arXiv:2303.10997v1 [math.CA] 20 Mar 2023

关于算术平均数相对于广义 Bajraktarević 平均值的不变性

Richard Grunwald 与 Zsolt Páles

Abstract. 本文旨在研究以下涉及两个二元广义 Bajraktarević 平均值的不变方程；换言之，我们旨在求解函数方程

$$f^{-1}\left(\frac{p_1(x)f(x)+p_2(y)f(y)}{p_1(x)+p_2(y)}\right)+g^{-1}\left(\frac{q_1(x)g(x)+q_2(y)g(y)}{q_1(x)+q_2(y)}\right)=x+y \qquad (x,y\in I),$$

其中，I 是一个非空开实区间，f、g：$I\to\mathbb{R}$ 是连续且严格单调的函数，而 p_1、p_2、q_1、q_2：$I\to\mathbb{R}_+$ 是未知函数。本文的主要结果表明，假设 f、g四次连续可微，p_1和 p_2 二次连续可微，并且 p_1 与 p_2 在 I的一个稠密子集上不相等，则上述等式成立的充要条件是这些未知函数具有如下形式

$$f=\frac{u}{v}, \qquad g=\frac{w}{z}, \qquad \text{and} \qquad p_1q_1=p_2q_2=vz,$$

其中，$u,v,w,z\colon I\to\mathbb{R}$是二阶线性微分方程$F''=\gamma F$（$\gamma\in\mathbb{R}$ 任意固定）的任意解，满足 $v>0$和 $z>0$在 I上成立，且 $\{u,v\}$与 $\{w,z\}$线性无关。

1. Introduction

本文中，符号 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示实数集和正实数集，而 I 始终表示一个非空开实区间。

给定一个严格单调连续函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 以及一对取正值的函数 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$，二元广义 Bajraktarevi´c 平均值$A_{f,\,p}\colon I^2\to I$ 由下式给出:

$$A_{f,p}(x,y):=f^{-1}\left(\frac{p_1(x)f(x)+p_2(y)f(y)}{p_1(x)+p_2(y)}\right) \qquad (x,y\in I). \tag{1}$$

这是 Bajraktarevi´c 在 [1] 和 [2]中引入概念的推广。容易看出，$A_{f,\,p}$ 是一个严格平均值，即

$$\min(x,y)\le A_{f,p}(x,y)\le\max(x,y) \qquad (x,y\in I)$$

成立，且当 $x\ne y$ 时，不等式为严格不等式。

作者已在 [8] 中解决了广义 Bajraktarevi´c 平均值的等同性问题。本文的主要目标是研究两个二元广义

日期：2023年3月21日。2010年数学主题分类。39B22，39B12，26E60。关键词和短语：拟算术平均数；Bajraktarevi´c 平均值；不变方程。´第一作者的研究由人力资源部的 UNKP-20-3新国家卓越计划资助。第二作者的研究由 K-134191 NKFIH Grant´、2019-2.1.11-TET-2019-00049 和 EFOP-3.6.1-16-2016-00022 项目资助。最后一个项目由欧盟和欧洲社会基金共同资助。

Bajraktarevi´c 平均值相对于算术平均数的不变方程，即求解以下函数方程

$$A_{f,p}(x,y) + A_{g,q}(x,y) = x + y \qquad (x,y \in I), \tag{2}$$

其中 $f, g : I \to \mathbb{R}$ 是严格单调的连续函数，且 $p, q : I \to \mathbb{R}^2_+$.

在一般的平均值类别中，许多作者在多篇论文中研究了不变方程。Dar´oczy 和 P´ales 在 [7] 中彻底解决了 H¨older 平均值的这一方程。拟算术平均数更一般的不变方程最初由 Sutˆo 于 [15], [16] 在假设函数具有任意阶可微性的条件下求解，之后 Matkowski 于 [11] 在假设函数二阶连续可微的条件下求解。最后，Dar´oczy 和 P´ales 于 [7] 在不作任何不必要的可微性假设的情况下解决了这一问题。Jarczyk 和 Matkowski 于 [10] ，以及 Burai 于 [6]，研究了三个加权算术平均的不变方程。Jarczyk 于 [9] 在没有额外正则性假设的情况下给出了这一问题的解。Matkowski 于 [12] 研究了 Cauchy 平均相对于算术平均数的不变性。算术平均数相对于广义拟算术平均的不变性（该类平均由 Matkowski 于 [13] 引入）由 Baj´ak 和 P´ales 在 [4] 中描述。他们还分别在 [3] 和 [5], 中求解了二元 Gini 平均和 Stolarsky 平均的不变方程。

求解 (2) 的主要困难在于，我们必须计算 I^2 上两个平均值在对角点处直到四阶的偏导数，然后求解由此得到的微分方程组。

在后续章节中，我们将证明一个引理，它使我们能够放宽主定理中的正则性假设。随后回顾 Schwarzian 导数的定义及基本性质。接着给出不变性方程成立的一个充分条件。证明该结论时，对未知函数不作任何正则性假设。最后，在假设函数四次连续可微的情况下，我们证明：如果 $p_1 = p_2$ 仅在 I 的一个无处稠密子集上成立，那么同一条件也是必要的。当 $p_1 = p_2$ 在 I 的一个子区间上成立时，情况仍未解决。

2. Auxiliary results and notation

定义 I^2 的对角线 $\operatorname{diag}(I^2)$，以及映射 $\Delta_2 : I \to \operatorname{diag}(I^2)$:

$$\operatorname{diag}(I^2) := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\} \qquad \text{and} \qquad \Delta_2(x) := (x,x) \qquad (x \in I),$$

并记 $e_1 := (1,0)$ 和 $e_2 := (0,1)$。给定 $p = (p_1, p_2) : I \to \mathbb{R}^2_+$ 和 $q = (q_1, q_2) : I \to \mathbb{R}^2_+$，我们还将使用以下记号：

$$p_0 := p_1 + p_2, \qquad q_0 := q_1 + q_2, \qquad \text{and} \qquad r_0 := \frac{q_0}{p_0}.$$

我们称 $M : I^2 \to I$ 是 I 上的严格平均，如果对于 $x, y \in I$ 且满足 $x \neq y$，有 $\min(x,y) < M(x,y) < \max(x,y)$。此外，如果函数 $x \mapsto M(x,y)$ 对每个 $y \in I$ 都连续，且函数 $y \mapsto M(x,y)$ 对每个 $x \in I$ 都连续，则称 M 分别连续。

借助以下引理，我们可以降低论述中的正则性假设。

引理 1. 设 $M : I^2 \to I$ 是 I 上的严格平均，$f : I \to \mathbb{R}$ 是连续严格单调函数，且 $p = (p_1, p_2) : I \to \mathbb{R}^2_+$。假设存在一个包含 $\operatorname{diag}(I^2)$ 的开集 $U \subseteq I^2$，使得 $A_{f,\,p} = M$ 在 U 上成立。那么以下两个断言成立。

(i) 若 M 在 U 上分别连续，则 p_1 和 p_2 在 I 上连续。

(ii) 设 $k \in \mathbb{N}$。假设 M 关于其第一和第二个变量在 U 和 f 上 k 次偏可微（分别地， k 次连续偏可微）： $I \to \mathbb{R}$ 是定义在 I 上的 k 次可微（分别地， k 次连续可微）函数。那么 p_1 和 p_2 在 I 上 k 次可微（分别地， k 次连续可微）。

证明。根据我们的假设，对于所有 $(x, y) \in U$，有

$$A_{f,p}(x, y) = M(x, y).$$

这等价于下列等式

$$\frac{p_1(x)f(x) + p_2(y)f(y)}{p_1(x) + p_2(y)} = f(M(x, y)) \qquad ((x, y) \in U). \tag{3}$$

注意，对于 $x, y \in I$ 且 $x \neq y$，不等式 $\min(x, y) < M(x, y) < \max(x, y)$ 以及 f 的严格单调性意味着 $f(y) \neq f(M(x, y))$。因此，关于 $p_2(y)$ 解方程 (3)，可得

$$p_2(y) = p_1(x)\frac{f(M(x, y)) - f(x)}{f(y) - f(M(x, y))} \qquad ((x, y) \in U,\, x \neq y). \tag{4}$$

令 $x_0 \in I$ 为任意固定点。数对 (x_0, x_0) 是 U 的内点，因此存在 $x \in I \setminus \{x_0\}$ 使得 $(x, x_0) \in U$。于是集合

$$V := \{y \in I \mid (x, y) \in U,\, x \neq y\}$$

这是 x_0 的一个邻域，在该邻域上，对于 p_2，等式 (4) 成立。另一方面， M 关于其第二个变量的连续性意味着，(4) 的右端是 V 上关于 y 的连续函数。因此， p_2 在 x_0 处连续，由此可知 p_2 在 I 上连续。类似的论证表明，由于 M 关于其第一个变量连续， p_1 也连续。

根据标准微积分法则，在满足 k 次（连续）可微的条件下，式 (4) 的右侧在上述构造的集合 V 上也为 k 次（连续）可微，特别是在 x_0 处，因此 p_2 在 x_0 处也具有相同性质。由于 x_0 的任意性，可知 p_2 在 I 上是 k 次（连续）可微的。□

3. The Schwarzian derivative

对于一个一阶导数处处非零的三次可微函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$，我们回顾 Schwarzian 导数 $S(f)\colon I \to \mathbb{R}$ 的概念，其定义如下:

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

引理 2. 设 $\gamma \in \mathbb{R}$，且 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 是一个三次可微函数，并且 f' 在 I 上不为零。则以下两个断言等价。

(i) 存在 二次可微函数 $u, v\colon I \to \mathbb{R}$，使得 v 在 I 上不为零 ，

$$u'' = \gamma u, \qquad v'' = \gamma v, \qquad and \qquad f = \frac{u}{v}.$$

(ii) f 满足三阶微分方程

$$S(f) = -2\gamma.$$

证明。假设断言 (i) 成立。那么 u和 v 都是三次可微函数，并且

$$\begin{aligned} u &= fv, \\ u' &= f'v + fv', \\ \gamma u = u'' &= f''v + 2f'v' + fv'' = (\gamma f + f'')v + 2f'v', \\ \gamma u' = u''' &= f'''v + 3f''v' + 3f'v'' + fv''' = (3\gamma f' + f''')v + (\gamma f + 3f'')v'. \end{aligned}$$

这是一个关于未知数 (u, u', v, v') 的齐次线性方程组。因此，其系数行列式必须为零，也就是说，

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & f' & f \\ \gamma & 0 & \gamma f + f'' & 2f' \\ 0 & \gamma & 3\gamma f' + f''' & \gamma f + 3f'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f' & 0 \\ \gamma & 0 & f'' & 2f' \\ 0 & \gamma & 3\gamma f' + f''' & 3f'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f' & 0 \\ 0 & f'' & 2f' \\ \gamma & 3\gamma f' + f''' & 3f'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f'' & 2f' \\ \gamma & 2\gamma f' + f''' & 3f'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'' & 2f' \\ 2\gamma f' + f''' & 3f'' \end{vmatrix} = 3f''^2 - 4\gamma f'^2 - 2f'f''' = -2f'^2(S(f) + 2\gamma). \end{aligned}$$

因此，断言 (ii) 成立。

为证明逆命题，假设断言 (ii) 成立。设 $x_0 \in I$ 固定，并设 u 和 v 是满足 $u'' = \gamma u$、 $v'' = \gamma v$ 且线性无关的函数。

$$\begin{aligned} u(x_0) &= f(x_0), & v(x_0) &= 1, \\ u'(x_0) &= f'(x_0) - \frac{1}{2}f'(x_0)^{-1}f''(x_0)f(x_0), & v'(x_0) &= -\frac{1}{2}f'(x_0)^{-1}f''(x_0). \end{aligned}$$

根据刘维尔定理，线性微分方程$F'' = \gamma F$的朗斯基行列式 $W(u, v) := u'v - v'u$ 为常数。因此，$W(u, v) \equiv W(u, v)(x_0) = f'(x_0)$。设 V 为包含 x_0 且使 v 在 V 上为正的 I 的最大开子区间。定义 $g\colon V \to \mathbb{R}$，使得 $g := u/v$。我们可以看到

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = f(x_0), \\ g'(x_0) &= \Big(\frac{u'v - v'u}{v^2}\Big)(x_0) = f'(x_0), \\ g''(x_0) &= \Big(\frac{u'v - v'u}{v^2}\Big)'(x_0) = \left(\frac{f'(x_0)}{v^2}\right)'(x_0) = -2f'(x_0)\Big(\frac{v'}{v^2}\Big)(x_0) = f''(x_0). \end{aligned}$$

另一方面，根据证明的第一部分， g 也满足微分方程 $S(g) = -2\gamma$，其定义于 V 上。因此， f 和 g 是同一个常微分方程的解，并且在 x_0 处满足相同的初值条件。根据常微分方程的存在唯一性定理，可得 $f = g$ 在 V 上成立。若 V是 I 的真子区间，那么它的一个端点（不妨设为下端点）属于 I。在此端点处，函数 v 为零，因此 g 的右极限不存在，这与 f 在该点处存在右极限相矛盾。此矛盾表明 $V = I$，从而 f 具有断言 (i) 中所述的形式。□

下一个结果是引理 2 在 $\gamma = 0$ 时的特例。

推论3. 设 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 为一个三次可微函数，且 f' 在 I上不为零。那么

$$S(f)=0$$

在 I 上成立，当且仅当存在四个常数 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，满足 $ad\neq bc$ 和 $0\notin cI+d$，使得

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad(x\in I).$$

4. A sufficient condition for the invariance equation

下面我们证明 (f,p)、(g,q) 是方程 (2) 的解的一个充分条件。对于一个实数 $\gamma\in\mathbb{R}$，我们定义正弦型和余弦型函数 $S_\gamma, C_\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$S_\gamma(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\begin{cases}\dfrac{\sin(\sqrt{-\gamma}x)}{\sqrt{-\gamma}} & \text{if } \gamma<0,\\ x & \text{if } \gamma=0,\\ \dfrac{\sinh(\sqrt{\gamma}x)}{\sqrt{\gamma}} & \text{if } \gamma>0,\end{cases}$$

$$C_\gamma(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k x^{2k}}{(2k)!}=\begin{cases}\cos(\sqrt{-\gamma}x) & \text{if } \gamma<0,\\ 1 & \text{if } \gamma=0,\\ \cosh(\sqrt{\gamma}x) & \text{if } \gamma>0.\end{cases}$$

定理 4. 设 $\gamma\in\mathbb{R}$ 为实常数，令 $u,v,w,z\colon I\to\mathbb{R}$ 为二阶线性微分方程 $F''=\gamma F$ 的任意解，满足 $v>0$ 且 $z>0$ 在 I 上成立，并且 $\{u,v\}$ 和 $\{w,z\}$ 线性无关。假设函数 f, $g\colon I\to\mathbb{R}$,$p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$，以及 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 满足

$$f=\frac{u}{v},\qquad g=\frac{w}{z},\qquad and\qquad p_1q_1=p_2q_2=vz. \tag{5}$$

于是， f 和 g 严格单调且连续，并且不变方程 (2) 对所有 x、$y\in I$ 都成立。

证明。根据线性齐次微分方程的基本结果，函数 S_γ 和 C_γ 构成微分方程 $F''=\gamma F$ 的基本解系。因此，数对 (u,v) 和 (w,z) 等价于 (S_γ,C_γ)，也就是说，存在 a_1、b_1、c_1、d_1、a_2、b_2、c_2、$d_2\in\mathbb{R}$ 这些实常数，使得 $a_1d_1\neq b_1c_1$、$a_2d_2\neq b_2c_2$，并且

$$u=a_1S_\gamma+b_1C_\gamma,\qquad v=c_1S_\gamma+d_1C_\gamma,\qquad\text{and}\qquad w=a_2S_\gamma+b_2C_\gamma,\qquad z=c_2S_\gamma+d_2C_\gamma.$$

鉴于 $[14,\ \text{定理}\ 6]$,的充分性部分，这意味着恒等式

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}\left(\frac{tu(x)+su(y)}{tv(x)+sv(y)}\right)+\left(\frac{w}{z}\right)^{-1}\left(\frac{sw(x)+tw(y)}{sz(x)+tz(y)}\right)=x+y\qquad(x,y\in I,\,t,s>0). \tag{6}$$

另一方面，取 $t:=\frac{p_1(x)}{v(x)}=\frac{z(x)}{q_1(x)}$ 和 $s:=\frac{p_2(y)}{v(y)}=\frac{z(y)}{q_2(y)}$，利用（5），可得

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}\left(\frac{tu(x)+su(y)}{tv(x)+sv(y)}\right)=f^{-1}\left(\frac{p_1(x)f(x)+p_2(y)f(y)}{p_1(x)+p_2(y)}\right)=A_{f,p}(x,y)$$

and

$$\Big(\frac{w}{z}\Big)^{-1}\bigg(\frac{sw(x)+tw(y)}{sz(x)+tz(y)}\bigg)=g^{-1}\bigg(\frac{q_1(x)g(x)+q_2(y)g(y)}{q_1(x)+q_2(y)}\bigg)=A_{g,q}(x,y).$$

因此，由（6）可知（2）成立。 □

5. Partial derivatives of generalized Bajraktarević means

接下来的结论回顾广义 Bajraktarevi´c 平均值在 I^2 的对角点处直到三阶偏导数的公式。这些结论是在严格的正则性假设下于 [8] 中证明的。我们还计算四阶偏导数 $\partial_1^2\partial_2^2A_{f,\ p}$。

定理 5。设 $\ell\in\{1,2,3,4\}$，令 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上且一阶导数不为零的 ℓ 次可微函数，并令 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$。则有以下结论。

(i) 若 $\ell=1$、$i\in\{1,2\}$ 和 p_i 在 I 上连续，则一阶偏导数 $\partial_iA_{f,\ p}$ 在 $\mathrm{diag}(I^2)$ 上存在，并且

$$\partial_iA_{f,p}\circ\Delta_2=\frac{p_i}{p_0}.$$

(ii) 若 $\ell=2$、p_1 和 p_2 在 I 上可微，则二阶偏导数 $\partial_1\partial_2A_{f,p}$ 在 $\mathrm{diag}(I^2)$ 上存在，并且

$$\partial_1\partial_2A_{f,p}\circ\Delta_2=-\frac{p_1p_2}{p_0^2}\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg).$$

(iii) 若 $\ell=3$、p_1 和 p_2 在 I 上二次可微，则三阶偏导数 $\partial_1^2\partial_2A_{f,p}$ 在 I^2 上存在，并且

$$\begin{aligned}\partial_1^2\partial_2A_{f,p}\circ\Delta_2=&-\frac{1}{4}\Big(\frac{p_1-p_2}{p_0}\Big)''-\frac{3p_0(p_1-p_2)}{16p_1p_2}\bigg(\Big(\frac{p_1-p_2}{p_0}\Big)'\bigg)^2-\frac{1}{2}\bigg(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)\bigg)'\\&+\frac{3p_1p_2}{4p_0^2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)^2-\frac{p_1p_2}{2p_0^2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f).\end{aligned}$$

(iv) 若 $\ell=4$、p_1 和 p_2 在 I 上二阶连续可微，则四阶偏导数 $\partial_1^2\partial_2^2A_{f,p}$ 在 $\mathrm{diag}(I^2)$ 上存在，并且

$$\begin{aligned}\partial_1^2\partial_2^2A_{f,p}\circ\Delta_2=&\bigg(\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)''+\frac{3}{8}\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\bigg(\Big(\frac{p_1-p_2}{p_0}\Big)'\bigg)^2\bigg)\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)\\&-\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)'\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)'-\frac{1}{2}\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)^3\\&+\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\bigg(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\bigg)S(f)-\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2S(f)'.\end{aligned}$$

证明。根据初等微积分法则，若 f 是 $(\alpha+\beta)$ 次可微且其一阶导数不为零，则偏导数 $\partial_1^\alpha\partial_2^\beta A_{f,\ p}$ 在 I^2 上存在；此外，p_1 在 I 上 α 次可微，而 p_2 在 I 上 β 次可微。

根据等式 (3)，采用记号 $M:=A_{f,p}$，对于所有 $x,y\in I$，有

$$p_1(x)f(x)+p_2(y)f(y)=p_1(x)f\big(M(x,y)\big)+p_2(y)f\big(M(x,y)\big).$$

设 $\ell \in \{1,2,3,4\}$, $\alpha,\beta \in \{0,1,2\}$，并令 $\delta_{\cdot,\cdot}$ 表示标准克罗内克符号。应用广义莱布尼茨乘积法则，分别对第一变量求 α 次导数、对第二变量求 β 次导数，得到

$$\begin{aligned}
&\delta_{0,\beta}\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}p_1^{(\alpha-i)}(x)f^{(i)}(x)+\delta_{0,\alpha}\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}p_2^{(\beta-j)}(y)f^{(j)}(y)\\
&\qquad=\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}p_1^{(\alpha-i)}(x)\cdot\partial_1^i\partial_2^\beta(f\circ M)(x,y)+\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}p_2^{(\beta-j)}(y)\cdot\partial_1^\alpha\partial_2^j(f\circ M)(x,y).
\end{aligned}$$

将该等式限制在 I^2 的对角线上，可得

$$\begin{aligned}
&\delta_{0,\beta}\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}p_1^{(\alpha-i)}f^{(i)}+\delta_{0,\alpha}\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}p_2^{(\beta-j)}f^{(j)}\\
&\qquad=\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}p_1^{(\alpha-i)}\cdot\partial_1^i\partial_2^\beta(f\circ M)\circ\Delta_2+\sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}p_2^{(\beta-j)}\cdot\partial_1^\alpha\partial_2^j(f\circ M)\circ\Delta_2.
\end{aligned}\tag{7}$$

计算偏导数 $\partial_1^i\partial_2^j(f\circ M)$ 时，可使用以下显而易见的公式：

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(f\circ M)&=(f'\circ M)\cdot\partial_\mu M,\\
\partial_\mu\partial_\nu(f\circ M)&=(f''\circ M)\cdot\partial_\mu M\cdot\partial_\nu M+(f'\circ M)\cdot\partial_\mu\partial_\nu M,\\
\partial_\mu^2\partial_\nu(f\circ M)&=(f'''\circ M)\cdot\partial_\mu M^2\cdot\partial_\nu M+(f''\circ M)\cdot\big(\partial_\mu^2 M\cdot\partial_\nu M+2\partial_\mu\partial_\nu M\cdot\partial_\mu M\big)\\
&\quad+(f'\circ M)\cdot\partial_\mu^2\partial_\nu M,\\
\partial_1^2\partial_2^2(f\circ M)&=(f''''\circ M)\cdot\partial_1 M^2\cdot\partial_2 M^2+(f'\circ M)\cdot\partial_1^2\partial_2^2 M\\
&\quad+(f'''\circ M)\cdot\big(\partial_1^2 M\cdot\partial_2 M^2+\partial_2^2 M\cdot\partial_1 M^2+4\partial_1\partial_2 M\cdot\partial_1 M\cdot\partial_2 M\big)\\
&\quad+(f''\circ M)\cdot\big(\partial_1^2 M\cdot\partial_2^2 M+2\partial_1\partial_2 M^2+2\partial_1^2\partial_2 M\cdot\partial_2 M+2\partial_1\partial_2^2 M\cdot\partial_1 M\big),
\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\mu,\nu\in\{1,2\}$。

在特定情况下，当 $\alpha=1$ 且 $\beta=0$ 时，(7) 以及 (8) 中的第一个公式给出

$$p_1'f+p_1f'=p_1'f+p_0f'\cdot\partial_1M\circ\Delta_2.$$

将 $\partial_1M\circ\Delta_2$ 表示出来后，我们得到关于 $i=1$ 的断言 (i)。情形 $i=2$ 也可类似地看出。在情形 $\alpha=\beta=1$ 下，利用 (8) 中的前两个公式，等式 (7) 可化简为

$$0=p_1'f'\cdot\partial_2M\circ\Delta_2+p_2'f'\cdot\partial_1M\circ\Delta_2+p_0\big(f''\cdot(\partial_1M\cdot\partial_2M)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_1\partial_2M\circ\Delta_2\big),$$

利用 (i)，可推出

$$f''\cdot(\partial_1M\cdot\partial_2M)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_1\partial_2M\circ\Delta_2=-\frac{(p_1p_2)'}{p_0^2}f'.\tag{9}$$

现在，再次应用 (i) 中的公式，可得 (ii) 成立。利用 (i) 和 (ii)，还可得到公式

$$\begin{aligned}\partial_i^2 M\circ\Delta_2 &= \big(\partial_i M(x,x)\circ\Delta_2\big)' - \partial_1\partial_2 M\circ\Delta_2\\ &= \Big(\frac{p_i}{p_0}\Big)' + \frac{p_1p_2}{p_0^2}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right) = 2\frac{p_i'p_{3-i}}{p_0^2}+\frac{p_1p_2}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}.\end{aligned}\tag{10}$$

利用断言 (i) 和 (10)，可得

$$f''\cdot(\partial_i M^2)\circ\Delta_2 + f'\cdot\partial_i^2 M\circ\Delta_2 = \frac{p_i}{p_0}f'' + 2\frac{p_i'p_{3-i}}{p_0^2}f'.\tag{11}$$

当 $\alpha=2,\beta=1$ 时，等式 (7) 得出

$$0 = p_1''\cdot\partial_2(f\circ M)\circ\Delta_2 + 2p_1'\cdot\partial_1\partial_2(f\circ M)\circ\Delta_2 + p_2'\cdot\partial_1^2(f\circ M)\circ\Delta_2 + p_0\cdot\partial_1^2\partial_2(f\circ M)\circ\Delta_2.$$

鉴于 (8)，我们可以将此等式改写为

$$\begin{aligned}0 = {}& p_1''f'\cdot\partial_2 M\circ\Delta_2 + 2p_1'\Big(f''\cdot(\partial_1 M\cdot\partial_2 M)\circ\Delta_2 + f'\cdot\partial_1\partial_2 M\circ\Delta_2\Big)\\ &+ p_2'\Big(f''\cdot(\partial_1 M^2)\circ\Delta_2 + f'\cdot\partial_1^2 M\circ\Delta_2\Big) + p_0\Big(f'''\cdot(\partial_1 M^2\cdot\partial_2 M)\circ\Delta_2\\ &+ f''\cdot\big(\partial_1^2 M\cdot\partial_2 M + 2\partial_1\partial_2 M\cdot\partial_1 M\big)\circ\Delta_2 + f'\cdot\partial_1^2\partial_2 M\circ\Delta_2\Big).\end{aligned}$$

利用断言 (i)、(9) 和 (11)，此等式意味着

$$\begin{aligned}&f'''\cdot(\partial_1 M^2\cdot\partial_2 M)\circ\Delta_2 + f''\cdot(\partial_1^2 M\cdot\partial_2 M + 2\partial_1\partial_2 M\cdot\partial_1 M)\circ\Delta_2 + f'\cdot\partial_1^2\partial_2 M\circ\Delta_2\\ &= -\frac{p_1''p_2}{p_0^2}f' + 2\frac{p_1'(p_1p_2)'}{p_0^3}f' - \frac{p_2'}{p_0}\left(\frac{p_1}{p_0}f'' + 2\frac{p_1'p_2}{p_0^2}f'\right)\\ &= \frac{2p_1'((p_1p_2)'-p_2'p_2)-p_1''p_2p_0}{p_0^3}f' - \frac{p_2'p_1}{p_0^2}f''.\end{aligned}\tag{12}$$

利用断言 (i)、(ii)，我们还可以得到

$$(\partial_1^2 M\cdot\partial_2 M + 2\partial_1\partial_2 M\cdot\partial_1 M)\circ\Delta_2 = 2\frac{p_1'p_2^2 - p_1(p_1p_2)'}{p_0^3} + \frac{p_1p_2(p_2-2p_1)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}.\tag{13}$$

因此，将方程 (12) 两边分别除以 f'，可化简为

$$\begin{aligned}\frac{p_1^2p_2}{p_0^3}\cdot\frac{f'''}{f'} + \left(2\frac{p_1'p_2^2-p_1(p_1p_2)'}{p_0^3} + \frac{p_1p_2(p_2-2p_1)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\frac{f''}{f'} + \partial_1^2\partial_2 M\circ\Delta_2&\\ = \frac{2p_1'((p_1p_2)'-p_2'p_2)-p_1''p_2p_0}{p_0^3} - \frac{p_2'p_1}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}.&\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\partial_1^2\partial_2 M\circ\Delta_2 = {}& \frac{2p_1'((p_1p_2)'-p_2'p_2)-p_1''p_2p_0}{p_0^3} - \frac{(2p_1'p_2+p_2'p_1)(p_2-p_1)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\\ &- \frac{p_1p_2(p_2-2p_1)}{p_0^3}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{p_1^2p_2}{p_0^3}\cdot\frac{f'''}{f'}.\end{aligned}$$

由此可得断言 (iii)。

当 $\alpha=\beta=2$ 时，等式 (7) 给出

$$\begin{aligned}0=&p_2''\cdot\partial_1^2(f\circ M)\circ\Delta_2+p_1''\cdot\partial_2^2(f\circ M)\circ\Delta_2\\&+2p_2'\cdot\partial_1^2\partial_2(f\circ M)\circ\Delta_2+2p_1'\cdot\partial_1\partial_2^2(f\circ M)\circ\Delta_2+p_0\cdot\partial_1^2\partial_2^2(f\circ M)\circ\Delta_2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}0=&p_2''\Big(f''\cdot(\partial_1M^2)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_1^2M\circ\Delta_2\Big)+p_1''\Big(f''\cdot(\partial_2M^2)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_2^2M\circ\Delta_2\Big)\\&+2p_2'\Big(f'''\cdot(\partial_1M^2\cdot\partial_2M)\circ\Delta_2+f''\cdot(\partial_1^2M\cdot\partial_2M+2\partial_1\partial_2M\cdot\partial_1M)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_1^2\partial_2M\circ\Delta_2\Big)\\&+2p_1'\Big(f'''\cdot(\partial_2M^2\cdot\partial_1M)\circ\Delta_2+f''\cdot(\partial_2^2M\cdot\partial_1M+2\partial_1\partial_2M\cdot\partial_2M)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_2^2\partial_1M\circ\Delta_2\Big)\\&+p_0\Big(f''''\cdot(\partial_1M^2\cdot\partial_2M^2)\circ\Delta_2+f'\cdot\partial_1^2\partial_2^2M\circ\Delta_2\\&\qquad+f'''\cdot\big(\partial_1^2M\cdot\partial_2M^2+\partial_2^2M\cdot\partial_1M^2+4\partial_1\partial_2M\cdot\partial_1M\cdot\partial_2M\big)\circ\Delta_2\\&\qquad+f''\cdot\big(\partial_1^2M\cdot\partial_2^2M+2\partial_1\partial_2M^2+2\partial_1^2\partial_2M\cdot\partial_2M+2\partial_1\partial_2^2M\cdot\partial_1M\big)\circ\Delta_2\Big).\end{aligned}$$

利用（13）及其对称形式，可得

$$\begin{aligned}&\big(\partial_1^2M\cdot\partial_2M^2+\partial_2^2M\cdot\partial_1M^2+4\partial_1\partial_2M\cdot\partial_1M\cdot\partial_2M\big)\circ\Delta_2\\&=\big((\partial_1^2M\cdot\partial_2M+2\partial_1\partial_2M\cdot\partial_1M)\cdot\partial_2M\big)\circ\Delta_2+\big((\partial_2^2M\cdot\partial_1M+2\partial_1\partial_2M\cdot\partial_2M)\cdot\partial_1M\big)\circ\Delta_2\\&=\left(2\frac{p_1'p_2^2-p_1(p_1p_2)'}{p_0^3}+\frac{p_1p_2(p_2-2p_1)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\frac{p_2}{p_0}+\left(2\frac{p_2'p_1^2-p_2(p_1p_2)'}{p_0^3}+\frac{p_1p_2(p_1-2p_2)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\frac{p_1}{p_0}\\&=2\frac{p_1'p_2^3+p_2'p_1^3-2p_1p_2(p_1p_2)'}{p_0^4}+\frac{p_1p_2(p_0^2-6p_1p_2)}{p_0^4}\cdot\frac{f''}{f'}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\big(\partial_1^2M\cdot\partial_2^2M+2\partial_1\partial_2M^2+2\partial_1^2\partial_2M\cdot\partial_2M+2\partial_1\partial_2^2M\cdot\partial_1M\big)\circ\Delta_2\\&=\left(2\frac{p_1'p_2}{p_0^2}+\frac{p_1p_2}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\left(2\frac{p_2'p_1}{p_0^2}+\frac{p_1p_2}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}\right)+2\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_0^2}+\frac{p_1p_2}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}\right)^2\\&\quad+2\left(\frac{2p_1'((p_1p_2)'-p_2'p_2)-p_1''p_2p_0}{p_0^3}-\frac{(2p_1'p_2+p_2'p_1)(p_2-p_1)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}-\frac{p_1p_2(p_2-2p_1)}{p_0^3}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right.\\&\qquad\left.-\frac{p_1^2p_2}{p_0^3}\cdot\frac{f'''}{f'}\right)\frac{p_2}{p_0}+2\left(\frac{2p_2'((p_1p_2)'-p_1'p_1)-p_2''p_1p_0}{p_0^3}-\frac{(2p_2'p_1+p_1'p_2)(p_1-p_2)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\right.\\&\qquad\qquad\left.-\frac{p_1p_2(p_1-2p_2)}{p_0^3}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-\frac{p_1p_2^2}{p_0^3}\cdot\frac{f'''}{f'}\right)\frac{p_1}{p_0}\\&=\frac{4p_1'p_2'(3p_1p_2-p_0^2)+6(p_1p_2)'^2}{p_0^4}-2\frac{p_1''p_2^2+p_2''p_1^2}{p_0^3}\\&\quad+\frac{4(p_1p_2)'(5p_1p_2-p_0^2)+2p_1p_2(p_1'p_1+p_2'p_2)}{p_0^4}\cdot\frac{f''}{f'}+\frac{p_1p_2(15p_1p_2-2p_0^2)}{p_0^4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-4\frac{p_1^2p_2^2}{p_0^4}\cdot\frac{f'''}{f'}.\end{aligned}$$

将此等式逐项除以 $p_0 f'$，然后利用断言（i）、（ii）和（10）计算至多二阶偏导数，经过简单计算可得

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{p_2''}{p_0}\left(2\frac{p_1' p_2}{p_0^2} + \frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{f''}{f'}\right) + 2\frac{p_2'}{p_0}\left(\frac{2p_1'((p_1p_2)' - p_2'p_2) - p_1''p_2p_0}{p_0^3} - \frac{p_2'p_1}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\\
& + \frac{p_1''}{p_0}\left(2\frac{p_2' p_1}{p_0^2} + \frac{p_2}{p_0}\cdot\frac{f''}{f'}\right) + 2\frac{p_1'}{p_0}\left(\frac{2p_2'((p_1p_2)' - p_1'p_1) - p_2''p_1p_0}{p_0^3} - \frac{p_1'p_2}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\\
& + \frac{p_1^2p_2^2}{p_0^4}\cdot\frac{f''''}{f'} + \left(2\frac{p_1'p_2^3 + p_2'p_1^3 - 2p_1p_2(p_1p_2)'}{p_0^4} + \frac{p_1p_2(p_0^2 - 6p_1p_2)}{p_0^4}\cdot\frac{f''}{f'}\right)\frac{f'''}{f'}\\
& + \left(\frac{4p_1'p_2'(3p_1p_2 - p_0^2) + 6(p_1p_2)'^2}{p_0^4} + \frac{4(p_1p_2)'(5p_1p_2 - p_0^2) + 2p_1p_2(p_1'p_1 + p_2'p_2)}{p_0^4}\cdot\frac{f''}{f'}\right.\\
& \qquad \left. - 2\frac{p_1''p_2^2 + p_2''p_1^2}{p_0^3} + \frac{p_1p_2(15p_1p_2 - 2p_0^2)}{p_0^4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - 4\frac{p_1^2p_2^2}{p_0^4}\cdot\frac{f'''}{f'}\right)\frac{f''}{f'} + \partial_1^2\partial_2^2 M\circ\Delta_2.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\partial_1^2\partial_2^2 M\circ\Delta_2 = {} & 2\frac{(p_1p_2)''p_0'p_0 - p_0''(p_1p_2)'p_0 - 6p_1'p_2'(p_1p_2)'}{p_0^4}\\
& + \frac{(p_1p_2)''p_0^2 - 2p_0''p_0p_1p_2 + p_1'p_2'(2p_0^2 - 24p_1p_2) + p_1'^2p_2(2p_0 - 6p_2) + p_2'^2p_1(2p_0 - 6p_1)}{p_0^4}\cdot\frac{f''}{f'}\\
& + \frac{(p_1p_2)'(4p_0^2 - 18p_1p_2) - 2p_0'p_0p_1p_2}{p_0^4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{p_1p_2(2p_0^2 - 15p_1p_2)}{p_0^4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^3\\
& + \frac{(p_1p_2)'(6p_1p_2 - 2p_0^2) + 2p_0'p_0p_1p_2}{p_0^4}\cdot\frac{f'''}{f'} + \frac{p_1p_2(10p_1p_2 - p_0^2)}{p_0^4}\cdot\frac{f''f'''}{(f')^2} - \frac{(p_1p_2)^2}{p_0^4}\cdot\frac{f^{(4)}}{f'}.
\end{aligned}
$$

由此，我们可以直接得出断言 (iv) 成立。 □

6. Necessary conditions for the invariance equation

在接下来的引理中，我们将建立不变方程 (2) 成立所需的一阶、二阶、三阶和四阶条件。最后，我们在定理10中给出本文的主要结果。

引理 6. 设 $f, g\colon I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上的可微函数，其一阶导数处处非零，且 $i\in\{1,2\}$。设 $p=(p_1, p_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$ 和 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$ 满足 p_i 和 q_i 在 I 上连续。若 $\partial_i A_{f,\,p} + \partial_i A_{g,\,q} = 1$ 在 diag(I^2) 上成立，则

$$
\frac{p_1}{p_0} = \frac{q_2}{q_0} \qquad and \qquad \frac{p_2}{p_0} = \frac{q_1}{q_0} \tag{14}
$$

因此

$$
p_1q_1 = p_2q_2 \tag{15}
$$

在 I上成立。

证明。根据定理 5 的公式 (i)，等式 $(\partial_i A_{f,p} + \partial_i A_{g,q})\circ\Delta_2 = 1$ 可改写为

$$
\frac{p_i}{p_0} + \frac{q_i}{q_0} = 1,
$$

这与 (14) 等价，也与 (15) 等价。 □

引理 7. 设 f、g 是定义在 I 上的一组二次可微函数，且其一阶导数处处非零。设 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 和 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 是定义在 I 上的可微函数，并假设 (14) 在 I 上成立。若 $\partial_1\partial_2 A_{f,p}+\partial_1\partial_2 A_{g,q}=0$ 在 diag(I^2) 上成立，则

$$\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}+\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}=0. \tag{16}$$

因此，存在一个非零常数 δ，使得

$$p_1q_1=p_2q_2=\sqrt{\frac{\delta}{f'g'}} \tag{17}$$

在 I 上成立。

证明。根据定理 5 的公式 (ii)，等式 $(\partial_1\partial_2 A_{f,p}+\partial_1\partial_2 A_{g,q})\circ\Delta_2=0$ 等价于

$$\frac{p_1p_2}{p_0^2}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)+\frac{q_1q_2}{q_0^2}\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)=0.$$

将此等式乘以 $\frac{p_0^2}{p_1p_2}$，根据 (14)，它等于 $\frac{q_0^2}{q_1q_2}$，我们容易看出 (16) 在 I 上成立。对等式 (16) 两边积分，可得存在一个常数 δ，使得

$$p_1p_2f'q_1q_2g'=\delta.$$

此等式结合 (15) 意味着 (17) 也成立。 □

引理 8. 设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上的三次可微函数，且一阶导数处处非零。设 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 和 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 是二次可微函数，并且在 I上满足 (14) 和 (16)。若 $\partial_1^2\partial_2 A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2 A_{g,q}=0$ 在 diag(I^2) 上成立，则

$$\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f)+\frac{q_1-q_2}{q_0}S(g)=0. \tag{18}$$

因此，

$$(p_1-p_2)(S(f)-S(g))=0 \tag{19}$$

在 I 上成立。

证明。根据 (14) 和 (16)，我们有

$$\frac{p_1p_2}{p_0^2}=\frac{q_1q_2}{q_0^2},\qquad \frac{p_1-p_2}{p_0}=\frac{q_2-q_1}{q_0},\qquad \frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}=-\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right). \tag{20}$$

利用定理 5 中适用于 $\partial_1^2\partial_2 A_{f,p}\circ\Delta_2$ 的公式 (iii) 以及适用于 $\partial_1^2\partial_2 A_{g,q}\circ\Delta_2$ 的类似公式，等式 $\big(\partial_1^2\partial_2 A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2 A_{g,q}\big)\circ\Delta_2=0$ 可改写为

$$\begin{aligned}0=&-\frac{1}{4}\Big(\frac{p_1-p_2}{p_0}\Big)''-\frac{3p_0^2}{16p_1p_2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}\left(\frac{p_1-p_2}{p_0}\right)'^2+\frac{3p_1p_2}{4p_0^2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)^2\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)\right)'-\frac{p_1p_2}{2p_0^2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f)\\&-\frac{1}{4}\Big(\frac{q_1-q_2}{q_0}\Big)''-\frac{3q_0^2}{16q_1q_2}\cdot\frac{q_1-q_2}{q_0}\left(\frac{q_1-q_2}{q_0}\right)'^2+\frac{3q_1q_2}{4q_0^2}\cdot\frac{q_1-q_2}{q_0}\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)^2\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)\right)'-\frac{q_1q_2}{2q_0^2}\cdot\frac{q_1-q_2}{p_0}S(g).\end{aligned}$$

利用（20）中的恒等式，该等式等价于

$$0=-\frac{p_1p_2}{2p_0^2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f)-\frac{q_1q_2}{2q_0^2}\cdot\frac{q_1-q_2}{p_0}S(g).$$

将最后一个方程乘以 $\frac{2p_0^2}{p_1p_2}=\frac{2q_0^2}{q_1q_2}$，可知（18）成立。利用（20）中的第二个等式，这等价于（19）。□

引理9. 设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上的一组四次可微函数，且其一阶导数处处非零。设 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 和 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}^2_+$ 是满足（16）和（18）在 I 上成立的二次可微函数。若 $\partial_1^2\partial_2^2 A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2^2 A_{g,q}=0$ 在 $\operatorname{diag}(I^2)$ 上成立，则

$$S(f)'-2\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)S(f)+S(g)'-2\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)S(g)=0\tag{21}$$

在 I 上成立。因此，

$$(p_1-p_2)(S(f)'+S(g)')=0\tag{22}$$

在 I 上成立。

证明。等式 $(\partial_1^2\partial_2^2 A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2^2 A_{g,q})\circ\Delta_2=0$、定理 5 中针对 $\partial_1^2\partial_2^2 A_{f,p}\circ\Delta_2$ 的公式 (iv)，以及针对 $\partial_1^2\partial_2^2 A_{g,q}\circ\Delta_2$ 的类似表达式可得

$$\begin{aligned}0=&\left(\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)''+\frac{3}{8}\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\Big(\Big(\frac{p_1-p_2}{p_0}\Big)'\Big)^2\right)\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)\\&-\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)'\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)^3\\&+\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{p_0^2}{p_1p_2}\Big)\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)S(f)-\Big(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\Big)^2S(f)'\\&+\left(\Big(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\Big)''+\frac{3}{8}\Big(6-\frac{q_0^2}{q_1q_2}\Big)\Big(\Big(\frac{q_1-q_2}{q_0}\Big)'\Big)^2\right)\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)\\&-\Big(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\Big)'\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)'-\frac{1}{2}\Big(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{q_0^2}{q_1q_2}\Big)\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)^3\\&+\Big(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\Big)^2\Big(6-\frac{q_0^2}{q_1q_2}\Big)\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)S(g)-\Big(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\Big)^2S(g)'.\end{aligned}$$

利用 (20) 中的恒等式，该等式可化简为

$$0=\left(\frac{p_1p_2}{p_0^2}\right)^2\left(S(f)'+\left(\frac{p_0^2}{p_1p_2}-6\right)\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)S(f)\right)$$
$$+\left(\frac{q_1q_2}{q_0^2}\right)^2\left(S(g)'+\left(\frac{q_0^2}{q_1q_2}-6\right)\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)S(g)\right),$$

由此，利用（20）中的第一个等式可得

$$\begin{aligned}0=S(f)'+\left(\frac{(p_1-p_2)^2}{p_1p_2}-2\right)\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)S(f)\\+S(g)'+\left(\frac{(q_1-q_2)^2}{q_1q_2}-2\right)\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)S(g).\end{aligned}\tag{23}$$

另一方面，由（18）可得

$$\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f)=\frac{q_2-q_1}{q_0}S(g),$$

由此可得

$$\frac{(p_1-p_2)^2}{p_1p_2}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)S(f)=\frac{p_0^2}{p_1p_2}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_0}\left(\frac{(p_1p_2)'}{p_1p_2}+\frac{f''}{f'}\right)\left(\frac{p_1-p_2}{p_0}S(f)\right)$$
$$=-\frac{q_0^2}{q_1q_2}\cdot\frac{q_2-q_1}{q_0}\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)\left(\frac{q_2-q_1}{q_0}S(g)\right)=-\frac{(q_1-q_2)^2}{q_1q_2}\left(\frac{(q_1q_2)'}{q_1q_2}+\frac{g''}{g'}\right)S(g).$$

利用这个等式，（23）可化简为（21）。

最后，将（21）两边乘以 (p_1-p_2)，并利用（16）再利用（19），即可得到最后一个断言，即等式（22）。□

定理10. 设 $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上的四次连续可微函数，且其一阶导数处处非零。设 $p=(p_1,p_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$ 是二次连续可微函数，且 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$。假设集合

$$P:=\{x\in I\mid p_1(x)=p_2(x)\}$$

在 I 中无处稠密。那么，以下断言彼此等价。

(i) 对任意 $(x,y)\in I^2$，不变方程 (2) 均成立。(ii) 存在一个包含对角线 $\operatorname{diag}(I^2)$ 的开集 $U\subseteq I^2$，使得对所有 $(x,y)\in U$，不变方程 (2) 均成立。(iii) 函数 $q=(q_1,q_2)\colon I\to\mathbb{R}_+^2$ 是二次连续可微的，且以下等式组

$$\begin{aligned}\partial_1A_{f,p}+\partial_1A_{g,q}&=1,\\\partial_1\partial_2A_{f,p}+\partial_1\partial_2A_{g,q}&=0,\\\partial_1^2\partial_2A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2A_{g,q}&=0,\\\partial_1^2\partial_2^2A_{f,p}+\partial_1^2\partial_2^2A_{g,q}&=0\end{aligned}\tag{24}$$

在对角线 $\operatorname{diag}(I^2)$ 上成立。

(iv) 存在一个实常数 $\gamma\in\mathbb{R}$，存在二阶线性微分方程 $F''=\gamma F$ 的解 $u,v,w,z\colon I\to\mathbb{R}$，使得 $v>0$ 和 $z>0$ 在 I 上成立，且 $\{u,v\}$ 和 $\{w,z\}$ 线性无关，从而 (5) 成立。

证明。(i)⇒(ii) 的蕴含关系显然。

No我们假设 (ii) 成立。重新整理不变方程 (2)，得到 t

$$A_{g,q}(x,y) = x + y - A_{f,p}(x,y) =: M(x,y) \qquad ((x,y) \in U).$$

根据关于 f 和 p 的正则性假设，由上述等式定义的平均值 M 在 U 上是二阶连续偏可微的。因此，由引理 1 可知， q_1 和 q_2 在 I 上也都是二阶连续可微的。根据定理 5，我们现在得到偏导数 $\partial_1^i\partial_2^j A_{f,\ p}$ 和 $\partial_1^i\partial_2^j A_{g,\ q}$ 对所有 i、 $j \in \{1,2\}$ 均存在于 diag(I^2) 上。分别关于变量 x 和 y 对不变方程 (2) 两边求 i 次和 j 次偏导，可得等式组 (24) 在 diag(I^2) 上成立。这证明了 (iii) 可由 (ii) 推出。

假设 (iii) 成立。利用引理 8 和 (24) 中的第三个等式，可得该式在 I 上成立。因此，对于所有 (19) $x \in I \setminus P$，都有

$$S(f)(x) = S(g)(x). \tag{25}$$

注意到 $S(f)$ 和 $S(g)$ 是连续函数，因此该等式在 $I \setminus P$ 的闭包上也成立；由于集合 P 无处稠密，该闭包等于 I。根据引理 8，(24) 中的第四个等式意味着 (22) 在 I 上成立。因此，再次利用集合 P 的无处稠密性，

$$S(f)'(x) + S(g)'(x) = 0.$$

对 (25) 两边分别求导，最后一个方程推出

$$S(f)'(x) = S(g)'(x) = 0.$$

因此， $S(f)$ 和 $S(g)$ 是相等的常值函数。记这个常数值为 -2γ。然后应用引理 2，可得二阶线性微分方程 $F'' = \gamma F$ 存在解 u、 v、 w、 z： $I \to \mathbb{R}$，使得 $v > 0$ 和 $z > 0$ 在 I 上成立，并且满足 (5) 中前两个等式，即 $f = u/v$ 和 $g = w/z$。 f 和 g 的严格单调性意味着 $\{u, v\}$ 和 $\{w, z\}$ 也线性无关。注意到

$$(u'v - uv')' = u''v + u'v' - u'v' - uv'' = \gamma uv - \gamma uv = 0.$$

这意味着 $u'v - uv' = \alpha$，类似地， $w'z - wz' = \beta$，其中α 和 β为非零实常数。因此

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\alpha}{v^2} \qquad \text{and} \qquad g' = \frac{w'z - wz'}{z^2} = \frac{\beta}{z^2}.$$

另一方面，由引理 6 和引理 7 可知，(24) 中前两个等式意味着存在一个非零常数 δ，使得 (17) 在 I 上成立。因此，

$$p_1q_1 = p_2q_2 = \sqrt{\frac{\delta}{f'g'}} = \sqrt{\frac{\delta v^2 z^2}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha\beta}}vz = \eta vz,$$

其中 $\eta := \sqrt{\frac{\delta}{\alpha\beta}}$ 是一个非零常数。定义 $\bar{u} := \eta u$ 和 $\bar{v} := \eta v$。于是我们可以看出， $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 也是二阶线性微分方程 $F'' = \gamma F$ 的解；若分别用 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 替换 u 和 v，则 (5) 成立。因此，我们已经证明断言 (iii) 蕴含结论 (iv)。

蕴含关系 (iv)⇒(i) 是定理 4 的推论。 □

References

[1]M. Bajraktarevi´c, 《关于一个均值函数方程》, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Druˇstvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II, 13 (1958), 243–248.[2] M. Bajraktarevi´c, 《拟线性平均的一种推广》, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 3 (17) (1963), 69–76.[3] Sz. Baj´ak 和 Zs. P´ales, 《二元基尼平均不变方程的计算机辅助求解》, Comput. Math. Appl., 58 (2009), 334–340.[4] Sz. Baj´ak 和 Zs. P´ales, 《广义拟算术平均的不变方程》, Aequationes Math., 77 (2009), 133–145.[5] Sz. Baj´ak 和 Zs. P´ales, 《二元斯托拉斯基平均不变方程的计算机辅助求解》, Appl. Math. Comput., 216 (2010), 3219–3227.[6] P. Burai, 《一个 Matkowski–Sutˆo 型方程》, Publ. Math. Debrecen, 70 (2007), 233–247.[7] Z. Dar´oczy 和 Zs. P´ales, 《平均的高斯复合与 Matkowski–Sutˆo 问题的求解》, Publ. Math. Debrecen, 61 (2002), 157–218.[8] R. Gr¨unwald 和 Zs. P´ales, 《广义 Bajraktarevi´c 平均的等同性问题》, Aequationes Math., 94 (2020), 651–677.[9] J. Jarczyk, 《具有连续生成函数的加权拟算术平均的不变性》, Publ. Math. Debrecen, 71 (2007), 279–294.[10] J. Jarczyk 和 J. Matkowski, 《加权拟算术平均类中的不变性》, Ann. Polon. Math., 88 (2006), 39–51.[11] J. Matkowski, 《不变与互补拟算术平均》, Aequationes Math., 57 (1999), 87–107.[12] J. Matkowski, 《柯西平均相等中的一个正则性问题的解》, Publ. Math. Debrecen, 64 (2004), 391–400.[13] J. Matkowski, 《广义加权平均与拟算术平均》, Aequationes Math. 79 (2010), 203–212.[14] Zs. P´ales 和 A. Zakaria, 《关于二元加权非对称 Bajraktarevi´c 平均的不变方程》, Aequationes Math., 93 (2019), 37–57.[15] O. Sutˆo, 《某些函数方程研究 I》, Tˆohoku Math. J., 6 (1914), 1–15.[16] O. Sutˆo, 《某些函数方程研究 II》, Tˆohoku Math. J., 6 (1914), 82–101。

(R. Grünwald) Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences, University of Debrecen, H-4002 Debrecen, Pf. 400, Hungary电子邮箱：richard.grunwald@science.unideb.hu（Zs. P´ales） Institute of Mathematics, University of Debrecen, H-4002 Debrecen, Pf. 400, Hungary电子邮箱：pales@science.unideb.hu