arXiv:2303.11002v1 [math.CA] 20 Mar 2023

¨沿一类曲线的薛定谔算子尖锐逐点收敛

曹振斌和苗长兴

Abstract. 薛定谔方程解几乎处处收敛问题由卡尔森提出，杜-古斯-李[10] 和杜-张 [12] 基本解决了这一问题。在本文中，我们证明了薛定谔算子沿一类曲线的尖锐逐点收敛。

1. INTRODUCTION

我们考虑自由薛定谔方程:

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

其解为

$$e^{it\Delta} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e(x\cdot\xi + t|\xi|^2)\widehat{f}(\xi) d\xi,$$

其中 $\widehat{f}$ 表示函数 f 的傅里叶变换，且对每个 $b \in \mathbb{R}$， $e(b) := e^{2\pi i b}$ 。一个基本问题是确定最优的 s ，使得

$$\lim_{t\to 0} e^{it\Delta} f(x) = f(x) \qquad \text{a.e.} \tag{1.2}$$

对所有 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 都成立。卡尔森 [4] 首先提出了这个问题，并证明（1.2）对任意 $f \in H^{1/4}(\mathbb{R})$ 都成立。达伯格和凯尼格 [7] 证明了卡尔森给出的条件 $s \geq \frac{1}{4}$ 是尖锐的。对于更高维的情形，许多作者研究了这个问题[1, 3, 6, 8, 11, 16, 19, 20, 22, 24]。特别地，布尔甘 [2] 给出了反例，表明当 $s < \frac{n}{2(n+1)}$ 时，（1.2）可能不成立。杜-古斯-李 [10] 和杜-张 [12] 分别证明，当 $n = 2$ 和 $n \geq 3$ 时，（1.2）对 $s > \frac{n}{2(n+1)}$ 成立。因此，除端点情形外，这个问题已经得到解决。

Cho-Lee-Vargas [5] 研究了一类逐点收敛问题，即非切向收敛到初始数据。根据索博列夫嵌入，我们很容易看出，对于 $s > n/2$，非切向收敛成立。随后，Sj¨ogren-Sj¨olin [21] 证明，对于 $s \leq n/2$，非切向收敛不成立。然而，对于这一问题的一些特殊情形，相关结果可以得到改进。Lee-Rogers [17] 研究了带谐振子 $e^{-it(\Delta+|x|^2)}f(x)$ 的薛定谔算子 ¨，并证明经过变换后，它可以

日期：2023年3月21日。2010年数学主题分类：42B25，35B41。关键词和短语：薛定谔极大函数、解耦、逐点收敛、宽-窄分析。

改写为 $e^{it\Delta}f(\sqrt{1+t^2}x)$。他们还证明，若曲线 $\gamma(x,t)$ 是 C^1 函数，则 $e^{it\Delta}f(\gamma(x,t))$ 的逐点收敛与 $e^{it\Delta}f(x)$ 的逐点收敛实质上等价。因此， $e^{-it(\Delta+|x|^2)}f(x)$ 的逐点收敛与 $e^{it\Delta}f(x)$ 的逐点收敛实质上等价。他们的工作促使人们研究当 $(x.t)$ 沿切向趋近于 $(x, 0)$ 时，相切程度与正则性之间的关系。这类问题的一个模型是

$$\lim_{t\to 0} e^{it\Delta}f(\gamma(x,t)) = f(x), \qquad \text{a.e.} \tag{1.3}$$

其中 $\gamma(x,t)$ 连续，且 $\gamma(x,0) = x$。Cho-Lee-Vargas [5] 考虑了以下条件： $\gamma(x,t)$ 满足阶数为 α 的 H¨older 条件，其中 $0<\alpha\le 1$ 属于 t:

$$|\gamma(x,t)-\gamma(x,t')| \le C|t-t'|^{\alpha}, \tag{1.4}$$

并且关于 x是双 Lipschitz 的:

$$C_1|x-y| \le |\gamma(x,t)-\gamma(y,t)| \le C_2|x-y|. \tag{1.5}$$

当 $n=1$时，他们通过驻相法证明，若 $0<\alpha\le 1$ ，则 (1.3) 对 $s>\max(1/2-\alpha, 1/4)$ 成立；这一结果除端点情形外是尖锐的。Ding-Niu [9] 研究了 $e^{it\Delta}f(\gamma(x,t))$ 上的加权 L^p 极大估计。作为推论，他们证明若 $1/2\le\alpha\le 1$, 则 (1.3) 对 $s\ge 1/4$ 成立。当 $n=2$时，Li-Wang [18] 通过多项式分割法证明，若 $1/2\le\alpha<1$ ，则 (1.3) 对 $s>3/8$ 成立。

满足 (1.4) 和 (1.5) 的一个简单例子是 $\gamma(x,t) = x+t^{\alpha}\mu$ ，其中 $\mu\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$。然而，仅研究这种情形不足以完成我们的归纳法。因此，我们考虑一类曲线 $\gamma(x,t)$，其定义如下:

$$\gamma(x,t) := x + t^{\alpha}\mu(t), \qquad t\ge 0. \tag{1.6}$$

这里 $\mu(t) \in C^{\infty}([0,\infty)) \times ... \times C^{\infty}([0,\infty))$，并且

$$|\mu^{(k)}(t)| \lesssim_k t^{-k}, \qquad \forall\ k\in\mathbb{N}. \tag{1.7}$$

我们将满足 (1.6) 的曲线 $\gamma(x,t)$ 所构成的集合记为 $\mathcal{D}$。将与此类 $\gamma(x,t)$ 相关的算子定义为

$$T^{\gamma}_{\alpha}f(x,t) := e^{it\Delta}f(\gamma(x,t)) = \int_{\mathbb{R}^n} e(x\cdot\xi + t^{\alpha}\mu(t)\cdot\xi + t|\xi|^2)\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

那么主要结果如下:

定理 1.1. 设 $n\ge 2$、 $1/2\le\alpha<1$ 和 $\gamma(x,t)\in\mathcal{D}$。对于每个满足$s > {}_2{}^{n}{}_{(n+1)}$ 的 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t\to 0+} T^{\gamma}_{\alpha}f(x,t) = f(x), \qquad \text{a.e.}$$

并且 s 的取值范围除端点外是尖锐的。

定理 1.1 中的尖锐性可通过 [2] 中布尔甘的反例来验证。参见 [18, 定理 1.12]。对于定理 1.1 的正向部分，我们可以将其归结为以下估计。

定理 1.2. 设 $n \geq 2$, $1/2 \leq \alpha < 1$ 和 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$。对于每个满足$s > {}_2{}^{n}{}_{(n+1)}$ 的 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$，存在一个常数 C_s，使得

$$\left\| \sup_{0<t\leq 1} |T_\alpha^\gamma f| \right\|_{L^2(B^n(0,1))} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8}$$

通过 Littlewood-Paley 分解，若 f 在 $A(R) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \sim R\}$ 上具有傅里叶支集，则 (1.8) 可归结为以下估计

$$\left\| \sup_{0<t\leq 1} |T_\alpha^\gamma f| \right\|_{L^2(B^n(0,1))} \leq C_\epsilon R^{\frac{n}{2(n+1)}+\epsilon} \|f\|_{L^2}.$$

经过时间局部化引理 [5, 引理 2.1]，，该估计可进一步归结为

$$\left\| \sup_{\lambda<t\leq\lambda+R^{-1}} |T_\alpha^\gamma f| \right\|_{L^2(B^n(0,1))} \leq C_\epsilon R^{\frac{n}{2(n+1)}+\epsilon} \|f\|_{L^2}, \qquad \forall\ \lambda \in \frac{1}{R}\mathbb{Z} \cap [0, 1-\frac{1}{R}].$$

对于 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$，定义

$$\gamma_R(x,t) := x + R^{1-2\alpha} t^\alpha \mu\Big(\frac{t}{R^2}\Big).$$

然后利用抛物缩放，只需证明以下估计。

定理 1.3. 设 $n \geq 2$, $1/2 \leq \alpha < 1$ 和 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在常数 C_ϵ 使得

$$\left\| \sup_{\lambda<t\leq\lambda+R} |T_\alpha^{\gamma_R} f| \right\|_{L^2(B^n(0,R))} \leq C_\epsilon R^{\frac{n}{2(n+1)}+\epsilon} \|f\|_{L^2} \tag{1.9}$$

h对所有 $R \geq 1$、任意 $\lambda \in R\mathbb{Z} \cap [0, R^2 - R]$ 以及所有满足 $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset B^n(0,\ 1)$.

最后，我们可以将定理 1.3 化简为以下结果，该结果表明只考虑 $\lambda = 0$ 就足够了。

定理 1.4. 设 $n \geq 2$、$1/2 \leq \alpha < 1$ 和 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个常数 C_ϵ，使得

$$\left\| \sup_{0<t\leq R} |T_\alpha^{\gamma_R} f| \right\|_{L^2(B^n(0,R))} \leq C_\epsilon R^{\frac{n}{2(n+1)}+\epsilon} \|f\|_{L^2} \tag{1.10}$$

$\widehat{\ }$ 对所有 $R \geq 1$ 以及所有满足 $\operatorname{supp} f \subset B^n(0,1)$ 的 f 均成立。

对于 $e^{it\Delta} f(x)$ 的情形，定理 1.4 蕴含定理 1.3 的特性显而易见，因为 $e^{it\Delta} f(x)$ 关于变量 t 是平移不变的。至于 $e^{it\Delta} f(\gamma(x,t))$，其中 $\gamma(x,t) = x + t^\alpha \mu$ 对某个 $\mu \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 成立，这一性质则不成立。为克服这一困难，我们考虑更大的一类曲线 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$，它保留了这一性质。我们将定理 1.4 蕴含定理 1.3 的证明留到第 2 节。限制 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$ 的另一项优点是，对于远离 0 的 t，$\gamma(x,t)$ 是光滑的。这一特性使我们能够使用变系数版本的解耦不等式，该不等式要求相位函数至少是 C^2。这一部分的细节将在第 3 节展开。

记号。若 X 是有限集，我们用 $\#X$ 表示其基数。若 X 是可测集，我们用 $|X|$ 表示其勒贝格测度。 C_ϵ 表示一个依赖于 ϵ 的常数。记 $A \lesssim B$ 或 $A = O(B)$ 表示存在常数 C 使得 $A \leq CB$。我们用 $B^{n+1}(c, r)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以 c 为中心、半径为 r 的球。若上下文中 $\mathbb{R}^{n+1}$ 明确，我们将 $B^{n+1}(c, r)$ 简写为 $B(c, r)$。

2. Preparation and basic induction

我们的证明主要用到局部常数性质、二进制鸽巢原理、宽窄分析、抛物缩放和尺度归纳，这些技巧与 [10, 11, 12] 中相同。其中，局部常数性质是一种基本工具。它可以将定理 1.4 中的混合范数约化为稀疏集上的一致范数。局部常数性质指出，若函数 f 的傅里叶支集位于一个 ρ^{-1}- 球内，那么我们可以认为 $|f|$ 在尺度为 ρ 的每个球上本质上是常数。该性质有若干版本，例如伯恩斯坦不等式、稳定性引理 [23, 引理 2.1], [14, 引理 6.1]，以及相应的变系数版本 [13, 引理 5.8]。遗憾的是，这些结果无法用于 $T_\alpha^{\gamma_R} f$（以及 $T_\alpha^{\gamma} f$），因为它没有紧傅里叶支集，而且其相位函数关于变量 t 并不光滑。然而，紧傅里叶支集并非局部常数性质生效的必要条件。对这一性质的另一种解释是，积分 $\int e\left(a\left(x, y\right)\right) g\left(y\right) dy$ if$|a\left(x, y\right)| \lesssim O\left(1\right)$ 中可以去掉项 $e\left(a\left(x, y\right)\right)$。我们给出以下命题。

命题 2.1. 设 $d \in \mathbb{N}^+$, $M, N > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $q \geq 1$。定义

$$Sg(x) = \int e(a(x, y))K(x, y)g(y)dy$$

and

$$\tilde{S}g(x) = \int e(a(x_0, y))K(x, y)g(y)dy,$$

其中 $x \in B^d(x_0, M)$, $\operatorname{supp} g \subset B^d(y_0, N)$。令 $\tilde{a} = a(x, y) - a(x_0, y)$。
(a) 如果 $\tilde{a}(x, y)$ 在 x 上光滑，且

$$\sup_{\substack{x \in B(x_0, M) \\ y \in B(y_0, N)}} |\partial_x^\beta \tilde{a}(x, y)| \lesssim_\beta M^{-|\beta|}, \qquad \beta \in \mathbb{N}^d \text{ with } 1 \leq |\beta| \leq d + 1, \tag{2.1}$$

then

$$\|Sg\|_{L^q(B(x_0, M))} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|)^{-(d+1)} \left\| \tilde{S}\left(c_k g\right) \right\|_{L^q(B(x_0, M))} \tag{2.2}$$

对于满足一致界 $\|c_k\|_{L^\infty(B(y_0, N))}$ 的某些光滑函数 c_k。1. (b) 若 $\tilde{a}(x, y)$ 在 y 上光滑，且

$$\sup_{\substack{x \in B(x_0, M) \\ y \in B(y_0, N)}} |\partial_y^\beta \tilde{a}(x, y)| \lesssim_\beta N^{-|\beta|}, \qquad \beta \in \mathbb{N}^d \text{ with } 1 \leq |\beta| \leq d + 1, \tag{2.3}$$

then

$$\|Sg\|_{L^q(B(x_0, M))} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|)^{-(d+1)} \left\| \tilde{S}\Big(ge\Big(\frac{ky}{N}\Big)\Big) \right\|_{L^q(B(x_0, M))}. \tag{2.4}$$

证明。由于两种情形的论证类似，我们只证明 (b)。取一个支撑于 $(-\pi,\pi)^d$ 上的光滑截断函数 φ，以及一个定义在 $B^d(0,1)$ 上的 $\varphi=1$。于是

$$Sg(x)=\int \varphi\left(\frac{y-y_0}{N}\right)e(\tilde{a}(x,y))e(a(x_0,y))K(x,y)g(y)dy.$$

将 $\varphi(\frac{y-y_0}{N})e(\tilde{a}(x,y))$ 关于变量 y 展开为傅里叶级数，可得

$$\varphi\left(\frac{y-y_0}{N}\right)e(\tilde{a}(x,y))=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_k(x)e\left(\frac{k(y-y_0)}{N}\right),$$

其中每个 $c_k(x)$都满足

$$\sup_{x\in B(x_0,M)}|c_k(x)|\lesssim(1+|k|)^{-(d+1)}$$

由 (2.3) 可知。于是

$$Sg(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_k(x)e(-ky_0/N)\tilde{S}(ge(ky/N))(x),$$

由闵可夫斯基不等式可立即得到 (2.4)。

□

˜(2.2) 和 (2.4) 表明，对 Sg 的估计可以归结为对 Sg 的估计。以下为方便起见，将 (2.2) 和 (2.4) 写作

$$|Sg|\sim|\tilde{S}g|.$$

现在我们说明定理 1.3 如何由定理 1.4 推出。若 $\lambda=0$，则 (1.9) 与 (1.10) 相同。若 $R\le\lambda<R^{1+\epsilon}$，令 $w=2R^{\epsilon}$，则

$$\left\|\sup_{\lambda<t\le\lambda+R}|T_\alpha^{\gamma_R}f(x,t)|\right\|_{L^2(B_R)}\le\left\|\sup_{0<t\le wR}|T_\alpha^{\gamma_R}f(x,t)|\right\|_{L^2(B_R)}.$$

经过抛物缩放 $t\to t/w^2, x\to x/w$ 后，我们得到

$$\left\|\sup_{0<t\le wR}|T_\alpha^{\gamma_R}f(x,t)|\right\|_{L^2(B_R)}=R^{O(\epsilon)}\left\|\sup_{0<t\le R/w}|T_\alpha^{\gamma_{R/w}}g(x,t)|\right\|_{L^2(B_{R/w})}$$

对于某个满足 $\|g\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$ 且 $\mathrm{supp}\widehat{g}\subset B(0,w)$ 的 g。我们将 $B(0,w)$ 分解为单位球 $B(v_j,1)$。接着写作 $g=\sum_j g_j$，其中每个 g_j 的傅里叶支集都包含于 $B(v_j,1)$。注意 $\#j\sim w^n$ 且 $|v_j|\le w$。定义 h_j 为

$$\widehat{h_j}(\xi):=\widehat{g_j}(\xi+v_j).$$

因此，由定理 1.4 可得

$$\begin{aligned}
&\left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} g(x,t)| \right\|_{L^2(B_{R/w})} \\
\le &\sum_j \left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} g_j(x,t)| \right\|_{L^2(B_{R/w})} \\
= &\sum_j \left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} h_j(x+2tv_j,t)| \right\|_{L^2(B_{R/w})} \\
\le &\sum_j \left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} h_j(x,t)| \right\|_{L^2(B_{3R})} \\
\le &\sum_{j,k} \left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} h_j(x,t)| \right\|_{L^2(B(x_k,R/w))} \\
= &\sum_{j,k} \left\| \sup_{0<t\le R/w} |T_\alpha^{\gamma_{R/w}} h_{j,k}(x,t)| \right\|_{L^2(B(0,R/w))} \\
\lesssim &R^{\frac{n}{2(n+1)}+O(\epsilon)} \sum_{j,k} \|h_{j,k}\|_{L^2} \\
\lesssim &R^{\frac{n}{2(n+1)}+O(\epsilon)} \|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

在第五行，我们将 B_{3R} 拆分为有限重叠球，其形式为 $B(x_k, R/w)$，而 $h_{j,\ k}$ 由下式给出

$$\widehat{h_{j,k}}(\xi) := e(x_k \cdot \xi)\widehat{h_j}(\xi).$$

结合以上所有估计，我们完成了这一情形的论证。

如果 $\lambda \ge R^{1+\epsilon}$，经过平移后，

$$\left\| \sup_{\lambda<t\le\lambda+R} |T_\alpha^{\gamma_R} f(x,t)| \right\|_{L^2(B_R)} = \left\| \sup_{0<t\le R} |T_\alpha^{\gamma_R} f(x,t+\lambda)| \right\|_{L^2(B_R)}.$$

Note

$$\begin{aligned}
&|T_\alpha^{\gamma_R} f(x,t+\lambda)| \\
= &\left| \int e\left[x\cdot\xi + R^{1-2\alpha}(t+\lambda)^\alpha \mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\cdot\xi + t|\xi|^2 \right] \left[e(\lambda|\xi|^2)\widehat{f}(\xi) \right] d\xi \right|.
\end{aligned}$$

对于 $0<t\le R$ 和 $\lambda\ge R^{1+\epsilon}$，由泰勒公式可得

$$\begin{aligned}
&(t+\lambda)^\alpha\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\\
=&\lambda^\alpha\left[\sum_{i=0}^{k}c_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)^i+R_{k+1}(\lambda,t)\right]\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\\
=&t^\alpha\left[\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{i-\alpha}\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\right]+\lambda^\alpha\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\\
=&t^\alpha\left[\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{i-\alpha}\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\right]+\lambda^\alpha\left[\sum_{j=0}^{k}d_j\mu^{(j)}\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\left(\frac{t}{R^2}\right)^j+R'_{k+1}(\lambda,t)\right]\\
&\qquad+\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)\\
=&t^\alpha\left[\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{i-\alpha}\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)+\sum_{j=1}^{k}d_j\mu^{(j)}\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\left(\frac{t}{R^2}\right)^j\left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha\right]+\lambda^\alpha\mu\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\\
&\qquad+\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R'_{k+1}(\lambda,t)\\
:=&t^\alpha\tilde{\mu}\left(\frac{t}{R^2}\right)+\lambda^\alpha\mu\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R'_{k+1}(\lambda,t),
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\mu}(\tilde{t}):=\sum_{i=1}^{k}c_j\left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{\lambda}}\right)^{i-\alpha}\mu(\tilde{t}+\tilde{\lambda})+\sum_{j=1}^{k}d_j\mu^{(j)}(\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}^\alpha\tilde{t}^{j-\alpha},\quad \tilde{\lambda}=\frac{\lambda}{R^2},$$

R_{k+1}和 R'_{k+1}表示泰勒余项。于是， $|T_\alpha^{\gamma_R}f(x,t+\lambda)|$ 可改写为

$$\left|\int e\left[x\cdot\xi+R^{1-2\alpha}\left(t^\alpha\tilde{\mu}\left(\frac{t}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu\left(\frac{t+\lambda}{R^2}\right)+\lambda^\alpha R'_{k+1}(\lambda,t)\right)\cdot\xi+t|\xi|^2\right]\left[e\left(R^{1-2\alpha}\lambda^\alpha\mu\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\cdot\xi+\lambda|\xi|^2\right)\widehat{f}(\xi)\right]d\xi\right|.$$

通过直接计算，我们得到 $\tilde{\mu}$ 满足 (1.7)。另一方面，取 $k\in\mathbb{N}$，其中 $k>(1-\alpha)\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$，根据命题 2.1，可以从上述相位函数中去掉项 $R^{1-2\alpha}\lambda^\alpha R_{k+1}(\lambda,t)\mu(\frac{t+\lambda}{R^2})\cdot\xi$和$R^{1-2\alpha}\lambda^\alpha R'_{k+1}(\lambda,t)\cdot\xi$。最后，我们得到

$$\begin{aligned}
&|T_\alpha^{\gamma_R}f(x,t+\lambda)|\\
\sim&\left|\int e\left[x\cdot\xi+R^{1-2\alpha}t^\alpha\tilde{\mu}\left(\frac{t}{R^2}\right)\cdot\xi+t|\xi|^2\right]\left[e\left(R^{1-2\alpha}\lambda^\alpha\mu\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\cdot\xi+\lambda|\xi|^2\right)\widehat{f}(\xi)\right]d\xi\right|\\
:=&|T_\alpha^{\gamma_R}f_\lambda(x,t)|,
\end{aligned}$$

其中

$$\widehat{f_\lambda}(\xi):=e\left(R^{1-2\alpha}\lambda^\alpha\mu\left(\frac{\lambda}{R^2}\right)\cdot\xi+\lambda|\xi|^2\right)\widehat{f}(\xi).$$

我们利用定理 1.4 来 $T_\alpha^{\gamma_R}f_\lambda$，于是结论成立。

3. The proof of Theorem 1.4

本节开始证明定理 1.4。利用命题 2.1，我们可以将 $|T_\alpha^{\gamma_R} f|$ 视为在每个单位球上为常数。然后通过二进制鸽巢原理，(1.10) 可以归结为

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^2(X)} \lesssim R^{\frac{n}{2(n+1)}+\epsilon}\|f\|_{L^2}. \tag{3.1}$$

这里，X 表示 $B^n(0,R) \times [0.R]$ 中单位球的并集，并满足如下性质：每个尺寸为 $1 \times ... \times 1 \times R$ 的竖直细管中恰好包含一个X中的单位球。杜-张 [12] 提出了一种名为分形 L^2 限制估计的归纳机制来处理（3.1）。更确切地说，他们引入了一个参数 γ，其灵感来自 Falconer 距离集问题，用来衡量X中单位球的稀疏性。随后，γ的稀疏性与l^2 解耦不等式的平方根抵消性质相结合，使他们的证明得以成立。通过类似的论证，我们可以将（3.1）归结为以下命题。记 $B_R^* = B^n(0,R) \times [0,R]$。

命题 3.1. 设 $n \geq 2$, $1/2 \leq \alpha < 1$ 和 $\gamma(x,t) \in \mathcal{D}$。对于任意 $0 < \epsilon < 1/100$，存在常数 C_ϵ 和 $\delta = \min(\epsilon^{100}, \frac{1-\alpha}{100})$，使得对所有 $R \geq 1$以及所有满足 $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset B^n(0,1)$ 的 f，以下结论成立。令 $p = \frac{2(n+1)}{n-1}$。假设 $Y = \cup_{k=1}^M B_k$是 B_R^*中格点 K^2-立方体的并集，其中 $K = R^\delta$。假设

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B_k)} \text{ is essentially a dyadic number in } k = 1, 2, ..., M.$$

令 $1 \leq \lambda \leq n+1$ 和 ν 定义如下

$$\nu := \max_{\substack{B^{n+1}(x',r)\subset B_R^* \\ x'\in\mathbb{R}^{n+1}, r\geq K^2}} \frac{\#\{B_k : B_k \subset B(x',r)\}}{r^\lambda}.$$

Then

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y)} \leq C_\epsilon M^{-\frac{1}{n+1}} \nu^{\frac{1}{n+1}} R^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon}\|f\|_{L^2}.$$

注 3.2. 杜-张 [12] 引入了另一个参数，用于计算与给定格点 $R^{1/2}$ 立方体相交的 Y 个单位立方体的数量。这一更精细的结果需要杜—Guth—李—张 [11] 得出的关于 $e^{it\Delta} f(x)$ 的精细 Strichartz 估计。我们也可以沿用[11]中的论证，建立关于 $e^{it\Delta} f(\gamma(x,t))$ 的精细 Strichartz 估计。然而，正如他们在 [12], 中所说，获得相关的逐点收敛结果并不需要这个参数。因此，我们证明了上面这个不含该参数的较弱版本。

证明。我们将频率空间中的 $B^n(0,1)$ 分解为 K^{-1} 个 τ 立方体。然后写作$f = \sum_\tau f_\tau$，其中 $\widehat{f_\tau} = \widehat{f}|_\tau$。对于 Y 中的一个 K^2 立方体 B，我们将相应的显著集定义为

$$\mathcal{S}(B) := \Big\{\tau : \|T_\alpha^{\gamma_R} f_\tau\|_{L^p(B)} \geq \frac{1}{100\#\tau}\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)}\Big\}.$$

一项基本性质是

$$\Big\|\sum_{\tau\in\mathcal{S}(B)} T_\alpha^{\gamma_R} f_\tau\Big\|_{L^p(B)} \sim \|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)}.$$

我们称 $B \subset Y$为宽，若存在 τ_1，...， $\tau_{n+1} \in \mathcal{S}(B)$，使得对任意 $v_j \in G(\tau_j)$，

$$|v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_{n+1}| \gtrsim K^{-n}, \tag{3.2}$$

其中 $G(\tau)$ 定义为

$$G(\tau) := \left\{ \frac{(-2\xi, 1)}{|(-2\xi, 1)|} \in S^n : \xi \in \tau \right\}.$$

否则，我们称 B 为窄。我们用 Y_{broad} 表示宽 $B \subset Y$ 的并集，用 Y_{narrow} 表示窄 $B \subset Y$ 的并集。如果 Y_{broad} 包含许多 K^2 立方体，则称为宽情形；否则称为窄情形。

宽情形。对于每个宽 B，根据 $\mathcal{S}(B)$ 的定义，存在满足 (3.2) 的 $\tau_1, ..., \tau_{n+1} \in \mathcal{S}(B)$，并且

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)}^p \leq K^{O(1)} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\int_B |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}|^p \right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{3.3}$$

设 $B = B(x_B, K^2)$。为应用局部常数性质，我们将 B 分解为形如 $B(x_B + v, 2)$ 的球，其中 $v \in B(0, K^2) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$。我们选取 $v_j \in B(0, K^2) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$，使得 $\|T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}\|_{L^\infty(B)}$ 在 $B(x_B + v_j, 2)$ 中取得。定义 $v_j = (x_j, t_j)$，并

$$\widehat{f_{\tau_j, v_j}}(\xi) := \widehat{f_{\tau_j}}(\xi) e(x_j \cdot \xi + t_j |\xi|^2).$$

Thus

$$\int_B |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}(x,t)|^p \leq K^{O(1)} \int_{B(x_B + v_j, 2)} |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}(x,t)|^p = K^{O(1)} \int_{B(x_B, 2)} |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}(x + x_j, t + t_j)|^p.$$

Note

$$\begin{aligned}
&|T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j}(x + x_j, t + t_j)| \\
=&\left| \int e\left[(x + x_j) \cdot \xi + R^{1-2\alpha} (t + t_j)^\alpha \mu\left(\frac{t + t_j}{R^2} \right) \cdot \xi + (t + t_j)|\xi|^2 \right] \widehat{f_{\tau_j}}(\xi) d\xi \right| \\
=&\left| \int e\left[x \cdot \xi + R^{1-2\alpha} (t + t_j)^\alpha \mu\left(\frac{t + t_j}{R^2} \right) \cdot \xi + t|\xi|^2 \right] \widehat{f_{\tau_j, v_j}}(\xi) d\xi \right| \\
=&\left| \int e\left[R^{1-2\alpha} \left((t + t_j)^\alpha \mu\left(\frac{t + t_j}{R^2} \right) - t^\alpha \mu\left(\frac{t}{R^2} \right) \right) \cdot (\xi - c_{\tau_j}) \right] \right. \\
&\qquad \left. \cdot e\left[x \cdot \xi + R^{1-2\alpha} t^\alpha \mu\left(\frac{t}{R^2} \right) \cdot \xi + t|\xi|^2 \right] \widehat{f_{\tau_j, v_j}}(\xi) d\xi \right| \\
\sim&|T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j, v_j}(x,t)|,
\end{aligned}$$

其中 c_{τ_j} 表示 τ_j的中心。这里我们利用命题 2.1 消去上述相位函数中的第一项。因此，

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)}^p &\le K^{O(1)} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\int_{B(x_B,2)} |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j,v_j}|^p \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\sim K^{O(1)} \int_{B(x_B,2)} \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau_j,v_j}|^{\frac{p}{n+1}}.\end{aligned}$$

由于 τ_j 只有 $K^{O(1)}$ 种选择，根据鸽巢原理，存在 $\tilde{\tau_j}$、$\tilde{v_j}$，使得上述不等式对至少 $\ge K^{-C}M$ 个宽 B 成立。现在固定 $\tilde{\tau_j}$、$\tilde{v_j}$。我们将 $f_{\tilde{\tau_j},\tilde{v_j}}$ 简记为 f_j，并将其余宽 B 的集合记为 $\mathcal{B}$。接下来，我们按照值 $\| \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \|_{L^\infty(B(x_B,2))}$ 对 $B \in \mathcal{B}$ 排序：对于二进数 A，定义

$$\mathbb{Y}_A := \left\{ B \in \mathcal{B} : \left\| \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \right\|_{L^\infty(B(x_B,2))} \sim A \right\}.$$

令 Y_A 为 $\mathbb{Y}_A$ 中 K^2 立方体 B 的并。无妨假设 $\|f\|_{L^2} = 1$。我们还可以假设，对于某个常数 C，有 $R^{-C} \le A \le 1$。因此，关于 A，只有 $\sim$ 种选择，且数量至多为 $O(\log R) \le O(K)$。根据二进制鸽巢原理，存在一个常数 A，使得

$$\#\{B : B \subset Y_{\tilde{A}}\} \gtrsim K^{-C} \#\mathcal{B}.$$

现在固定 A，并将 $Y_{\tilde{A}}$ 记为 Y'。综合以上所有估计，我们得到

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y_{\text{broad}})}^p &\le K^{O(1)} \|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y')}^p \\ &\le K^{O(1)} \left\| \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \right\|_{L^p(\cup_{B\subset Y'} B(x_B,2))} \\ &\sim K^{O(1)} M^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left\| \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \right\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n}}(\cup_{B\subset Y'} B(x_B,2))} \\ &\le K^{O(1)} M^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left\| \prod_{j=1}^{n+1} |T_\alpha^{\gamma_R} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \right\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n}}(B_R^*)} \\ &\lesssim K^{O(1)} M^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left\| \prod_{j=1}^{n+1} |e^{it\Delta} f_j|^{\frac{1}{n+1}} \right\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n}}(B_{2R})} \\ &\lesssim K^{O(1)} M^{-\frac{1}{2(n+1)}} R^\epsilon \|f\|_{L^2} \\ &\le K^{O(1)} M^{-\frac{1}{n+1}} \nu^{\frac{1}{n+1}} R^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon} \|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

这里在第五行我们应用变量替换 $x + R^{1-2\alpha} t^\alpha \mu(t/R^2) \to x$，最后一行成立是因为 $M \le K^{O(1)} \nu^2 R^\lambda$，这可由 ν 的定义推得。

窄情形。我们将 $Y_{\text{narrow}} = Y_1 \cup Y_2$ 分解，其中

$$Y_1 = Y_{\text{narrow}} \cap (B_R^n \times [0, K^{\frac{2}{1-\alpha}}]), \qquad Y_2 = Y_{\text{narrow}} \backslash Y_1.$$

Then

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y_{\text{narrrow}})} \leq \|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y_1)} + \|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y_2)}.$$

若来自 Y_1 的贡献占主导，则这意味着 Y_1 包含 $\sim M$ 个 K^2-立方体 B。另一方面，由驻相法可知， $T_\alpha^{\gamma_R} f$ 限制在 Y_1 上时，本质上支撑于 $B(0, K^{\frac{3}{1-\alpha}}) \times [0, K^{\frac{2}{1-\alpha}}]$。因此，忽略一个快速衰减项后，我们有

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^2(Y_1)} \lesssim K^{O(1)} \|f\|_{L^2} \lesssim K^{O(1)} \nu^{\frac{1}{n+1}} R^{\frac{\lambda}{2(n+1)}} \|f\|_{L^2},$$

由于 $\nu \geq K^{-2\lambda}$ 和 $\lambda \geq 1$。于是

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(Y_1)} \lesssim K^{O(1)} M^{-\frac{1}{n+1}} \nu^{\frac{1}{n+1}} R^{\frac{\lambda}{2(n+1)}} \|f\|_{L^2}.$$

接下来假设来自 Y_2 的贡献占主导，这意味着 Y_2 包含$\sim M$ 个 K^2-立方体 B。我们将物理空间中的 $B^n(0, R)$划分为 R/K-立方体 D。记$f = \sum_{\tau,D} f_{\tau,D}$，其中每个$f_{\tau,D}$ 本质上支撑于 D，且傅里叶支集于 τ。于是$T_\alpha^{\gamma_R} f = \sum_{\tau,D} T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau,D}$. 再次应用驻相法，可得每个$T_\alpha^{\gamma_R} f_{\tau,D}$ 限制在 B_R^* 上时，本质上支撑于

$$\square := \square_{\tau,D} = \{0 < t \leq R : |x - c_D + 2tc_\tau| \leq R/K\},$$

其中， c_D 和 c_τ 分别表示 D 和 τ的中心。我们改写

$$|T_\alpha^{\gamma_R} f| = \left| \int e\left[x \cdot \xi + t \left| \xi + \frac{1}{2} R^{1-2\alpha} t^{\alpha-1} \mu\left(\frac{t}{R^2}\right) \right|^2 \right] \widehat{f}(\xi) d\xi \right|.$$

我们看到，在 Y_2上，

$$\left(\xi, \left| \xi + \frac{1}{2} R^{1-2\alpha} t^{\alpha-1} \mu\left(\frac{t}{R^2}\right) \right|^2 \right) \subset N_{K^{-2}}(\mathbb{P}^n).$$

因此，利用低维的变系数版本 [15],的 l^2 解耦不等式，我们得到

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)} \lesssim K^{\epsilon^2} \left(\sum_{\tau \in \mathcal{S}(B)} \|T_\alpha^{\gamma_R} f_\square\|_{L^p(w_B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

其中， w_B 由下式给出

$$w_B(x) := \left(1 + \frac{|x - c_B|}{K^2}\right)^{-100n},$$

而 c_B 表示 B的中心。

接下来，我们将进行几次二进制鸽巢原理分组，其思路与 [12,第 3] 节类似。设 $R_1 = R/K^2 = R^{1-2\delta}$, $K_1 = R_1^\delta = R^{\delta-2\delta^2}$。用平行于 $\square$ 长轴的 $KK_1^2 \times ... \times KK_1^2 \times K^2K_1^2$ 管 S 铺满 $\square$。现在，我们对 S 和 $\square$应用二进制鸽巢原理:

(1) 对每个 $\square$，我们按照数值$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(S)}$以及其中包含的 Y_2 内 K^2 立方体的数量，对与 Y_2 相交的 $S \subset \square$ 进行分类：对于二进数 η, β_1，定义

$$\mathbb{S}_{\square,\eta,\beta_1} := \{S \subset \square : S \text{ contains} \sim \eta \text{ many } K^2\text{-cubes in } Y_2,\ \|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(S)} \sim \beta_1\}.$$

令 $Y_{\square,\ \eta,\ \beta_1}$ 为 $\mathbb{S}_{\square,\ \eta,\ \beta_1}$ 中管 S 的并集。

(2) 对固定的 η 和 β_1，我们根据数值 $\|f_\square\|_{L^2}$、数量 $\#\mathbb{S}_{\square,\ \eta,\ \beta_1}$ 以及下文给出的数值 ν_1 对 $\square$ 进行排序：对于二进数 β_2、M_1、ν_1，定义

$$\mathbb{B}_{\eta,\beta_1,\beta_2,M_1,\gamma_1} := \left\{\square : \|f_\square\|_{L^2} \sim \beta_2,\ \#\mathbb{S}_{\square,\eta,\beta_1} \sim M_1,\ \max_{T_r \subset \square : r \geq K_1^2} \frac{\#\{S \in \mathbb{S}_{\square,\eta,\beta_1} : S \subset T_r\}}{r^\lambda} \sim \nu_1\right\},$$

其中 T_r 是 $\square$ 中平行于 $\square$. 长轴的 $Kr \times ... \times Kr \times K^2 r$-管

在每个 $B \subset Y_2$ 上，除去一个快速衰减项，我们有

$$T_\alpha^{\gamma_R} f = \sum_{\eta,\beta_1,\beta_2,M_1,\nu_1} \left(\sum_{\substack{\square \in \mathbb{B}_{\eta,\beta_1,\beta_2,M_1,\nu_1} \\ B \subset Y_{\square,\eta,\beta_1}}} T_\alpha^{\gamma_R} f_\square \right).$$

在假设 $\|f\|_{L^2} = 1$ 下，我们可以进一步假设

$$1 \leq \eta \leq K^{O(1)}, \quad R^{-C} \leq \beta_1 \leq K^{O(1)}, \quad R^{-C} \leq \beta_2 \leq 1,$$
$$1 \leq M_1 \leq R^{O(1)}, \quad K^{-2n} \leq \nu_1 \leq R^{O(1)}$$

对某个常数 C 成立。因此，对于每个二进数，只有 $O(\log R)$ 种选择。根据二进制鸽巢原理，存在 $\eta, \beta_1, \beta_2, M_1, \nu_1$，它们依赖于 B，使得

$$\|T_\alpha^{\gamma_R} f\|_{L^p(B)} \lesssim (\log R)^5 \left\| \sum_{\square \in \mathbb{B}_{\eta,\beta_1,\beta_2,M_1,\nu_1}} T_\alpha^{\gamma_R} f_\square \cdot \chi_{Y_{\square,\eta,\beta_1}} \right\|_{L^p(B)}. \tag{3.5}$$

最后，我们对 $B \subset Y_2$ 进行分类。由于在 $\eta, \beta_1, \beta_2, M_1, \nu_1$ 上只有 $O(\log R)$ 种选择，根据鸽巢原理，我们可以找到一致的 $\eta, \beta_1, \beta_2, M_1, \nu_1$，使得 (3.5) 对所有 $B \subset Y_2$ 中占比例$\gtrsim (\log R)^{-6}$ 的部分成立。我们将这类 B 的并集记为 Y_2'。从现在起，我们分别将 $Y_{\square,\eta,\beta_1}$ 和 $\mathbb{B}_{\eta,\beta_1,\beta_2,M_1,\nu_1}$ 简记为 $Y_\square$ 和 $\mathbb{B}$。接下来，我们根据数量 $\#\{\square \in \mathbb{B}$ 对$B \subset Y_2'$作进一步分类：$B \subset Y_2'\}$：对于二进数 ℓ，定义

$$\mathbb{Y}_\ell := \{B \subset Y_2' : \#\{\square \in \mathbb{B} : B \subset Y_\square\} \sim \ell\}.$$

令 Y_ℓ 为 $\mathbb{Y}_\ell$ 中 B 的并集。再次运用二进制鸽巢原理，我们可以选取 ℓ，使得

$$\#\{B : B \subset Y_\ell\} \gtrsim (\log R)^{-6} \#\{B : B \subset Y_2'\}. \tag{3.6}$$

从现在起，我们固定 ℓ，并将 Y_ℓ 记为 Y''。

现在，在每个 $B\subset Y''$ 上，由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{\gamma_R}f\|_{L^p(B)}\lesssim&(\log R)^5\left\|\sum_{\square\in\mathbb{B}}T_\alpha^{\gamma_R}f_\square\cdot\chi_{Y_\square}\right\|_{L^p(w_B)}\\ \lesssim&(\log R)^5K^{\epsilon^2}\left(\sum_{\square\in\mathbb{B}:B\subset Y_\square}\|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square\|_{L^p(w_B)}^2\right)^{\frac12}\\ \lesssim&(\log R)^5K^{\epsilon^2}\ell^{\frac{1}{n+1}}\left(\sum_{\square\in\mathbb{B}:B\subset Y_\square}\|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square\|_{L^p(w_B)}^p\right)^{\frac1p}.\end{aligned}$$

对 $B\subset Y''$ 求和，并注意到 (3.6)，可得

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{\gamma_R}f\|_{L^p(Y)}\lesssim&(\log R)^6\|T_\alpha^{\gamma_R}f\|_{L^p(Y'')}\\ \lesssim&(\log R)^{11}K^{\epsilon^4}\ell^{\frac{1}{n+1}}\left(\sum_{\square\in\mathbb{B}}\|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square\|_{L^p(Y_\square)}^p\right)^{\frac1p}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

对于项 $\|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square\|_{L^p(Y_\square)}$，我们将使用抛物缩放和尺度归纳。对每个 $\tau=\tau_\square$，令 $\xi=c_\tau+K^{-1}\eta$，则

$$|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square(x,t)|=K^{-\frac n2}|T_\alpha^{\gamma_R/K}g(\tilde x,\tilde t)|$$

对某个 g，满足 $\mathrm{supp}\widehat{g}\subset B^n(0,1)$ 且 $\|g\|_{L^2}=\|f_\square\|_{L^2}$，并且 $\tilde x$、$\tilde t$ 由 $\tilde x=K^{-1}x+2tK^{-1}c_\tau$、$\tilde t=K^{-2}t$给出。因此

$$\|T_\alpha^{\gamma_R}f_\square(x,t)\|_{L^p(Y_\square)}=K^{-\frac{1}{n+1}}\|T_\alpha^{\gamma_R/K}g(\tilde x,\tilde t)\|_{L^p(\tilde Y)},\tag{3.8}$$

其中 $\tilde Y$是在新坐标下 $Y_\square$ 的像。可以看出，$\|T_\alpha^{\gamma_R/K}g\|_{L^p(\tilde Y)}$ 恰好满足新参数 M_1、ν_1、R_1 下尺度为 R_1 时命题 3.1 的条件。因此，我们应用归纳假设，得到

$$\|T_\alpha^{\gamma_R/K}g\|_{L^p(\tilde Y)}\lesssim M_1^{-\frac{1}{n+1}}\nu_1^{\frac{1}{n+1}}R_1^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon}\|g\|_{L^2}.\tag{3.9}$$

结合 (3.7)、(3.8) 和 (3.9)，可得

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{\gamma_R}f\|_{L^p(Y)}\le&K^{2\epsilon^4}\ell^{\frac{1}{n+1}}K^{-\frac{1}{n+1}}M_1^{-\frac{1}{n+1}}\nu_1^{\frac{1}{n+1}}R_1^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon}(\sum_{\square\in\mathbb{B}}\|f_\square\|_{L^2}^p)^{\frac1p}\\ \lesssim&K^{2\epsilon^4}(\frac{\ell}{\#\mathbb{B}})^{\frac{1}{n+1}}K^{-\frac{1}{n+1}}M_1^{-\frac{1}{n+1}}\nu_1^{\frac{1}{n+1}}R_1^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon}\|f\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

最后，旧参数 M、ν 与新参数 M_1、ν_1 之间的关系如下：

$$\frac{\ell}{\#\mathbb{B}}\lesssim\frac{(\log R)^6M_1\eta}{M},\qquad\eta\lesssim\frac{\nu K^{\lambda+1}}{\nu_1}.\tag{3.11}$$

(3.11) 可按照 [12, Section 3], 中的相同步骤证明，相关细节在此略去。将 (3.11) 加到估计式 (3.10) 中，得到

$$\|T_\alpha^{\gamma_R}f\|_{L^p(Y)}\lesssim K^{2\epsilon^2-2\epsilon}M^{-\frac{1}{n+1}}\nu^{\frac{1}{n+1}}R^{\frac{\lambda}{2(n+1)}+\epsilon}\|f\|_{L^2}.$$

由于 $K=R^\delta$，我们可以选取充分大的 R，从而完成归纳。

□

最后，我们简要讨论一下 $0 < \alpha < 1/2$ 的情形。在命题 3.1 中，条件$1/2 \leq \alpha < 1$ 被多次用到，例如宽情形中的局部常数性质，以及窄情形中的 l^2 解耦不等式。这些特点似乎表明$\alpha = 1/2$ 是临界点，而当$\alpha < 1/2$时，逐点收敛会变差。事实上，如果 $0 < \alpha < 1/2$，我们仍然可以通过相同的论证将定理 1.1 化归为定理 1.4。不过，$T_\alpha^{\gamma_R} f$ 的相关性质会变差。例如，如果 f 在 B(0, 1)上具有傅里叶支集，那么 $|T_\alpha^{\gamma_R} f|$ 可视为在尺度为$1 \times ... \times 1 \times R^{2-1/\alpha}$的盒子上为常数。另一方面，若考虑其波包分解，记作 $T_\alpha^{\gamma_R} f = \sum_{\theta,\ \nu} T_\alpha^{\gamma_R} f_{\theta,\ \nu}$，其中 θ 表示频率空间中半径为 $R^{-1/2}$ 的球，ν 表示物理空间中半径为 $R^{1/2}$ 的球，那么每个限制在 B_R^* 上的 $T_\alpha^{\gamma_R} f_{\theta,\ \nu}$ 基本上支集于尺度为 $R^{1-\alpha} \times ... \times R^{1-\alpha} \times R$的管状区域中。这些特点使得对命题 3.1 使用相同论证行不通。然而，对于 $n = 1$，Cho-Lee-Vargas [5] 证明，当 $0 < \alpha < 1$时，(1.3) 对 $s > \max(1/2 - \alpha, 1/4)$ 成立。换言之，当 $n = 1$ 时，临界点是 $\alpha = 1/4$。因此，对于 $n \geq 2$ 时的 $0 < \alpha < 1/2$ 情形，似乎仍然需要新方法。

致谢。本项目得到国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1005700 和 2020YFAO712903）以及国家自然科学基金委员会项目（编号：11831004）的资助。

References

[1] J. Bourgain. 高维薛定谔极大函数. 斯捷克洛夫数学研究所论文集, 280(1):46–60, 2013.[2]J. Bourgain. 关于薛定谔极大函数的一则注记. Journal d'Analyse Mathématique, 130(1):393–396, 2016.[3] A. Carbery. 径向傅里叶乘子及其相关极大函数.《傅里叶分析最新进展》, 111:49–56, 1985.[4] L. Carleson. 与统计力学相关的一些分析问题. 载于 Euclidean Harmonic Anal- ysis,《数学讲义》, 779:5–45, 1979.[5] C.H. Cho, S. Lee., and A. Vargas. 薛定谔方程解逐点收敛的问题.《傅里叶分析与应用杂志》, 18(5):972–994, 2012.[6] M. Cowling. 薛定谔方程解的逐点行为.《数学讲义》, 992:83– 90, 1983.[7] B. E. J. Dahlberg and C. E. Kenig. 关于薛定谔方程解几乎处处行为的一则注记.《调和分析》,《数学讲义》, 908:205–209, 1982.[8] C. Demeter and S. Guo. 通过伪共形变换估计薛定谔极大函数. arXiv:1608.07640, 2016.[9] Y. Ding and Y. Niu. 色散方程相关曲线上的加权极大估计.《分析与应用》, 15(2):225–240, 2017.[10] X. Du, L. Guth, and X. Li. ¨上的尖锐薛定谔极大估计.《数学年刊》, 186(2):607–640, 2017.[11] X. Du, L. Guth, X. Li, and R. Zhang. 薛定谔解的逐点收敛与多线性精细斯特里卡茨估计.《数学论坛：西格玛》, e14, 18 pp, 2018.[12] X. Du and R. Zhang. 高维薛定谔极大函数的尖锐 L^2 估计.《数学年刊》, 189(3):837–861, 2018.

[13] L. Guth, J. Hickman, and M. Iliopoulou. 通过多项式分割得到的振荡积分算子的尖锐估计. 《数学学报》, 223(2):251–376, 2019.[14] L. Guth, H. Wang, and R. Zhang. $\mathbb{R}^3$上的圆锥尖锐平方函数估计. 《数学年刊》, 192(2):551–581, 2020.[15] A. Iosevich, B. Liu, and Y. Xi. 黎曼流形上的微局部解耦不等式与距离问题. arXiv:1909.05171v1, 2019.[16] S. Lee. $\mathbb{R}^2$上的薛定谔方程解的逐点收敛. 《国际数学研究通报》, Art. ID 32597, 21 pp, 2006.[17] S. Lee and K. M. Rogers. 沿曲线的薛定谔方程与量子谐振子. 《数学进展》 , 229:1359–1379, 2012.[18] W. Li and H. Wang. 关于广义薛定谔算子沿切向曲线的收敛性质. arXiv:2111.09186v1, 2021.[19] R. Luc`a and K. Rogers. 薛定谔极大估计的一个改进必要条件. arXiv:1506.05325, 2015.[20] A. Moyua, A. Vargas, and L. Vega. 薛定谔极大函数与傅里叶变换的限制性质. 《国际数学研究通报》, 1996(16):793–815, 1996.[21] P. Sj¨ogren and P. Sj¨olin. 时变薛定谔方程的收敛性质. 芬兰科学院年刊, 14:13–25, 1989.[22] P. Sj¨olin. 薛定谔方程解的正则性. 《杜克数学杂志》, 55(3):699–715, 1987.[23] T. Tao. 博赫纳 - 里斯猜想蕴含限制猜想 . 《杜克数学杂志》 , 96:363–375, 1999.[24] L. Vega. 薛定谔方程：逐点收敛至初始数据. 《美国数学会会刊》, 102(4):874–878, 1998.

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China
电子邮箱地址：11735002@zju.edu.cn

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China
电子邮箱地址：miao changxing@iapcm.ac.cn