arXiv:2303.11038v1 [math.MG] 20 Mar 2023

关于 L_p 扭转 Minkowski 问题解的连续性

JINRONG HU、QIONGFANG MAO 和 SINAN WANG

摘要。本文推导了 $p > 1$时 L_p 扭转 Minkowski 问题解的连续性。研究表明，L_p 扭转测度的弱收敛意味着相应凸体序列在豪斯多夫度量下收敛。此外，还得到了 L_p 扭转 Minkowski 问题的解关于 p 的连续性。

1. 引言

由表面积测度刻画的经典 Minkowski 问题是凸体 Brunn-Minkowski 理论中的基础问题。该问题由 Minkowski 本人于 [25, 26] 提出并着手研究，随后在一系列论文中得到了广泛拓展 [1, 2, 4, 12]。作为经典 Minkowski 问题在 L_p Brunn-Minkowski 理论中的类比，L_pMinkowski 问题最早由 Lutwak 提出 [23]。此后，L_p Minkowski 问题成为众多有价值研究成果的发源地（例如，参见 [3, 5, 6, 14, 24, 29–31]）。此外，随着 L_p Minkowski 问题的发展，针对其他博雷尔测度的 L_p Minkowski 问题也相继出现（例如，p-容量、p-扭转刚度）。更多详情请参见 [10, 17, 20, 21, 28, 32] 及其中的参考文献。

本文旨在研究 $p > 1$ 情形下扭转刚度的 L_p Minkowski 问题的连续性。首先回顾一下，n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 Ω 的扭转刚度 $T(\Omega)$ 定义为

$$\frac{1}{T(\Omega)} = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\int_\Omega |u| dx)^2} : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \int_\Omega |u| dx > 0\right\},$$

其中，$W_0^{1,2}(\Omega)$ 表示在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中具有紧支撑的函数所构成的 Sobolev 空间，而 $W^{1,2}(\Omega)$ 表示具有一阶弱导数且弱导数属于 $L^2(\Omega)$ 的函数所构成的 Sobolev 空间。

显然，借助椭圆边值问题的解，可以写出扭转泛函的显式表达式（例如，参见 [8]）。更准确地说，设 u

2010 年数学主题分类：52A20，52A40。关键词与短语：扭转刚度，L_p-Minkowski 问题，连续性。

为下列问题的唯一解

$$\begin{cases} \Delta u = -2, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

于是得到

$$T(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

当边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2, 类时，利用椭圆方程的标准正则性结果（例如，见 Gilbarg-Trudinger [16]），可知 ∇u 可以在 $\partial\Omega$ 上几乎处处适当地定义$\mathcal{H}^{n-1}$，并且 $T(\Omega)$ 可表示为（例如，见 [8] 的命题18），

$$\begin{aligned} T(\Omega) &= \frac{1}{n+2} \int_{\partial\Omega} h(\Omega, g_{\Omega}(x)) |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{n+2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega, \theta) |\nabla u(g_{\Omega}^{-1}(\theta)|^2 dS(\Omega, \theta). \end{aligned} \tag{1.2}$$

由 (1.2) 可知，扭转测度 $\mu^{tor}(\Omega, \eta)$ 定义在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，其定义为

$$\mu^{tor}(\Omega, \eta) = \int_{g_{\Omega}^{-1}(\eta)} |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\eta} |\nabla u(g_{\Omega}^{-1}(\theta)|^2 dS(\Omega, \theta) \tag{1.3}$$

对于每个博雷尔子集 η of $\mathbb{S}^{n-1}$。这里，$h(\Omega, \cdot)$ 是 Ω 的支撑函数，$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$、$g_{\Omega}$ 和 $S(\Omega, \cdot)$ 分别是 $\partial\Omega$ 的 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度、高斯映射和 Ω 的表面积测度。

应当指出，根据 [9], 的命题2.5可知，∇u 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处具有有限的非切向极限 $\mathcal{H}^{n-1}$。通过将 Dahlberg [11] 建立的调和函数估计推广到不要求光滑性的情形，可得 $|\nabla u| \in L^2(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$，这意味着式（1.3）在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$上几乎处处都有定义，不局限于光滑情形，并且可视为一个博雷尔测度。此外，$\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体也满足式（1.2），这由 [9] 的定理3.1证明；借助扭转测度的弱收敛，$T(\Omega)$ 的 Hadamard 变分公式为:

$$\frac{d}{dt} T(\Omega + t\Omega_1)\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_1, \theta) d\mu^{tor}(\Omega, \theta) \tag{1.4}$$

对于 $\mathbb{R}^n$中的任意两个凸体 Ω、Ω_1。类似于体积的情形（例如参见 [27]），Colesanti-Fimiani [9]通过在式（1.4）的积分右侧乘以 $\frac{1}{n+2}$，定义了 Ω 和 Ω_1的所谓第一混合扭转刚度 $T_1(\Omega, \Omega_1)$,

$$T(\Omega, \Omega_1) = \frac{1}{n+2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_1, \theta) d\mu^{tor}(\Omega, \theta),$$

这是对 (1.2) 的推广。

Colesanti-Fimiani [9] 首先提出了扭转刚度的 Minkowski 问题，其表述如下：给定 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度 μ，μ 要满足哪些必要且充分的条件，才能使 μ 成为 $\mathbb{R}^n$ 中某个凸体 Ω 的扭转测度 $\mu^{tor}(\Omega, \cdot)$? Colesanti-Fimiani [9]

利用变分方法证明了解的存在性和唯一性（相差平移），该方法最初由 Aleksandrov [1, 2] 提出，后来由 Jeri- son [20], Colesanti-Nystr¨ om-Salani-Xiao-Yang-Zhang [10]采用。

类似于 L_p 表面积测度（例如，参见 [27]），Chen-Dai [7] 定义了 L_p 扭转测度 $\mu_p^{tor}(\Omega, \cdot)$，其定义如下

$$\mu_p^{tor}(\Omega, \eta) = \int_\eta h(\Omega, \theta)^{1-p} d\mu^{tor}(\Omega, \theta) \tag{1.5}$$

对 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的任意博雷尔子集 η，并采用了与 Lutwak [23] 和 Colesanti-Fimiani [9] 类似的方法，得到了关于 L_p 和的扭转刚度的如下 L_p 变分公式（例如，参见 [24]），

$$\frac{d}{dt} T(\Omega +_p t\Omega_1)\Big|_{t=0} = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_1, \theta)^p d\mu_p^{tor}(\Omega, \theta)$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个凸体 Ω、Ω_1，其中 L_p 数乘 $t \cdot_p \Omega_1$ 表示集合 $t^{1/p}\Omega_1$，其中 $t > 0$。这里，我们省略点号下标中的 p。

与此同时，Chen-Dai [7] 提出了扭转刚度的 L_p Minkowski 问题：对于 $p \in \mathbb{R}$，给定 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的一个有限博雷尔测度 μ，关于 μ 的必要且充分条件是什么，才能使 μ 成为 $\mathbb{R}^n$ 中某个凸体 Ω 的 L_p 扭转测度 $\mu_p^{tor}(\Omega, \cdot)$? 在 [7], 中，作者证明了当 $p > 1$ 时解的存在性和唯一性。Hu-Liu [17], 研究了 $0 < p < 1$ 情形下解的存在性，但由于在 $p < 1$ 范围内缺乏扭转刚度的 L_p Brunn-Minkowski 不等式，其唯一性尚未得到证明。

值得注意的是，关于 p-拉普拉斯方程（$p \neq 2$）的 p-扭转测度，闵可夫斯基型问题的研究结果寥寥无几。造成这一现象的主要原因或许是，尚无关于 p-扭转测度的弱收敛结果。Huang-Song-Xu [18] 在光滑范畴中建立了 p-扭转刚度的 Hadamard 变分公式，进而为处理相关的 p-扭转测度闵可夫斯基型问题构建了框架。

我们致力于推导 $p > 1$时扭转刚度的 L_p Minkowski 问题之解的连续性。主要结果如下。

定理 1.1. 设 μ_i 和 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球。假设 Ω_i 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体，并且当 $1 < p < \infty$ 以及 $p, n + 2$时，分别满足 $d\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot) = h(\Omega_i, \cdot)^{p-1} d\mu_i$ 和 $d\mu^{tor}(\Omega, \cdot) = h(\Omega, \cdot)^{p-1} d\mu$。若 $\mu_i \to \mu$ 弱收敛，则当 $i \to \infty$ 时，$\Omega_i \to \Omega$。

定理 1.2. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球。假设 Ω_i 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体，并且分别满足 $d\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot) = h(\Omega_i, \cdot)^{p_i - 1} d\mu$ 和 $d\mu^{tor}(\Omega, \cdot) = h(\Omega, \cdot)^{p-1} d\mu$，其中 $1 < p < \infty$ 且 $p, n + 2$。若 $p_i \to p$，则当 $i \to \infty$ 时，$\Omega_i \to \Omega$。

推论 1.3. 设 μ_i 和 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上不集中于任何闭半球的有限博雷尔测度。假设 Ω_i 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点于其内部的凸体，并且分别满足 $d\mu_p^{tor}(\Omega_i,\cdot) = d\mu_i$ 和 $d\mu_p^{tor}(\Omega,\cdot) = d\mu$，其中 $1 < p < \infty$ 且 $p, n + 2$。若 $\mu_i \to \mu$ 弱收敛，则当 $i \to \infty$ 时，$\Omega_i \to \Omega$。

本文的结构安排如下。第 2 节汇总了关于凸体和扭转刚度的一些事实。第 3 节研究了与扭转刚度的 L_p Minkowski 问题相关的两个极值问题。第 4 节给出本文主要定理的证明。

2. 背景

本节汇总一些关于凸体和扭转刚度的基本事实，供下文使用。

2.1. 凸体基础知识。关于凸体的标准且优质的参考资料，请参阅 Gardner [15] 和 Schneider [27]。

用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间，用 o 表示 $\mathbb{R}^n$的原点。对于 $x、y \in \mathbb{R}^n$，$x \cdot y$ 表示标准内积。对于 $x \in \mathbb{R}^n$，用 $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ 表示欧几里得范数。以原点为中心的球记为 B，其定义为 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$，其边界记为 $\mathbb{S}^{n-1}$。$\mathbb{R}^n$ 中的非空内部紧凸集称为凸体。

若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集，对于 $x \in \mathbb{R}^n$，Ω 的支撑函数定义为

$$h(\Omega, x) = \max\{x \cdot y : y \in \Omega\}.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集 Ω 和 L，以及任意实数 $a_1, a_2 \ge 0$，定义 $a_1\Omega + a_2L$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 Minkowski 组合为

$$a_1\Omega + a_2L = \{a_1x + a_2y : x \in \Omega,\ y \in L\},$$

其支撑函数为

$$h(a_1\Omega + a_2L, \cdot) = a_1h(\Omega, \cdot) + a_2h(L, \cdot).$$

δ 中两个紧凸集 Ω 和 L 之间的豪斯多夫度量 $\delta(\Omega, L)$ 表示为

$$\delta(\Omega, L) = \max\{|h(\Omega, \theta) - h(L, \theta)| : \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

设 Ω_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中一列紧凸集。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集 Ω_0，若$\delta(\Omega_j, \Omega_0) \to 0$，则 Ω_j 收敛到 Ω_0,，或等价地，$\sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}} |h(\Omega_j, \theta) - h(\Omega_0, \theta)| \to 0$，当 $j \to \infty$ 时。

设 $C(\mathbb{S}^{n-1})$ 是定义在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的连续函数集合，而 $C^+(\mathbb{S}^{n-1})$ 是 $C(\mathbb{S}^{n-1})$ 中严格正函数的集合。对于 $f_1, f_2 \in C^+(\mathbb{S}^{n-1})$，$1 \le p \le \infty$，$f_1$ 与 f_2 的 L_p 和定义为

$$(f_1 +_p t \cdot f_2) = (f_1^p + t f_2^p)^{\frac{1}{p}},$$

对于 $t > 0$。为简便起见，这里省略点号下标 p。

对于 $\mathbb{R}^n$ and $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 中的任意凸体 Ω，方向为 θ 的支撑超平面 $H(\Omega, \theta)$ 定义为

$$H(\Omega, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = h(\Omega, \theta)\},$$

方向为 θ 的半空间 $H^-(\Omega, \theta)$ 定义为

$$H^-(\Omega, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta \le h(\Omega, \theta)\},$$

方向为 θ 的支撑集 $F(\Omega, \theta)$ 定义为

$$F(\Omega, \theta) = \Omega \cap H(\Omega, \theta).$$

对于非负 $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，定义关于 f 的 Aleksandrov 体（亦称 Wulff 形）为

$$[f] = \bigcap_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \xi \le f(\xi)\}.$$

显然，$[f]$ 是一个包含原点的紧凸集，并且我们可以看到 t

$$h_{[f]} \le f.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集 Ω，Ω 的直径记为

$$diam(\Omega) = \max\{|x - y| : x, y \in \Omega\}.$$

用 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中多胞体的集合，假设单位向量 $u_1, \ldots, u_N (N \ge n+1)$ 不集中于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的任何闭半球上，用 $\mathcal{P}(u_1, \ldots, u_N)$ 表示满足 $P \in \mathcal{P}(u_1, \ldots, u_N)$ 的集合

$$P = \bigcap_{k=1}^{N} H^-(P, u_k).$$

显然，对于 $P \in \mathcal{P}(u_1, \ldots, u_N)$，$P$ 至多有 N 个面，且 P 的外法向量是 $\{u_1, \ldots, u_N\}$ 的子集。

2.2. 扭转刚度基础。我们列出扭转刚度和扭转测度的一些性质（见 [8,9]）。设 $\{\Omega_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体序列。一方面，关于扭转刚度，有以下结果。

引理 2.1. (i) 它是 n + 2 阶正齐次的，即，

$$T(m\Omega_0) = m^{n+2}T(\Omega_0),\ m > 0.$$

(ii) 它具有平移不变性。也就是说

$$T(\Omega_0 + x_0) = T(\Omega_0),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) 如果当 i $\to \infty$ （即 $\delta(\Omega_i, \Omega_0) \to 0$ 当 i $\to \infty$）时，Ω_i 在豪斯多夫度量下收敛到 Ω_0，那么

$$\lim_{i\to\infty} T(\Omega_i) = T(\Omega_0).$$

(iv) 它是单调递增的，即若 $\Omega_1 \subset \Omega_2$，则 T $(\Omega_1) \leq$T (Ω_2)。

另一方面，关于扭转测度，还有以下结果。

引理 2.2. (a) 它是 n + 1 阶正齐次的，即

$$\mu^{tor}(m\Omega_0, \cdot) = m^{n+1}\mu^{tor}(\Omega_0, \cdot),\ m > 0.$$

(b) 它具有平移不变性。也就是说

$$\mu^{tor}(\Omega_0 + x_0) = \mu^{tor}(\Omega_0),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(c) 它关于表面积测度绝对连续。

(d) 对任意固定的 i $\in \{0, 1, \ldots\}$，若 Ω_i 在豪斯多夫度量下收敛到 Ω_0，当 i $\to \infty$ 趋于无穷时（即$\delta(\Omega_i, \Omega_0) \to 0$ 在 i $\to \infty$ 趋于无穷时），则 $\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot)$ 序列在测度意义下弱收敛到 $\mu^{tor}(\Omega_0, \cdot)$，当 i $\to \infty$ 趋于无穷时。

此外，为方便读者，我们列出以下由 Colesanti-Fimiani [9], 证明的引理，它们在本文中起着至关重要的作用。

引理 2.3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集，且 u 是 Ω 中 (1.1) 的解，则

$$|\nabla u(x)| \leq diam(\Omega),\ \forall x \in \Omega.$$

引理 2.4. 设 Ω、Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且 $h(\Omega_1, \cdot)$ 是 Ω_1 的支撑函数。对于充分小的 |t |> 0，有

$$\frac{d}{dt}T(\Omega + t\Omega_1)\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_1, \theta)d\mu^{tor}(\Omega, \theta).$$

我们以回顾重要的 Brunn-Minkowski 型不等式和扭转刚度的闵可夫斯基不等式（见 [8]）结束本节。

引理 2.5. 设 Ω_0, Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 中的凸体，则扭转刚度的 Brunn-Minkowski 不等式为

$$T(\lambda\Omega_0 + (1-\lambda)\Omega_1)^{1/(n+2)} \geq (1-\lambda)T(\Omega_0)^{1/(n+2)} + \lambda T(\Omega_1)^{1/(n+2)},$$

当且仅当 Ω_0 和 Ω_1 位似时，等号成立。

引理 2.6. 设 Ω_0、Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，则扭转刚度的 Minkowski 不等式为

$$T(\Omega_0, \Omega_1)^{n+2} \geq T(\Omega_0)^{n+1} T(\Omega_1),$$

当且仅当 Ω_0 和 Ω_1 位似时，等号成立。

3. p-扭转刚度的两个相关极值问题

本节受 [32], 启发，研究与扭转刚度的 L_p Minkowski 问题存在性相关的两个极值问题。

设 $1 < p < \infty$。假设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球上。对于包含原点的紧凸集 Q，定义泛函

$$F_p(Q) = \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(Q,\cdot)^p d\mu.$$

下面给出两个问题。

问题 1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含原点的凸体 Q 中，求一个凸体来处理以下约束极小化问题

$$\inf_Q F_p(Q) \qquad subject\ to \quad T(Q) \geq 1.$$

问题 2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含原点的凸体 Q 中，求一个凸体来处理以下约束极大化问题

$$\sup_Q T(Q) \qquad subject\ to \quad F_p(Q) \leq 1.$$

这里给出一些备注。设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个包含原点的凸体。由 [32,引理 2.3], 可知

$$0 < F_p(Q) < \infty. \tag{3.1}$$

由 F_p 和 T 的齐次性可知，$F_p(mQ) = m^p F_p(Q)$，且 $T(mQ) = m^{n+2}T(Q)$，其中 $m > 0$。因此，只需证明：若 Q 是问题 1 的解，则 $T(Q) = 1$。类似地，若 Q 是问题 2 的解，则 $F_p(Q) = 1$。

下面的引理展示了问题 1 和问题 2 之间的关系。

引理3.1. 对于问题 1 和问题 2，以下断言成立。

¯(1) 若凸体 Ω 是问题 1 的解，则

$$\Omega := F_p(\bar{\Omega})^{-1/p}\bar{\Omega}$$

满足问题 2。

(2) 若凸体 Ω 满足问题 2，则

$$\bar{\Omega} := T(\Omega)^{-1/(n+2)}\Omega$$

满足问题 1。

¯证明。对于 (1)，假设 Ω 满足问题 1。设 Q 是一个包含原点的凸体，使得 $F_p(Q) \le 1$。借助 T 的正齐次性，$T(\bar{\Omega}) = 1$、$T(T(Q)^{-1/(n+2)}Q) = 1$、F_p 的正齐次性以及 $F_p(Q) \le 1$，可得

$$\begin{aligned} T(\Omega)^{p/(n+2)} &= F_p(\bar{\Omega})^{-1} \\ &\ge F_p(T(Q)^{-1/(n+2)}Q)^{-1} \\ &= F_p(Q)^{-1}T(Q)^{p/(n+2)} \\ &\ge T(Q)^{p/(n+2)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此 K 满足问题 2。

对于（2）。假设 Ω 是问题 2 的解。设 Q 为包含原点的凸体，且 $T(Q) \ge 1$。由 F_p 的正齐次性，$F_p(\Omega) = 1$，$F_p(F_p(Q)^{-1/p}Q) = 1$，以及 T 的正齐次性和 $T(Q) \ge 1$，我们得到

$$\begin{aligned} F_p(\bar{\Omega}) &= T(\Omega)^{-p/(n+2)} \\ &\le T(F_p(Q)^{-1/p}Q)^{-p/(n+2)} \\ &= F_p(Q)T(Q)^{-p/(n+2)} \\ &\le F_P(Q). \end{aligned} \tag{3.3}$$

¯因此，Ω 是问题 1 的解。 □

下面是扭转刚度的归一化 L_p Minkowski 问题。

问题 3。在 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含原点的凸体中，求一个凸体 Ω，使得

$$\frac{d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)}{T(\Omega)} = h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu.$$

下面的引理揭示了问题 2 与问题 3 之间的关系。

引理3.2. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球。令 $1 < p < \infty$，且 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体。则以下断言成立。

(1) 若 Ω 的内部包含原点，且 Ω 是关于 (μ, p) 的问题 2 的解，则它也是关于 (μ, p) 的问题 3 的解。(2) 若 Ω 是关于 (μ, p) 的问题 3 的解，则它也是关于 (μ, p) 的问题 2 的解。

证明。设 Ω 为一个原点位于其内部的凸体。假设 Ω 是问题 2 的解。我们将证明它也满足问题 3。现在，取任意 f $\in C(\mathbb{S}^{n-1})$，令 t $\in (-t_0, t_0)$，

$$\Omega_t = [h(\Omega,\cdot) + tf] \quad and \quad F_p(h(\Omega,\cdot) + tf) = \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (h(\Omega,\cdot) + tf)^p d\mu,$$

其中选择 $t_0 > 0$，使得 $h(\Omega, \cdot) + t f > 0$ 且 $F_p(h(\Omega, \cdot) + t f) = 1$。由于 Ω 是问题 2 的解，这意味着存在一个常数 b′，使得

$$\frac{dT(\Omega_t)}{dt}\Big|_{t=0} = b' \frac{dF_p(h(\Omega,\cdot) + tf)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Then

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\theta) d\mu^{tor}(\Omega,\theta) = b' \frac{p}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\theta) h(\Omega,\theta)^{p-1} d\mu.$$

由于 f 是任意的，我们可以据此得出 $\mu^{tor}(\Omega, \cdot) = b'_{p\,n+2} h(\Omega, \cdot)^{p-1}\mu$。由 $F_p(\Omega) = 1$，可得 $b' = {}_{n+2\,p}T(\Omega)$。因此 $T(\Omega)^{-1} d\mu^{tor}(\Omega, \cdot) = h(\Omega, \cdot)^{p-1} d\mu$。所以，Ω 是问题 3 的解。

为证明 (2)，假设 Ω 是问题 3 的解。设 Q 为包含原点的凸体，满足 $1 = {}_{n+2}^{1} R\, \mathbb{S}^{n-1} h(Q, \cdot)^p d\mu$。我们需要证明 $T(\Omega) \geq T(Q)$。

由于 $T(\Omega) h(\Omega, \cdot)^{p-1} d\mu = d\mu^{tor}(\Omega, \cdot)$，因此

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{n+2}\int_{\{h(Q,\cdot)>0\}} h(Q,\cdot)^p d\mu + \frac{1}{n+2}\int_{\{h(Q,\cdot)=0\}} h(Q,\cdot)^p d\mu \\ &\geq \frac{1}{n+2}\int_{\{h(Q,\cdot)>0\}} h(Q,\cdot)^p d\mu \\ &= \frac{1}{n+2}\int_{\{h(Q,\cdot)>0\}} \left(\frac{h(Q,\cdot)}{h(\Omega,\cdot)}\right)^p \frac{h(\Omega,\cdot)}{T(\Omega)} d\mu^{tor}(\Omega,\cdot). \end{aligned} \tag{3.4}$$

由于测度 ${}^{1}_{(n+2)T(\Omega)} h(\Omega, \cdot) d\mu^{tor}(\Omega, \cdot)$ 是定义在 $\{h(\Omega, \cdot) \neq 0\}$ 上的博雷尔概率测度。因此，根据詹森不等式、混合扭转刚度的定义以及扭转刚度的 Minkowski

不等式，我们有

$$\begin{aligned}
1 &\geq \left(\frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}\left(\frac{h(Q,\cdot)}{h(\Omega,\cdot)}\right)^{p}h(\Omega,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}\frac{h(Q,\cdot)}{h(\Omega,\cdot)}h(\Omega,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)\\
&= \frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}h(Q,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)\\
&= \frac{T(\Omega,Q)}{T(\Omega)}-\frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)\\
&\geq \left(\frac{T(Q)}{T(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于 $T(\Omega)h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu = d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)$，可知

$$\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,\cdot)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)=T(\Omega)\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,\cdot)h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu=0.$$

So,

$$1\geq\left(\frac{T(Q)}{T(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

我们得出 $T(\Omega)\geq T(Q)$。 □

下面的引理表明问题 2 的解是唯一的。等价地，它揭示了问题 1 的解的唯一性。

引理 3.3. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中在任何闭半球上。设 $1<p<\infty$。若 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点且求解问题 2（μ, p）的凸体，则 $\Omega_1=\Omega_2$。

证明。考虑凸体 $2^{-1}(\Omega_1+\Omega_2)$。它也包含原点。由于

$$F_p\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)\leq\frac{F_p(\Omega_1)+F_p(\Omega_2)}{2}\leq 1,$$

那么，凸体 $2^{-1}(\Omega_1+\Omega_2)$ 仍满足问题 2 中的约束条件。这一事实说明

$$T\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)\leq T(\Omega_1)=T(\Omega_2).$$

因此，

$$T\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)^{1/(n+2)}\leq\frac{1}{2}T(\Omega_1)^{1/(n+2)}+\frac{1}{2}T(\Omega_2)^{1/(n+2)}.\tag{3.6}$$

另一方面，(3.6) 的逆向不等式成立，因此 (3.6) 中等号成立。由引理 2.5，得到 $\Omega_1=\alpha\Omega_2+x$，其中某个 $\alpha>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$。由 $T(\Omega_1)=T(\Omega_2)$，结合 T 的齐次性和平移不变性，可得 $\alpha=1$。于是 $\Omega_1=\Omega_2+x$。接下来，我们断言 $x=o$。

由于

$$T\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)=T(\Omega_1)=T(\Omega_2),$$

这意味着 $2^{-1}(\Omega_1+\Omega_2)$ 也是问题 2 的一个解。因此 $F_p(2^{-1}(\Omega_1+\Omega_2))=1$，于是

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{h(\Omega_1,\cdot)+h(\Omega_2,\cdot)}{2}\right)^p d\mu=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{h(\Omega_1,\cdot)^p+h(\Omega_2,\cdot)^p}{2}d\mu.$$

鉴于

$$\left(\frac{h(\Omega_1,\cdot)+h(\Omega_2,\cdot)}{2}\right)^p\le\frac{h(\Omega_1,\cdot)^p+h(\Omega_2,\cdot)^p}{2}.$$

因此，对所有 $\xi\in \mathrm{supp}\mu$，都存在

$$\frac{h(\Omega_2,\xi)+(h(\Omega_2,\xi)+(\xi\cdot x))}{2}=\left(\frac{h(\Omega_2,\xi)^p+(h(\Omega_2,\xi)+(\xi\cdot x))^p}{p}\right)^{1/p}. \tag{3.7}$$

设 $\mathcal{O}=\{\xi\in\mathbb{S}^{n-1}:x\cdot\xi>0\}$。由于 μ 不集中在任何闭半球上，因此 $\mu(\mathcal{O}\cap\mathrm{supp}\mu)>0$。若 x 非零，则对任意 $\xi\in\mathcal{O}\cap\mathrm{supp}\mu$,

$$\frac{h(\Omega_2,\xi)+(h(\Omega_2,\xi)+(\xi\cdot x))}{2}<\left(\frac{h(\Omega_2,\xi)^p+(h(\Omega_2,\xi)+(\xi\cdot x))^p}{p}\right)^{1/p}, \tag{3.8}$$

这与 (3.7) 矛盾。因此，我们验证了 $x=o$，这说明 $\Omega_1=\Omega_2$。

□

扭转刚度的原始 L_p Minkowski 问题如下 .

问题 4. 在所有包含原点的 $\mathbb{R}^n$ 凸体中，求一个凸体 Ω，使得

$$d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)=h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu.$$

下面的引理说明问题 4 与问题 3 等价。

引理 3.4. 设 Ω 是一个包含原点的 $\mathbb{R}^n$ 凸体，且 $p,n+2$。则有以下结论。

(1) 如果 Ω 是问题 3 的解，那么 $\bar{\Omega}=T(\Omega)^{1/(p-2-n)}\Omega$ 是问题 4 的解。
(2) 如果 Ω 是问题 4 的解，那么 $\tilde{\Omega}=T(\Omega)^{-1/p}\Omega$ 是问题 3 的解。

证明。假设 Ω 是问题 3 的解。根据 μ^{tor} 的齐次性，以及 $d\mu^{tor(\Omega,\cdot)}T(\Omega)=h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$，可得

$$\begin{aligned}
d\mu^{tor}(\bar{\Omega},\cdot)&=d\mu^{tor}(T(\Omega)^{1/(p-2-n)}\Omega,\cdot)\\
&=T(\Omega)^{(n+1)/(p-2-n)}d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)\\
&=T(\Omega)^{(n+1)/(p-2-n)}T(\Omega)h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu\\
&=T(\Omega)^{(n+1)/(p-2-n)}T(\Omega)h(T(\Omega)^{1/(n+2-p)}\bar{\Omega},\cdot)^{p-1}d\mu\\
&=h(\bar{\Omega},\cdot)^{p-1}d\mu.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(2) 假设 Ω 是问题 4 的解。由 $d\mu^{tor}(\Omega,\cdot) = h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\mu^{tor}(\tilde{\Omega},\cdot)}{T(\tilde{\Omega})} &= \frac{d\mu^{tor}(T(\Omega)^{-1/p}\Omega,\cdot)}{T(T(\Omega)^{-1/p}\Omega)}\\ &= \frac{T(\Omega)^{-(n+1)/p}d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)}{T(\Omega)^{-(n+2)/p}T(\Omega)}\\ &= T(\Omega)^{(1-p)/p}h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu\\ &= T(\Omega)^{(1-p)/p}h(T(\Omega)^{1/p}\tilde{\Omega})^{p-1}d\mu\\ &= h(\tilde{\Omega},\cdot)^{p-1}d\mu.\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，我们完成了证明。 □

借助 [19]，中类似的逼近论证，我们可以得到问题 3 的可解性，详见下文。

定理 3.5. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一个不集中于任何闭半球的有限博雷尔测度，且 $1 < p < \infty$。则存在唯一一个包含原点的凸体 Ω，使得 $d\mu^{tor(\Omega,\cdot)}{}_{T(\Omega)} = h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$。

为方便读者，我们在附录中给出定理 3.5 的证明。

4. 主要定理的证明

本节先进行一些准备工作，然后证明主要定理。设 $1 < p < \infty$ 且 $p \neq n+2$。

设 μ 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球；Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体。定义泛函 $F_p(\Omega)$ 为

$$F_p(\Omega) = \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega,\cdot)^p d\mu.$$

引理 4.1. 设 μ 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球；Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点且满足 $F_p(Q) \leq 1$的凸体。假设凸体 Ω 是 (μ, p) 对应的问题 3 的解。那么 $F_p(\Omega) = 1$ 且 $T(\Omega) \geq T(Q)$。

证明。由于 由于 Ω 是问题 3 的一个解，因此有 $d\mu^{tor(\Omega,\cdot)}{}_{T(\Omega)} = h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$。我们得

$$\begin{aligned}F_p(\Omega) &= \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega,v)^p d\mu(v)\\ &= \frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}} h(\Omega,v)^p d\mu(v)\\ &= \frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}} h(\Omega,v)^p h(\Omega,v)^{1-p}\frac{1}{T(\Omega)}d\mu^{tor}(\Omega,v)\\ &= 1,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中，测度 $h(\Omega,\cdot)(n+2)T(\Omega)d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)$ 是定义在 $\{h(\Omega,\cdot)>0\}$ 上的博雷尔概率测度。由 $F_p(Q)\le 1$ 以及 $d\mu^{tor}(\Omega,\cdot)T(\Omega)=h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$、詹森不等式、混合扭转刚度的定义以及扭转 Minkowski 不等式，可得

$$\begin{aligned}
1\ge F_p(Q)^{1/p}&=\left(\frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h(Q,v)^p d\mu(v)\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}h(Q,v)^p d\mu(v)+\frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,v)^p d\mu(v)\right)^{1/p}\\
&\ge\left(\frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}h(Q,v)^p d\mu(v)\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}\left(\frac{h(Q,v)}{h(\Omega,v)}\right)^p\frac{h(\Omega,v)}{T(\Omega)}d\mu^{tor}(\Omega,v)\right)^{1/p}\\
&\ge\frac{1}{(n+2)T(\Omega)}\int_{\{h(\Omega,\cdot)>0\}}h(Q,v)d\mu^{tor}(\Omega,v)\\
&=\frac{T(\Omega,Q)}{T(\Omega)}-\frac{1}{n+2}\int_{\{h(\Omega,\cdot)=0\}}h(Q,v)h(\Omega,v)^{p-1}d\mu(v)\\
&\ge\left(\frac{T(Q)}{T(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n+2}}.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

因此，我们得到 $T(\Omega)\ge T(Q)$。 □

引理 4.2. 设 μ_i 和 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上不集中于任何闭半球的有限博雷尔测度。假设 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体 Ω_i 和 Ω 分别是关于 (μ_i, p) 和 (μ, p) 的问题 3 的解。若 $\mu_i\to\mu$ 弱收敛，则当 $i\to\infty$ 时，$\Omega_i\to\Omega$。

证明. 首先，我们证明序列 $\{\Omega_i\}$ 有界。令

$$R_i=h(\Omega_i,u_i)=\max_{\mathbb{S}^{n-1}}h(\Omega_i,u).$$

由于 $R_iu_i\in\Omega_i$，$h(\Omega_i,v)\ge R_i\max\{u_i\cdot v,0\}=R_i(u_i\cdot v)_+$ 对于 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$。由引理 4.1，得到

$$n+2=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h(\Omega_i,v)^p d\mu_i(v)\ge R_i^p\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u_i\cdot v)_+^p d\mu_i(v).\tag{4.3}$$

由于 μ 不集中于任何闭半球，因此对于任意 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，$R\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+^p d\mu(v)>0$。利用 $u\mapsto R\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+^p d\mu(v)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的连续性，存在一个依赖于 p 的常数 $C>0$，使得对于任意 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，$R\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+^p d\mu(v)\ge C>0$。由 $\mu_i\to\mu$ 弱收敛，存在 $N>0$，使得当 $i\ge N$ 且 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 时，

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+^p d\mu_i(v)\ge\frac{C}{2}>0.$$

应用 (4.3)，得到

$$R_i\le\left(\frac{2(n+2)}{C}\right)^{1/p}.$$

因此， $\{\Omega_i\}$ 是有界的。其次，根据布拉施克选择定理，存在$\{\Omega_i\}$的一个子列，仍记为 $\{\Omega_i\}$，使得 $\Omega_i \to \hat{\Omega}$。另一方面，若 $Q = \lambda_i B$ 且 $\lambda_i = (\frac{1}{n+2}|\mu_i|)^{-\frac{1}{p}}$，则 $1 = \frac{1}{n+2}R \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(Q, v)^p d\mu_i(v)$。由引理 4.1，$T(\Omega_i) \geq T(Q)$。由于 $\mu_i \to \mu$ 弱收敛且$0 < |\mu| < \infty$，可得 $0 < \sup_i \mu_i < \infty$。因此，

$$T(\Omega_i) \geq T(\lambda_i B) \geq T(B)\left(\frac{1}{n+2}\sup_i |\mu_i|\right)^{-\frac{n+2}{p}} > 0.$$

由引理 2.3，我们有 $Vol(\Omega_i) \geq \frac{1}{\text{直径}(\Omega_i)^2} T(\Omega_i) \geq \frac{1}{d^2} T(B)\left(\frac{1}{n+2}\text{上确界}_i |\mu_i|\right)^{-\frac{n+2}{p}} > 0$，其中某个 $d > 0$，因此利用体积的连续性，我们得到

$$Vol(\hat{\Omega}) = \lim_{i\to\infty} Vol(\Omega_i) > 0.$$

因此，Ω 是一个凸体。

我们现在可以证明 $\Omega = \Omega$。由于 $\Omega_i \to \Omega$，$h(\Omega_i, \cdot) \to h(\Omega, \cdot)$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$上一致成立，$T(\Omega_i) \to T(\hat{\Omega})$，且 $\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot) \to \mu^{tor}(\hat{\Omega}, \cdot)$ 弱收敛。结合 $\mu_i \to \mu$ 弱收敛以及$d\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot)/T(\Omega_i) = h(\Omega_i, \cdot)^{p-1} d\mu_i$，我们得到

$$\frac{d\mu^{tor}(\hat{\Omega}, \cdot)}{T(\hat{\Omega})} = h(\hat{\Omega}, \cdot)^{p-1} d\mu.$$

根据定理 3.5，可得 $\Omega = \Omega$。因此，$\Omega_i \to \Omega$。 □

引理 4.3. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，且不集中于任何闭半球。假设凸体 Ω_i 和 Ω 位于包含原点的 $\mathbb{R}^n$ 中，且分别是 (μ, p_i) 和 (μ, p) 对应的问题 3 的解。如果 $p_i \to p$，那么当 $i \to \infty$ 时，$\Omega_i \to \Omega$。

证明。首先，我们证明序列 $\{\Omega_i\}$ 有界。根据引理 4.1，

$$1 = \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_i, v)^{p_i} d\mu(v).$$

Let

$$R_i = h(\Omega_i, u_i) = \max_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_i, u).$$

于是，$R_i u_i \in \Omega$，因此对于 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$，

$$h(\Omega_i, v) \geq R_i (u_i \cdot v)_+.$$

第三，由于 μ 不集中于任何闭半球，因此存在一个常数 $c_0 > 0$，使得对于 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u \cdot v)_+^{p+\varepsilon} d\mu(v) \geq (n+2)\frac{1}{c_0^{p+\varepsilon}} > 0. \tag{4.4}$$

由于 $p_i \to p$ 且 $p > 1$，对于 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 i，$1 < p - \varepsilon < p_i < p + \varepsilon$，并且存在一个 $a_0 > 0$，使得 $c_0^{p+\varepsilon} < (c_0 + a_0)^{p_i}$，

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\Omega_i, v)^{p_i} d\mu(v) \\ &\geq \frac{1}{n+2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} R_i^{p_i}(u_i \cdot v)_+^{p_i} d\mu(v) \\ &\geq \frac{1}{n+2} R_i^{p_i}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u_i \cdot v)_+^{p+\varepsilon} d\mu(v) \\ &\geq R_i^{p_i}\frac{1}{c_0^{p+\varepsilon}} \\ &\geq \left(\frac{R_i}{c_0 + a_0}\right)^{p_i}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

由于 $p_i \geq 1$，可得 $R_i \leq c_0 + a_0$, ，因此序列 $\{\Omega_i\}$ 有界。其次，由布拉施克选择定理，存在 $\{\Omega_i\}$ 的一个子序列，仍记为 $\{\Omega_i\}$，使得 $\Omega_i \to \hat{\Omega}$。一方面，若 $Q = \lambda_i B$，且 $\lambda_i = (\frac{1}{n+2}|\mu|)^{-\frac{1}{p_i}}$，则 $1 = \frac{1}{n+2} R \mathbb{S}^{n-1} h(Q, v)^{p_i} d\mu(v)$。根据引理 4.1，$T(\Omega_i) \geq T(Q)$。由于 $p_i \to p$ 且 $p > 1$，可得当 i 充分大时，

$$T(\Omega_i) \geq T(\lambda_i B) \geq \frac{1}{2} T(B)\left(\frac{1}{n+2}|\mu|\right)^{-\frac{n+2}{p}} > 0.$$

由引理 2.3 可知，$Vol(\Omega_i) \geq \frac{1}{\text{直径}(\Omega_i)^2} T(\Omega_i) \geq \frac{1}{2 d^2} T(B)\left(\frac{1}{n+2}|\mu|\right)^{-\frac{n+2}{p}} > 0$ 对某个 d > 0成立，因此可得

$$Vol(\hat{\Omega}) = \lim_{i\to\infty} Vol(\Omega_i) > 0.$$

$\hat{}$因此，Ω 是一个凸体。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 我们可以证明 $\Omega = \Omega$。由于 $\Omega_i \to \Omega$，因此 $h(\Omega_i, \cdot) \to h(\Omega, \cdot)$ 在$\mathbb{S}^{n-1}$上一致收敛，$T(\Omega_i) \to T(\hat{\Omega})$，且 $\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot) \to \mu^{tor}(\hat{\Omega}, \cdot)$ 弱收敛。结合 $p_i \to p$ 和 $\frac{d\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot)}{T(\Omega_i)} = h(\Omega_i, \cdot)^{p_i - 1} d\mu$，我们得到

$$\frac{d\mu^{tor}(\hat{\Omega}, \cdot)}{T(\hat{\Omega})} = h(\hat{\Omega}, \cdot)^{p-1} d\mu.$$

$\hat{}$由定理 3.5 可知，$\Omega = \Omega$。因此，$\Omega_i \to \Omega$。

现在，我们可以证明主要结果了。

定理 1.1 的证明。设凸体 Ω_i 和 Ω 位于 $\mathbb{R}^n$ 中且包含原点，并满足 $d\mu^{tor}(\Omega_i, \cdot) = h(\Omega_i, \cdot)^{p-1} d\mu_i$ 以及 $d\mu(\Omega, \cdot) = h(\Omega, \cdot)^{p-1} d\mu$，其中 Ω_i 和 Ω 分别是关于 (μ_i, p) 和 (μ, p) 的问题 4 的解。由引理 3.4(2)可知，$\tilde{\Omega}_i = T(\Omega_i)^{-1/p}\Omega_i, \tilde{\Omega} = T(\Omega)^{-1/p}(\Omega)$ 分别是关于 (μ_i, p) 和 (μ, p) 的问题 3 的解。由于 $\mu_i \to \tilde{\mu}$ $\tilde{}$弱收敛，由引理 4.2可知，当 $i \to \infty$ 时，$\Omega_i \to \Omega$。由引理 3.4(1)和扭转刚度的连续性

由扭转刚度可得,

$$\Omega_i = T(\tilde{\Omega}_i)^{1/(p-2-n)}\tilde{\Omega}_i \to T(\tilde{\Omega})^{1/(p-2-n)}\tilde{\Omega} = \Omega.$$

证毕。

定理 1.2 的证明。设凸体 Ω_i 和 Ω 位于 $\mathbb{R}^n$ 中且包含原点，并满足 $d\mu^{tor}(\Omega_i,\cdot) = h(\Omega_i,\cdot)^{p_i-1}d\mu$ 和 $d\mu(\Omega,\cdot) = h(\Omega,\cdot)^{p-1}d\mu$，其中 Ω_i 和 Ω 分别是 (μ, p_i) 和 (μ, p) 对应问题 4 的解。由引理 3.4(2)可知，$\tilde{\Omega}_i = T(\Omega_i)^{-1/p_i}\Omega_i, \tilde{\Omega} = T(\Omega)^{-1/p}(\Omega)$ 分别是 (μ, p_i) 和 (μ, p) 对应问题 3 的解。由于 $p_i \to p$，根据引理 4.3可知，当 $i \to \infty$ 时 $\Omega_i \to \Omega$；由引理 3.4(1)和扭转刚度的连续性可知

$$\Omega_i = T(\tilde{\Omega}_i)^{1/(p_i-2-n)}\tilde{\Omega}_i \to T(\tilde{\Omega})^{1/(p-2-n)}\tilde{\Omega} = \Omega.$$

至此，证明完成。

□

5. 附录——定理 3.5 的证明

我们先证明定理 3.5 的离散版本如下。

定理 5.1. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的离散测度，且不集中于任何闭半球。则对于每个 $1 < p < \infty$, 存在唯一一个多面体 P，使得原点位于其内部，且满足

$$\frac{\mu_p^{tor}(P,\cdot)}{T(P)} = \mu.$$

为了证明定理 5.1，我们先做一些准备。

引理 5.2. 设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的离散测度，且不集中于任何闭半球。令 $1 < p < \infty$。若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点并且满足问题 2（μ, p）的一个凸体，则 Ω 是一个凸真多面体, 且原点位于其内部。

证明。我们先做一些准备。设

$$\mu = \sum_i^m c_i\delta_{\xi_i}, \tag{5.1}$$

其中，$\xi_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ 是两两不同且不包含于任何闭半球的单位向量，并且对所有 i，$c_i > 0$。于是，对于包含原点的凸体 Q，我们将泛函定义为

$$F_p(Q) = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^m c_i h(Q,\xi_i)^p. \tag{5.2}$$

对于 $y \in [0,\infty)^m$，定义凸多面体 P(y) 为

$$P(y) = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \xi_i \le y_i\}. \tag{5.3}$$

现在，我们首先推导出 Ω 是一个凸真多面体。令

$$h = (h_1, \ldots, h_m) = (h(\Omega, \xi_1), \ldots, h(\Omega, \xi_m)). \tag{5.4}$$

显然，由 $\Omega \subseteq P(h)$，可得 $T(\Omega) \le T(P(h))$。由于 $F_p(P(h)) = F_p(\Omega)$，适当多面体 P(h) 满足问题 2 中的约束。另一方面，由于凸体 Ω 满足问题 2，且 $T(\Omega) = T(P(h))$，这说明 P(h) 也解问题 2。结合引理 3.3，我们得到 $P(h) = \Omega$。

接下来，我们将验证 P(h) 在其内部包含原点。为此，我们采用反证法。假设 $o \in \partial P(h)$，构造一个新的适当多面体 P(z)，使得

$$o \in \operatorname{int} P(z), \quad F_p(P(z)) \le 1, \quad but\ T(P(z)) > T(P(h)). \tag{5.5}$$

由于 $o \in \partial P(y)$，我们假设

$$h_1 = \ldots = h_k = 0, \quad and \quad h_{k+1}, \ldots, h_m > 0,\ for\ some\ 1 \le k < m. \tag{5.6}$$

现在，令

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i}{\sum_{i=k+1}^{m} c_i} \tag{5.7}$$

并令 $t > 0$ 足够小，使得 $0 < t < t_0 < \min\{h^p{}_i/c : 1 \le i \le k\}^{1/p}$。定义

$$y_t = (y_{1,t}, \ldots, y_{m,t}) = \left(t, \ldots, t, (h_{k+1}^p - ct^p)^{1/p}, \ldots, (h_m^p - ct^p)^{1/p}\right). \tag{5.8}$$

因此，$P(y_0) = P(h)$，且 $P(y_t)$ 是一个包含原点于其内部的凸多面体。

接下来，我们给出一些观察结果。

首先，我们发现 $P(y_t)$ 是连续的，即

$$\lim_{t \to 0^+} P(y_t) = P(h). \tag{5.9}$$

其次，鉴于 $P(y_t)$ 至多有 m 个面，其外单位法向量来自集合 $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$，此外，$h(P(y_t, \xi_i)) \le y_{i,t}$，且当 $S(P(y_t), \xi_i) > 0$ 时取等号，其中 $i = 1, \ldots, m$，结合 T 的定义以及 $\mu^{tor}(P(y_t), \cdot)$ 关于 $S(P(y_t), \cdot)$ 的绝对值，我们得到

$$T(P(y_t)) = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{m} y_{i,t} \mu^{tor}(P(y_t), \{\xi_i\}). \tag{5.10}$$

第三，对于 $t_1, t_2 \in [0, t_0]$，结合混合扭转刚度的定义，我们有 e

$$T(P(y_{t_1}), P(y_{t_2}))) = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{m} h(P(y_{t_2}, \xi_i)) \mu^{tor}(P(y_{t_1}), \{\xi_i\}). \tag{5.11}$$

第四，由于至少存在一个包含 o 的 P(y_0) 的面，使得 $\sum_{i=1}^{k} S(P(y_0), \{\xi_i\}) > 0$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^{tor}(P(y_0), \{\xi_i\})) > 0. \tag{5.12}$$

利用 (5.9) 、(5.10)、(5.11)、(5.12) 以及扭转测度的弱收敛，我们有 e

$$\begin{aligned}
&(n+2) \lim_{t\to 0^+} \frac{T(P(y_t)) - T(P(y_t), P(y_0))}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lim_{t\to 0^+} \frac{t-0}{t} \mu^{tor}(P(y_t), \{\xi_i\}) \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{m} \lim_{t\to 0^+} \frac{(h_i^p - ct^p)^{1/p} - h_i}{t} \mu^{tor}(P(y_t), \{\xi_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu^{tor}(P(y_0), \{\xi_i\}) \\
&> 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

将 (5.13) 代入扭转 Minkowski 不等式，并结合 T(P(y_t)) 关于 t 的连续性，可得

$$\begin{aligned}
&T(P(y_0))^{\frac{n+1}{n+2}} \liminf_{t\to 0^+} \frac{T(P(y_t))^{\frac{1}{n+2}} - T(P(y_0))^{\frac{1}{n+2}}}{t} \\
&= \liminf_{t\to 0^+} \frac{T(P(y_t)) - T(P(y_t))^{\frac{n+1}{n+2}} T(P(y_0))^{\frac{1}{n+2}}}{t} \\
&\geq \liminf_{t\to 0^+} \frac{T(P(y_t)) - T(P(y_t), P(y_0))}{t} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

因此，当 t > 0 足够小时，我们得出 T (P(y_t)) $>$ T (P(y_0))。

我们可以取足够小的 t > 0，并令 z $=$ y_t。为说明 P(z) 确实是满足 (5.7) 的凸多面体，我们需要断言 F(P(z)) ≤ 1。

事实上，根据 (5.2) 以及 P(z) $=$ P(y_t) 和 h(P(y_t), ξ_i) $\leq$ $y_{i,t}$ 对所有 i 均成立，(5.8) 和 F_p (P(h)) $=_{1\ n+2}$ $P_{m\ k+1}$ $c_i h^{p}{}_{i}$（由 (5.2)、(5.3)、(5.4)、(5.6) 得出），(5.7) 以及 P(h) 是问题

2，只需有

$$\begin{aligned} F(P(z)) &= \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{m} c_i h(P(y_t,\xi_i)^p \\ &\le \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{m} c_i y_{i,t}^p \\ &= \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{k} c_i t^p + \frac{1}{n+2}\sum_{i=k+1}^{m} c_i (h_i^p - ct^p) \\ &= F_p(P(h)) + \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i - c\sum_{i+1}^{k} c_i\right)t^p \\ &= F_p(P(h)) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

因此，证明完成。 □

定理 5.1 的证明。假设 $\mu = \mathrm{P}_{m\ i=1}\mathrm{c}_i\delta_{\xi_i}$，其中 $\xi_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且对所有 i 均有 $\mathrm{c}_i > 0$。设 Q 为包含原点的凸体，令

$$F_p(Q) = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{m} c_i h(Q,\xi_i)^p.$$

鉴于问题 1、2 和 3 的解之间的关系，我们只需处理 (μ, p) 对应的问题 1 存在解 P_0, 的情形，其中 P_0 是包含原点的凸真多面体。

首先，我们旨在确认问题 1 的极小化序列 $\{\mathrm{P}_j\}_j$ 满足：每个 P_j 都是面法向量位于 $\{\xi_1,、\ldots、\xi_m\}$ 中的凸真多面体。为此，我们将与每个凸体 Q 相关的 Wulff 形定义为

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x\cdot\xi_i \le h(Q,\xi_i), i = 1,\ldots,m\}.$$

鉴于 μ 不集中在任何闭半球上，Q 是一个包含原点的凸体，而 P 是一个包含 Q 的有界凸多面体。此外，对于所有 i，$\mathrm{h(Q},\xi_i)$ =$\mathrm{h(P},\xi_i)$。因此可以看出

$$T(P) \ge T(Q), \quad F_p(P) = F_p(Q).$$

所以，我们得出结论：$\{\mathrm{P}_j\}_j$是所需的、面垂直于 $\xi_i(\mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{m})$ 的极小化序列，用于问题 1。

其次，我们致力于证明 $\{\mathrm{P}_j\}$ 的有界性。由于 $\mathrm{T}\,(\mathrm{T}\,(\mathrm{B})^{-1/(n+2)}\mathrm{B}) = 1$ 对于$0 < \mathrm{T(B)} < \infty$，因此

$$\inf\{F_p(Q) : o \in Q,\ T(Q) \ge 1\} \le M := F_p(T(B)^{-1/(n+2)}B) < \infty.$$

这意味着对所有 j，$F_p(P_j) \le M$。由于 c_i为正，且对所有 i 和 j，每个 P_j都包含原点，因此我们有

$$\frac{1}{n+2}\min\{c_i : i = 1, \dots, m\}h(P_j, \xi_i)^p \le \frac{1}{n+2}c_i h(P_j, \xi_i)^p \le M.$$

因此，

$$h(P_j, \xi_i) \le \left((n+2)\frac{M}{\min\{c_i : i = 1, \dots, m\}}\right)^{1/p} < \infty.$$

因此，极小化序列 $\{P_j\}_j$有上界。由布拉施克选取定理可知，$\{P_j\}_j$存在一个收敛子序列，仍记为 $\{P_j\}_j$，它收敛到凸多面体 P_0。

第三，我们证明 $\dim(P_0) = n$。由引理 2.3 可知，对于某个 d ~~> 0,~~ 有 $Vol(P_j) \ge \frac{1}{\text{直径}(P_j)^2}T(P_j) \ge \frac{1}{d^2} > 0$。由此可得

$$Vol(P_0) = \lim_{j\to\infty} Vol(P_j) > 0.$$

因此，我们得到了所需结果。

现在我们可以回到关于 (μ, p) 的问题 2。由于 P_0 是一个处理问题 1 的凸真多面体，利用引理 3.1(1)，我们断言 $P := F_p(P_0)^{-1/p}P_0$ 是一个处理问题 2 的凸真多面体。由引理 3.3 和 5.2 可知，这样的解 P 是唯一的，并且原点位于其内部。

最后，我们已准备好着手解决问题 (3)。由引理 3.2(1)可知，多面体 P 是问题 3 的唯一解。因此，该公式

$$T(P)^{-1}d\mu^{tor}(P, \cdot) = h(P, \cdot)^{p-1}d\mu$$

可表示为定理 5.1 中的形式。

现在，我们采用逼近技术来证明定理 3.5。

定理 3.5 的证明。根据闵可夫斯基存在定理的证明（见 [27] 或 [19],），我们知道，对于给定的测度 μ，存在一列定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的离散测度 $\{\mu_j\}$，其支撑不包含于任何闭半球中，并且 $\mu_j \to \mu$ 弱收敛，当 $j \to \infty$时。由定理 5.1，存在一个包含原点的多面体 P_j，满足

$$\mu_j = \frac{h(P_j, \cdot)^{1-p}}{T(P_j)}\mu^{tor}(P_j, \cdot).$$

根据引理 4.1 和 4.2，可知序列 P_j 一致有界，因此由布拉施克选择定理，我们可设 P_j 收敛到一个满足 $o \in \Omega$ 的紧凸集 Ω。再次应用引理 4.1，可知对于某个 $c_0 > 0$，$T(P_j) \ge c_0 > 0$。由引理 2.3 可知，$Vol(P_j) \ge \frac{1}{\text{直径}(P_j)^2}T(P_j) > 0$，因此 $Vol(\Omega) = \lim_{j\to\infty} Vol(P_j) > 0$，故 Ω 是~~一个包~~含原点的凸体。

另一方面，给定一个连续函数 f ∈ C($\mathbb{S}^{n-1}$)，我们得到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)T(P_j)h(P_j,u)^{p-1}d\mu_j(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)d\mu^{tor}(P_j,u).$$

由于当 p > 1 时，T (P $_j$)h(P $_j$, ·)$^{p-1}$ →T (Ω)h(Ω, ·)$^{p-1}$在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一致收敛，且 $\mu_i \to \mu$，并且 μ^{tor}(P$_j$, ·) →μ^{tor}(Ω, ·) 弱收敛，当 i → ∞ 时。因此，我们推导得

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)T(\Omega)h(\Omega,u)^{p-1}d\mu(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)d\mu^{tor}(\Omega,u)$$

对于任意 f ∈ C($\mathbb{S}^{n-1}$)，这说明定理 3.5 成立。

致谢

作者谨向导师黄勇教授致谢，感谢他对本文行文表达提出的宝贵意见。

参考文献

[1] A. D. Aleksandrov, 《凸体的表面积测度》, Mat. Sb. (N.S.) 6 (1939), 167–174.[2] A. D. Aleksandrov, 《混合体积理论。III. 将 Minkowski 关于凸多面体的两个定理推广至任意凸体》, Mat. Sb. 3 (1938), 27–46.[3] G. Bianchi, K. J. B¨or¨oczky, A. Colesanti, D. Yang, 《n 维 p 阶 L_p-Minkowski 问题》, Adv. Math. 341 (2019), 493–535.[4] T. Bonnesen 和 W. Fenchel, 《凸体理论》, L. Boron、C. Christenson 和 B. Smith 从德文翻译并编辑，BCS Associates, Moscow, ID, 1987.[5] K. J. B¨or¨oczky 和 H. T. Trinh, 《平面上的 p 阶 L_p-Minkowski 问题》, Adv. in Appl. Math. 87 (2017), 58–81.[6] S. Chen, Q. Li 和 G. Zhu, 《关于 L_p Monge-Amp`ere 方程》, J. Differential Equations 263 (2017), no. 8, 4997–5011.[7] Z. Chen 和 Q. Dai, 《扭转的 L_p Minkowski 问题》, J. Math. Anal. Appl. 488 (2020), no. 1, 124060, 26 pp.[8] A. Colesanti, 《变分泛函的 Brunn-Minkowski 不等式及相关问题》, Adv. Math. 194 (2005), no. 1, 105–140.[9] A. Colesanti 和 M. Fimiani, 《扭转刚度的 Minkowski 问题》, Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), no. 3, 1013–1039.[10] A. Colesanti, K. Nystr¨om, P. Salani, J. Xiao, D. Yang, G. Zhang, 《Hadamard 变分公式与 p- 容量 Minkowski 问题》, Adv. Math. 285 (2015), 1511–1588.[11] B. E. J. Dahlberg, 《调和测度的估计》, Arch. Rational Mech. Anal. 65 (1977), no. 3, 275–288.[12] W. Fenchel, B. Jessen, 《集合函数与凸体》, Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 16 (1938), 1–31.[13] Y. Feng, Y. Zhou 和 B. He, 《一般测度的 L_p 静电 q-容量 Minkowski 问题》, J. Math. Anal. Appl. 487 (2020), no. 1, 123959, 18 pp.[14] W. J. Firey, 《凸体的 p-均值》, Math. Scand. 10 (1962), 17–24.[15] R. J. Gardner, 《几何断层成像》, 第二版, 《数学及其应用百科全书》58, 剑桥大学出版社, 纽约, 2006.[16] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, 《二阶椭圆偏微分方程》, 1998 年版重印, 《数学经典》, Springer-Verlag, Berlin, 2001.[17] J. Hu 和 J. Liu, 《p 阶 L_p 扭转 Minkowski 问题》, Adv. in Appl. Math. 128 (2021), Paper No. 102188, 22 pp.[18] Y. Huang, C. Song 和 L. Xu, 《p-扭转和 p-特征值的 Hadamard 变分公式及其应用》, Geom. Dedicata 197 (2018), 61–76.

[19] D. Hug 等，《多胞体的 L_p Minkowski 问题》，Discrete Comput. Geom. 33 (2005), no. 4, 699–715.[20] D. Jerison，《静电容量的 Minkowski 问题》，Acta Math. 176 (1996), no. 1, 1–47.[21] D. Jerison，《凸体变分法的直接方法》，Adv. Math. 122 (1996), no. 2, 262–279.[22] H. Jian 和 J. Lu，《奥尔利奇-闵可夫斯基问题解的存在性》，Adv. Math. 344 (2019), 262–288.[23] E. Lutwak，《Brunn-Minkowski-Firey 理论。I. 混合体积与 Minkowski 问题》，J. Differential Geom. 38 (1993), no. 1, 131–150.[24] E. Lutwak, D. Yang 和 G. Zhang，《关于 L_p-Minkowski 问题》，Trans. A mer. Math. Soc. 356 (2004), no. 11, 4359–4370.[25] H. Minkowski，《关于凸多面体的一般定理》，Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen (1897), 198– 219.[26] H. Minkowski，《体积与表面》，Math. Ann. 57 (1903), no. 4, 447–495.[27] R. Schneider，《凸体：Brunn-Minkowski 理论》，第二扩充版，《数学及其应用百科全书》151，剑桥大学出版社，剑桥，2014.[28] G. Xiong, J. Xiong 和 L. Xu，《多胞体的 L_p 容量 Minkowski 问题》，J. Funct. Anal. 277 (2019), no. 9, 3131–3155.[29] G. Zhu，《多胞体的对数闵可夫斯基问题》，Adv. Math. 262 (2014), 909–931.[30] G. Zhu，《p 阶多胞体的 L_p Minkowski 问题》，J. Funct. Anal. 269 (2015), no. 4, 1070– 1094.[31] G. Zhu，《多胞体的中心仿射闵可夫斯基问题》，J. Differential Geom. 101 (2015) 159–174.[32] D. Zou 和 G. Xiong，《静电容量的 L_p Minkowski 问题》，J. Differential Geom. 116 (2020), no. 3, 555–596.

数学学院，湖南大学，中国湖南省长沙市，410082，电子邮箱：hujinrong@hnu.edu.cn 数学学院，湖南大学，中国湖南省长沙市，410082，电子邮箱：maoqiongfang@hnu.edu.cn 数学学院，湖南大学，中国湖南省长沙市，410082，电子邮箱：wangsinan@hnu.edu.cn