arXiv:2303.11027v1 [math.GR] 20 Mar 2023

群中的共轭类

Marcel Herzog*, Patrizia Longobardi** and Mercede Maj**

*特拉维夫大学数学科学学院，拉马特-阿维夫，特拉维夫，以色列 **萨莱诺大学数学系，乔瓦尼·保罗二世路132号，84084 菲夏诺（萨莱诺），意大利

I. Introduction

设 G 是一个群， x 是 G的一个元素。显然 $\langle x\rangle \leq C_G(x)$。因此， x 满足 $\langle x\rangle = C_G(x)$或 $\langle x\rangle < C_G(x)$。据此，我们引入以下定义。

定义。设 G是一个群。那么：

(a) $G^* = G \setminus \{1\}$。(b) x 是 G^* 的一个元素，若...

...，则称其为亏格

$$\langle x\rangle < C_G(x)$$

并称其为非亏格的，如果

$$\langle x\rangle = C_G(x).$$

若 $x \in G$ 是亏格的（非亏格的），则 G 中 x 的共轭类 x^G 也称为亏格的（非亏格的）。

(c) 设 j 为非负整数。若 G恰有 j 个非平凡共轭类是亏格的，则称群 G 的亏缺度为 j，记作$G \in D(j)$，或称“G 是一个 $D(j)$群”。

(d) 此外，若 G 是周期群，则 $\pi(G)$表示整除 G中某个元素的阶的所有素数构成的集合。

本文将群称为任意群，意指它是有限群或无限群。

本文分为三部分：A部分讨论有限的 $D(0)$-群和 $D(1)$-群，包括第二至第五截面；B 部分讨论我们论文中的一些预备结果 [6]并

本研究得到意大利代数与几何结构及其应用国家组（GNSAGA - INDAM）的资助。第一作者感谢萨莱诺大学数学系在本研究进行期间提供的接待与支持。

包括第六至第七截面；C 部分讨论任意的 $D(0)$-群和 $D(1)$-群，包括第八至第九截面。

A部分的目标是确定所有有限 $D(0)$-群和 $D(1)$-群。我们证明以下两个定理。在定理陈述中以及其他地方，我们将使用以下记号。“$G = A \rtimes B$ 是 Frobenius 群”这一说法表示 G 是一个有限Frobenius群，其核为 A，补为 B。众所周知，$|A| \equiv 1$ (模 $|B|$)。此外，C_n 表示阶为 n 的循环群，D_n 表示阶为 n的二面体群，Q_8 表示四元数群；若 p 是一个素数且 s 是一个正整数，则 E_{p^s} 表示阶为 p^s的初等阿贝尔群。

定理 1. 设 G 为一个有限群。那么，当且仅当以下陈述之一成立时，$G \in D(0)$：

(1) G 是阿贝尔群，并且 $G = \{1\}$，或者对于某个素数 p，$G = C_p$；(2) G 是非阿贝尔群，且 $G = C_p \rtimes C_q$ 是一个 Frobenius 群，其中 p 和 q 是不同的素数。

定理 2. 设 G 为有限群。那么，当且仅当以下陈述之一成立时，$G \in D(1)$：

(1) G 是幂零群，且满足 $G = C_4$ 或 $G = Q_8$；(2) G 是非幂零可解群，且满足以下之一：$G = E_{2^s} \rtimes C_q$ 是 Frobenius 群，其中 s 为正整数，且 $q = 2^s - 1$ 为梅森素数；或者 $G = C_q \rtimes C_4$ 是 Frobenius 群，其中 q 是满足 $q \equiv 1$ (mod 4) 的素数；或者 $G = D_{18}$；(3) G 是不可解群，且满足 $G = A_5$ 或 $G = PSL(2, 7)$。

在 B 部分中，我们将引用我们论文 [6], 中的一些结果，该论文讨论任意群 G，使得其中每个 G^* 的阶都是素数幂，且 G 满足某些附加条件。这些结果对我们的 C 部分将非常有用。

C 部分讨论任意的 $D(0)$-群和 $D(1)$-群。我们在 C 部分的目标是找出任意 $D(0)$-群和 $D(1)$-群的某些性质，这些性质能迫使这些群成为有限群。

关于 $D(0)$-群，我们证明以下四个定理。

定理 3. 设 G 为局部有限的 $D(0)$-群。那么 G 是有限群。

定理 4. 设 G 为局部分次的 $D(0)$-群。那么 G 是有限群。

定理 5. 设 G 为剩余有限的 $D(0)$-群。那么 G 是有限群 .

定理 6. 设 G 是一个 $D(0)$-群，并假设 $2 \in \pi(G)$。那么 G 是一个有限群。

最后，关于 $D(1)$-群，我们证明以下三个定理。

Theo注 7. 设 G 是一个局部有限 $D(1)$-群。那么 G 是一个有限群。

定理 8. 设 G 是一个周期局部分次 $D(1)$-群。那么 G 是一个有限群。

定理 9. 设 G 是一个剩余有限的 $D(1)$-群。那么 G 是一个有限群 .

定理 1 在第二节中得到证明，定理 2 在第五节中得到证明，定理 3、4、5 和 6 在第八节中得到证明，定理 7、8 和 9 在第九节中得到证明。

我们的引言现已完成。

Part A - Finite $D(0)$-groups and $D(1)$-groups

A部分旨在证明引言中陈述的定理 1 和定理 2。定理 1 将在第二节中证明，定理 2 将在第五节中证明。

II. Finite $D(0)$-groups and a proof of Theorem 1

本节的目的是证明定理 1，该定理确定了所有有限 $D(0)$-群。证明需要以下两个预备结果。第一个结果是下面的命题。

命题 A1。有限群 G 满足 $G \in D(0)$ 当且仅当以下两条陈述成立：

(1) G^* 的所有元素都是素数阶；(2) 若 $p \in \pi(G)$，则 G 的一个 Sylow p- 子群是素数阶。

证明。首先，假设 (1) 和 (2) 成立。由 (1) 可知每个 $x \in G^*$ 都是素数阶，设为 p；而 (2) 表明 $\langle x \rangle$ 是 G 的一个 Sylow p- 子群。若 $y \in C_G(x)^*$，则对某个素数 q 有 $|y| = q$。若 $q \neq p$，则 $xy \neq 1$，且其阶不是素数，这与 (1) 矛盾。因此，若 $y \in C_G(x)^*$，则 $|y| = p$。若 $y \notin \langle x \rangle$，则 $\langle x, y \rangle$ 是一个阶为 p^2的 p-群，这与 (2) 矛盾。因此，对所有 $x \in G^*$，$C_G(x) = \langle x \rangle$，且 $G \in D(0)$，证毕。

反之，若对所有 $x \in G^*$ 都有 $C_G(x) = \langle x \rangle$，则显然 G^* 的所有元素均为素数阶，且对于每个 $p \in \pi(G)$，G 的 Sylow p-子群的阶为素数。因此，G 满足 (1) 和 (2)，证毕。□

我们将命题 A1 的陈述 (i) 记为 (A1(i))。对于其他结果，我们也将采用类似的记法。

第二个预备结果是 K.N. Cheng、M. Deaconescu、M.L. Lang 和 W. Shi 的以下定理（见 [1]）。

定理 N. 设 G 是一个有限群，且 G^* 的所有元素均为素数阶。则以下陈述之一成立。

(1) G 是幂零群，当且仅当 $G = \{1\}$ 或 G 是指数为 p 的 p-群，其中 p 为某个素数。(2) G 是非幂零可解群，当且仅当 $G = P \rtimes C_q$ 是 Frobenius 群，其中 P 是 G 的 Sylow p-子群，其指数为 p，其中 p 为某个素数，且 q 是一个不同于 p 的素数。(3) G 是不可解群，当且仅当 $G = A_5$。

现在我们可以证明定理 1 了。

定理 1 的证明。根据命题 A1，定理 1 中提到的所有群都属于 $D(0)$。

反过来，如果 $G \neq \{1\}$ 是有限的 $D(0)$-群，那么它满足命题 A1 的陈述 (1) 和 (2)。满足 (A1(1)) 的群由定理 N 描述。由于 G 也满足 (A1(2))，定理 N 的陈述 (3) 不可能成立，因此在定理 N 的陈述 (2) 中，我们必须有 $|P| = p$，且 $G = C_p \rtimes C_q$ 是一个 Frobenius 群，其中 p 和 q 是不同的素数。最后，根据

(A1(2))，定理 N 的陈述 (1) 中必须有 $G = C_p$。因此，定理 1 的 (1) 或 (2) 成立，正如所要求的。□

III. Properties of finite $D(1)$-groups

现在我们转而讨论有限 D(1)-群。我们先给出两个命题，探讨这类群的性质。

命题 A2. 设 G 是一个有限群。若 $G \in D$(1)，则以下结论成立。

(1) G^* 的所有元素的阶均为素数阶或素数平方阶。(2) 存在 $p \in \pi(G)$，使得 G 的一个 Sylow p-子群 P 的阶为 $|P| = p^s \geq p^2$；对于所有其他的 $q \in \pi(G)$，G 的一个 Sylow q-子群的阶为 q，即素数阶。特别地，要么 $exp(P) = p$，要么 $exp(P) = p^2$。(3) G 的所有阶为 p 的元素在 G中共轭。(4) 若 $exp(P) = p^2$，则要么 $P = C_{p^2}$，要么 $|Z(P)| = p$ 且 $|P| = p^s \geq p^3$。(5) 若 $|P| = p^s \geq p^3$，则要么 $exp(P) = p$，要么 $exp(P) = p^2$ 且 $|Z(P)| = p$。无论哪种情况，$Z(P)$都是一个初等阿贝尔 p-群。(6) 若 $p > 2$，则 G 可解。(7) 若 $G > P$，则 $Z(G) = \{1\}$。(8) 若对某个 $r \in \pi(G)$，G 的 r-Sylow 子群 R 是非平凡正规子群，则 G 是以 R为核的 Frobenius 群。

证明。

(1) 假设 $x \in G$ 和 $rt \mid |x|$，其中 r 和 t 是不同的素数。设 $y = x^r$ 和 $z = x^t$。那么 $|y| \neq |z|$，$|y| < |x|$，$|z| < |x|$ 和 $x \in C_G(y) \cap C_G(z)$。因此，y 和 z 是 G 中阶不同且都亏损的元素，这与 $G \in D$(1)矛盾。因此，G^* 的所有元素都是素数幂阶。若对于某个素数 r，有 $x \in G$ 和 $|x| = r^3$，则 x^r 和 x^{r^2} 是 G 中阶不同且都亏损的元素，这与$G \in D$(1)矛盾。因此，结论 (1) 成立。

(2) 假设对于 $|G|$ 的不同素因子 p 和 q，有 $P \in Syl_p(G)$ 和 $Q \in Syl_q(G)$，且 P 和 Q 都不是素数阶。那么它们的中心包含一个素数阶亏损元素，这与 $G \in D$(1)矛盾。因此，对于至多一个 $|G|$的素因子，G 的 Sylow 子群不是素数阶。若 G 的所有子群都是素数阶，那么根据结论 (1)，命题 A1 推出 $G \in D$(0)，这与 $G \in D$(1)矛盾。因此，存在 $p \in \pi(G)$，使得 G 的一个 Sylow p-子群 P 的阶为 $|P| = p^s \geq p^2$；对于所有其他的 $q \in \pi(G)$，Sylow q-子群的阶为素数 q，如所要求。此外，根据 (1)，要么 $exp(P) = p$，要么 $exp(P) = p^2$。

(3) 由于 $|P| \geq p^2$，G 中所有阶为 p 的元素都是亏格的；又由于 $G \in D$(1)，G 中所有阶为 p 的元素在 G 中共轭，证毕。

(4) 若 $exp(P) = p^2$，则存在 $x \in P$，其阶为 p^2。由于 x^p 是 G的亏损元素，$G \in D$(1) 蕴含 x是 G的非亏格元素，因此 $Z(P) \leq C_P(x) = \langle x \rangle$。若 $x \in Z(P)$，则 $P = C_P(x) = \langle x \rangle$ 且 $P = C_{p^2}$。若 $x \notin Z(P)$，则 $1 < Z(P) < C_P(x) = \langle x \rangle$，这蕴含 $Z(P) = \langle x^p \rangle$ 的阶为 p。因此 P 是非阿贝尔群，这蕴含 $|P| = p^s \geq p^3$，证毕。

(5) 假设 $|P| \geq p^3$。那么，由 (2)，要么 $exp(P) = p$，要么 $exp(P) = p^2$。若 $exp(P) = p^2$，则由 (4)，$|Z(P)| = p$。因此，无论哪种情况，$Z(P)$ 都是一个初等阿贝尔 p-群。(6) 若 $p > 2$，则 G 的 Sylow 2-子群的阶为 1 或 2，并且根据费特-汤普森定理，G 是可解的。(7) 若 $G > P$，则 $|G|$ 至少被两个素数整除。若 $Z(G) \neq \{1\}$，则存在 $y \in Z(G)$，其阶为素数，因此 G 含有一个阶可被两个素数整除的元素，这与陈述 (1) 矛盾。因此，若 $G > P$，则 $Z(G) = \{1\}$。(8) 由于 R 包含 G的所有 r-元素，根据 (1)，对所有 $g \in R^*$，都有 $C_G(g) \leq R$，结论由此得出。□

注：若 G 是有限 $D(1)$-群，则 p 和 P 分别表示素数 p 和 G 的 Sylow p-子群，定义见 (A2(2))。

我们以此 节来总结关于有限 $D(1)$-群的第一个分类结果 .

命题 A3。若 G 是有限 $D(1)$-群且 $G = P$，则 $p = 2$，并且 $G = C_4$ 或 $G = Q_8$，反之亦然。

证明。若 $G = P$，则 $|G| = p^s \geq p^2$。若 $p > 2$ 或 $p = 2$ 且 $G = E_{2^2}$，则 $Z(G)$ 含有两个不同的阶为 p 的亏损元素，它们彼此不共轭，这与 $G \in D(1)$ 矛盾。因此 $p = 2$，$|G| \geq 4$，且若 $|G| = 4$，则 $G = C_4$，它满足 $G \in D(1)$。

现在假设 $|G| = 2^s \geq 8$。根据 (A2(3))，所有对合在 G 中都共轭，因此它们属于 $Z(G)$。由此可知，G 只含有一个对合，并且 $G = C_{2^s}$ 或 G 是阶为 2^s 的广义四元数群。由于根据 (A2(2))，$\exp(G) \leq 4$，所以 $G = C_{2^s}$ 不可能，$2^s \geq 16$ 的 Q_{2^s} 也不可能。因此 $G = Q_8$，它满足 $G \in D(1)$。

因此，所要求的结论是 $G = C_4$ 或 $G = Q_8$，反之亦然。□

IV. Classification of finite solvable $D(1)$-groups

Graham Higman 在 [7] 中研究了满足条件 (A2(1)) 的有限可解群。他证明了以下更一般的结果。

GH定理。设 G 是一个所有元素阶均为素数幂的有限可解群。设 r 是一个素数，使得 G 有一个阶大于 1 的正规 r 子群；设 R 是 G 的最大正规 r 子群。那么 G/R 满足以下结论之一。

(1) G/R 是一个循环群，其阶是一个不同于 r 的素数的幂。(2) r 是奇数，且 G/R 是一个广义四元数群。(3) G/R 是一个阶为 $r^a t^b$ 的群，其中 t 表示一个形如 $kr^a + 1$ 的素数，并且 G/R 的 Sylow 子群都是循环群。

因此，G 的阶至多被两个素数整除，且 G/R 是亚交换的。

现在设 G 是一个有限可解的 $D(1)$-群。在这种情况下，我们称 $G \in SD(1)$，或称“G 是一个 $SD(1)$-群”。回顾一下，G 的阶被一个素数 p 整除，使得 $P \in Syl_p(G)$不是素数阶，而对应于整除 $|G|$ 的其他素数的所有 Sylow 子群都是素数阶。特别地，$|P| = p^s \geq p^2$。

由于 G满足 (A2(1))，由 GH定理可得 $|G| = p^s q^v$，其中 q 是一个不同于 p、$s \geq 2$ 和 $v \in \{0, 1\}$的素数。根据命题 A3，若 $v = 0$，则 $G = C_4$ 或 $G = Q_8$。

因此，从现在起假设 $v = 1$ 和 $|G| = p^s q$，并令 Q 表示 G 的一个 Sylow q-子群，其阶为 q。于是：

$$G = PQ, \quad \text{where } |P| = p^s \geq p^2 \text{ and } |Q| = q.$$

根据 (A2(2))，要么 $\exp(P) = p$，要么 $\exp(P) = p^2$。回想一下，GH定理中的 G 的正规子群 R 满足以下条件之一：$R = Q \triangleleft G$，或 $R = P \triangleleft G$，或 R 满足 $1 < R < P$，且它是 G 的极大正规 p-子群。由于 $G \in D(1)$，这三种情况互不相交。

在命题 A3 中，所有满足 $G = P$ 的有限 $D(1)$-群 G 均已确定。本节将完成对有限可解 $D(1)$-群的分类。在命题 A5 中，我们将对满足 $G > P$ 且 $exp(P) = p$ 的 $SD(1)$-群 G 进行分类；在命题 A6 中，我们将对满足 $G > P$ 且 $exp(P) = p^2$ 的 $SD(1)$-群 G 进行分类。最后，在命题 A7 中，我们将给出所有有限可解 $D(1)$-群的分类。

但首先，我们需要证明以下命题。我们将使用以下记号：

$$\Omega_1(P) = \langle x | x \in P \text{ and } |x| = p \rangle.$$

命题 A4。设 $G \in SD(1)$。则以下陈述成立。

(1) 若对某个 $u \in G$ 有 $P \neq P^u$，则

$$Z(P) \cap Z(P^u) = 1.$$

(2) 若 $p > 2$，则 $P \triangleleft G$。(3) 若 $P \not\triangleleft G$，则 $p = 2$。

(4) 若 $P \triangleleft G$，则 $\Omega_1(P) \leq Z(P)$，且 $\exp(\Omega_1(P)) = p$。

(5) 若 $Q \triangleleft G$，则 P 是循环群。

证明。

(1) 若对某个 $u \in G$ 有 $P \neq P^u$，则 $G > P$。若 $x \in Z(P) \cap Z(P^u)$，则 $C_G(x) > P$，又由于 $G = PQ$，可得 $x \in Z(G)$，并由 (A2(7)) 得 $x = 1$，这正是所需结论。(2) 由于 $p > 2$，存在 $u, v \in Z(P)$，使得 $u \neq v$ 且 $|u| = |v| = p$。由 (A2(3))，u 和 v 在 G 中共轭，并且存在 $z \in Q^*$ 使得 $v = u^z$。若 $z \in N_G(P)$，则 $Q \leq N_G(P)$ 且 $P \triangleleft G$，这正是所需结论。最后，假设 $z \notin N_G(P)$。于是 $P^z \neq P$，并由 (1) 得 $Z(P) \cap Z(P^z) = 1$。但是 $u, v \in Z(P)$ 且 $v = u^z \in Z(P^z)$，所以 $v \in Z(P) \cap Z(P^z)$，矛盾。因此 $P \triangleleft G$，这正是所需结论。(3) 由 (2) 得出。(4) 由 (A2(3))，P 中所有阶为 p 的元素在 G 中彼此共轭。由于 $P \triangleleft G$，还有 $Z(P) \triangleleft G$，因此阶为 p 的 P 中所有元素都属于 $Z(P)$。于是 $\Omega_1(P) \leq Z(P)$，且 $\exp(\Omega_1(P)) = p$，证毕。(5) 若 $Q \triangleleft G$，则由 (A2(8)) 可知 $G = Q \rtimes P$ 是一个 Frobenius 群。由于 $C_G(Q) = Q$ 且 $N_G(Q) = G$，可得 P 同构于 $N_G(Q)/C_G(Q)$；又由于 Q 是素数阶循环群，P 也是循环群，证毕。□

我们继续证明本节的第一个主要结果。

命题 A5. 若 $G \in SD(1)$, $G > P$且 $\exp(P) = p$, 则 $p = 2, P = E_{2^s}, P \triangleleft G, q = 2^s - 1$是一个梅森素数，并且

$$G = E_{2^s} \rtimes C_q$$

是一个 Frobenius 群，反之亦然。

证明。假设 $G \in SD(1)$, $G > P$ 且 $\exp(P) = p$。

令 $z \in Z(P)^*$。由于 $\exp(P) = p$, 可知 $|z| = p$, 并由 (A2(3)) 可知, G 中所有阶为p 的元素都共轭。因此, $z^G = z^Q$ 包含 G 中所有阶为 p 的元素，而$z^G = z^Q$ 的每个元素都属于 G 的某个 Sylow p-子群的中心。由于每个这样的 Sylow 子群的非单位元都属于 z^G，可知 $z^G = z^Q = \cup_{P^u} Z(P^u)^*$，其中并集遍及 G的所有不同 Sylow p-子群 P^u 。

若 $P \ntriangleleft G$，则 $[G: N_G(P)] = q$且 $|z^Q| = q$。由于对所有$P^u \neq P^v$，由 (A4(1)) 可知 $Z(P^u) \cap Z(P^v) = 1$，因此 $q = |z^Q| = q(|Z(P)| - 1)$，这意味着 $|Z(P)| = 2$。因此 $p = 2$；又由于 $exp(P) = p$，可知 P 是阿贝尔群。但此时 $2 = |Z(P)| = |P|$，这与$|P| = 2^s \geq 2^2$矛盾。

因此 $P \triangleleft G, P^* = z^Q$和 $q = |z^Q| = p^s - 1 = (p-1)(p^{s-1} + \cdots + 1)$，这意味着 $p = 2$和 $exp(P) = 2$。因此 P是初等阿贝尔 2-群，且 $q = 2^s - 1$ 是梅森素数。于是 $G = E_{2^s} \rtimes C_q$, 并且根据 (A2(8)), G 是一个 Frobenius 群，证毕。

反过来，我们需要证明，如果 $q = 2^s - 1$ 是梅森素数，那么存在一个 Frobenius 群 $G = E_{2^s} \rtimes C_q$, 它属于 $D(1)$。

首先注意到 $Aut(E_{2^s}) = GL(s, 2)$，并且如 Huppert 的书第 187 页 Satz 7.3 所示[8], $GL(s, 2)$ 含有一个阶为 $2^s - 1$ 的循环群 T （称为 Singer 环），它在 E_{2^s} 上正则作用。因此，如果 $q = 2^s - 1$ 是梅森素数，则存在 Frobenius 群 $G = E_{2^s} \rtimes C_q$。由于 G 中的所有对合都互为共轭，而所有其他非平凡元素的阶均为 q，其中心化子的阶为 q，因此 G是一个 $D(1)$-群，证毕。

命题 A5 的证明至此完成。□

下面证明本节的第二个主要结果。

命题 A6. 若 $G \in SD(1)$, $G > P$ 且 $\exp(P) = p^2$，则 $P = C_{p^2}$, 并且以下结论之一成立:

(1) $P \triangleleft G, p = 3, q = 2$ 且 $G = D_{18}$; (2) $Q \triangleleft G, p = 2, q \equiv 1 \pmod 4$ 且 $G = C_q \rtimes C_4$, 为一个 Frobenius 群,

反之亦然。

证明. 设 $G \in SD(1)$, $G > P$ 且 $\exp(P) = p^2$。由 (A2(4)) 可知，或者 $P = C_{p^2}$, 或者 $|Z(P)| = p$ 且 $|P| = p^s \geq p^3$。

首先，假设 $|Z(P)| = p$ 且 $|P| = p^s \geq p^3$。那么 P 是非阿贝尔群。此外, G中所有阶为 p 的元素显然都是亏格的，因此它们彼此共轭。

若 $P \triangleleft G$，则 $Z(P) \triangleleft G$，且由于 $|Z(P)| = p$，对于每个 $z \in Z(P)^*$，都有 $Z(P)^* = z^Q$。因此 $p - 1 = q$，这意味着 $q = 2$。由于 $P \triangleleft G$，由 (A2(8)) 可知 $G = P \rtimes C_2$ 是一个 Frobenius 群，因此 P 是阿贝尔群，矛盾。

因此，由 (A4(3)) 得到 $P \ntriangleleft G$和 $p = 2$。于是 $|Z(P)| = 2$，并且由 (A2(1)) 可知, P^*的元素要么是对合，要么是 4 阶元素。此外，由于 $\exp(P) = p^2$, P 含有一个

4 阶元素。如果 $x \in P$ 的阶为 4，那么 x^2 是亏损的，因此 x 是非亏格的。由此可知， G 的亏损元素的阶为 2，且 $Z(P) < \langle x \rangle$，这意味着 $Z(P) = \langle x^2 \rangle$。由于这对 P中每个 4 阶元素都成立，因此 $P/Z(P)$的指数为 2。于是 $P/Z(P)$是阿贝尔群，且 $P' = Z(P)$。由于 $|P'| = |Z(P)| = 2$，可知 P是超特殊 2-群。因此， P是由 T_1、T_2、.....、T_n构成的中心积，其中每个 T_i 都等于 D_8 或 Q_8。若 $n \geq 2$，则 $T_2 \leq C_P(T_1)$，且 T_1 中的 4 阶元素都是亏损的，这与 $G \in SD(1)$ 矛盾。因此， P 要么是 D_8，要么是 Q_8。由于 $P \not\lhd G$，且由 (A4(5)) 也有 $Q \not\lhd G$，根据 GH 定理，存在满足 $1 < R < P$和 $R \lhd G$的 $R < G$。若 $|R| = 2$或 $R = C_4$，则 $Z(G) > 1$，这与 (A2(7)) 矛盾。因此必有 $R = E_{2^2}$ 和 $P = D_8$。设 v 是 P 中不属于 R的一个对合。则 v 不与 R中的任何对合共轭，矛盾。

我们已经证明， $|P| = p^s \geq p^3$ 是不可能的。因此，$P = C_{p^2}$ 成立。

若 $Q \lhd G$，则 $P \not\lhd G$，并由 (A4(3)) 得到 $p = 2$。因此， $G = Q \rtimes C_4$。由 (A2(8))， G 是一个 Frobenius 群，这意味着 $q \equiv 1$ （模 4），且 (2) 成立。

反过来，我们需要证明：若 q 是满足 $q \equiv 1$ （模 4）的素数，则存在一个 Frobenius 群 $G = Q \rtimes C_4$，其中 Q 是一个阶为 q 的群，且 G 属于 $D(1)$。事实上，若 Q 是一个阶为 q的群，则由 $q \equiv 1$ （模 4）可知， C_4 是 $Aut(Q)$ 的一个子群，因此存在一个群 $G = Q \rtimes C_4$，使得 $C_4 \leq Aut(Q)$。由于 Q 的阶为素数，该群是一个以 Q 为核、补共轭于 C_4的 Frobenius 群。因此， G 只有一个对合共轭类。由于只有 G 中的对合是亏损元素，可知 G 属于 $D(1)$，证毕。

现在，假设 $P = C_{p^2} \lhd G$。那么，对于每个$z \in \Omega_1(P)^*$，$\Omega_1(P) \lhd G$, $|\Omega_1(P)| = p$ 且 $\Omega_1(P)^* = z^Q$。因此 $p - 1 = q$，这意味着 $p = 3$ 且 $q = 2$。由 (A2(8)) 可知，$G = C_9 \rtimes C_2$ 是一个 Frobenius 群，因此 $G = D_{18}$，命题 (1) 成立。反过来，易见$D_{18} \in SD(1)$，如所需。

最后，假设 $Q \not\lhd G$ 且 $P \not\lhd G$。由于 $P = C_{p^2}$，GH 定理推出 $C_p \lhd G$。于是 $C_p \rtimes Q$ 是一个阶为 pq 的非阿贝尔群，且 $q \mid p - 1$。因此 $q < p$，从而 $P \lhd G$，矛盾。

命题 A6 的证明现已完成。□

命题 A3、A5 和 A6 得出以下最终结果。

命题 A7. 设 G 为有限可解群，且 P 为 G 的一个 Sylow p-子群，其中 p 为素数。那么 $G \in D(1)$ 当且仅当以下情形之一成立。

(1) $G = P$、$p = 2$，且 $G = C_4$ 或 $G = Q_8$。(2) $G > P$、$p = 2$、$P = E_{2^s}$，其中 $q = 2^s - 1$ 为梅森素数，并且

$$G = E_{2^s} \rtimes C_q$$

是一个 Frobenius 群。

(3) $G > P$、$p = 3$、$P = C_{3^2}$、$q = 2$ 和 $G = D_{18}$。(4) $G > P$、$p = 2$，其中 q 是满足 $q \equiv 1 \pmod 4$ 的素数， $P = C_4$，并且

$$G = C_q \rtimes C_4$$

是一个 Frobenius 群。

证明。情形（1）由命题 A3 得出，情形（2）由命题 A5 得出，情形（3）和（4）由命题 A6 得出。□

V. Finite non-solvable $D(1)$-groups and a proof of Theorem 2

本节的首要目标是确定所有有限不可解的 $D(1)$-群。我们先给出一系列定义。

定义。

(1) 若群 G 是 CIT-群，则 G 是偶阶有限群，且 G 中每个对合的中心化子都是 2-群。

(2) 单群指非阿贝尔单群。(3) 若群 G 是 $NSD(1)$-群，或称 $G \in NSD(1)$，则 G 是有限不可解 $D(1)$-群。

不可解有限 $D(1)$-群由以下命题刻画 .

命题 A8. 若 G 是 $NSD(1)$-群，则 $G = A_5$ 或 $G = PSL(2, 7)$，反之亦然。

证明。容易验证，单群 A_5 和 $PSL(2, 7)$ 是 $D(1)$-群。因此，只需证明：若 $G \in NSD(1)$，则或者 $G = A_5$，或者 $G = PSL(2, 7)$。

因此，设 $G \in NSD(1)$。由费特-汤普森定理， G 的阶能被 4 整除。于是，由 (A2(2)) 可知 $p = 2$，由 (A2(3)) 可知 G 的所有对合在 G中共轭。此外，由 (A2(1)) 可知， G 中每个对合的中心化子都是一个 2-群。因此， G 是一个不可解的 CIT-群。根据 Suzuki 论文中的定理 5， G的极大可解正规子群 N 是一个 2-群，而 G/N 要么是一个单 CIT-群，要么是 Zassenhaus 记号中的 M_9 。正如 Suzuki 所指出的，群 M_9 包含 $PSL(2, 9)$ 作为指数为 2 的正规子群。因此，G/N 的阶为偶数。此外，根据 [11], 第 438 页上的定理 5，若 G/N 的阶为偶数，则 G 包含一个不属于 N的对合。由于 G 中的所有对合都彼此共轭，因此可知 $N = \{1\}$，且 G 要么是一个单 CIT-群，要么是 M_9。又由 (A2(1)) 可知，若 G 是一个有限 $D(1)$-群，则 G^* 的所有元素都具有素数幂阶。于是根据 [12] 中的定理 16，有限单 $D(1)$-群要么是 $PSL(2, q)$（其中 $q = 5$为 7、8、9 或 17），要么是群 $PSL(3, 4)$、 $Sz(8)$ 或 $Sz(32)$。因此， G 要么是上述某个单群，要么是 M_9。由于 M_9 包含群 $PSL(2, 9)$ 作为指数为 2 的正规子群，且 $PSL(2, 9)$ 有阶为 2 和 3 的亏损元素，所以 M_9 不是 $D(1)$-群。还容易验证，对于 $q = 8$为 9 或 17 的情形， $PSL(2, q)$，以及 $PSL(3, 4)$、 $Sz(8)$ 和 $Sz(32)$，都不是 $D(1)$-群。因此，剩下的候选只有 A_5 和 $PSL(2, 7)$，结论如所述。命题 A8 的证明至此完成。□

本节的最终目标是证明定理 2。

定理 2 的证明。由命题 A7 和 A8 可知，定理 2 中提到的所有群都属于$D(1)$。

反过来，假设 G 是一个有限的 $D(1)$-群。如果 G 是可解的，那么根据命题 A7，定理 2 的陈述 (1) 或 (2) 成立。如果 G 是不可解的，那么根据命题 A8，定理 2 的陈述 (3) 成立。因此，定理 2 的证明至此完成。□

至此，A部分结束。在进入讨论有限或无限的 $D(j)$-群的 C 部分之前，我们先介绍一些发表于论文 [6] 中的结果。这些结果本身也很有意义，并且对 C部分会很有帮助。

Part B - CP-groups satisfying some boundedness conditions

在 B 部分中，群 G 是有限的或无限的。如果 G 是周期群，那么 $\pi(G)$ 表示整除 G中某个元素的阶的所有素数的集合。

按照 A.L. Delgado 和 Y. Wu 在论文 [2], 中的说法，每个非平凡元素的阶都是素数幂的群称为 CP-群。这类群显然都是周期群。在 B 部分，我们将讨论满足下文所定义的某种有界性条件的 CP-群。

定义。如果群 G 中的每个元素 G^* 的阶都是素数幂，并且对于每个 $p \in \pi(G)$，都存在一个正整数 u_p，使得 G 的每个 p-元素的阶都是 $p^i \leq p^{u_p}$，则称群 G 为 BCP-群。

如果群 G 中的每个元素 G^* 的阶都是素数幂，并且对于每个 $p \in \pi(G)$，都存在一个正整数 v_p，使得 G 的每个有限 p-子群的阶都是 $p^j \leq p^{v_p}$，则称群 G 为 BSP-群。

BCP-群和 BSP-群显然都是周期群。注意，每个 BSP-群都是 BCP-群，而每个 BCP-群都是 CP-群。此外， BCP性质和 CP性质对子群和商群具有遗传性，因此也对截面具有遗传性。 BSP性质对子群具有遗传性。

首先，我们介绍关于 BCP-群的结果，见 [6] 。

VI. Properties of BCP-groups

众所周知，有限生成群中，给定有限指数的子群只有有限多个。特别是，每个这样的群中，给定有限指数的正规子群也只有有限多个。我们利用 Zelmanov 对受限 Burnside 问题的肯定解（见 [13] 和 [14]）证明，有限生成的 BCP-群中，任意有限指数的正规子群都只有有限多个。

定理 B1. 设 G 是一个有限生成的 BCP-群。那么， G 只有有限多个有限指数的正规子群。

这一基本结果用于证明接下来关于 BCP-群的定理。

回忆一下，若对每个非平凡元素 $g \in G$，都存在 G的一个正规子群 M（g），使得 $g \notin M$（g）且 G/M（g）有限，则称群 G 为剩余有限群。

作为定理 B1的一个推论，我们得到了以下结果。

定理 B2. 设 G 是一个有限生成的剩余有限 BCP群，则 G 是一个有限群。

众所周知，子群继承剩余有限这一性质。因此，定理 B2推出了以下结果。

定理 B3. 设 G 是一个剩余有限 BCP-群。那么 G 是一个局部有限群 .

回顾一下，群 G 称为局部分次群，如果 G 的每个非平凡有限生成子群都有一个有限指数的真正规子群。应用上述结果，我们证明了以下关于局部分次 BCP-群的定理。

定理 B4。设 G 是一个局部分次 BCP 群，则 G 是一个局部有限群。

由此可得以下推论。

定理 B5。设 G 是一个有限生成的局部分次 BCP 群，则 G 是一个有限群。

现在我们转而讨论在 [6] 中证明的 BSP 群的性质。

VII. Properties of BSP-gropups

回顾一下，若群 G 的每个元素的阶都是素数幂，且对于每个 $p \in \pi(G)$，都存在一个正整数 v_p，使得 G 的每个有限 p 子群的阶均为 $p^j \leq p^{v_p}$，则称群 G 为 BSP 群。这一性质强于 BCP 性质；后者只要求 G 的每个 p 元素的阶为 $p^i \leq p^{u_p}$。因此，我们关于 BSP 群的结果强于关于 BCP 群所得的结果。

关于 BSP 群的基本结果如下定理所述。

Theorem B6. 设 G 是一个局部有限的 BSP-群。那么 G 是一个有限群。

这个定理对 BCP-群并不成立，因为如果 p 是素数，那么一个无限的阿贝尔p-群，若其指数有限，就是一个局部有限的 BCP-群。

定理 m B6 得出定理 B4 对 BSP-群的以下加强 .

定理 em B7. 设 G 是一个局部分次的 BSP-群。那么 G 是一个有限群 .

证明。由定理 B4 应用于 BSP-群可知， G 是一个局部有限的 BSP-群。因此，由定理 B6， G 是一个有限群，证毕。□

最后，我们还证明了以下定理。

定理 B8。设 G 是一个 BSP-群，并假设 $2 \in \pi(G)$。那么 G 是一个有限群。

B 部分到此结束。现在我们转到 C 部分，这是本文的最后一部分。

Part C - Arbitrary $D(0)$-groups and $D(1)$-groups

有限群或无限群都称为任意群。C 部分讨论任意的D(0)-群和 D(1)-群。

存在无限的 $D(j)$-群。特别是，塔斯基无限 p-群的所有非平凡真子群都是素数阶 p，它们是无限的 D(0)-群。我们在 C 部分的目标是找出任意的 D(0)-群和 D(1)-群所具有的、能迫使这些群为有限群的性质。

首先，我们将讨论任意的 D(0)-群。

VIII. Arbitrary $D(0)$-groups and proofs of Theorems 3,4,5 and 6

上述提到的 Tarski 无限 p-群是无限、周期且非局部有限的 $D(0)$-群。Delizia、Jezernik、Moravec 和 Nicotera 最早在他们的论文 [3] 中研究了无限 $D(0)$-群（另见 [4] 和 [5]）。在 [3] 中，他们指出以下两个定理成立。

定理 3. 设 G 是一个局部有限 $D(0)$-群。那么 G 是一个有限群。

定理 4. 设 G 是一个局部分次 $D(0)$-群。那么 G 是一个有限群。

利用 B 部分的结果，我们将给出这些定理的不同证明，并证明以下两个定理。

定理 5. 设 G 是一个剩余有限 $D(0)$-群。那么 G 是一个有限群。

定理 6. 设 G 是一个 $D(0)$-群，并假设 $2 \in \pi(G)$。那么 G 是一个有限群。

定理 3、4、5 和 6 的证明。这些定理的证明基于以下观察。

观察。任意 $D(0)$-群都是 BSP-群（尤其是 BCP-群）。

证明。事实上，如果 G 是任意一个 $D(0)$-群，那么对于每个 $g \in G^*$，都有 $C_G(g) = \langle g \rangle$。如果 $x \in G$ 的阶是无限的，那么

$$\langle x^2 \rangle < \langle x \rangle \leq C_G(x^2),$$

矛盾。因此，每个 $D(0)$-群 G 都是周期群，由此可知，与有限情形一样，G^* 的每个元素都是素数阶。此外，如果 $p \in \pi(G)$，那么 G 的每个有限 p-子群的阶都是 p。因此，任意 $D(0)$-群都是 BSP-群（尤其是 BCP-群），证毕。□

这一观察表明，关于 BSP-群（或 BCP-群）的结果可以应用于任意 $D(0)$-群。因此，关于 BSP-群（或BCP-群）的定理 B6、B7、B3 和 B8，意味着相应的关于 $D(0)$-群的定理 3、4、5 和 6 成立。□

W现在我们进入最后一节，讨论任意的 $D(1)$-群。

IX. Arbitrary $D(1)$-groups and proofs of Theorems 7,8 and 9

在本节 中， $G \in D(1)$仍表示 G 是属于 $D(1)$的任意群 .

同样，如果 G 是一个周期群，那么 $\pi(G)$表示整除 G中某个元素的阶的所有素数所构成的集合。

回想一下，若群 G 中 G^* 的每个元素都具有素数幂阶，则称其为 CP-群。此外，若对每个 $p \in \pi(G)$，都存在一个正整数u_p，使得 G的每个 p-元素的阶均为 $p^i \leq p^{u_p}$，则称 CP-群 G为 BCP-群；若对每个

$p \in \pi(G)$，都存在一个正整数 v_p ，使得 G 的每个有限 p-子群的阶为$p^j \leq p^{v_p}$。

首先，我们证明命题 A2 的以下推广。

命题 C1。若 $G \in D(1)$，则以下结论成立。

(1) 若 G 是周期的，则 G^* 的所有元素的阶要么是素数阶，要么是素数平方阶。特别地，G 是一个 BCP群。(2) 若 G 是局部有限的，则存在素数 $p \in \pi(G)$，使得 G 的一个 Sylow p子群 P的基数为 $\geq p^2$；对于其他所有素数 $q \in \pi(G)$， G 的一个 Sylow q子群的阶为素数 q。特别地，要么 $exp(P) = p$ ，要么 $exp(P) = p^2$。此外， G 中所有阶为 p 的元素都是亏格的，因此它们在 G中共轭。在以下各项中， p 和 P 的定义如上。(3) 若 G 是局部有限的且 $p > 2$，则 G 是局部可解群。(4) 若 G 是局部有限的且不是 p群，则 $Z(G) = \{1\}$。(5) 若 G 是局部有限的 p群，则 G 是有限的。(6) 若 G 是局部有限的，则 $|\pi(G)|$ 是有限且有界的。(7) 若 G 是局部有限的，则 G 的每个阶与 p 互素的有限子群都具有有界的无平方因子阶。(8) 若 G 是局部有限的且 P 是有限的，则 G 是有限的。(9) 若 G 是无限局部有限群，则 P 是无限的。

证明。

(1) 我们可以仿照 (A2(1)) 的证明进行论证。(2) 假设 G 是局部有限的，且 p、q 是 $\pi(G)$ 中不同的素数。此外，假设群 $P \in Syl_p(G)$ 的基数为 $\geq p^2$ ，群 $Q \in Syl_q(G)$ 的基数为 $\geq q^2$。由于 G 是局部有限的，存在有限群 X 和 Y，满足 $X \leq P$、 $Y \leq Q$ 以及 $|X| \geq p^2$、 $|Y| \geq q^2$。若 $x \in X$ 是 X 的一个阶为 p 的中心元，则 x 是 G 中的一个亏损元素。同理， Y 含有一个阶为 q 的亏损元素，这与 $G \in D(1)$ 矛盾。因此，至多存在一个素数 $p \in \pi(G)$，使得 G 的一个 Sylow p-子群 P 的基数为 $\geq p^2$。若对每个 $r \in \pi(G)$， G 的一个 Sylow r-子群的阶为素数 r，则由 (1) 可知， G^* 的每个元素的阶都是素数，并且根据命题 A1 的论证，$G \in D(0)$，这与 $G \in D(1)$ 矛盾。因此，存在一个素数 $p \in \pi(G)$，使得 G 的一个 Sylow p-子群 P 的基数为 $\geq p^2$ ，而对每个其他素数 $q \in \pi(G)$， G 的一个 Sylow q- 子群的阶为素数 q，这正是所需结论。特别地，(1) 意味着 $exp(P) = p$ 或 $exp(P) = p^2$，这正是所需结论。最后，假设 $g \in G$ 的阶为 p。由于 G 是局部有限的，且 P 的基数为$\geq p^2$，存在 P 的一个阶为 $\geq p^2$ 的有限子群 X ，并且 $\langle X$ 的一个 Sylow p-子群 $g\rangle$ 的阶有限，为 $\geq p^2$。因此， $C_G(g) > \langle g\rangle$ ，且 g 是 G 的一个亏损元素。因此， G 中所有阶为 p 的元素都是亏损元素；又由于 $G \in D(1)$，可知 G 中所有阶为 p 的元素在 G 中共轭，这正是所需结论。

(3) 如果 G 是局部有限的且 $p > 2$，那么 G 的有限子群的 Sylow 2-子群的阶只能是 1 或 2。因此，根据费特-汤普森定理， G 是局部可解的。

(4) 如果 G 是局部有限的，且不是 p-群，并且若 $x \in Z(G)^*$，那么存在一个 $y \in Z(G)^*$，其阶为素数，因此 G 含有一个阶可被两个素数整除的元素，这与 (1) 矛盾。

因此 $Z(G) = \{1\}$。

(5) 不妨设 $|G| > p$。根据 (2)，要么 $exp(G) = p$，要么 $exp(G) = p^2$，并且 G 中阶为 p 的所有元素在 G中共轭。若 $p > 2$ 且 $x \in G$ 的阶为 p，则 x、x^{-1} 共轭。因此，对于某个 $g \in G$，有 $x^{-1} = x^g$ 和 $g^2 \in C_G(x)$。由于 $p > 2$，这意味着 $g \in C_G(x)$ 且 $x^{-1} = x$，矛盾。

现在设 $p = 2$。如果 $exp(G) = 2$，那么 G 是阿贝尔群，且 G 的任意两个不同的非平凡元素都共轭，这与 $|G| > 2$矛盾。如果 $exp(G) = 4$且$x \in G$ 的阶为 4，那么 x^2 是亏格的，因此 x 是非亏格的。对于任意 $g \in G$，子群 $\langle x、\ g\rangle$ 是有限 2-群，因此 $1 < Z(\langle x、\ g\rangle) \leq \langle x\rangle$，因为 x 是非亏格的。于是 $x^2 \in Z(\langle x、\ g\rangle)$，这意味着 $x^2 \in Z(G)$。由于 G 中阶为 2 的所有元素在 G中共轭，因此 G 只有一个阶为 2 的元素。由于只有一个阶为 2 的元素的有限 2-群要么是循环群，要么是广义四元数群，又由于 G 是一个满足 $exp(G) = 4$的局部有限群，因此 G 要么是 4 阶循环群，要么是 8 阶四元数群。特别地，G是有限的，证毕。

(6) 由于根据 (1)，G 是一个局部有限的 CP群，由此可根据 [2] 中的主定理得出，$|\pi(G)|$是有限且有界的，这正是所需结论。(7) 由于根据 (6)，$|\pi(G)|$ 是有限且有界的；又根据 (2)，对于所有 $q \in \pi(G) \setminus p$，G 的 Sylow q子群都是素数阶，因此，G 中阶与 p互素的有限子群具有有界的无平方因子阶，这正是所需结论。(8) 假设 P 是有限的。由于根据 (6)，$|\pi(G)|$ 是有限且有界的；又根据 (2)，G 的所有 Sylow 子群都是有限阶，因此，G 的每个有限子群的阶都有界。由于 G 是局部有限的，这意味着 G 是有限的，这正是所需结论。(9) 由 (8) 得出。□

备注。从现在起，若 G 是一个局部有限的 $D(1)$ 群，则 p 和 P 将按 (C1(2)) 中的定义。

我们还需要以下命题，它讨论的是无限局部有限 $D(1)$-群，这类群不是 p-群。

命题 C2. 设 $G \in D(1)$ 是一个无限局部有限群，且不是 p-群。则以下陈述成立。

(1) G 的每个非平凡正规子群都是无限的。(2) G^* 的每个元素都具有素数阶。

证明。

(1) 反设 N 是 G的一个有限非平凡正规子群。则 $M = C_G(N)$ 也是 G 的正规子群，且 G/M 是有限群。因此 M 是无限的。

设存在两个满足 $\langle a\rangle \neq \langle b\rangle$ 的素数阶元素 a、$b \in N$。对每个 $m \in M \setminus N$，我们有 $m \in C_G(a)$ 和 $m \in C_G(b)$，因此 a 和 b 是 G 的亏损元素。由于 m 不与 a 共轭，也不与 b 共轭，由此可知 m 是 G 的非亏格元素。因此 $a \in C_G(m) = \langle m\rangle$，且 $b \in C_G(m) = \langle m\rangle$。由 (C1(1)) 可知，$m$ 的阶是素数幂，因此 $\langle a\rangle = \langle b\rangle$，矛盾。

因此，N 的阶是素数幂，设为 q^d，且它只含有一个阶为q的子群。因此，N 不是循环群就是广义四元数群。无论哪种情况，都存在一个正规

子群 S，它是 G 的阶为 q的子群。记 $S=\langle s\rangle$。若 $q=2$，则 $s\in Z(G)$，这与(C1(4))矛盾。因此，假设 $q>2$。那么， $C_G(S)$是 G 的一个正规子群，其指数整除$q-1$。因此， $C_G(S)$是一个无限群，并且根据(C1(1))， $C_G(S)$是 G的一个 q-子群。若$C_G(S)$不是局部循环的，则存在一个元素 $u\in C_G(S)$，其阶为 q，且s、 u 是 G中不共轭的亏格元素，这又导致矛盾。因此， $C_G(S)$是一个指数为 $\leq q^2$的局部循环 q-群，故它是有限的，最终得到矛盾。(1)的证明至此完成。

(2) 反设， $x\in G$ 满足 $|x|=p^2$，其中 p是某个素数。那么由 (C1(2)) 和 (C1(9))，存在一个无限的 Sylow p-子群 P，它包含于 G 中，且包含 x，并且x^p 是 G的一个亏损元素。因此， x 是 G 的一个非亏格元素，并且对于 P 的每个有限 p-子群 V，若满足 $x\in V$和 $|V|\geq p^3$，则有 $1<Z(V)<\langle x\rangle$，从而 $Z(V)=\langle x^p\rangle$。由于这样的 V 可以包含任意元素 $y\in P$，可知 $Z(P)=\langle x^p\rangle$。由于这对 P 中阶为 p^2的任意元素都成立，因此 $P/\langle x^p\rangle$ 的指数为 p。

若 $p=2$，则 $P/\langle x^2\rangle$是阿贝尔群，且 $P'\leq\langle x^2\rangle$。此时， $\langle x\rangle$是 P的正规子群，这意味着 $|P/C_P(\langle x\rangle)|\leq 2$。但 x在 G中是非亏格的，因此 $C_P(\langle x\rangle)\leq\langle x\rangle$，这意味着 P是有限的，矛盾。

因此，假设 $p>2$。若 $x\in G$ 的阶为 p，则由 (C1(2)) 可知 x、x^{-1} 共轭。因此，对于某个 $g\in G$，有 $x^g=x^{-1}\neq x$，且 $g^2\in C_G(x)$。由于 $g\notin C_G(x)$，可得 $2\mid|g|$，再由 (C1(2)) 得 $|g|=2$。于是 $2\in\pi(G)$。由 (C1(1)) 可知 G 是一个局部有限的 BCP-群，而由 (C1(3)) 可知它是局部可解的，因此由 GH 定理可得 $\pi(G)=\{2,p\}$。由于 $p>2$， G 的一个 Sylow 2-子群的阶为 2。令 $g\in G$，并令 H 为 G 的一个有限生成子群，使得 x、$g\in H$ 且 $|H|=2p^s$，其中 $s\geq 3$。那么， H的一个 Sylow p-子群 H_p是 H 的正规子群，且 $|H_p|\geq p^3$。显然 $x\in H_p$，并且如上所示， $\langle x^p\rangle=Z(H_p)$，因此 $\langle x^p\rangle$ 是 H的正规子群。由于 g 是 G的任意元素，可得 $\langle x^p\rangle$ 是 G的正规子群，这与 (1) 矛盾。

命题的证明现在完成了。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 7. 若 $G\in D(1)$ 是局部有限群，则 G 是有限的。

证明. 若 G 是一个 p-群，则由 (C1(5)) 可知 G 是有限的。因此，假设 G 不是一个 p-群，并且假设 G 是无限的。我们的目标是导出矛盾。

根据 (C2(2))，G^* 的每个元素都具有素数阶。根据 (C1(2))， P 的基数为 $\geq p^2$，指数为 p；而对于每个素数 $q\in\pi$，$(G)\setminus p$ 是 G 的一个 Sylow q-子群，其阶为 q。此外，以下结论成立：根据 (C1(6))， $|\pi(G)|$ 是有限且有界的；根据 (C1(9))， P 是无限的；根据 (C1(2))， G 中所有阶为 p 的元素都彼此共轭。

由 [2], 的定理 5 可知，若 H 是一个局部有限单群，且所有非平凡元素的阶都是素数，则 H 有限。因此 G 不是单群，并且存在一个非平凡真正规子群 N，它是 G 的子群。若 $p\notin\pi(N)$，则根据 (C1(7))， N 的每个有限子群的阶都有统一上界；又由于 N 局部有限，它是有限的，这与 (C2(1)) 矛盾。因此 $p\in\pi(N)$，并且根据 (C1(2))， N 包含 G 中所有阶为 p 的元素。因此 $P\leq N$，且 $p\notin\pi(G/N)$。此外，由于 G/N 是局部有限的，且 $|\pi(G/N)|$ 有限且有界，并且其所有 Sylow 子群的阶都是素数，因此 G/N 的有限子群的阶有统一上界，进而 G/N 有限。对于任意 $a\in N^*$，我们有 $C_G(a)\leq N$；否则，若 $b\in C_G(a)\setminus N$，则 a、b 是不共轭的

G 中阶为素数的可交换元素，而且它们中至多只有一个是亏格的，因此 $\langle a\rangle = \langle b\rangle$ 和 $b \in N$，矛盾。因此 G 是一个以 N 为核的局部有限弗罗贝尼乌斯群，这意味着 N 是幂零的（见 [9] 中的定理 1.J.2）。因此 $Z(N) \neq \{1\}$，并且若 $x \neq 1$ 属于 $Z(N)$，则 $x \in C_G(P)$。这意味着 $|x| = p$，且 $N \leq C_G(x)$。由于 G/N 有限， x 在 G 中的共轭类 x^G 也是有限的。但 P^* 包含于 x^G 中，因此 P 有限，最终导出矛盾。定理 7 的证明至此完成。□

定理 7 得出以下两个推论。

T定理 8. 若 G 是一个周期的局部分次 $D(1)$-群，则 G 是有限的 .

证明。根据 (C1(1))，周期的 $D(1)$-群是一个 BCP-群。因此， G 是一个局部分次的 BCP-群，所以根据定理 B，4 G 是一个局部有限的 $D(1)$-群。由此，根据定理 7， G是有限的，证毕。□

定理 9. 若 G是一个剩余有限的 $D(1)$-群，则 G 是有限的。

证明。首先证明 G是一个周期群。反设 $x \in G$ 具有无限阶。由于 G 是剩余有限的，存在 G 的一个有限指数正规子群 N，使得 $n > 1$ 且 $x \notin N$。此外，存在 G 的一个有限指数正规子群 M，使得 $m > 1$ 且 $x^n \notin M$。于是 $x^m \in M$，并且 x^m 在 G 中不与 x^n 共轭。由于 $\langle x^n\rangle < \langle x\rangle \leq C_G(x^n)$ 且 $\langle x^m\rangle < \langle x\rangle \leq C_G(x^m)$，可知 x^n 和 x^m 是 G中不共轭的亏格元素，这与 $G \in D(1)$ 矛盾。因此， G 是一个周期的 $D(1)$-群。

由 (C1(1))，一个周期 $D(1)$-群是一个 BCP-群。因此， G 是一个剩余有限 BCP-群，故由定理 B，3 G 是一个局部有限群。于是由定理 7 可得， G 是有限的，证毕。□

References

1. Kai Nah Cheng、M. Deaconescu、Mong Lung Lang、Wujie Shi, *Corrigendum and Addendum to "Classificationof finite groups with all elements of prime order"*，美国数学会会刊 117 (4) (1993)，1205-1207。2. A.L. Delgado 和 Yu-F. Wu, *On locally finite groups in which every element has prime power order*，伊利诺伊数学杂志 46 (3) (2002)，885-891。3. C. Delizia、U. Jezernik、P. Moravec 和 C. Nicotera， *Groups in which every non-cyclic subgroup contains its centralizer*，代数及其应用杂志 13 (5) (2014)，1350154，共 11 页。4. C. Delizia、U. Jezernik、P. Moravec 和 C. Nicotera， *Groups in which every non-abelian subgroup is self-centralizing*，代数杂志 462 (2016)，23-36。5. C. Delizia、U. Jezernik、P. Moravec 和 C. Nicotera， *Locally finite groups in which every non-cyclic subgroup is self-centralizing*，纯粹与应用代数杂志 221 (2017)，401-410。6. M. Herzog、P. Longobardi 和 M. Maj, *Groups in which every element has a prime power order and whichsatisfy some boundedness condition*，代数及其应用杂志，即将出版，arXiv:2205.07248v1。7. G. Higman， *Finite groups in which every element has prime power order*，伦敦数学会杂志 32 (1957)，335-342。8. B. Huppert， *Endliche Gruppen I*，施普林格出版社，柏林，1967。9. O.H. Kegel 和 B.A.F. Wehrfritz， *Locally finite groups*，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1973。10. M. Suzuki, *Investigations on finite groups*，美国国家科学院院刊 46 (1960)，1611-1614。11. M. Suzuki, *Finite groups with nilpotent centralizers*，美国数学会汇刊 99 (1961)，425-470。12. M. Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*，数学年刊 75 (1) (1962)，105-145。

13. E. Zelmanov, *Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, 《苏联数学杂志》 36 (1991), 41-60. 14. E. Zelmanov, *The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups*, 《苏联数学文集》 72 (1992), 543- 565.