arXiv:2303.11075v1 [math.LO] 16 Mar 2023

Kreisel 对 Gödel 系统 T 的集合论模型完全抽象性的反例

Martín Escardó

2007年7月23日

引言。我写下这篇短文，是因为似乎鲜有人知道，Gödel 系统 T 的集合论模型并非完全抽象。根据上下文引理，完全抽象等价于如下命题：可定义元素构成的子结构具有外延性；也就是说，任何两个在可定义自变量上取值相同的可定义泛函，在所有自变量上都必须取值相同。Kreisel 给出了一个反例，Barendregt 在第 581 页练习题中对此作了介绍。文中展示了一个基类型值可定义泛函，它在可定义自变量上为常值，但在任意自变量上并非常值。

这一构造令人意外之处在于，对离散自然数集的一点紧化进行穷举搜索，在系统 T 中是可定义的。知道这一点之后，利用一个众所周知的事实便可直接构造出该反例：可定义泛函相对于 2 上的离散拓扑和 $2^{\mathbb{N}}$ 上的积拓扑都是连续的。穷举搜索与此的联系，实际上已在第 $581]$ 页的练习 2 中明确提出。我们对建议的解法作了小幅改进，并以此表述 Kreisel 的反例。

系统 T。我们将系统 T 视为简单类型 λ 演算，其基类型包括自然数（包括零、后继函数和高阶原始递归）以及布尔值（包括 if-then-else）。

集合论模型。集合论模型将自然数类型解释为自然数集合 $\mathbb{N}$，将布尔值类型解释为集合 $2 = \{0, 1\}$，并约定 0 为假、1 为真。函数类型被解释为集合范畴中的指数对象（=所有函数构成的集合）。

$\mathbb{N}$的一点紧化。令

$$\mathbb{N}_\infty = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid \forall i \leq j.x_i \leq x_j\} = \{\bar{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\},$$

其中我们写作 $\bar{n} = 0^n 1^\omega$ 和 $\infty = 0^\omega$。最后一个等式需要经典逻辑，但我们不对此深究（见下文）。下文给出的论证利用了这样一个事实：可定义函数 $2^{\mathbb{N}} \to 2$ 相对于 2 上的离散拓扑以及 $2^{\mathbb{N}}$ （康托空间）上的乘积拓扑是连续的；还利用了 $\infty = \lim_n \bar{n}$ 在该拓扑下成立这一事实。注意， $\mathbb{N}_\infty$ 上的逐点序限制在 $\mathbb{N}$ 上就是自然序，并且 ∞ 是其最大元。对于 $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, 用 $\alpha + 1$ 表示序列 0α。那么 $\bar{n} + 1 = \overline{n+1}$ 和$\infty + 1 = \infty$。

$\mathbb{N}_\infty$的穷举可搜索性。定义 $\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}$: $2^{2^{\mathbb{N}}} \to 2^{\mathbb{N}}$ 如下:

$$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}(p)(i) = 1 \text{ iff } p(\bar{n}) \text{ for some } n \leq i.$$

由于有界存在量化可以归约为原始递归，因此这是 T-可定义的。根据构造,

$$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}(p) = \overline{\mu n.p(\bar{n})} \text{ if } p(\bar{n}) \text{ for some } n \in \mathbb{N},$$

and

$$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}(p) = \infty \text{ if there isn't } n \in \mathbb{N} \text{ such that } p(\bar{n}).$$

或者，将这两个陈述结合起来,

$$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}(p) = \inf\{x \in \mathbb{N}_\infty \mid p(x)\}$$

因为空集的下确界总是顶元素。因此，$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}$ 的像是 $\mathbb{N}_\infty$，并且

$$p(\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}(p)) \text{ iff } p(x) \text{ for some some } x \in \mathbb{N}_\infty.$$

用 [2], 的术语来说，集合 $\mathbb{N}_\infty$ 是可搜索的。注意，$\varepsilon_{\mathbb{N}_\infty}$ 即使对不连续的 p 也能实现搜索。

Kreisel 的反例。将 test 定义为： $2^{2^{\mathbb{N}}} \to 2$ ，定义如下

$$\mathrm{test}(f) = f\,[\inf x \in \mathbb{N}_\infty . f(x+1) = f(\infty)] = f(\infty) \implies f(\bar{0}) = f(\infty).$$

根据上述内容，这是 T可定义的。如果 f： $2^{\mathbb{N}} \to 2$是连续的，那么 test(f) 成立，因为存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\bar{n}) = f(\infty)$，如 $\lim_n \bar{n} = \infty$ 所示。因此，泛函 test 在 T 可定义自变量上是常值的。然而，对于由以下内容定义的 f ，test(f) 不成立：

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \infty, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因为在这种情况下， $[\inf\ x \in \mathbb{N}_\infty . f(x+1) = f(\infty)] = \infty$，因此

$$f\,[\inf x \in \mathbb{N}_\infty . f(x+1) = f(\infty)] = f(\infty)\ \text{but}\ f(\bar{0}) \neq f(\infty).$$

一个完全抽象模型。Kleene–Kreisel 泛函（从离散自然数和布尔值出发的 k-空间中的指数对象）就是一个例子；这里用到了 Kleene–Kreisel 稠密性定理这一事实：该定理给出了在系统 T 中实际上可定义的稠密序列。

经典逻辑。上述论证依赖于经典逻辑（以一种较弱的形式：一个序列要么是 ∞ ，要么不是）。这是必然的。从一个完全抽象模型出发，取其预层便可得到一个托普斯（一个基于直觉主义逻辑的有界集合论模型），它给出一个等价的完全抽象模型！

致谢。当我提出这个问题时，Gordon Plotkin 回答说，Barendregt 在20世纪70年代末就知道一个反例；后来 Alex Simpson 告诉我在哪里可以找到它。

参考文献

[1]H.P. Barendregt。《λ演算：其语法与语义》。North-Holland，1984年。

[2] M.H. Escard´o。《允许快速穷举搜索的无限集合》。载于 L. Ong 编，第22届 IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会，443–452页。IEEE 计算机学会，2007年。