伯恩斯坦-杜尔梅核的分布收敛，以及广义算子对有界变差函数的逐点收敛

穆罕默德·塔里克·莫泽[a]

[a] *Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town*

arXiv:2303.11061v2 [math.CA] 4 Dec 2023

摘要

我们研究伯恩斯坦型算子的收敛性，并得到两个结果。第一个结果是：伯恩斯坦-杜尔迈耶算子的核 K_n 在每个点 $x \in (0,1)$ 处——即 $K_n(x,t)dt$ ——经过标准化后收敛于正态分布。第二个结果给出了广义伯恩斯坦-杜尔梅耶算子作用于可能不连续的有界变差函数 f 时的逐点极限。

关键词：正线性算子，伯恩斯坦型算子，贝塔分布

1. 引言

伯恩斯坦算子 $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,\,k}(x) f(k/n)$，其中 $p_{n,\,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$，由 S. Bernstein [4] 提出，用于对魏尔斯特拉斯逼近定理给出构造性证明。下文的伯恩斯坦-杜尔迈耶算子由 Durrmeyer [7] 以及 Lupaş [10]分别独立构造：

定义 1.1. 将伯恩斯坦-杜尔迈耶算子 M_n 作用于 $[0,1]$ 上的可积函数 f，定义为

$$M_n(f)(x) = \int_0^1 f(t) K_n(x,t)\, dt, \quad x \in [0,1],$$

其中 K_n 是伯恩斯坦-杜尔梅核，定义为

$$K_n(x,t) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) p_{n,k}(t), \quad x,t \in [0,1].$$

在最初的证明中，Bernstein 利用二项分布和大数弱定律，构造性地证明了魏尔斯特拉斯逼近定理。

本文利用这样一个事实：随着试验次数增加，二项分布收敛于正态分布；据此证明伯恩斯坦-杜尔迈耶算子的核趋于正态分布。具体而言：

定理 1.2. 对于固定的 $x \in (0,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} K_n\left(x, \frac{t}{\sqrt{n}} + x\right) dt \text{ converges in distribution to } N(0, 2x(1-x)) \text{ as } n \to \infty,$$

其中 $N(\mu, \sigma^2)$ 是均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布。

等价地，若 X_n 是一个服从分布 $K_n(x,t)dt$ 的随机变量，则

$$\sqrt{n}(X_n - x) \text{ converges in distribution to } N(0, 2x(1-x)) \text{ as } n \to \infty.$$

伯恩斯坦-杜尔迈耶算子可以推广到任意测度。本文仅讨论任意权重的情形。

定义　命题 1.3. 具有非负权函数 w 的伯恩斯坦-杜尔迈耶算子定义为

$$M_{n,w}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \frac{\int_0^1 f(t) p_{n,k}(t) w(t)\, dt}{\int_0^1 p_{n,k}(t) w(t)\, dt}, \tag{1}$$

其中，选择 w 使各项均有定义， $x \in [0,1]$，且 f 是定义在 $[0,1]$ 上、关于 $w(t)dt$ 可积的函数。

在 w 为雅可比权函数 $w(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta}$、其中 $\alpha, \beta > -1$ 的特殊情形下，算子 $M_{n,w}$ 已广为人知。例如，Berens 和 Xu（如 [3]）研究了带有雅可比权函数的伯恩斯坦-杜尔迈耶算子，而 Ditzian（如 [6]）研究了带有雅可比权函数的多维伯恩斯坦-杜梅耶算子。据我们所知，Berdysheva 和 Jetter [2] 首次研究了任意测度的情形——即在 (1) 中用 $d\rho(t)$ 替换 $w(t)dt$ ——及其多元类似物。Berdysheva [1] 证明，任意测度的伯恩斯坦-杜尔迈耶算子作用于 f 时，在 x 处收敛到 $f(x)$，前提是 f 本质有界、在 x 处连续，且 ρ 的支集包含 x。

Herzog 和 Hill 在 [9] 中证明，对于定义在 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 上的 f，若其有界，且在给定的 $x \in (0,1)$ 处存在左、右极限 $f(x-)$ 和 $f(x+)$，则对于经典伯恩斯坦算子

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = \frac{1}{2} f(x-) + \frac{1}{2} f(x+).$$

Guo [8] 证明，当 f 具有有界变差时，

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f)(x) = \frac{1}{2} f(x-) + \frac{1}{2} f(x+) \tag{2}$$

成立 f 对于伯恩斯坦-杜尔迈耶算子，并给出了收敛速度的估计 .

本文求出了带任意权重的伯恩斯坦-杜尔迈耶算子作用于有界变差函数 f 时的极限。具体而言，我们证明:

定理 1.4. 设 w 是定义在 $[0,1]$ 上的非负有界变差函数。固定 $x \in (0,1)$。假设在 x 处的左极限 $w(x-)$ 或右极限 $w(x+)$ 非零。对于定义在 $[0,1]$, 上的任意有界变差函数 f

$$\lim_{n\to\infty} M_{n,w}(f)(x) = (1-\nu) f(x-) + \nu f(x+), \tag{3}$$

其中

$$\nu = \int_0^1 \frac{w(x+)(1-u)}{w(x-)u + w(x+)(1-u)}\, du.$$

当 $w(x-) = w(x+)$ 时， ν 的值为 $1\ 2$。否则，

$$\nu = \frac{r^2 - r[1 + \ln r]}{(r-1)^2}, \quad \text{for } r = \frac{w(x+)}{w(x-)} \text{ when } r \in (0,\infty) \text{ and } r \neq 1.$$

定理 1.4 是对 (2) 的推广——考虑 $w = 1$。事实上，即使仅有 $w(x+) = w(x-)$，(2) 仍然成立，也就是说，w 在 x连续。

2. 预备知识与有用结果

下文中，我们将进行 n 次试验且成功概率为 p 的二项分布记为 $Bin(n,p)$，将均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布记为 $N(\mu,\sigma^2)$，将参数为 α 和 β 的贝塔分布记为 $Beta(\alpha,\beta)$。符号 $\xrightarrow{D}$ 表示依分布收敛， $\sim$ 表示具有相同分布。我们用 $\mathbb{P}$ 表示概率测度，用 $\mathbb{E}$ 表示随机变量的期望。

函数 $p_{n,k}$ 被延拓到 $\mathbb{R}$ 上，并允许 k 在 $[0,n]$ 上成立，使得

$$p_{n,k}(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} t^k (1-t)^{n-k} & \text{if } t \in [0,1], \\ 0 & \text{if } t \notin [0,1]. \end{cases}$$

对于函数 f， $f(t-)$ 和 $f(t+)$ 分别表示 f 在 t 处的左极限和右极限，而 $\mathcal{D}(f)$ 是 f 的不连续点集。通常，x 固定在 $(0,1)$ 内。将 Ψ 定义为 $N(0, x(1-x))$ 的累积分布函数是合理的。

定理 2.1. 设 C_n 具有固定 $p \in (0,1)$ 的 $Bin(n,p)$ 分布。那么

$$\sqrt{n}(C_n/n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p)), \ as\ n \to \infty.$$

定理 2.2。设 β_{r_1,r_2} 服从分布 $Beta(r_1,r_2)$。那么

$$\sqrt{r_1+r_2}\left(\beta_{r_1,r_2} - \frac{r_1}{r_1+r_2}\right) \xrightarrow{D} N(0, \gamma(1-\gamma)), \tag{4}$$

当 $r_1, r_2 \to \infty$ 且 $\frac{r_1}{r_1+r_2} \to \gamma$ 时，对 $\gamma \in (0,1)$ 成立。

定理 2.1 是中心极限定理的直接推论，且广为人知。定理 2.2 推广了这一广为人知的近似结果：标准化的 $Beta(an, bn)$ 分布在 $n \to \infty$ 时趋于正态分布。据我们所知，定理 2.2 尚不为人熟知。我们在附录中给出证明。

下面的推论将是定理 2.2 最有用的形式。

推论 2.3。 设 $B_{n,k}$ 服从 $Beta(k+1, n-k+1)$ 分布，并固定 $x \in (0,1)$。 n

$$\sqrt{n}\left(B_{n,k} - x\right) \xrightarrow{D} N(\alpha, x(1-x)) \tag{5}$$

当 $n \to \infty$ 且 $\sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) \to \alpha$ 时。

证明。注意， $\sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) \to \alpha$ 可推出 $\frac{k}{n} \to x$。由定理 2.2,

$$\overbrace{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}^{M}\left[\sqrt{n}\left(B_{n,k} - \frac{k}{n}\right)\right] + \overbrace{\sqrt{n+2}\left(\frac{k}{n} - \frac{k+1}{n+2}\right)}^{C} = \sqrt{n+2}\left(B_{n,k} - \frac{k+1}{n+2}\right) \xrightarrow{D} N(0, x(1-x))$$

当 $n \to \infty$ 且 $\frac{k}{n} \to x$ 时。注意，极限中 $M \to 1$ 且 $C \to 0$ 。因此，由斯卢茨基定理，$\sqrt{n}\left(B_{n,k} - \frac{k}{n}\right) \xrightarrow{D} N(0, x(1-x))$。再应用一次斯卢茨基定理可得

$$\sqrt{n}(B_{n,k} - x) = \sqrt{n}\left(B_{n,k} - \frac{k}{n}\right) + \sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) \xrightarrow{D} N(\alpha, x(1-x))$$

当 $n \to \infty$ 且 $\sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) \to \alpha$ 时。

□

下面给出一种利用序列在紧区间上一致收敛的直接证明方法。

引理 2.4。 *[11, 第 3] 章。设 f 和 (f_n) 是定义在 $\mathbb{R}$ 的紧子集 K 上的函数。以下条件等价*

i) (f_n) 一致收敛于 f，且 f 在 K 上连续。

ii) 对任意序列 $(\alpha_n) \subset K$，若 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$，则 $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_n) = f(\alpha)$。

证明。参见例如 [11, 第 3] 章关于连续收敛的部分。 □

下一个定理使我们能够利用依分布收敛来证明依期望收敛。

定理 2.5. 设 (X_n) 是一列实值随机变量，其在分布意义下收敛于随机变量 X 。设 (h_n) 是一列从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一致有界可测函数，且它们在紧区间上一致收敛于可测函数 h ，其不连续点集 $\mathcal{D}(h)$ 是闭集，并满足 $\mathbb{P}(X \notin \mathcal{D}(h)) = 1$。那么

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h_n(X_n)) = \mathbb{E}(h(X)).$$

证明. 根据斯科罗霍德表示定理（例如参见 [5, Chapter 3.5], ），存在一列随机变量 (Y_n)，使得每个 Y_n 的分布都与 X_n相同，且 (Y_n) 几乎必然收敛于随机变量 Y，后者的分布与 X相同。令 Ω_0 为几乎必然集合，在该集合上 (Y_n) 逐点收敛于 Y；令 Ω_1 为几乎必然集合 $\{Y \notin \mathcal{D}(h)\}$。对于几乎必然集合 $\Omega_0 \cap \Omega 1$, Y中的 ω，$\omega(\mathcal{D}(h))^c$属于开集 h。因此， Y在 $\omega(h_n)$ 的某个紧邻域上连续。由引理 2.4， h 在该紧邻域上一致收敛于 h_n，从而有 $Y_n(\omega(\to h))\, Y(\omega(n \to \infty))$，当 h_n时。因此，$Y_n(\to h)\, Y(h_n)$ 几乎必然。由于 (h_n) 一致有界，序列 $(Y_n())$ 被某个常数控制。根据勒贝格控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h_n(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h_n(Y_n)) = \mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(X)).$$

□

3. 伯恩斯坦-杜尔梅核的正态性

在本节余下部分中，固定 $x \in (0, 1)$。我们构造伯恩斯坦-杜尔迈耶核 $K_n(x, \cdot)$ 的概率表示。考虑由以下过程的样本生成的分布。

步骤 1. 取一枚正面朝上的概率为 x 的硬币。

步骤 2. 抛掷硬币 n 次，并记录正面朝上的次数。

步骤 3. 如果记录到 k 次正面朝上，则从 $Beta(k+1, n-k+1)$ 分布中随机抽取样本。

假设 $C_n \sim Bin(n, x)$ 和 $B_{n,k} \sim Beta(k+1, n-k+1)$ 是相互独立的随机变量。随机变量

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \chi_{\{C_n=k\}} B_{n,k}$$

描述上述过程的样本。这里， χ_F 是集合 F 上的示性函数，该集合

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F, \\ 0 & \text{if } x \notin F. \end{cases}$$

我们证明 X_n 具有 分布 $K_n(x, \cdot)dt$。首先，我们注意到$B_{n,\,k}$ 的概率密度函数（pdf）为

$$f_{B_{n,k}}(t) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} t^k (1-t)^{n-k} = (n+1)p_{n,k}(t) \quad \text{for } t \in [0,1]$$

C_n 的概率质量函数（pmf）为

$$p_{C_n}(k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = p_{n,k}(x) \quad \text{for } k \in \{0, \ldots, n\}.$$

现在，对于所有的 $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \le z) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(X_n \le z \,|\, C_n = k)] && (6)\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(B_{n,k} \le z \,|\, C_n = k)] && (7)\\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \mathbb{P}(B_{n,k} \le z) && (8)\\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^z (n+1) p_{n,k}(t)\, dt && (9)\\
&= \int_0^z K_n(x,t)\, dt. && (10)
\end{aligned}$$

独立性　　第三个等式中使用了 C_n 和 $B_{n,k}$。因此， X_n 服从分布 $K_n(x,t)dt$。

现在，根据变量变换公式， $\sqrt{n}(X_n - x)$的分布为

$$\frac{1}{\sqrt{n}} K_n\left(x, \frac{t}{\sqrt{n}} + x\right) dt.$$

因此，只需证明以下等价命题，即可证明定理 1.2：

定理 3.1。固定 $x \in (0,1)$。假设 X_n 如上所定义。那么

$$\sqrt{n}(X_n - x) \xrightarrow{D} N(0, 2x(1-x)).$$

二项分布和贝塔分布经过标准化后，都会收敛于正态分布。直观来看， X_n ——它是二项分布与贝塔分布的混合——经过标准化后也会收敛于正态分布。事实上，推论 2.3 表明，对于较大的 n和 k， $\sqrt{n}(B_{n,k}-x)$近似服从 $N(\alpha, x(1-x))$，其中 $\alpha = \sqrt{n}(k/n - x)$。在随机过程 X_n 中， k 等于 $C_n \sim Bin(nx, nx(1-x))$。现在， α是随机变量 $C_n^* = \sqrt{n}\,(C_n/n - x)$，当 n较大时，它近似服从 $N(0, x(1-x))$。因此，直观来说，当 n足够大时

$$\sqrt{n}(X_n - x) \sim N(\ \alpha, x(1-x)) = \alpha + N(0, x(1-x)) = N(0, x(1-x)) + N(0, x(1-x)) = N(0, 2x(1-x)).$$

证明的大部分难点在于，随着 $|\alpha|$ 增大，近似式 $\sqrt{n}(B_{n,\ k} - x) \sim N(\alpha, x(1-x))$ 要成立，就需要 n 取大得多的值。然而，事实证明， $|\alpha|$取大值的可能性很小，因为 α 近似服从 $N(0, x(1-x))$。

定理 3.1 的证明。固定 $z \in \mathbb{R}$。令 $C_n^* = \sqrt{n}(C_n/n - x)$。那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sqrt{n}(X_n - x) \le z) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\sqrt{n}(B_{n,k} - x) \le z \,|\, C_n = k)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\sqrt{n}(B_{n,xn+\alpha\sqrt{n}} - x) \le z \,|\, \sqrt{n}(C_n/n - x) = \alpha)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\sqrt{n}(B_{n,xn+\alpha\sqrt{n}} - x) \le z \,|\, C_n^* = \alpha)] = \mathbb{E}(h_n(C_n^*)), \qquad (11)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 C_n 与 $B_{n,\ k}$相互独立得出，并且

$$h_n(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{P}(\sqrt{n}(B_{n,xn+\alpha\sqrt{n}} - x) \le z) & \text{if } xn + \alpha\sqrt{n} \in [0, n], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 K 是 $\mathbb{R}$的任意非空紧子集。设 $(\alpha_n) \subset K$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$。那么 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{xn+\alpha_n\sqrt{n}}{n} - x\right) = \alpha$。由推论 2.3 可得，当 $n \to \infty$时， $\sqrt{n}(B_{n,\ xn+\alpha_n\sqrt{n}} - x) \xrightarrow{D} N(\alpha, x(1-x))$。设 A是一个分布为 $N(\alpha, x(1-x))$ 的随机变量，并回顾一下， Ψ 是 $N(0, x(1-x))$ 的累积分布函数。依分布收敛给出：

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(B_{n,xn+\alpha_n\sqrt{n}} - x) \le z) = \mathbb{P}(A \le z) = \Psi(z - \alpha). \qquad (12)$$

由引理 2.4 可知， h_n在 K 上一致收敛于 $\Psi(\cdot - \alpha)$。由于 K 是任意的，因此在所有紧区间上一致收敛。

设 U 和 V 是相互独立且服从分布 $N(0, x(1-x))$ 的随机变量。根据定理 2.1，当 $n \to \infty$ 时， $C_n^* \xrightarrow{D} V$。由等式 (11)、(12) 和定理 2.5 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}(X_n - x) \le z) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h_n(C_n^*)) = \mathbb{E}(\Psi(z - V)) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(U \le z - V \,|\, V)) \\
&= \mathbb{P}(U \le z - V) = \mathbb{P}(U + V \le z).
\end{aligned}$$

由于 U和 V相互独立，和 $U+V$服从分布 $N(0, 2x(1-x))$。因此， $\sqrt{n}(X_n - x)$的累积分布函数逐点收敛于 $N(0, 2x(1-x))$的累积分布函数。 □

4. 广义伯恩斯坦–杜尔梅耶算子的极限

我们引入适用于 $[0,1]$上的可积函数 f 的 Lupaș 贝塔分布算子 [10]

$$L_n(f)(y)=\int_0^1 f(\theta)\frac{\theta^{ny}(1-\theta)^{n(1-y)}}{\mathcal{B}(ny+1,n(1-y)+1)}\,d\theta,$$

其中 $\mathcal{B}$ 是贝塔函数。注意，Lupaș 贝塔算子的核是 $Beta(ny+1,n(1-y)+1)$ 分布。具体而言，对于 $B_{n,k}\sim Beta(k+1,n-k+1)$，$0\le k\le n$，我们有

$$L_n(f)(k/n)=\mathbb{E}(f(B_{n,k})). \tag{13}$$

在本节余下部分，固定 $x\in(0,1)$。我们可以将广义伯恩斯坦–杜尔梅耶算子表示为

$$M_{n,w}(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)\frac{\int_0^1 f(t)p_{n,k}(t)w(t)\,dt}{\int_0^1 p_{n,k}(t)w(t)\,dt}=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)\frac{L_n(fw)(k/n)}{L_n(w)(k/n)}.$$

利用 (13)，Lupaș 贝塔算子可表示为贝塔分布的期望值。求和项可表示为二项分布的期望值。利用这些概率表示，我们可以将定理 1.4 的证明分解为两步：先计算 Lupaș 贝塔算子，再计算二项部分。两种情形下，都会用到定理 2.5 来求极限。

引理 4.1. 设 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ 有界变差。设 $k_n(\alpha)=xn+\alpha\sqrt{n}$。极限

$$\lim_{n\to\infty}L_n(f)(k_n(\alpha)/n)=\Psi(-\alpha)f(x-)+[1-\Psi(-\alpha)]f(x+), \tag{14}$$

在 $\mathbb{R}$ 的所有紧子集上，关于 α 一致成立。

证明。我们试图应用引理 2.4。设 K 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空紧子集。设 $(\alpha_n)\subset K$，使得 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$。显然，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{k_n(\alpha_n)}{n}-x\right)=\alpha$。因此，由推论 2.3 可得

$$B^*_{n,k_n(\alpha_n)}:=\sqrt{n}\left(B_{n,k_n(\alpha_n)}-x\right)\xrightarrow{D}N(\alpha,x(1-x))\text{ as }n\to\infty. \tag{15}$$

利用 (13)，我们以概率方式表示 Lupaș 贝塔分布算子，并得到

$$L_n(f)(k_n(\alpha_n)/n)=\mathbb{E}(f(B_{n,k_n(\alpha_n)}))=\mathbb{E}(h_n(B^*_{n,k_n(\alpha_n)})), \tag{16}$$

其中

$$h_n(t)=f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}+x\right)\chi_{[0,1]}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}+x\right)=f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}+x\right)\chi_{[-x\sqrt{n},(1-x)\sqrt{n}]}(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

由分解式

$$\chi_{[-x\sqrt{n},(1-x)\sqrt{n}]}=\chi_{[-x\sqrt{n},0)}+\chi_{\{0\}}+\chi_{(0,(1-x)\sqrt{n}]},$$

我们注意到，h_n 在 K 上一致收敛于 $h=f(x-)\chi_{(-\infty,0)}+f(x)\chi_{\{0\}}+f(x+)\chi_{(0,\infty)}$。由于 f 具有有界变差，(h_n) 一致有界。设 A 是一个服从分布 $N(\alpha,x(1-x))$ 的随机变量。不连续点集 $\mathcal{D}(h)\subset\{0\}$ 是闭集，且是 A 的分布的零测集。因此，由等式 (16)、(15) 和定理 2.5 可得

$$L_n(f)(k_n(\alpha_n)/n)=\mathbb{E}(h_n(B^*_{n,k_n(\alpha_n)}))\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}(h(A))=\Psi(-\alpha)f(x-)+[1-\Psi(-\alpha)]f(x+). \tag{17}$$

考虑函数序列 $(L_n(f)(k_n(\cdot)/n))_n$ 和收敛序列 (α_n)，将引理 2.4 应用于 (17)，可得 (14) 在 α 上关于 K一致收敛。由于 K 是任意的，(14) 在 α 上对 $\mathbb{R}$的所有紧子集一致成立。

□

定理 1.4 的证明。注意

$$M_{n,w}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) c_n(k) = \mathbb{E}(c_n(C_n)), \tag{18}$$

其中 $C_n \sim Bin(n, x)$ 且

$$c_n(k) = \frac{L_n(fw)(k/n)}{L_n(w)(k/n)} \text{ if } k \in [0, n], \text{ otherwise } c_n(k) = 0.$$

我们按如下方式变换 C_n 和 c_n。令 $C_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{C_n}{n} - x\right)$ 并定义 c_n^*，使得 $c_n(C_n) = c_n^*(C_n^*)$，也就是说，对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，有 $c_n^*(\alpha) = c_n(xn + \alpha\sqrt{n})$。然后

$$M_{n,w}(f)(x) = \mathbb{E}(c_n(C_n)) = \mathbb{E}(c_n^*(C_n^*)). \tag{19}$$

我们按如下方式定义函数 t_n、b_n

$$t_n(\alpha) = L_n(fw)(x + \alpha/\sqrt{n}) \quad \text{and} \quad b_n(\alpha) = L_n(w)(x + \alpha/\sqrt{n})$$

对于 $\alpha \in \mathbb{R}$。

由引理 4.1,

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = f(x-)w(x-)\Psi(-\alpha) + f(x+)w(x+)(1 - \Psi(-\alpha)) \tag{20}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} b_n(\alpha) = w(x-)\Psi(-\alpha) + w(x+)(1 - \Psi(-\alpha)) \tag{21}$$

在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上关于 α 一致成立。由 (20) 和 (21)

$$\lim_{n\to\infty} c_n^*(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n(\alpha)}{b_n(\alpha)} = \frac{f(x-)w(x-)\Psi(-\alpha) + f(x+)w(x+)(1 - \Psi(-\alpha))}{w(x-)\Psi(-\alpha) + w(x+)(1 - \Psi(-\alpha))} \tag{22}$$

在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛。注意，此处使用 $w(x-) \neq 0$ 或 $w(x+) \neq 0$，以确保在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子集上，分母 b_n 最终都有一致的正下界。

由于 f 是有界变差的，因此它有界，所以 (c_n) 和 (c_n^*) 一致有界。设 V 服从 $aN(0, x(1-x))$ 分布。由定理 2.1，(C_n^*) 依分布收敛于 V。方程 (22) 表明，(c_n^*) 在紧区间上一致收敛于方程 (22) 右侧的表达式，我们将其记为 c^*。回顾 (19)，应用定理 2.5 可得

$$\lim_{n\to\infty} M_{n,w}(f)(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(c_n^*(C_n^*)) = \mathbb{E}(c^*(V)). \tag{23}$$

展开右侧的表达式可得

$$\lim_{n\to\infty} M_{n,w}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-)w(x-)\Psi(-\alpha) + f(x+)w(x+)(1 - \Psi(-\alpha))}{w(x-)\Psi(-\alpha) + w(x+)(1 - \Psi(-\alpha))}\, d\Psi(\alpha), \tag{24}$$

在 (24) 中代入 $u = \Psi(-\alpha)$，即可得到 (3)。 □

5. 致谢

衷心感谢 E.E. Berdysheva 教授提出这一问题，在论文准备过程中给予的大力帮助，并提供有关伯恩斯坦-杜尔迈耶算子历史的参考资料。作者也感谢 F.C. Rath 提请作者注意 R.J. Ryder 教授的研究成果 [12]，并感谢后者提供有关贝塔分布正态近似的更多参考文献。感谢审稿人提出宝贵建议并认真审阅本文，尤其感谢他们提醒我们关注卢帕斯贝塔算子。

本研究得到了　部分由南非国家研究基金会资助 PMDS22103166345 .

参考文献

[1] Berdysheva, E. E. 关于任意测度的伯恩斯坦–杜尔迈耶算子，II：逐点收敛。《数学分析及其应用杂志》418, 2 (2014), 734–752。[2] Berdysheva, E. E., and Jetter, K. 带任意权函数的多元伯恩斯坦–杜尔迈耶算子。《逼近论杂志》162, 3 (2010), 576–598。专刊：Bommerholz 会议论文集。
[3] Berens, H., and Xu, Y. 关于带雅可比权函数的伯恩斯坦-杜尔迈耶多项式。C. K. Chui 编，波士顿学术出版社，第 25–46 页。[4] Bernstein, S. 基于概率计算的魏尔斯特拉斯定理证明。《哈尔科夫数学学会通讯》，第 2 辑 13 (1912), 1–2。[5] Çinlar, E. 概率与随机过程。数学研究生教材。施普林格纽约，2011。
[6] Ditzian, Z. 多维雅可比型伯恩斯坦–杜尔迈耶算子。《数学科学学报》60, 1 (1995), 225–244。
[7] Durrmeyer, J. L. 拉普拉斯变换的一个反演公式：矩理论中的应用。博士论文，巴黎大学理学院，1967。[8] Guo, S. 有界变差函数的杜尔迈耶算子的收敛速度。《逼近论杂志》51, 2 (1987), 183–192。
[9] Herzog, F., and Hill, J. D. 不连续函数的伯恩斯坦多项式。《美国数学杂志》68, 1 (1946), 109–124。[10] Lupaş, A. 贝塔算子序列。博士论文，斯图加特大学，1972。[11] Remmert, R., and Burckel, R. 复变函数论。数学研究生教材。施普林格纽约，1991。[12] Ryder, R. J. 当 $b \to \infty$ 时，贝塔分布（b, b）收敛于正态分布。单变量分布关系，2013。[13] Scheffe, H. 一个关于概率分布的有用收敛定理。《数理统计年刊》18, 3 (1947), 434–438。

附录 A. 定理 2.2 的证明

证明。我们沿用 [12] 中的证明方法，该方法表明，当 $n \to \infty$ 时，$Beta(n, n)$ 趋于正态分布。也就是说，对于 $\beta_{r_1,\ r_2} \sim Beta(r_1, r_2)$，我们证明 $\sqrt{r_1 + r_2}(\beta_{r_1,\ r_2} - \frac{r_1}{r_1+r_2})$ 的概率密度函数逐点收敛于 r_1、$r_2 \to \infty$ 和 $\frac{r_1}{r_1+r_2} \to \gamma$ 时 $N(0, \gamma(1-\gamma))$ 分布的概率密度函数。根据谢费定理 [13],，概率密度函数逐点收敛意味着依分布收敛。

贝塔分布的概率密度函数为

$$f_{\beta_{r_1,r_2}}(x) = \frac{\Gamma(r_1 + r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} x^{r_1-1}(1-x)^{r_2-1} \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

利用变量变换公式，$Y_{r_1,\ r_2} = \sqrt{r_1 + r_2}(\beta_{r_1,\ r_2} - \frac{r_1}{r_1+r_2})$ 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{Y_{r_1,r_2}}(y) &= \frac{1}{\sqrt{r_1 + r_2}} f_{\beta_{r_1,r_2}}\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} + \frac{y}{\sqrt{r_1 + r_2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_1 + r_2}} \frac{\Gamma(r_1 + r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} + \frac{y}{\sqrt{r_1 + r_2}}\right)^{r_1-1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{y}{\sqrt{r_1 + r_2}}\right)^{r_2-1}, \end{aligned}$$

对于 $-\frac{r_1}{\sqrt{r_1+r_2}} < y < \frac{r_2}{\sqrt{r_1+r_2}}$。我们证明概率密度函数对数的逐点收敛。注意

$$\begin{aligned}\ln(f_{Y_{r_1,r_2}}(y)) =& \underbrace{-\ln\sqrt{r_1+r_2}+\ln(\Gamma(r_1+r_2))-\ln(\Gamma(r_1))-\ln(\Gamma(r_2))}_{A}\\ &\underbrace{+(r_1-1)\ln\left(\frac{r_1}{r_1+r_2}+\frac{y}{\sqrt{r_1+r_2}}\right)+(r_2-1)\ln\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}-\frac{y}{\sqrt{r_1+r_2}}\right)}_{B}\end{aligned}$$

斯特林近似给出 $\ln(\Gamma(n)) = n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi/n} + O(\frac{1}{n}),\quad n\to\infty$。对 A进行近似，

$$\begin{aligned}A =& -\ln\sqrt{r_1+r_2}+(r_1+r_2)\ln(r_1+r_2)-(r_1+r_2)+\ln\sqrt{2\pi/(r_1+r_2)}+O\left(\frac{1}{r_1+r_2}\right)\\ &-\left[r_1\ln r_1-r_1+\ln\sqrt{2\pi/r_1}+O\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]-\left[r_2\ln r_2-r_2+\ln\sqrt{2\pi/r_2}+O\left(\frac{1}{r_2}\right)\right]\\ =& -\ln\sqrt{2\pi}+r_1\ln\frac{r_1+r_2}{r_1}+r_2\ln\frac{r_1+r_2}{r_2}+\frac{1}{2}\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}+\frac{1}{2}\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}+O\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).\end{aligned}$$

该极限是逐点的；因此固定 y。注意到 $\frac{r_1}{r_1+r_2}\to\gamma$，所以 $y\frac{\sqrt{r_1+r_2}}{r_1}$和 $y\frac{\sqrt{r_1+r_2}}{r_2}$趋于 0。因此，我们可以使用二阶泰勒级数近似 $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)$，当 $x\to 0$时。对 B进行近似，

$$\begin{aligned}B =& (r_1-1)\left[\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}+\ln(1+y\frac{\sqrt{r_1+r_2}}{r_1})\right]\\ &+(r_2-1)\left[\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}+\ln(1-y\frac{\sqrt{r_1+r_2}}{r_2})\right]\\ =& r_1\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}+y\sqrt{r_1+r_2}-\frac{1}{2}y^2\frac{r_1+r_2}{r_1}-\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}\right)\\ &+r_2\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}-y\sqrt{r_1+r_2}-\frac{1}{2}y^2\frac{r_1+r_2}{r_2}-\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right).\end{aligned}$$

结合对 A 和 B 的近似，我们得到

$$\begin{aligned}A+B =& \left[r_1\ln\frac{r_1+r_2}{r_1}+r_1\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}\right]+\left[r_2\ln\frac{r_1+r_2}{r_2}+r_2\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}\right]+\left[y\sqrt{r_1+r_2}-y\sqrt{r_1+r_2}\right]\\ &+\left[\frac{1}{2}\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}-\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}\right]+\left[\frac{1}{2}\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}-\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}\right]\\ &-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}y^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1}+\frac{r_1+r_2}{r_2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)\\ =& \quad -\frac{1}{2}\ln\frac{r_1}{r_1+r_2}-\frac{1}{2}\ln\frac{r_2}{r_1+r_2}-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}y^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1}+\frac{r_1+r_2}{r_2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)\\ \to& -\frac{1}{2}\ln\gamma-\frac{1}{2}\ln(1-\gamma)-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\gamma(1-\gamma)}=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(1-\gamma)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\gamma(1-\gamma)}}\right),\end{aligned}$$

当 r_1、$r_2\to\infty$和 $\frac{r_1}{r_1+r_2}\to\gamma$时。这是 $N(0,\gamma(1-\gamma))$ 分布的概率密度函数的自然对数。 □