$ 是非退化的；**(2)** 存在一个逆子半群 $S \subseteq \mathsf{S}(A, B)$，使得 S 在 A 上的典范作用是非周期的；**(3)** 存在一个忠实伪期望 $E : B \to I(A)$，其最小乘法定义域为其乘法域。

命题 4.6. 设 $A \subseteq B$ 是一个非周期动力包含。设 $E :\ B \to I(A)$ 为相应的、具有最小乘法定义域的忠实伪期望，并设 $S \subseteq \mathcal{S}(A, B)$ 为非周期作用的指定逆子半群。则存在一个同构 $\varphi :\ A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to B$，它使条件期望相互协调，因此在 A 上限制为恒等映射。

证明。 非周期动力包含满足定理 3.8 的假设，由此可得所需结果。□

推论 4.7。 设 $\mathcal{E}$ 是一个非周期作用，且局部期望 $EL :\ A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 具有最小乘法定义域。那么 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是一个非周期动力包含，并且在同构意义下，每个非周期动力包含都具有这种形式。

定理 5.6] 中的一项结论是，对于闭且纯外作用，其双截逆半群 $\mathsf{Bis}(\hat{} A \rtimes S)$ 与切片逆半群 $\mathsf{S}(A, A \rtimes_{\mathrm{r}} S)$ 同构。包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的切片随后可以通过它们与双模 E_t 的交集恢复。因此，包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的所有非平凡切片都具有纯外性，并且在由该作用产生的切片之外，不会存在偏离切片。我们将把这一结论应用于包含 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$，然后利用 (MMD) 将性质传递到包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$。

引理 4.8. 设 $\mathcal{E} :\ S \curvearrowright A$ 是一个闭且纯外作用。设 $X \subseteq A \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 是一个切片。那么 $X = \sum_{t \in S} X \cap \mathcal{E}_t$。

证明。 包含 $\sum_{t \in S} X \cap \mathrm{E}_t \subseteq X$ 显然。 [15, 定理 5.6] 的证明表明，X 是某些切片 $\mathrm{E}_t \cdot J_t$ 的张成空间的闭包，其中 $t \in T \subseteq S$，且 $J_t \lhd A$ 是理想。每个 $\mathrm{E}_t \cdot J_t$ 都包含于 E_t 和 X，因此得到所需结果。□

在本节余下部分，我们固定一个作用 E，它由 S 作用于 A 上，且典范局部期望 $EL :\ A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \to M_{\mathrm{loc}}(A)$ 具有最小乘法定义域。我们将 由 E 表示由 E 诱导、从 S 作用于 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 上的局部作用。根据命题 3.15，不失一般性地，我们可以并且将假设作用 E 是精细的。

推论 4.9. 设 $Y \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 是诱导包含 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的一个切片。则 $Y = \{0\}$ 当且仅当 $Y \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S = \{0\}$，其中交集是在 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 中利用定理 3.23 取的。

~ ~ ~证明. 若 $Y = \{0\}$，则显然有 $Y \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S = \{0\}$。反过来，若 $Y \neq \{0\}$，则引理 4.8~ ~ ~表明存在某个 $t \in S$，使得 $Y \cap \mathrm{E}_t \neq \{0\}$，它是 E_t的一个子双模。引理 2.18~ ~ ~于是得到 $\{0\} \neq Y \cap \mathrm{E}_t \cap \mathrm{E}_t \subseteq Y \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$。□

~若 $X \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是一个切片，我们希望分析由 X生成的相应切片 $X \subseteq_{\sim} M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$。

引理 4.10。设 $X \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是包含 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$的一个切片。考虑定理 3.23中的 $A \rtimes_{\mathrm{ess}} S \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} \tilde{S}$，$\check{X} := $张成 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cdot X \cdot M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} \tilde{S}$ 的一个切片，并满足 $X = (\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \cdot s(X)$。

证明。我们首先证明 $\check{X}$ 是 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} \tilde{S}$的一个切片。固定 $x,\ y \in X$ 以及某个 $J \in \mathrm{I}_e(A)$中的$a \in M(J)$。令 $I := s(J \cdot X) \oplus s(J \cdot X)^{\perp}$。根据构造，该理想在 A中是本质的，并且满足 $X \cdot I = J \cdot X$。由科恩–休伊特分解定理，对于所有 $b \in I$，存在 $z \in X$ 和 $c \in J$，使得 $yb = cz$。于是我们有 $(x^*ay)b = x^*(ac)z \in X^*M(J)JX = X^*JX = s(J \cdot X) \subseteq I$。我们还注意到，$b(x^*ay) = (xb^*)^*ay$属于$(X \cdot I)^*M(J)X = (J \cdot X)^*M(J)X = X^*JM(J)X \subseteq I$。因此 x^*ay是 I 上的一个乘子，故属于局部乘子代数。由于 $||x^*ay|| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \cdot ||a||$，可得对于所有 $x,\ y \in X$，$x^*M_{\mathrm{loc}}(A)y \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$。因此 $\check{X}^*M_{\mathrm{loc}}(A)\check{X} =$张成 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cdot X^* \cdot M_{\mathrm{loc}}(A) \cdot X \cdot M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)^3 = M_{\mathrm{loc}}(A)$。对称地，$\check{X}M_{\mathrm{loc}}(A)\check{X}^* \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A)$，所以 $\check{X}$ 是一个切片。

与引理 4.4 类似，包含 $X \subseteq (\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \cdot s(X)$ 显然。对于反向包含，我们看到 $\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$的内积取值于 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，而根据推论 4.3，$M_{\mathrm{loc}}(A) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$等于 A。随后通过源理想 $s(X)$进行截取，即可得到所需的等式。□

推论 4.11。设 $X \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$是一个切片，$\check{X} =$张成 $M_{\mathrm{loc}}(A) \cdot X \cdot M_{\mathrm{loc}}(A)$ 是由 X在 $M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} \tilde{S}$ 中生成的切片。那么对于任意希尔伯特 A-子双模 $Y \subseteq \check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，$Y = \{0\}$ 当且仅当 $Y \cap X = \{0\}$。

证明。 $\check{X}$ 的源理想在 $M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中湮灭 $M_{\mathrm{loc}}(s(X)^{\perp})$，因为

$$\check{X}s(X)^{\perp} \subseteq \overline{\mathrm{span}}\, M_{\mathrm{loc}}(A)XM_{\mathrm{loc}}(s(X)^{\perp}) = \{0\}.$$

因此 $s(\check{X}) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(s(X)^{\perp})^{\perp} = M_{\mathrm{loc}}(s(X))$。于是我们有 $s(\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(s(X)) \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$，根据引理 2.4 和推论 4.3，它等于 $M(s(X)) \cap A$。

我们断言 $s(X)$是 $s(\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S)$的本质理想。注意，$M_{\mathrm{loc}}(s(X))$ 中唯一湮灭 $s(X)$ 的元素是 0，因此根据引理 2.3，$M_{\mathrm{loc}}(A)$ 中 $s(X)$ 的湮灭子是$M_{\mathrm{loc}}(s(X)^{\perp})$。于是我们得到 $X \cdot M_{\mathrm{loc}}(A) \cdot s(X)^{\perp} \subseteq X \cdot M_{\mathrm{loc}}(s(X)^{\perp}) = \{0\}$，从而有 $\check{X} \cdot s(X)^{\perp} = \{0\}$。因此 $s(X)$ 必定是 $s(\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S)$的本质理想。因此，如果 $Y \subseteq \check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 是非零的 Hilbert A-子双模，那么 $Y \cdot s(X) \neq \{0\}$，因为 $s(X)$ 在 $s(\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S)$中是本质的。

因此 $Y \cdot s(X) \subseteq (\check{X} \cap A \rtimes_{\mathrm{ess}} S) \cdot s(X) = X$，所以 $\{0\} \neq Y \cdot s(X) \subseteq X \cap Y$。反过来说，$Y \cap X = \{0\}$ 可得 $Y = \{0\}$。□

具有最小乘法域的条件期望，使我们能够通过分析 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 的切片来分析 $A \subseteq A \rtimes_{\mathrm{ess}} S$ 的切片，并逐步缩小到较小的包含。若作用 E 是非周期的，则由命题 3.20，诱导作用 E 是闭的且纯外，因此包含 $M_{\mathrm{loc}}(A) \subseteq M_{\mathrm{loc}}(A) \rtimes_{\mathrm{r}} S$ 满足引理 4.8 的假设。我们现在利用这一点证明，在非周期动力包含中，所有切片都以非周期方式作用；并且所有能稠密张成 B 的逆子半群 $S \subseteq \mathsf{S}(A,\ B)$ 都会产生相同的本质交叉积。从~起，我们假设作用 E 是非周期的，因此诱导局部作用 E 是纯外的。

引理 4.12。 假设作用 $\mathcal{E}$ 是非周期的。设 $X \subseteq A \rtimes_{\text{ess}} S$ 是包含 $A \subseteq A \rtimes_{\text{ess}} S$ 的一个切片。那么，当且仅当 $X \cap \mathcal{E}_t = \{0\}$ 对所有 $t \in S$ 都成立时， $X = \{0\}$。

证明。 “仅当”方向显然。

假设对所有 $t \in S$， $X \cap \mathrm{E}_t = \{0\}$。令 $\breve{X} := \text{span } \overline{M_{\text{loc}}(A) \cdot X \cdot M_{\text{loc}}(A)}$ 为由 X 生成的较大包含 $M_{\text{loc}}(A) \subseteq M_{\text{loc}}(A) \rtimes_{\text{r}} S$ 的切片~。等式 $X \cap \mathrm{E}_t = \{0\}$ 表明，对每个 $t \in S$，都有 $X \cap (\mathrm{E}_t \cap \breve{X} \cap A \rtimes_{\text{ess}} S) = \{0\}$，因此由推论 4.11 可得 $\{0\} = \mathrm{E}_t \cap \breve{X} \cap A \rtimes_{\text{ess}} S = \mathrm{E}_t \cap \breve{X} \supseteq \mathrm{E}_t \cap \breve{X} \cap \tilde{\mathrm{E}}_t$。模 $\tilde{\mathrm{E}}_t \cap \breve{X}$ 是 E_t 的子双模~，而根据引理 2.18，E_t 能够检测其局部乘子模中的子双模。因此，$\mathrm{E}_t \cap \breve{X} = \{0\}$ 意味着 $\tilde{\mathrm{E}}_t \cap \breve{X} = \{0\}$。由于作用 E 是非周期的，诱导局部作用根据命题 3.20 是闭且纯外的，因此满足引理 4.8 的条件。于是，对所有 $t \in S$， $\breve{X} \cap \tilde{\mathrm{E}}_t = \{0\}$ 当且仅当 $\breve{X} = \{0\}$。□

推论 4.13. 假设作用$\mathcal{E}$ 是非周期的。对于 $X \in \mathcal{S}(A, A \rtimes_{\text{ess}} S)$，子切片 $X_{\text{ess}} := \sum_{t \in S} X \cap \mathcal{E}_t$ 在 X中具有零正交补，因此与 X的所有非零子切片都有非零交。等价地， $s(X_{\text{ess}})$是 $s(X)$的本质理想。

证明。 我们看到 $X_{\text{ess}}^{\perp} \cap X$满足 $X_{\text{ess}}^{\perp} \cap X \cap \mathrm{E}_t = \bigcap_{u \in S} (X \cap \mathrm{E}_u)^{\perp} \cap (X \cap \mathrm{E}_t) \subseteq (X \cap \mathrm{E}_t)^{\perp} \cap (X \cap \mathrm{E}_t) = \{0\}$。因此，由引理 4.12 可得 $X_{\text{ess}}^{\perp} \cap X = \{0\}$。若 $Y \subseteq X$ 是一个非零子切片，则 $Y \cap X_{\text{ess}} = Y \cap \sum_{t \in S} X \cap \mathrm{E}_t \supseteq \sum_{t \in S} Y \cap \mathrm{E}_t$；根据引理 4.12，当且仅当 $Y = \{0\}$时，它等于零。由任意子双模 $Y \subseteq X$ 都满足 $Y = X \cdot s(Y)$这一事实可知，这等价于 $s(X_{\text{ess}}) \lhd s(X)$ 是一个本质理想。□

定理 4.14. 设 $A \subseteq B$ 是一个非周期动力包含。则 $\mathcal{S}(A, B)$ 在 A 上的典范作用是非周期的。若 $T \subseteq \mathcal{S}(A, B)$ 是一个逆子半群，且其张成 B的稠密子代数，则存在同构

$$B \cong A \rtimes_{\text{ess}} T \cong A \rtimes_{\text{ess}} \mathcal{S}(A, B).$$

此外，这些同构将 A映到其自身，并与条件期望相容。

证明. 设 $S \subseteq \mathrm{S}(A, B)$ 是一个非周期作用且张成 B 稠密子代数的逆子半群（注意，由于 $A \subseteq B$ 是一个非周期动力包含，这样的半群存在）。由定理 3.8，存在一个同构 $B \cong A \rtimes_{\text{ess}} S$，它将 A映到其自身，并与条件期望相容。

设 $X \subseteq A \rtimes_{\text{ess}} S \cong B$ 是一个切片，且设 $Y := X \cdot (X \cap A)^{\perp}$。由推论 4.13，子切片 $Y_{\text{ess}} := \sum_{t \in S} Y \cap \mathrm{E}_t$ 在 Y中具有零正交补，因此 $s(Y_{\text{ess}})$ 是 $s(Y)$的本质理想。对每个 $t \in S$，理想 $s(Y \cap \mathrm{E}_t \cdot I_1^{\perp},_t)$ 是 $s(Y \cap \mathrm{E}_t)$ 的本质理想，因为 $Y \cap A = \{0\}$。应用 [16, 引理 5.12] 可知，$Y \cap \mathrm{E}_t$是一个非周期的 A-双模，因为 $Y \cap \mathrm{E}_t \cdot I_1^{\perp},_t$是。因此， Y是非周期的，因为它是非周期子双模 $Y \cap \mathrm{E}_t$的闭线性张成；故 X 在 A上非周期地作用。因此，任取 $T \subseteq \mathrm{S}(A, B)$，包含 $A \subseteq B$ 都是一个非周期动力包含，故由定理 3.8 得 $B \cong A \rtimes_{\text{ess}} T$。特别地，取 $T = \mathrm{S}(A, B)$ 可得 $B \cong A \rtimes_{\text{ess}} \mathrm{S}(A, B)$。□

对偶群胚 $\hat{}A \rtimes \mathrm{S}(A, B)$ 上的拓扑以包含 $A \subseteq B$ 的切片为基。引理 4.12 表明，任意非零切片 $X \in \mathrm{S}(A, B)$ 至少与某个 $t \in S$ 的 E_t 相交。因此，在群胚的拓扑中，任意 $\hat{}A \rtimes \mathrm{S}(A, B)$ 的开子集都必须与由 E_t 定义的开双截面相交。因此，对于 $t \in S$，由 E_t 定义的双截面覆盖了全切片作用下对偶群胚的一个稠密子集。

推论 4.15。 假设作用 $\mathcal{E}$ 是非周期的。令 $B = A \rtimes_{\text{ess}} S$。典范群胚同态 $\phi : \hat{}A \rtimes S \to \hat{}A \rtimes \mathcal{S}(A, B)$, $\phi[t, [\pi]] = [\mathcal{E}_t, [\pi]]$ 具有开值域。若对每个 $t \in S$ 及每个理想 $I \lhd A$，都存在一个幂等元 $e \in S$，使得 $\mathcal{E}_t \cdot I = \mathcal{E}_e$，则 ϕ是单射。

证明。对每个 $[t,[\pi]] \in A \rtimes S$，每个 $\phi[t,[\pi]]$ 都属于 $\hat{\mathsf{E}}_t$，且 $\bigcup_{t\in S}\hat{\mathsf{E}}_t$ 在 $A \rtimes \mathsf{S}(A, B)$ 中是开集，因为每个 $\hat{\mathsf{E}}_t$ 都是一个开双截面，因此 ϕ 的像是开集。

最后说明 ϕ 是单射的部分由引理 3.10 得出。 □

注记 4.16。推论 4.15 中的映射 ϕ 不一定是单射，因为半群 $\mathsf{S}(A, B)$ 的幂等元格可能比 S 更精细。例如，若 S 是一个群（视为逆半群），并作用于一个 C*-代数 A 上，则芽关系是平凡的，因为群中唯一的幂等元是单位元。逆半群 $\mathsf{S}(A, B)$ 总会将 A 的理想格包含为幂等元，因此商可能会识别更多的芽。引理 3.10 的条件确保有足够多的幂等元；特别是当作用 E 是精细的时，该条件成立。

我们不知道非周期逆半群作用的映射 ϕ 是否自动为单射。如果作用是拓扑非平凡的，也就是说，双模 $\mathsf{E}_t \cdot I_{1,\ t}$ 所诱导的偏部分同胚不固定 A 的任何开子集，那么 ϕ 是单射。根据定理 8.1], ，每个拓扑非平凡作用都是非周期的，但反过来是否成立尚不清楚（除非代数 A 含有一个单纯或为 I 型的本质理想）。如果存在一个 C*-代数 A 和一个非零 Hilbert A-双模 X，它是非周期的但并非拓扑非平凡的，那么 X 会在 A 上生成这样的作用，此时映射ϕ 不会是单射。

参考文献

[1] P. Ara, M. Matthieu, 《C*-代数的局部乘子》，施普林格数学专著，伦敦施普林格出版社（ 2003 10 1007 978 1 4471 0045 4），https://doi.org/ 。 / - - - - A. Buss, E. Exel，逆半群[2]上的 Fell 丛与扭曲 ´etale 群胚，《算子理论杂志》（2012），第 67 卷，第 1 期（2012 年冬），第 153–205 页（共 53 页）[3] A. Buss, E. Exel，Alcides Buss. Ruy Exel. 逆半群扩张及其在 C*-代数上的作用，《伊利诺伊数学杂志》 56 4 1185 1212, 2012 10 1215 1399395828 ( ) – [4] Winter . https://doi.org/ . /ijm/ A. Buss, R. Exel, R. Meyer，逆半群上 Fell 丛的约化 -代数，《以色列数学杂志》 220 1 2017 225 274 第 期（ ），第 – 页 A. Buss, R. Meyer，《群胚上的逆半群作用》，《落基山[5]数学杂志》47 (1) 53 - 159, 2017 10 1216 2017 47 1 53 。https://doi.org/ . /RMJ- - - - M. D. Choi，[6] C*-代数上正线性映射的施瓦茨不等式，《伊利诺伊数学杂志》18 (1974), 565–574。[7] R. Exel，C*-代数的非交换卡当子代数，《纽约数学杂志》[仅电子版] 17 (2011): 331-382。¡http://eudml.org/doc/223366¿。[8] R. Exel，非豪斯多夫 ´etale 群胚，《美国数学会会刊》139(3) DOI:10.1090/S0002-9939-2010-10477-X [9] M. Frank，C*-代数的单射包与局部乘子，《国际数学杂志》1(2002), 第 6 期, 611 – 620 10 48550 9910109 https://doi.org/ . /arXiv.math/ P. Green，扭曲协变代数的[10]局部结构，《数学学报》140 191 – 250, 1978。 https://doi.org/ 10 1007 02392308 . /BF H. Gonshor，-代数的单射包络。II，《美国数学会会刊》，第 24, [11] 3 1970 486 491 卷第 期（3 月， ），第 – 页 M. Hamana，C*-代数的单射包，《日本数学会杂志》31 (1979), 第 1 期, 181–197，[12] doi: 10.2969/jmsj/03110181。MR 519044。[13] A. Kumjian，关于 C*-对角线，《加拿大数学杂志》，第 38 卷，第 4 期，8 月 1 日 1986 ， 969 1008 10 4153 1986 048 0 第 – 页 DOI: https://doi.org/ . /CJM- - - B. K. [14] Kwasniewski, R. Meyer，非周期性、拓扑自由性与纯外性：从群作用到 Fell 丛，《数学研究》 241 2018 257 302 10 48550 1611 06954 ( ), - [15] https://doi.org/ . /arXiv. . B. K. Kwasniewski, R. Meyer，论非交换 Cartan 子代数，《美国数学会汇刊》 373 2020 8697 8724 10 48550 1908 07217 ( ), 第 - 页 https://doi.org/ . /arXiv. . B. K. [16] Kwasniewski, R. Meyer，逆半群作用的本质交叉积：单性与纯无穷性，《文献数学》 26 2021 271 335 10 48550 1906 06202 ( ), - [17] https://doi.org/ . /arXiv. . B. K. Kwasniewski, R. Meyer，非周期性、近似延拓性质与伪期望的唯一性，《国际数学研究通报》（IMRN），2021 年 6 月 7 日在线发表 https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.05409

[18] E. C. Lance, 《希尔伯特 C^*-模：算子代数学家的工具箱》，伦敦数学会数学讲义丛书，第**210**卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。https://doi.org/ 10 1017 9780511526206 . /CBO X. Li, 《每个可分类的单纯 -代数都有一个 *Cartan* 子代数》，《数学发明》219, 653–699 (2020)。https://doi.org/ 10 1007 00222 019 00914 0 . /s - - - D. Pitts, 《包含 C^*- 代数的正规化子与近似单位》，(arXiv:2109.00856 [math.OA]), (2022),（即将在《印第安纳大学数学杂志》发表）https://doi.org/ 10 48550 2109 00856 . /arXiv. . J. Renault, 《-代数的群胚方法》，《数学讲义》第**793** 卷，Springer-Verlag 柏林、海德堡、纽约, 1980 10 1007 0091072 。https://doi.org/ . /BFb J. Renault, 《-代数中的 *Cartan* 子代数》，《爱尔兰数学会通报》**61** (2008), 29–63。DOI: 10 33232 0061 29 63 . /BIMS. . A. Imad Raad, 《*Cartan* 子代数的 *Renault* 定理推广》，(arXiv:2101.03265 [math.OA]), (2021),（已被《美国数学会会刊》接受发表）https://doi.org/ 10 48550 2101 03265 . /arXiv. . J. Taylor, 《 C^*-代数的非周期动力学包含》，哥廷根乔治-奥古斯特大学¨at G¨ottingen (2022), http://dx.doi.org/10.53846/goediss-9727

Jonathan Taylor，数学研究所，乔治-奥古斯特大学哥廷根，Bunsenstraße 3-5，37073 哥廷根，德国电子邮件地址： jonathan.taylor@mathematik.uni-goettingen.de