arXiv:2303.11106v1 [math.OA] 20 Mar 2023

《C*代数近似内翻转的 K 理论刻画》勘误

DOMINIC ENDERS、ANDR´E SCHEMAITAT 和 AARON TIKUISIS

Abstract. 原论文中的一个错误在此得到指出和更正。满足 UCT 的、具有近似内翻转的 C* 代数，其范围已得到界定（结果表明，其数量少于原论文所声称的数量）。翻转映射在 K理论上的作用比预想的更为微妙，在某些分量中会涉及负号。为此，我们为 C* 代数引入新的几何分解，这种分解不涉及 K理论中的指标移位，因此可以更明确地描述张量积的 K¨unneth 公式中的商映射。

1. Introduction: the problem and corrections

[8]这些错误源于 [8, 引理 4.1], 的证明中的一个失误，其中写道：“映射$\alpha_{A,B}$在 [1, 第 23 节1], 中有明确描述，从该描述显然可知$\alpha_{B,A} \circ \sigma_{K_*(A)\, K_*(B)} = K_*(\sigma_{A,B}) \circ \alpha_{A,B}$，即 (4.2) 中的第一个方块是交换的。”

事实上，以下例子表明

$$\alpha_{B,A} \circ \sigma_{K_*(A),K_*(B)} \neq K_*(\sigma_{A,B}) \circ \alpha_{A,B},$$

限制到分量 $K_1(A)\otimes K_1(B)$ 上时（因此其陪域为 $K_0(B\otimes A)$）。

例 1.1. 设 $A = B := C(\mathbb{T})$，并设 $u \in C(\mathbb{T})$ 为典范生成元，因此 $[u]_1$ 是 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$的一个生成元。我们将 $C(\mathbb{T}) \otimes C(\mathbb{T})$ 与 $C(\mathbb{T}^2)$等同；在此等同下，翻转映射 $\sigma_{C(\mathbb{T}),\, C(\mathbb{T})}$ 对应于交换坐标：

$$(\sigma_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})}(f))(w, z) = f(z, w).$$

我们有 $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$，它由 $[1_{C(\mathbb{T}^2)}]_0$ 和 *Bott* 元生成。注意，$K_0(\sigma_{C(\mathbb{T}),\, C(\mathbb{T})})(b) = -b$[1] 以及 $\alpha_{C(\mathbb{T}),\, C(\mathbb{T})}([u]_1 \otimes [u]_1) = b$。因此，

$$\begin{aligned}\alpha_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})}(\sigma_{K_*(C(\mathbb{T})),K_*(C(\mathbb{T}))}([u]_1 \otimes [u]_1)) &= \alpha_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})}([u]_1 \otimes [u]_1)\\ &= b,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}K_*(\sigma_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})})(\alpha_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})}([u]_1 \otimes [u]_1)) &= K_*(\sigma_{C(\mathbb{T}),C(\mathbb{T})})(b)\\ &= -b \neq b.\end{aligned}$$

我们将证明，K¨unneth 翻转公式（[8, 方程 (4.2)]）左侧的方块在 $K_1(A)\otimes K_1(B)$ 上恰好相差一个负号才交换（在其他三个分量上则不带负号交换）。这会进一步导致 [8, 方程 (4.2)] 右侧的方块仅在适当的分量上相差负号才交换

AT 由加拿大自然科学与工程研究委员会探索资助支持。[1]由于 $K_0(C_0((0,1)^2))$ 中的 Bott 元来自黏合构造，因此 $(0,1)^2$，上的任何反射，特别是坐标交换（即翻转映射），都会将此 Bott 元映为其逆元。利用典范嵌入 $C_0((0,1)^2) \to C(\mathbb{T}^2)$，可知对于 $C(\mathbb{T}^2)$，翻转映射和 Bott 元也具有同样的性质。

（详见下文引理 1.4），并进一步影响对哪些可分类 C*-代数具有近似内半翻转这一问题的精确表述。下面举例说明 K¨unneth 翻转公式的扭结部分中负号出现的位置。

例 1.2. 令 $A = B := \mathcal{O}_{n+1}$. 根据 *K¨unneth* 公式，我们有$\beta_{\mathcal{O}_n,\ \mathcal{O}_n}$： $K_1(\mathcal{O}_{n+1} \otimes \mathcal{O}_{n+1}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个同构，并且容易验证（例如，通过核查 [8, 命题 5.1]的证明）$\eta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ 是单位元。另一方面，根据 [4,命题 3.5] ，类

$$u := \sum_{i=1}^{n+1} s_i \otimes s_i^*$$

生成 $K_1(\mathcal{O}_{n+1} \otimes \mathcal{O}_{n+1})$，其中 $\{s_i\}_{i=1}^{n+1}$ 是$\mathcal{O}_{n+1}$的标准生成元集。由于 $\sigma_{\mathcal{O}_{n+1},\ \mathcal{O}_{n+1}}(u) = u^* = u^{-1}$ ，可知 $K_1(\sigma_{\mathcal{O}_{n+1},\ \mathcal{O}_{n+1}}) = -$单位元，因此(1.2) 确实在奇数次情形下可交换。

我们在证明 [8, 式 (4.2)]右侧方框的交换性这一修正版本时，引入了新的技巧。借助 Kirchberg 代数，我们能够得到不涉及指标移位的自由分解；这使得与 Tor 相关的计算更具概念性，也更容易处理。

在列举具有近似内翻转的 C*-代数时，还出现了另一个错误：其中错误地指出，[8,定理 2.2] （及相关结果）中的超自然数 n 必须是无限型。我们也借此机会更正这一错误。

我们在此列出 [8] 中所有错误的结果及其更正。接下来的章节将证明修正后的陈述。（注意， $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Z}$。）

定理 1.3 （对 [8, 定理 2.2]的更正。 设 A 是一个可分、含幺的 C*-代数，具有严格比较性质，属于 UCT 类，且要么是无限的，要么是准对角的。以下条件等价。

(i) A 具有近似内翻转；*(iii)* A 具有渐近内翻转；*(iv)* A 是单的、核的，至多有一个迹，并且 $K_0(A) \oplus K_1(A)$（作为分次无序群）同构于 $0 \oplus \mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Q}_n \oplus \mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$之一，其中 m 和 n 是超自然数， m 为无限型，且 m整除 n；*(v)* A 与以下对象之一 *Morita* 等价：*(a)* $\mathbb{C}$；*(b)* $\mathcal{E}_{n,1,m}$；*(c)* $\mathcal{E}_{n,1,m} \otimes \mathcal{O}_\infty$；*(d)* $\mathcal{F}_{1,m}$，其中在 *(b)–(d)* 中， m 和 n 是超自然数， m 为无限型，且 m 整除 n。

在 [8, 定理 2.2], 中，声称上述条件也等价于 (ii) $A \otimes A$ 具有近似内翻转。然而，现在发现事实并非如此，例如 $\mathcal{O}_\infty$ 不具有近似内翻转，但$\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ （它与 $\mathcal{O}_\infty$ Morita 等价）却具有近似内翻转。

以下是 [8] 中基本引理的正确版本，该引理将 K¨unneth 公式与翻转映射联系起来。为陈述考虑到指标相关行为的版本，我们使用 $\beta_{A,B}$： $K_{i+j+1}(A \otimes B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A)\ K_j(B))$ 表示 K¨unneth 公式映射

$$K_{i+j+1}(A \otimes B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B)) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_{1-i}(A), K_{1-j}(B)),$$

与映到 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A)\ K_j(B))$ 的坐标投影复合。

引理 1.4 (更正 [8, 引理 4。1])。 设 A, B 是 C*-代数，且为可分的，并属于 UCT 类。对于 $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} K_i(A)\otimes K_j(B) & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & K_{i+j}(A\otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle (-1)^{ij}\sigma_{K_i(A),K_j(B)}} & & \downarrow{\scriptstyle K_{i+j}(\sigma_{A,B})} \\ K_j(B)\otimes K_i(A) & \xrightarrow{\alpha_{B,A}} & K_{i+j}(B\otimes A) \end{array} \tag{1.1}$$

and

$$\begin{array}{ccc} K_{i+j+1}(A\otimes B) & \xrightarrow{\beta_{A,B}} & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A),K_j(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle K_{i+j+1}(\sigma_{A,B})} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^{1+ij}\eta_{K_i(A),K_j(B)}} \\ K_{i+j+1}(B\otimes A) & \xrightarrow{\beta_{B,A}} & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_j(B),K_i(A)). \end{array} \tag{1.2}$$

映射 $\beta_{A,\,B}$ 如定义 *3.4* 所述，并符合 *K¨unneth* 公式。

定理 1.5 (对 [8, 定理 5.2] 的勘误)。 设 A 是 C*-代数，属于UCT 类。假设 $K_0(A)\oplus K_1(A)$ 是以下分次群之一：

(i) $0\oplus\mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$，其中 m 是无限型超自然数；或(ii) $\mathbb{Q}_n\oplus\mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$，其中 m 和 n 是超自然数， m 为无限型，且 m 整除 n。

那么，翻转映射 $\sigma_{A,\,A}$： $A\otimes A\to A\otimes A$ 与恒等映射具有相同的 *KK*-类。

推论 1.6 (对 [8, 推论 5.3] 的勘误)。 设 m 和 n 是超自然数，使得 m 为无限型且 m 整除 n。那么，$\mathcal{E}_{n,\,1,\,m}$ 和 $\mathcal{F}_{1,\,m}$ 具有渐近内翻转。

下一个结果是对 [8, 定理 6.1], 的修正，给出了可分类且具有近似内翻转的 C*-代数在 K理论上的正确限制（与定理 1.3 中的限制相符）。

定理 1.7. 设 A 是属于 UCT 类的可分C*-代数，且 A 具有近似内翻转。那么 $K_0(A)\oplus K_1(A)$ 同构于以下分次群之一：

(i) $0\oplus\mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$，其中 m 是无限型超自然数；或者(ii) $\mathbb{Q}_n\oplus\mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$，其中 m 和 n 是超自然数， m 为无限型，且 m 整除 n。

尽管 [8, 引理 6.2-6.4] 的证明存在问题，因为它们使用了 [8, 引理 4.1],，但其陈述仍然正确，我们将予以证明。

结果 [8, 推论 7.4] 不正确，例如，C*-代数 $A := \bigotimes_{p\,素} M_p$ 具有近似内翻转，但 $A\otimes A$ 并非自吸收。

拉回。 除了 [8], 中介绍的记号和预备知识外，我们还将使用 C*-代数范畴中的拉回；现向读者说明其具体构造。给定 C*-代数 A， B， C 以及 *-同态ϕ: $A\to C$, ψ: $B\to C$，相应的拉回 是 C*-代数

$$D := \{(a,b)\in A\oplus B : \phi(a)=\psi(b)\},$$

且相应的拉回图是交换图

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ B & \xrightarrow[\psi]{} & C, \end{array}$$

其中映射 $D \to A$ 和 $D \to B$ 是坐标投影在 $A \oplus B$上的限制。

全文中，$\otimes$ 表示最小张量积。

2. Geometric resolutions for C*-algebras revisited

为了证明张量积的 K¨unneth 公式，需要一种方法，通过 C*-代数层面的映射，实现 C*-代数的 K群的投射分解。这些所谓的几何分解 由 Rosenberg 和 Schochet 在 [7] 中引入。其构造可概述如下：

对于任意可分的C*-代数 A，存在一个扩张

$$0 \to S(S^2A \otimes \mathbb{K}) \to E \to B \to 0$$

由可分的C*-代数组成，使得相应的 *K*理论六项正合列退化为

$$0 \longrightarrow K_*(E) \longrightarrow K_*(B) \xrightarrow{\partial} K_*(S(S^2A \otimes \mathbb{K})) \longrightarrow 0$$

并构成 K_*（S（$S^2A \otimes \mathbb{K}$））$\cong K_{*+1}$（A）的投射分解。

不过，他们的方法有一个小缺点。以这种方式得到的投射分解总是涉及次数移位和边界映射∂。这在 K群带有额外结构的情况下可能会造成问题：由 *-同态诱导的 K 理论映射会保留这些结构，但映射 ∂ 则未必如此。例如，在张量积的 K 理论研究中，就需要跟踪诸如$K_i(C \otimes D) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} K_j(C) \otimes K_{i+j}(D)$这样的分解（对于适当的 C*-代数 C，D）。

本节将介绍新的几何分解，它们不涉及这些指标移位。这使得 C*-张量积的 K理论计算更具概念性，并能更明确地描述 K¨unneth 公式中的商映射，见命题 3.5。

另一个微妙之处在于，我们要求几何分解是半分裂的。Rosenberg 和 Schochet 所使用的几何分解自动满足这一条件，因为他们采用映射锥序列。半分裂这一特性对于在最小张量积下与固定的 C*-代数作张量积时保持正合性至关重要，参见注记3.2；此外，它还用于得到 UCT 的三取二性质，而对于核 C*-代数，这一性质是自动成立的。我们先证明这个众所周知的结果。

引理2.1。假设

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

是可分C*-代数的半分裂扩张，即 π 存在一个完全正压缩分裂（*c.p.c.*）。那么，如果短正合列中的三个代数有两个满足UCT，则第三个也满足。

证明。设 D 是一个 σ-含幺 C*-代数，且满足 $K_*(D) = 0$。利用 [1, 定理 19.5.7] 以及我们的扩张是半分裂这一事实，可得到一个六项正合列

$$\begin{array}{ccccc} KK(A,D) & \longrightarrow & KK(E,D) & \longrightarrow & KK(I,D) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1(I,D) & \longleftarrow & KK^1(E,D) & \longleftarrow & KK^1(A,D) \end{array}$$

例如，如果 A 和 E 满足 UCT，则上述图表可简化为

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & KK(I,D) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1(I,D) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

由此可得 $KK^*(I,\ D) = 0$；而且，由于 D 是任意的，[1, 23。10.5 (iv)⇒(i)] 蕴含 I 也满足 UCT。若假设扩张中的另外任意两个 C*-代数满足 UCT，同样的论证也适用。□

定义 2.2。设 A 是一个C*-代数。一个半分裂短正合列

$$0 \to I \to E \to A \to 0$$

称为 **∂-自由几何分解**，如果其关联的 *K*理论六项正合列退化为

$$0 \to K_*(I) \to K_*(E) \to K_*(A) \to 0$$

并构成 $K_*(A)$ 的投射分解。

引理 2.3。设 $\varphi\colon A \to B$ 是一个 *-同态。那么，存在一个C*-代数$\hat{}A$，包含 A，使得

(i) $A \subseteq \hat{}A$ 的包含映射是同伦等价，(ii) 映射 φ 可延拓为满射 *-同态 $\hat{}\varphi$，并且该映射还存在完全正分裂 s:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle\subseteq}\downarrow & \overset{\hat{\varphi}}{\nearrow} & \\ \hat{A} & \underset{s}{\curvearrowleft} & \end{array}$$

证明。我们使用自由积。令 CB 表示 B上的锥，即 $CB = \hat{}C_0(0,\ 1] \otimes B$。设 $A := A * CB$ 且 $\hat{}\varphi := \varphi * \mathrm{ev}_1$。那么 $\mathrm{id}_A * 0$ 是包含映射的同伦逆 $\hat{}$，证明了同伦等价这一结论。由构造可知，扩张 $\hat{}\varphi$ 是满射，并且通过复合 $\hat{}B \to CB\colon\ b \mapsto \iota \otimes b$（其中 $\iota(t) := t$）与包含映射 $CB \to A$，可得到一个完全正收缩分裂。□

下一个定理表明，存在足够多的 ∂-自由几何分解。

定理 2.4。设 A 是一个满足UCT 的可分C*-代数，并且

$$0 \to P_* \to Q_* \xrightarrow{p} K_*(A) \to 0$$

是 $K_*(A)$的一个可数投射分解。那么，存在一个 ∂-自由的几何分解，由满足UCT的可分C*-代数组成，并且诱导出给定的 $K_*(A)$分解。

证明。设 B 是一个含幺 UCT-Kirchberg 代数，满足 $K_*(B) = Q_* \oplus (\mathbb{Z},0) \tilde{=} (Q_0 \oplus \mathbb{Z}, Q_1)$。我们将 $p \oplus \mathrm{id}$ 视为 $\mathrm{Hom}(K_*(B)\ K_*(A))$ 中的一个元素:

$$\begin{array}{ccc} Q_* \oplus (\mathbb{Z},0) & \xrightarrow{p\oplus\mathrm{id}} & K_*(A) \oplus (\mathbb{Z},0) \\ \uparrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\uparrow \\ K_*(B) & \longrightarrow & K_*(\tilde{A}) \end{array}$$

由于 B 满足 UCT，我们可以将 $p \oplus \mathrm{id}$ 提升为 $KK(B,A) \cong KK(B, A \otimes \mathcal{O}_\infty)$ 中的一个元素。根据 [6, 定理 8.2.1 (i)]，这个 KK 元素可以由一个 *- 同态实现

$$\varphi\colon B \to (\tilde{A} \otimes \mathcal{O}_\infty) \otimes \mathbb{K}.$$

现在应用引理 2.3，得到一个半分裂扩张

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \overline{B} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \tilde{A} \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

使得 $B \subseteq B$ 是一个同伦等价。将 $K_*(B)$ 与 $K_*(\tilde{B})$ 以及 $K_*(A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K})$ 与 $K_*(A)$ 视为相同后，我们看到 $K_*(\varphi)$ 与 $p \oplus \mathrm{id}$ 同构。由于 $\overline{B} \sim_{KK} B$ 和 $A \otimes \overline{\mathcal{O}}_\infty \otimes \mathbb{K} \sim_{KK} A$，我们看到 B 和 $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K}$ 满足 UCT。由于该扩张是半分裂的，根据引理2.1，我们得出 I 满足 UCT。

接下来，我们需要将此扩张限制到 $A \subseteq \tilde{A} \subseteq (A \otimes \mathcal{O}_\infty) \otimes \mathbb{K}$。我们分两步进行；首先考虑子扩张

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \overline{\varphi}^{-1}(\tilde{A}) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \tilde{A} \longrightarrow 0\ ,$$

它仍然是半分裂的（沿用之前分裂的限制）。因此，运用相同的三取二论证，我们发现$\varphi^{-1}(\tilde{A})$满足 UCT。将五引理应用于该扩张的 K理论，可知这个子扩张仍然诱导$p \oplus$恒等映射。更准确地说，下图是交换的：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_*(I) & \longrightarrow & K_*(\overline{\varphi}^{-1}(\tilde{A})) & \xrightarrow{K_*(\overline{\varphi})} & K_*(\tilde{A}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & K_*(I) & \longrightarrow & K_*(\overline{B}) & \xrightarrow[K_*(\overline{\varphi})]{} & K_*(\tilde{A} \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

最后，我们转而考虑子扩张

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \overline{\varphi}^{-1}(A) \xrightarrow{\overline{\varphi}} A \longrightarrow 0\ ,$$

它再次是半分裂的（同样是通过限制之前的分裂得到），因此由满足 UCT 的 C*-代数组成。由于 $\varphi^{-1}(\tilde{A})/\varphi^{-1}(A)$ 与 $\tilde{A}/A$ 同构，这个扩张在K理论上刻画了 $p\colon Q_* \to K_*(A)$。证明至此完成。□

以下结果将使我们能够比较任意两个给定的 ∂-自由几何分解。它还表明，我们的构造关于 *-同态是自然的，参见注 3.6。

引理 2.5。 给定两个无 ∂ 的几何分解

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow I' \xrightarrow{\iota'} E' \xrightarrow{\pi'} A' \longrightarrow 0$$

的 C*-代数 A, A' 以及一个 *-同态 $\varphi\colon A \to A'$，构成拉回

$$\begin{array}{ccc}
\overline{E} & \xrightarrow{p'} & E' \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\
E & \xrightarrow[\varphi\circ\pi]{} & A'
\end{array}$$

那么，取 $\pi \coloneqq \pi \circ p$ 和 $I \coloneqq \overline{\mathrm{Ker}(\pi)}$，以下图表交换，且中间一行为 A 的 ∂-自由几何分解。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\pi'} & A' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle q'} & & \uparrow{\scriptstyle p'} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{I} & \longrightarrow & \overline{E} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}
\tag{2.1}
$$

如果 A 和 A' 的几何分解由满足C^*-代数的可分代数组成，且这些代数满足 UCT，那么 I 和 E 是可分的，并满足UCT。

证明。 E 的K群可利用长正合Mayer-Vietoris序列计算（参见 [1,定理 21.2.2]）：

$$
\begin{array}{ccccccc}
K_{*-1}(A') & \xrightarrow{\gamma} & K_*(\overline{E}) & \xrightarrow{p_* \oplus p'_*} & K_*(E) \oplus K_*(E') & \xrightarrow{\begin{pmatrix} (\varphi \circ \pi)_* \\ -\pi'_* \end{pmatrix}} & K_*(A') \\
\uparrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\
\vdots & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

利用 π'_* 的满射性，可知 $\gamma = 0$ 和 p_* 均为满射。[2] 特别地，$(\pi \circ p)_* = (\pi)_*$ 也是满射，因此 $\overline{\ }$ 与(2.1)中间一行相关联的K理论六项正合列退化为

$$0 \to K_*(\overline{I}) \to K_*(\overline{E}) \to K_*(A) \to 0.$$

这是 $K_*(A)$的一个投射分解，因为由上面的长正合列的正合性可知， $K_*(E)$是自由群 $K_*(E) \oplus K_*(E')$ 的子群，因而自身也是自由群。此外，若 s （分别为 s' ）是 π （分别为 π' ）的完全正收缩，则映射

$$\overline{s} \colon A \to \overline{E} : a \mapsto (s(a), s'(\varphi(a)))$$

是关于 π的完全正收缩。这表明（2.1）中的中间行是关于 A的 ∂-自由几何分解。

对于其余结论，注意到 $I = I \oplus I'$，这表明若 I 和 I' 满足UCT，则 $\overline{I}$ 也满足UCT。由于该扩张是半分裂的，引理2.1表明E 也满足UCT。利用标准的三取二论证，同样可得 I 和 E 具有可分性。□

3. The Künneth formula

我们利用第2节中的 ∂-自由几何分解，给出K¨unneth公式的修订描述。在构造K¨unneth序列之前，我们先约定如何处理由此产生的Tor项。

定义3.1。 设 G_0、G_1 为阿贝尔群，并设

$$0 \to P_i \to Q_i \to G_i \to 0 \qquad (i = 0, 1)$$

[2]对于 $x \in K_*(E)$，存在 $y \in K_*(E')$，使得 $\pi'_*(y) = (\varphi \circ \pi)_*(x)$。因此，$(x, y) \in \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} (\varphi \circ \pi)_* \\ -\pi'_* \end{pmatrix} = \mathrm{Im}(p_* \oplus p'_*)$，所以 $x \in \mathrm{Im}(p_*)$。

是 G_i的一个投射分解。于是，左Tor函子$\mathrm{LTor}_1^{\mathbb{Z}}$ 和右Tor函子$\mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}$ 由下列正合列定义：

$$0 \to \mathrm{LTor}_1^{\mathbb{Z}}(G_0, G_1) \to P_0 \otimes G_1 \to Q_0 \otimes G_1 \to G_0 \otimes G_1 \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}(G_0, G_1) \to G_0 \otimes P_1 \to G_0 \otimes Q_1 \to G_0 \otimes G_1 \to 0.$$

函子 $\mathrm{LTor}_1^{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}$ 对两个变量都是自然的，并且在自然同构意义下良定义（这些自然同构来自投射分解的不同选取）。

尽管基本的同调代数告诉我们，$\mathrm{LTor}_1^{\mathbb{Z}}(G_0, G_1)$ 与 $\mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}(G_0, G_1)$ 自然同构（因此通常简记为 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G_0, G_1)$），但为了进行后续计算，我们需要固定 Tor 函子的一种具体实现。我们倾向于采用 LTor 的表述方式，但也指出，使用 RTor 也有显然类似的构造。这将得到同构意义下相同的结果，注 3.7 对此作了精确说明。因此，在本文余下部分中，我们将 Tor 和 LTor 视为同义词。

注 3.2。 在本文其余部分中，我们将不加引用地使用以下事实。令

$$0 \to I \to E \to A \to 0$$

构成一个半分裂短正合列。那么，对于任意C*-代数 B，下列序列

$$0 \to I \otimes B \to E \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

and

$$0 \to B \otimes I \to B \otimes E \to B \otimes A \to 0$$

都是正合的，这由 [2, 定理 3.2] 可得。这条注记特别适用于 ∂-自由几何分解。

记号 3.3. 给定一个C*-代数 B 和一个半分裂短正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

分别从左侧或右侧与 B 张量积后，我们得到另一个短正合列。所诱导的边界映射记为

$$\partial_A \colon K_*(B \otimes A) \to K_*(B \otimes I),$$
$${}_A\partial \colon K_*(A \otimes B) \to K_*(I \otimes B).$$

这些映射都是奇的。

对于 C*-代数 A, B 以及 $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，我们回顾映射

$$\alpha_{A,B} : K_i(A) \otimes K_j(B) \to K_{i+j}(A \otimes B),$$

如 [1, 第 23]章中所定义。另请参见第 5 节中的明确描述。当A 属于 UCT 类且 $K_*(A)$ 无挠时，$\alpha_{A,\ B}$ 是一个同构（根据 K¨unneth 公式， [1,定理 23.3.1]）。

定义 3.4。 设 A, B 是可分的 C*-代数，且 A 属于 UCT 类。给定任意一个 ∂-自由几何分解

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \iota\ } E \xrightarrow{\ \pi\ } A \longrightarrow 0$$

A 的（如定义 *2.2* 所述），由属于 UCT 类的可分 C*-代数组成，我们定义一个奇映射

$$\beta_{A,B} \coloneqq \alpha_{I,B}^{-1} \circ {}_A\partial \colon K_*(A \otimes B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A), K_*(B)).$$

注意，根据定理 *2.4*，存在这样一个无 ∂ 的几何分解。

命题 3.5。 设 A, B 是可分的C*-代数，且 A 属于UCT 类，并设

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

是由 A 组成的 ∂-自由几何分解，其中包含 *UCT* 类中的可分 C^* 代数。这如上所述定义了$\beta_{A,\ B}$ 。于是，$\beta_{A,\ B}$ 的值域（先验上包含于 $K_*(I) \otimes K_*(B)$）确实包含于 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A)\ K_*(B))$，且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} K_*(A\otimes B) & \xrightarrow{\beta_{A,B}} & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A),K_*(B)) \\ {\scriptstyle {}_A\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\ K_*(I\otimes B) & \xleftarrow[\alpha_{I,B}]{\cong} & K_*(I)\otimes K_*(B) \\ {\scriptstyle (\iota\otimes\mathrm{id})_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_*\otimes\mathrm{id}} \\ K_*(E\otimes B) & \xleftarrow[\alpha_{E,B}]{\cong} & K_*(E)\otimes K_*(B) \end{array} \tag{3.1}$$

映射 $\beta_{A,\ B}$ 除了由此选择所产生的自然同构外，仅取决于 ∂-自由几何分解的选择；并且 $\beta_{A,\ B}$ 适用于张量积的 *K¨unneth* 公式，即它使下列序列

$$0 \longrightarrow K_*(A)\otimes K_*(B) \xrightarrow{\alpha_{A,B}} K_*(A\otimes B) \xrightarrow{\beta_{A,B}} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A),K_*(B)) \longrightarrow 0$$

正合。

证明。 (3.1) 的上方方块根据定义与 $\beta_{A,\ B}$ 交换（只需证明 $\beta_{A,\ B}$ 的值域正确）。注意到，(3.1) 的下方方块根据映射 α 的自然性而交换；并且 $\alpha_{I,\ B}$，$\alpha_{E,\ B}$ 是同构，因为 I，E 满足 UCT 且具有自由 K群。由于图表左侧取自与该扩张相关联的 K理论六项正合列

$$0 \to I\otimes B \to E\otimes B \to A\otimes B \to 0,$$

可以看出，$\beta_{A,B}$确实映射到 $\iota_*\otimes$id 的核，即根据定义为 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A)\ K_*(B))$。

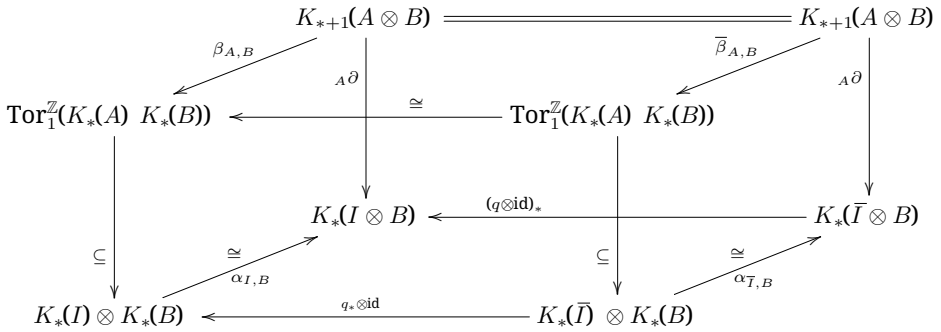
为了说明该定义不依赖于 ∂-自由几何分解的具体选择，令 $0 \to I' \to E' \to A \to 0$ 为 A 的另一个 ∂-自由几何分解，它由属于 UCT 类的可分 C*-代数组成，并用 $\beta'_{A,B}$ 表示定义 3.4 中描述的相应映射。为了比较由这两个不同分解得到的映射 $\beta_{A,B}$ 和 $\beta'_{A,B}$，我们应用引理 2.5 中描述的拉回构造，得到交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle q}\uparrow & & {\scriptstyle p}\uparrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{I} & \xrightarrow{\overline{\iota}} & \overline{E} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle q'}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\iota'} & E' & \xrightarrow{\pi'} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

行是正合的。根据引理 2.5，中间一行仍是一个无 ∂几何消解，其中 I 和 E 满足 UCT，因此满足

[3]但请注意，Tor 群仅在这种自然同构意义下定义。

定义 3.4，并且还给出一个映射 $\beta_{A,\,B\circ}^{\quad -}$ 根据不同β的定义，我们得到图表



我们需要证明立方体的顶面可交换。只要其他各面都可交换，这一点便成立。左面和右面根据 $\beta_{A,B}$ and$\overline{\beta}_{A,B}$ 的定义可交换，后面根据边界映射 $_A\partial$ 的自然性可交换。底面根据 α 的自然性可交换，前面则根据 Tor 函子的自然性可交换。因此，$\beta_{A,B}$ 与 $\overline{\beta}_{A,B}$ 相差一个自然同构，该同构来自对 $K_*(A)$ 采用不同投射分解的选择。由于 Tor 群只在此类同构意义下定义，因此有 $\beta_{A,B}=\overline{\beta}_{A,B\circ}$ 同样的论证也适用于第二个几何实现，因此 $\beta'_{A,B}=\overline{\beta}_{A,B}=\beta_{A,B\circ}$

最后，长正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} K_*(I\otimes B) & \xrightarrow{(\iota\otimes\mathrm{id})_*} & K_*(E\otimes B) & \xrightarrow{(p\otimes\mathrm{id})_*} & K_*(A\otimes B) & \xrightarrow{\ _A\partial\ } & K_*(I\otimes B) \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \vdots & & & & & & \vdots \end{array}$$

拆分为

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}((\iota\otimes\mathrm{id})_*)\longrightarrow K_*(A\otimes B)\longrightarrow \mathrm{Ker}((\iota\otimes\mathrm{id})_*)\longrightarrow 0.$$

现在，由于 $\alpha_{I,\,B}$ 和 $\alpha_{E,\,B}$ 都是同构，可得

$$\mathrm{Coker}((\iota\otimes\mathrm{id})_*)\cong \mathrm{Coker}(\iota_*\otimes\mathrm{id})\cong K_*(A)\otimes K_*(B)$$

and

$$\mathrm{Ker}((\iota\otimes\mathrm{id})_*)\cong \mathrm{Ker}(\iota_*\otimes\mathrm{id})\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A),K_*(B)),$$

经过检验确认这些映射相互吻合后，便得到张量积的 K¨unneth 公式。□

注 3.6. 定义 *3.4* 中构造的映射 $\beta_{A,\,B}$ 关于两个变量都是自然的。虽然关于第二个变量的自然性显而易见，但关于第一个变量的自然性可通过引理 *2.5* 的拉回构造证明。

注 3.7. 与定义 *3.4* 类似，我们可以使用右*Tor*函子（见定义*3.1*），并定义

$$\beta^R_{A,B}\colon K_*(A\otimes B)\to \mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A),K_*(B))$$

由 $x\mapsto \alpha_A^{-1}{}_{,\,J}\circ\partial_B(x)$ 给出，只要 B 是满足C*-代数且满足UCT的可分代数。那么，对于第二个变量的任意 ∂-自由几何分解

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{\ \iota\ } F\xrightarrow{\ \pi\ } B\longrightarrow 0,$$

由满足UCT的可分C*-代数组成，映射 $\beta^R_{A,\ B}$ 使图表

$$\begin{array}{ccc} K_*(A\otimes B) & \xrightarrow{\beta^R_{A,B}} & \mathrm{RTor}_1^{\mathbb{Z}}(K_*(A),K_*(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_B} & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\ K_*(A\otimes J) & \xleftarrow[\alpha_{A,J}]{\cong} & K_*(A)\otimes K_*(J) \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}\otimes\iota)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\iota_*} \\ K_*(A\otimes F) & \xleftarrow[\alpha_{A,F}]{\cong} & K_*(A)\otimes K_*(F) \end{array}$$

可交换，并由此得到张量积的 *K¨unneth* 公式，与命题 *3.5* 中一样。此外，$\beta^R_{A,B}$ 在两个变量上都是自然的，并且在自然同构意义下与 $\beta_{A,B}$ （来自定义 *3.4*）一致。

4. 翻转映射与 K¨unneth 公式

引理 4.1。 考虑两个 ∂-自由几何分解

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota_A} E \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota_B} F \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0$$

它们由满足 UCT 的可分 C*-代数组成。于是，与之相关的 *K*理论六项正合序列

$$0 \longrightarrow I\otimes F \xrightarrow{\iota_1} I\otimes F + E\otimes J \longrightarrow A\otimes J \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow E\otimes J \xrightarrow{\iota_2} I\otimes F + E\otimes J \longrightarrow I\otimes B \longrightarrow 0$$

退化为两个短正合列

$$0 \longrightarrow K_*(I\otimes F) \longrightarrow K_*(I\otimes F + E\otimes J) \longrightarrow K_*(A\otimes J) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_*(E\otimes J) \longrightarrow K_*(I\otimes F + E\otimes J) \longrightarrow K_*(I\otimes B) \longrightarrow 0.$$

证明。 我们考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I\otimes F & \xrightarrow{\iota_1} & I\otimes F + E\otimes J & \longrightarrow & A\otimes J & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\iota_B} & & \\ 0 & \longrightarrow & I\otimes F & \longrightarrow & E\otimes F & \xrightarrow{\pi_A\otimes\mathrm{id}} & A\otimes F & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.1}$$

(4.1) 的底行导出以下六项正合列

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I\otimes F) & \longrightarrow & K_0(E\otimes F) & \longrightarrow & K_0(A\otimes F) \\ {\scriptstyle 0}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ K_1(A\otimes F) & \longleftarrow & K_1(E\otimes F) & \longleftarrow & K_1(I\otimes F) \end{array}$$

事实上，利用 K¨unneth 公式的自然性，并利用 $K_*(F)$ 是自由的这一事实，可以看出映射 $K_i(I\otimes F) \to K_i(E\otimes F)$ 是单射。现在，利用六项正合序列中边界映射的自然性，我们可以看出以下

图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} K_{*+1}(A\otimes J) & \xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes\iota_B)_*} & K_{*+1}(A\otimes F) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ K_*(I\otimes F) & = & K_*(I\otimes F) \end{array}$$

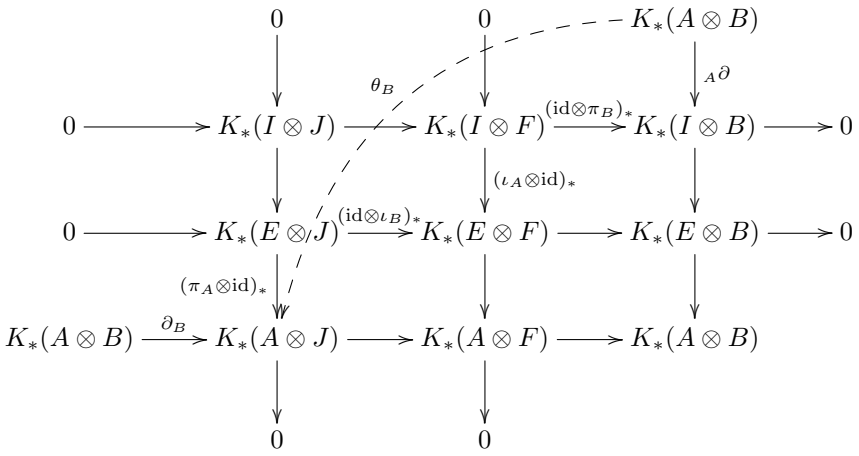
由此可知，与 (4.1) 顶行相关的边界映射均为零。 □

引理 4.2。考虑两个 ∂-自由几何分解

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota_A} E \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota_B} F \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0$$

由满足UCT的可分C*-代数组成。这给出以下具有正合行与列的交换图：



那么，由此图诱导的奇同态

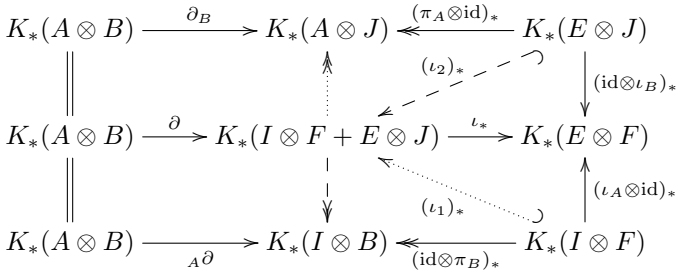
$$\theta_B\colon K_*(A\otimes B)\to K_*(A\otimes J),$$

（如 [8,第 3] 节所述）满足

$$\theta_B = -\partial_B.$$

证明。我们首先回顾 θ_B 的构造。固定 $x\in K_{i+1}(A\otimes B)$，并找到某个提升 $a\in K_i(I\otimes F)$，使得 $(\mathrm{id}\otimes\pi_B)_i(a) = {}_A\partial(x)$。由第三行在$K_*(E\otimes F)$处的正合性，我们可以找到一个（唯一的） $b\in K_i(E\otimes J)$，使得 $(\mathrm{id}\otimes\iota_B)_i(b) = (\iota_A\otimes\mathrm{id})_i(a)$。然后定义 $\theta_B(x) = (\pi_A\otimes\mathrm{id})_i(b)$。可以验证，结果不依赖于 a 的选择，并且 θ_B 是一个群同态。

为证明该引理，我们考虑以下交换图：



（图中的点线箭头和虚线箭头表示正合列，稍后我们将作出说明。）该图的中间一行由与之相关的六项正合列诱导：

$$0 \longrightarrow I \otimes F + E \otimes J \xrightarrow{\iota} E \otimes F \xrightarrow{\pi_A \otimes \pi_B} A \otimes B \longrightarrow 0\ .$$

点线和虚线所示路径分别来自与以下短正合列相关联的六项正合列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow I \otimes F \xrightarrow{\iota_1} I \otimes F + E \otimes J \longrightarrow A \otimes J \longrightarrow 0\ , \\ 0 &\longrightarrow E \otimes J \xrightarrow{\iota_2} I \otimes F + E \otimes J \longrightarrow I \otimes B \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

如引理 4.1 所示，它们相关联的六项正合列退化为两个短正合列。图表的左侧由边界映射的自然性诱导，即考虑以下短正合列之间的映射：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A \otimes J & \longrightarrow & A \otimes F & \longrightarrow & A \otimes B & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes F + E \otimes J & \xrightarrow{\iota} & E \otimes F & \longrightarrow & A \otimes B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes B & \longrightarrow & E \otimes B & \longrightarrow & A \otimes B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

现在，固定 $x \in K_*(A \otimes B)$，并定义 $z := \partial(x) \in K_*(I \otimes F + E \otimes J)$。选取 $a \in K_*(I \otimes F)$，使得 $(\mathrm{id} \otimes \pi_B)_*(a) = {}_A\partial(x)$。我们看到，$z - (\iota_1)_*(a)$ 被映射 $K_*(I \otimes F + E \otimes J) \to K_*(I \otimes B)$ 映为零。由虚线路径的正合性可知，$z - (\iota_1)_*(a) \in K_*(E \otimes J)$。因此，存在某个 $b \in K_*(E \otimes J)$，使得 $z = (\iota_1)_*(a) + (\iota_2)_*(b)$。由此可得

$$\begin{aligned} 0 = \iota_*(\partial(x)) &= \iota_*(z) = \iota_*((\iota_1)_*(a) + (\iota_2)_*(b)) \\ &= (\iota_A \otimes \mathrm{id})_*(a) + (\mathrm{id} \otimes \iota_B)_*(b). \end{aligned}$$

由于现在 $(\iota_A \otimes \mathrm{id})_*(a) = (\mathrm{id} \otimes \iota_B)_*(-b)$，根据 θ_B 的定义，我们得到 $\theta_B(x) = (\pi_A \otimes \mathrm{id})_*(-b) = -\partial_B(x)$。□

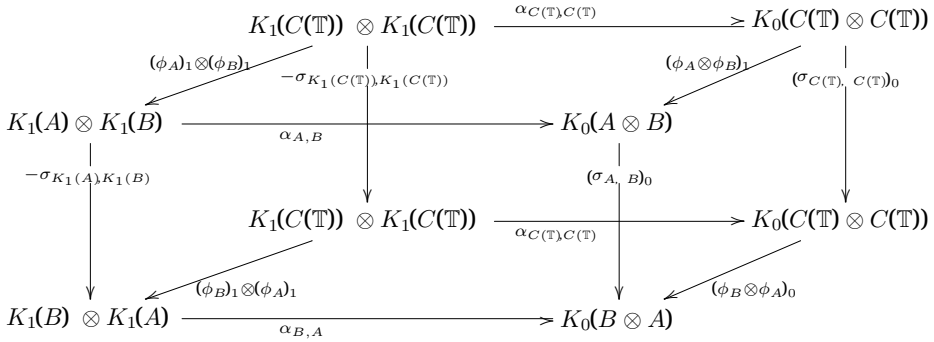
5. Proof of Lemma 1.4

证明图表 (1.1) 可交换。由相关映射的自然性，并在必要时通过添加单位元，我们可以假设 A 和 B 都是含幺的，因此 $K_0(A)$ 和 $K_0(B)$ 分别由 A 和 B上的矩阵代数中投影的类生成。设 p 和 q 分别是 A 和 B 上的某个矩阵代数中的投影，并固定 u 和 v，它们分别是 A 和 B上的某个矩阵代数中的酉元。那么，下述结论成立（其中 1 表示相应矩阵代数中的单位元）：

$$\begin{aligned} &\alpha_{A,B}([p]_0 \otimes [q]_0) = [p \otimes q]_0, \\ &\alpha_{A,B}([p]_0 \otimes [v]_1) = [p \otimes v + (1-p) \otimes 1]_1, \\ &\alpha_{A,B}([u]_1 \otimes [q]_0) = [u \otimes q + 1 \otimes (1-q)]_1. \end{aligned}$$

有了这些公式，可以直接验证它们与翻转的相互作用正如引理 1.4 所述。对于剩余的直和项，我们利用 α 的自然性。令$\phi_A\colon C(\mathbb{T}) \to A\colon z \mapsto u$，以及 $\phi_B\colon C(\mathbb{T}) \to B\colon z \mapsto v$，其中 z是典范

生成元 $C(\mathbb{T})$。考虑如下图表



顶面和底面由 α 的自然性可交换。后面由例 1.1 可交换。左面和右面根据翻转映射的定义可交换。现在通过图追踪可得

$$(\sigma_{A,B})_0(\alpha_{A,B}([u]_1 \otimes [v]_1)) = -\alpha_{B,A}([v]_1 \otimes [u]_1).$$

□

图表 *(1.2)* 的证明。为 A 和 B固定不含 ∂ 的几何分解:

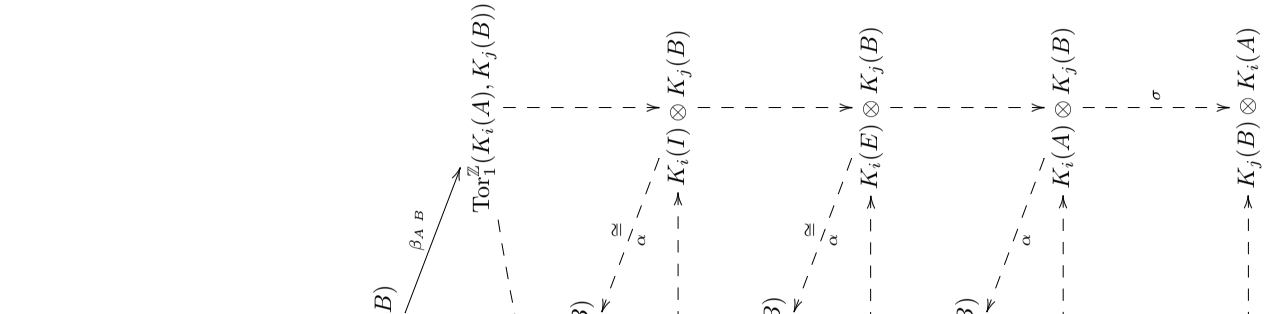
$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota_A} E \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota_B} F \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0,$$

由满足 UCT 的可分 C*-代数组成。对于代数同构的定义

$$\eta_{K_i(A),K_j(B)} \colon \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B)) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_j(B), K_i(A)),$$

考虑以下交换图并进行图追踪:


$K_i(B)$
$\beta_{A\ B}$
$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B))$
$K_i(I) \otimes K_j(B)$
$K_i(E) \otimes K_j(B)$
$K_i(A) \otimes K_j(B)$
$K_j(B) \otimes K_i(A)$
α
σ

前面的（虚线）层是通过构造与来自我们的 ∂-自由几何分解的 $K_i(A)$ 和 $K_j(B)$ 的投射分解相关联的双复形而得到的。由 α 的自然性可得后面的（实线）层，即引理 4.2 中所述的层。我们从 $x \in K_{i+j+1}(A \otimes B)$ 出发，并记住

$$\beta_{A,B} \colon K_{i+j+1}(A \otimes B) \to \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B))$$

是定义 3.4 中的映射 $\beta_{A,B}$（随后将其坐标投影到 $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B))$ 上）。然后，通过在前面的（虚线）层中进行图追踪，可以计算出 $\eta_{K_i(A),K_j(B)}(\beta_{A,B}(x))$。由上述图表的交换性可知，

$$\eta_{K_i(A),K_j(B)}(\beta_{A,B}(x)) = \sigma_{K_i(A),K_j(J)} \circ \alpha_{A,J}^{-1} \circ \theta_B(x),$$

其中 θ_B 如引理 4.2 所述。由同一引理可知，$\theta_B(x) = -\partial_B(x)$。因此得到

$$\eta_{K_i(A),K_j(B)}(\beta_{A,B}(x)) = -\sigma_{K_i(A),K_j(J)} \circ \alpha_{A,J}^{-1} \circ \partial_B(x).$$

考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
K_{i+j+1}(A \otimes B) & \xrightarrow{\partial_B} & K_{i+j}(A \otimes J) \\
{\scriptstyle K_{i+j+1}(\sigma_{A,B})}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle K_{i+j}(\sigma_{J,A})} \\
K_{i+j+1}(B \otimes A) & \xrightarrow{{}_B\partial} & K_{i+j}(J \otimes A) \\
{\scriptstyle \beta_{B,A}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_{J,A}} \\
\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_j(B), K_i(A)) & \xrightarrow{\subseteq} & K_j(J) \otimes K_i(A)
\end{array}$$

沿着外部方块进行，我们可以替换 ∂_B，从而得到：

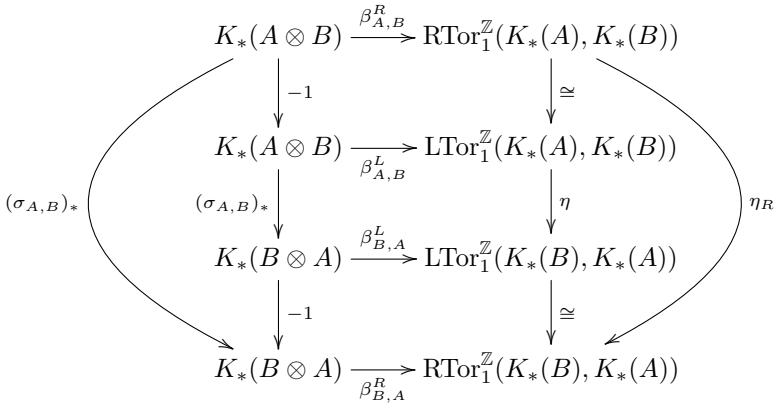
$$\begin{aligned}
&\eta_{K_i(A),K_j(B)} \circ \beta_{A,B}(x) \\
&\quad = \quad -\sigma_{K_i(A),K_j(J)} \circ \alpha_{A,J}^{-1} \circ K_{i+j}(\sigma_{J,A}) \circ \alpha_{J,A} \circ \beta_{B,A} \circ K_{i+j+1}(\sigma_{A,B})(x) \\
&\quad \overset{(1.1)}{=} \quad -(-1)^{ij} \beta_{B,A} \circ K_{i+j+1}(\sigma_{A,B})(x),
\end{aligned}$$

如所需。 □

注 5.1. 若改为考虑 $\beta_{A,B}^R$，引理 *1.4* 的结论仍然不变。事实上，映射 $\beta_{A,B}^L$ 与 $\beta_{A,B}^R$ 仅相差一个负号：

$$\begin{array}{ccc}
K_{i+j+1}(A \otimes B) & \xrightarrow{\beta_{A,B}^L} & \operatorname{LTor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B)) \\
\downarrow{\scriptstyle -1} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
K_{i+j+1}(A \otimes B) & \xrightarrow[\beta_{A,B}^R]{} & \operatorname{RTor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_j(B))
\end{array}$$

这个垂直同构是通过图追踪诱导的代数同构。于是下图交换：



6. Proof of Theorem 1.3

定理 *1.5* 的证明。 在全部五种情形中，首先利用 K¨unneth 公式可知

$$\alpha_{A,A}\colon K_0(A)\otimes K_0(A)\to K_0(A\otimes A)\quad\text{and}$$
$$\beta_{A,A}\colon K_1(A\otimes A)\to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_1(A),K_1(A))$$

是同构。其次，我们看到两者

$$\sigma_{K_0(A),K_0(A)}\colon K_0(A)\otimes K_0(A)\to K_0(A)\otimes K_0(A)\quad\text{and}$$
$$\eta_{K_1(A),K_1(A)}\colon K_1(A)\otimes K_1(A)\to K_1(A)\otimes K_1(A)$$

分别是恒等映射（这里用到了 [8, 命题 5.1]）。

因此，根据引理 1.4,

$$K_0(\sigma_{A,A})=(-1)^{0\cdot 0}\alpha_{A,A}\circ\sigma_{K_0(A),K_0(A)}\circ\alpha_{A,A}^{-1}=\mathrm{id}_{K_0(A\otimes A)}$$

and

$$K_1(\sigma_{A,A})=(-1)^{1+1\cdot 1}\beta_{A,A}^{-1}\circ\eta_{K_1(A),K_1(A)}\circ\beta_{A,A}=\mathrm{id}_{K_1(A\otimes A)}.$$

接下来（如 [8,定理 5.2] 的证明中所示），我们有

$$\mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A\otimes A),K_{1-i}(A\otimes A))=0\qquad(i=0,1),$$

在情形 (ii) 中使用 [8, 引理 1.1] 即可。因此，由 UCT 可知，$\sigma_{A,\,A}$ 在 KK 中与 $\mathrm{id}_{A\otimes A}$ 一致。□

推论 *1.6* 的证明。 [8, 推论 5.3] 的证明可原样进行，只需用定理 1.5 代替 [8, 定理 5.2]。□

为了证明定理 1.7，我们大致沿用 [8, 第 6], 节中的论证，但需要处理分次。因此，我们将证明 [8, 第 6], 节中间引理的变体，主要变化是处理 $K_i(A)$ 的直和项，而不是 $K_*(A)=K_0(A)\oplus K_1(A)$。

引理 6.1 (参见 [8, 引理 6.2])。 设 A 是一个属于 UCT 类、具有近似内翻转的可分 C*-代数。假设对于 $i=1,\ 2,\ G_i$ 是 $K_0(A)$ 或 $K_1(A)$ 的直和项，且 $G_1\cap G_2=\{0\}$。那么：

(i) $G_1\otimes G_2=0$; *and*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G_1,G_2)=0$.

证明。由于 $\sigma_{A,A}\colon A\otimes A\to A\otimes A$ 是近似内的，$K_i(\sigma_{A,A})$ 必须是 $K_i(A\otimes A)$ 上的恒等映射，对于 $i=0,1$。设对于 $i=1,2$，G_i 是 $K_{t_i}(A)$ 的直和项。若 $t_1\neq t_2$，则由引理 1.4 可得 $\sigma_{K_{t_1}(A)\ K_{t_2}(A)}=0$ 且 $\eta_{K_{t_1}(A)\ K_{t_2}(A)}=0$，这意味着 $K_{t_1}(A)\otimes K_{t_2}(A)=0$ 且 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_{t_1}(A)\ K_{t_2}(A))=0$。

另一方面，若 $t_1=t_2=t$，则由引理 1.4 可得，

$$\sigma_{K_t(A),K_t(A)}=\pm\mathrm{id}_{K_t(A)\otimes K_t(A)},$$

而 [8, 引理 6.2] 中的计算表明，若 $G_1\otimes G_2\neq 0$，则 $\sigma_{K_t(A)\ K_t(A)}$ 不可能是 $\pm\mathrm{id}_{K_t(A)\otimes K_t(A)}$。

同样，由引理 1.4 可得，

$$\eta_{K_t(A),K_t(A)}=\pm\mathrm{id}_{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_t(A),K_t(A))},$$

而 [8, 引理 6.2] 中的计算表明，若 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G_1,G_2)\neq 0$，则 $\eta_{K_t(A)\ K_t(A)}$ 不可能是 $\pm\mathrm{id}_{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_t(A)\ K_t(A))}$。□

以下内容与 [8, 引理 6.3] 相同。该处的证明可将引理 6.1 替代 [8, 引理 6.2]来进行。

引理 6.2. 设 A 是一个可分的 C*-代数，属于 UCT 类，且具有近似内翻转。那么

$$K_0(A\otimes A)\cong\big(K_0(A)\otimes K_0(A)\big)\oplus\big(K_1(A)\otimes K_1(A)\big)\quad and$$
$$K_1(A\otimes A)\cong\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_0(A),K_0(A))\oplus\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_1(A),K_1(A)).$$

引理 6.3 (参见 [8, 引理 6.4])。设 A 是一个可分的 C*-代数，属于 UCT类，且具有近似内翻转；再设 G_p 是 $K_0(A)$ 或 $K_1(A)$ 的一个直和项，并且对某个素数 p，它是一个非零的 p-群。那么 $G_p\cong\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$。

证明。证明 [8, 引理 6.4 (i)] 时，可以用引理 6.1 替代 [8,引理 6.2]。下面说明为何引理 6.1 的加强假设仍然适用。

首先，在 [8,引理 6.4 (i)]，的证明第一段中，使用了 G_p 的两个直和项 G_1 和 G_2，并调用了 [8, 引理 6.2 (i)] 。由于假设 G_p 是 $K_0(A)$ 或 $K_1(A)$ 的一个直和项，因此 G_p 的这两个直和项也具有相同性质，所以此处可以使用引理 6.1。

其次，在证明 [8,引理 6.4 (i)], 的第三段中，使用 $A\otimes A$ 代替 A，并将 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的两个副本分别用作 G_1 和 G_2，从而调用 [8, 引理 6.2 (ii)] ；其中一个副本位于 $K_0(A\otimes A)$内，另一个位于 $K_1(A\otimes A)$内。因此，正如所需，引理 6.1 的必要假设确实适用于这些 G_1 和 G_2。□

定理 *1.7* 的证明。令 $G_i:=K_i(A)$表示 $i=0,1$，且令 $G:=K_*(A)=G_0\oplus G_1$。设 T_{G_i} 表示 G_i 的挠子群，其中 $i=0,1$，因此 $T_G:=T_{G_0}\oplus T_{G_1}$ 是 G的挠子群。

我们按照以下三个步骤进行（与 [8, 定理 6.1]的证明类似）：

(i) G/T_G 的秩至多为一；(ii) $T_{G_i}\cong\mathbb{Q}_{m_i}/\mathbb{Z}$，对于某个无限型超自然数 m_i；以及 (iii) 该定理。

对于步骤 (i)，如果 G/T_G 的秩大于一，那么 $K_*(A\otimes\mathcal{Q})\cong G\otimes\mathbb{Q}$，因此对于 $i=1,2$，$K_0(A\otimes\mathcal{Q})$ 或 $K_1(A\otimes\mathcal{Q})$ 中会有一个直和项（子空间）G_i，使得 $G_1\cap G_2=\{0\}$。这将与引理 6.1 (i) 矛盾。

对于步骤 (ii)，固定 $i\in\{0,1\}$。我们可以将 T_{G_i} 写成 p-分量的直和 T_p，遍历所有素数 p。固定一个素数 p；只需证明 T_p 要么为 0，要么为 $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$。

现在考虑代数 $A \otimes \mathcal{F}_{1,\ p^\infty}$ （这里回顾一下， $K_*(\mathcal{F}_{1,\ p^\infty}) \cong 0 \oplus \mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$）。由于 $K_0(\mathcal{F}_{1,\ p^\infty}) = 0$，K¨unneth 公式给出以下正合列：

$$K_{1-i}(A) \otimes K_1(\mathcal{F}_{1,p^\infty}) \to K_i(A \otimes \mathcal{F}_{1,p^\infty}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_1(\mathcal{F}_{1,p^\infty})) \cong T_p, \tag{6.1}$$

利用 [5, 62.J]. 特别地，我们看到 $K_i(A \otimes \mathcal{F}_{1,p^\infty})$ 是 p-群的一个扩张，因此它本身是一个 p-群；由此根据引理 6.3， $K_i(A \otimes \mathcal{F}_{1,p^\infty})$ 只能是 0 或 $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$。由 (6.1) 可知， T_p 是 0 或 $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$ 的一个商群，因此它同构于 0 或 $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$。

对于步骤 (iii)，我们首先注意到，由于 T_{G_i} 是可除的，且 G_i/T_{G_i} 是 $\mathbb{Q}$ 的子群，因此利用引理 1.1] 可得

$$G_i \cong T_{G_i} \oplus G_i/T_{G_i}.$$

若 $G_1/T_{G_1} \neq 0$ ，那么由于该群无挠，我们有 $(G_1/T_{G_1}) \otimes (G_1/T_{G_1})$ 是 $K_0(A \otimes A)$ 的一个非零直和项（由引理 6.2 可知）。然而，根据 (1.1)， $K_0(\sigma_{A,A}) = -\sigma_{(G_1/T_{G_1}),(G_1/T_{G_1})}$ 在这个直和项上的映射不同于单位映射。这与 A 具有近似内翻转矛盾。因此， $G_1/T_{G_1} = 0$，即 $G_1 = T_{G_1}$。

同样，如果 $T_{G_0} \neq 0$，那么 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(T_{G_0},\ T_{G_0}) \cong \mathbb{Q}_{m_0}/\mathbb{Z}$ 将是 $K_1(A \otimes A)$ 的一个非零直和项；由 (1.2)， $K_1(\sigma_{A,\ A}) = -\eta_{T_{G_0},\ T_{G_0}}$ 在这个直和项上。根据 [8, 命题 5.1], , 这不同于恒等映射，因此与近似内翻转矛盾。由此可得 $T_{G_0} = 0$，即 G_0 是无挠的，因而是 $\mathbb{Q}$ 的一个子群。

重新标记后，我们可以概括为： G_0 要么为 0，要么为某个超自然数 n 对应的 $G_0 = \mathbb{Q}_n$ ；而 $G_1 = \mathbb{Q}_m/\mathbb{Z}$ 对应于某个无限型超自然数 m 。最后，由引理 6.1， $G_0 \otimes G_1 = 0$，这意味着 m 必须整除 n。□

定理 *1.3* 的证明。(i) ⇒ (iii) 是定理 1.7 与 [3, 命题 2.7、2.8、2.10] 的结合。(iii) ⇒ (iv) 使用了 C*-代数的分类（见 [8, 注 2.1]）。(iv) ⇒ (ii) 是推论 1.6，而 (ii) ⇒ (i) 显然成立。□

最后，我们说明为什么 [8, 引理 6.2 和 6.4] 的陈述是正确的（尽管其证明并不正确）。从定理 1.7 给出的 $K_*(A)$ 的形式可以很容易看出， [8,引理 6.2] 成立。

对于 [8, 引理 6.4], , (i) 是定理 1.7 的直接推论。对于 (ii)，设 $K_*(A) = G_p$，且 $A \otimes A$ 具有近似内翻转。那么根据 K¨unneth 公式，我们得到 $K_*(A \otimes A)$ 是一个非零的 p-群，由此根据定理 1.7 可知 $K_0(A \otimes A) = 0$ 且 $K_1(A \otimes A) \cong \mathbb{Q}_{p^\infty}$。因此， $K_0(A)$ 和 $K_1(A)$ 必须是 p-可除的（否则 $K_i(A) \otimes K_i(A) \neq 0$，这将根据 K¨unneth 公式推出 $K_0(A \otimes A) \neq 0$ ）。再次使用这一点和 K¨unneth 公式，我们得到 $\mathbb{Q}_{p^\infty} \cong K_1(A \otimes A) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_0(A)\ K_0(A)) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_1(A)\ K_1(A))$。由于 $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ 是直不可分解的， $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K_i(A)\ K_i(A)) \cong 0$，这意味着 $K_i(A) = 0$（根据 Tor 的 Cartan–Eilenberg 正合列）。由 [5, 推论 27.4], 可知 $G_p = K_{1-i}(A)$ 是 $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Z}$。

References

[1] Bruce Blackadar。 *K-theory for operator algebras* 5 *Mathematical Sciences Research* , 《 *Institute Publications* 1998 *K-theory for operator algebras* 5 *Mathematical Sciences Research* 》, 第 *Institute Publications* 1998 *K-theory for operator algebras* 5 *Mathematical Sciences Research* 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版， *Institute Publications* 1998 *K-theory for operator algebras* 5 *Mathematical Sciences Research* 。[2] Edward G. Effros 和 Uffe Haagerup。C* 代数的提升问题与局部自反性。 *Duke Math. J.*，52(1):103–128，1985年。[3] Edward G. Effros 和 Jonathan Rosenberg。具有近似内翻转的 C * *Pacific* 代数。 *J. Math.* 77 2 417 443, 1978 * *Pacific* , (*J. Math.* 77 2 417 443, 1978 * *Pacific*): –。[4] Ilijas Farah、Bradd Hart、Mikael Rørdam 和 *J. Math.* 77 2 417 443, 1978 Aaron Tikuisis。强自吸收 C* 代数的相对交换子。 *Selecta Math. (N.S.)*，23(1):363–387，2017年。

[5] L´aszl´o Fuchs。 *Infinite abelian groups. Vol. I*。纯粹与应用数学，第36卷。学术出版社，纽约—伦敦，1970年。[6] Mikael Rørdam。核单 C
* *Classification of nuclear* *- 代数的分类。载于 C
algebras. Entropy in operator algebras 126 *Encyclopaedia Math. Sci.* 1 145
* *Classification of nuclear* *- ,
algebras. Entropy in operator algebras 126 *Encyclopaedia Math. Sci.* 1 145
* *Classification of nuclear* *- 卷，
algebras. Entropy in operator algebras 126 *Encyclopaedia Math. Sci.* 1 145
* *Classification of nuclear* *- ，第 – 页。施普林格，柏林，2002年。[7] Jonathan
algebras. Entropy in operator algebras 126 *Encyclopaedia Math. Sci.* 1 145
Rosenberg 和 ClaudeSchochet。Kasparov 广义 *K*-函子的 K¨unneth 定理与泛系数定理。 *Duke Math. J.*，55(2):431–474，1987年。[8] Aaron Tikuisis。
具有近似内翻转的 C * *Int.* 代数的 K 理论刻画。
Math. Res. Not. IMRN 18 5670 5694, 2016
* *Int.* ，(
Math. Res. Not. IMRN 18 5670 5694, 2016
* *Int.*): –。
Math. Res. Not. IMRN 18 5670 5694, 2016