Draft version March 21, 2023 年使用
AASTeX631 默认样式排版

arXiv:2303.11128v1 [astro-ph.SR] 20 Mar 2023

布拉金斯基黏度下传播剪切阿尔芬波的非线性阻尼与沿磁场流动

Alexander J. B. Russell[1]

[1] *School of Science and Engineering, University of Dundee,Dundee, DD1 4HN, Scotland, UK*

摘要

与经典磁流体力学相比，Braginskii磁流体力学能够更准确地描述许多等离子体环境，因为它基于物理原理导出的闭合关系，对应力张量进行了动态处理。然而，应力张量的影响在太阳磁流体现象中仍相对缺乏研究，尤其是在非线性状态下。本文通过解析方法考察了传播剪切阿尔芬波的非线性阻尼和纵向流动。此前关于 Braginskii磁流体力学中磁流体波的大多数研究，都考虑了波扰动趋近于零的严格线性极限。我们表明，以前的线性结果仅适用于日冕中振幅极小、因而几乎没有研究意义的阿尔芬波，通常其波能量小于背景磁场能量的 10^{-11} 倍。对于观测到的波振幅，日冕阿尔芬波的 Braginskii黏性耗散是非线性的，强度约为线性理论预测值的 10^9 倍。此外，与线性化解中的垂直黏度系数 η_2 相比，主要阻尼是由平行黏度系数 η_0 导致的。本文建立了非线性理论，表明波能量密度以包络 $(1+z/L_d)^{-1}$ 衰减。阻尼长度 L_d 存在一个最优阻尼解；超过这一点后，黏度越大，耗散反而越低，因为黏性力会自发组织纵向流动，从而抑制阻尼。尽管非线性阻尼远强于线性阻尼，但在许多日冕应用中仍可忽略不计。

关键词： 阿尔芬波 (23)，太阳日冕 (1483)，太阳日冕加热 (1989)，太阳日冕洞 (1484)，太阳风 (1534)，磁流体力学 (1964)，空间等离子体 (1544)，等离子体天体物理学 (1261)，等离子体物理学 (2089)

1. 引言

阿尔芬波是天然等离子体中普遍存在的特征，包括太阳日冕（Tomczyk等，2007年；De Pontieu等，2007年；Lin等，2007年；Okamoto等，2007年）和太阳风（Coleman，1967年；Belcher与Davis，1971年）。在太阳物理学中，这些波携带的能量足以加热开放日冕并加速快速太阳风（McIntosh 等（2011）），且在高于太阳表面一个太阳半径的范围内显著衰减（Bemporad 与 Abbo，2012；Hahn 等，2012；Hahn 与 Savin，2013；Hahn 等，2022）。这些阿尔芬波如何在天体物理与空间等离子体中衰减，是一个悬而未决近一个世纪的重要问题（参见 Alfv´en 于 1947 年发表的早期论文和 Osterbrock，1961年；De Moortel与Browning，2015年、Arregui，2015年及 Van Doorsselaere等，2020年撰写的现代综述；以及 Russell，2018年和 De Moortel等，2020年对历史的回顾）。

关于太阳阿尔芬´波的大多数理论知识都建立在“经典”磁流体力学（MHD）之上。这一数学框架源自麦克斯韦方程组与无黏流体力学欧拉方程的直观耦合（Hartmann 1937年；Alfv´en 1942年、1943年、1950年；Batchelor 1950），并因其成功揭示了多种自然现象而得到广泛应用（例如参见Priest2014）。然而，经典磁流体力学

通讯作者：Alexander J. B. Russella.u.russell@dundee.ac.uk

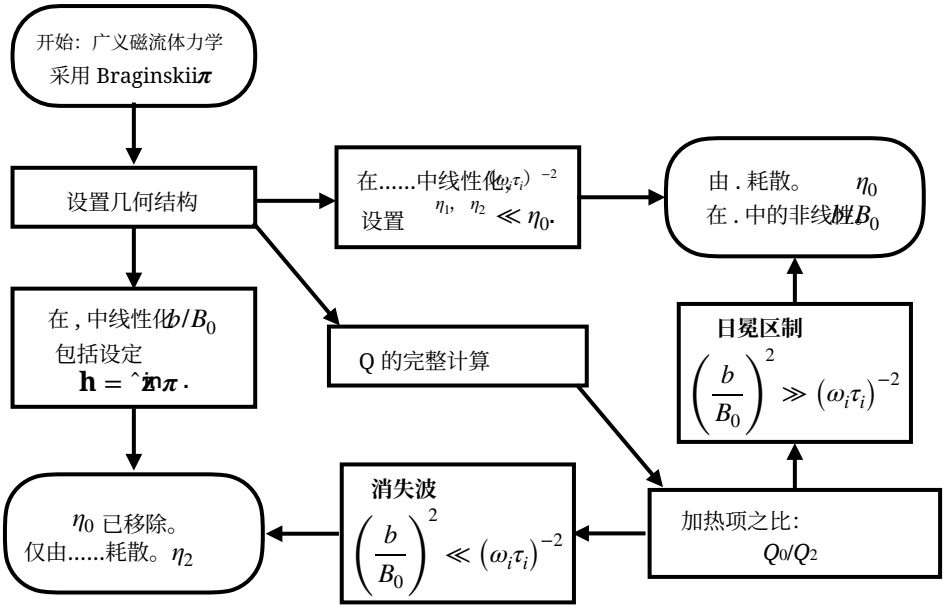


图 1。推理路径示意图。垂直分支优先考虑波振幅足够小的情况，并得出结论：阻尼是一个线性过程，由垂直黏度系数 η_2决定，例如§ 8 见Braginskii (1965年）。水平分支优先考虑 η_2/η_0足够小的情况，由此通过 η_0产生非线性阻尼。本文沿着对角分支展开，其中包括推导两种结果各自的有效性条件。通过 η_0 产生的非线性阻尼适用于大多数日冕应用。

只是众多等离子体描述中的一种，而其中有些能够更完整地描述等离子体。本文在更一般的 Braginskii 磁流体力学框架下，对阿尔芬波阻尼进行解析研究；与经典磁流体力学不同，该框架保留了各向异性黏性应力张量。

包括§ 8 见Braginskii (1965年）在内的许多作者，先前已研究过波振幅趋近于零的线性极限下，阿尔芬´波的黏性阻尼。若优先考虑波振幅足够小的情况，问题便转化为考察各向异性黏度如何影响垂直于磁场（其方向被视为不变）的速度。在这一近似下，阻尼由“垂直”黏度系数 η_2决定；该系数在日冕中极小。因此，最初的结论是，日冕中的阿尔芬´波的黏性阻尼非常弱，除非其波长极短。这一推理路径如图1所示。

然而，还可以从另一种角度看待这个问题。阿尔芬波的黏性阻尼´也可以优先考虑平行黏度系数的大小来分析 η_0。鉴于 $\eta_2/\eta_0 \gtrsim 10^{-11}$ 在日冕中很常见（Hollweg 1985），即使$\mathbf{v}$ 沿总磁场$\mathbf{B}$ 的分量很小，也预计会导致与线性理论显著偏离。这一推理路径在图1中以水平分支表示。

对这一问题的第二种看法，源于这样一个观察：只要波振幅并非完全为零，阿尔芬波就确实具有沿总磁场方向的非零速度分量。造成这一现象的因素有两个，展开 $\mathrm{V}\cdot\mathrm{B} = \mathrm{V}\cdot(\mathrm{b}+\mathrm{B}_0)$ 后即可将它们区分开来，其中 B_0 是平衡磁场，b 是磁扰动。首先，对于阿尔芬波，$\mathrm{V}\cdot\mathrm{b}$ 非零，因为垂直于 B_0 的速度扰动与磁扰动 b 的方向一致。换言之，磁场偏离其平衡方向，意味着沿总磁场方向存在非零速度分量。其次，在可压缩等离子体中，磁扰动产生的磁压会驱动沿平衡磁场方向的非线性有质动力流（例如 Hollweg 1971）。有质动力流也会使 $\mathrm{V}\cdot\mathrm{B}_0$ 非零。

这两种效应都使得通过较大的平行黏度系数η_0产生非线性黏性阻尼成为可能。

得益于现代观测（例如 McIntosh 等（2011）；Morton 等（2015）），人们知道，归一化波振幅 $b/B_0 \sim V/v_A \sim 0.1$ 例如是开放日冕磁场区域底部的典型特征。与 η_0/η_2的极大值相比，这一比率平方的“微小”程度相当有限。因此，显而易见，阿尔芬波的黏性阻尼很可能是由 η_0 和波振幅共同支配的非线性过程。本文提供了数学证据，证实这一启发式分析成立，并详细考察了其结果。

自 Braginskii(1965年以来，许多先前研究探讨了布拉金斯基黏度对磁流体力学波的影响。在太阳物理学领域，20世纪80年代至90年代中期，研究者从相位混合和共振吸收的角度重新审视线性化布拉金斯基黏度的作用，旨在确定纳入黏度张量后会如何改变这些尺度缩短过程及其加热特性。当时，太阳磁流体力学波理论通常采用线性化方程。因此，由于进行了线性化，Steinolfson 等(1986）、Hollweg (1987）、Ruderman (1991）、Ofman 等(1994）以及 Erdelyi 和 Goossens (1995) 得出的解析和数值结果严格来说仅适用于振幅趋于零的阿尔芬波。

在相邻领域，研究者也考察了各向异性黏度对磁流体波的影响，重点关注磁流体力学湍流和太阳风。特别值得一提的是，Montgomery (1992)主张，布拉金斯基黏度在高温稀薄等离子体中十分重要，许多情况下应采用平行离子黏度来处理，而且等离子体运动可能会自发组织起来以抑制阻尼。他还将这些观点应用于磁流体力学湍流中的各向异性，依据是准稳态湍流由无阻尼模构成。Montgomery (1992)中的定量阐述基于线性正规模分析，该分析涵盖了平行黏度对磁声波的线性阻尼，却未考虑阿尔芬波的非线性黏性阻尼。相关研究进一步支持了这一结论：线性化的应力张量对阿尔芬波的阻尼可以忽略不计，却会显著阻尼磁声波；相关工作由Oughton (1996、1997)完成。

与我们相似，Nocera et al. (1986)也强调了非线性的重要性。他们对受布拉金斯基黏性应力张量部分作用的阿尔芬 η_0 波进行了建模，并保留了波扰动中的主导阶非线性项。与上述论点一致，他们的计算发现，日冕中的阿尔芬波会因平行黏度而发生非线性阻尼。本文补充并拓展了Noceraet al. (1986)先前的分析，旨在全面理解布拉金斯基黏度作用下传播的剪切阿尔芬波的非线性阻尼和沿磁场流动。

本文所用数学方法的一个局限是，它排除了等离子体中其他可能重要的非线性效应，例如波之间的非线性相互作用。未来需要开展数值研究，以验证本文提出的解析理论，比较黏性阻尼与参量衰变不稳定性等其他非线性效应的相对重要性，并考察布拉金斯基磁流体力学中各非线性过程之间的相互作用。

本文结构安排如下。§ 2介绍单流体Braginskii磁流体力学的科学背景及其与其他单流体等离子体模型的关系。§ 3 定量考察完整的布拉金斯基黏性应力张量对阿尔芬波加热的影响，阐明非线性 η_0 项和可压缩性的重要性，并运用能量原理获得弱黏性极限下的波衰减特性。在 § 4中，我们论证，在强黏性极限下，有质动力流的自组织会抑制黏性加热，这意味着在此情形下，黏度会显著改变与阿尔芬波相关的沿磁场流动。§ 5 进一步深化了分析，在Braginskii磁流体力学框架下，运用多尺度分析，在不对阿尔芬波雷诺数施加限制的情况下，求得其衰减特性。本文最后在 § 6 中进行讨论，并在 § 7中总结主要结论。

2. BRAGINSKII磁流体力学

Braginskii磁流体力学是一种重要的等离子体描述，它依据物理原理进行严格闭合，以处理各向异性黏度和热传导。本节简要介绍单流体 Braginksii 磁流体力学、它与压力（或温度）各向异性的联系，以及它与经典磁流体力学和 CGL双绝热方程的关系。

正如各种等离子体教材所述，流体变量可以严格且稳健地定义为底层粒子分布函数的速度矩。随后，通过对每种粒子的

动理学玻尔兹曼方程取矩推导出输运方程，并将其结合起来得到单流体方程。推荐的讲解可见Schunk &Nagy(2009) 第7章以及Spitzer (1962)的附录。

假设满足准中性以及质量、动量和能量守恒，这一过程将得出质量连续性方程，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{1}$$

动量方程

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{G} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{2}$$

能量方程，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}p\right) + \frac{5}{2}p\nabla \cdot \mathbf{V} = -\pi : \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \tag{3}$$

必要时还包括高阶输运方程，以及广义欧姆定律。

压力张量$\mathbf{P}$ （出现在方程（2）中）是表征粒子热运动所产生内力的最基本形式。它是对称的，因此有六个自由度。通过引入标量压力和应力张量，也可以将动量方程改写为

$$p = \frac{1}{3}\,\mathrm{Trace}\,(\mathbf{P}) = \frac{1}{3}P_{\alpha\alpha}, \qquad \pi_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

其中， $\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克δ。如此定义的应力张量 π 是对称且无迹的。这些定义使得可以用 $-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi$替代。

通过取矩推导输运方程时，会遇到一个根本性的闭合问题：每个流体变量的输运方程都依赖于更高阶变量，因而会无限递归，除非通过其他考量使系统闭合。因此，闭合方法是等离子体不同流体模型之间的一个重要区别，也是其适用性 caveat 的一个主要来源。各种不同的闭合方法所得到的控制方程都满足质量、动量和能量守恒，因为这些性质已内置于方程 (1)–(3) 中。然而，下文讨论的不同模型对内力和加热的描述并不一致，因此可能产生不同的行为。

经典磁流体力学 (Hartmann 1937年；Alfv´en 1942年，1943年；Batchelor 1950年) 对应于一种闭合处理，即从方程 (2) 和 (3) 中略去应力张量和热流矢量。当粒子碰撞或波粒相互作用等其他形式的粒子散射足够频繁，使压力张量始终非常接近各向同性时，略去应力张量是合理的。由此得到的磁流体力学方程适用于许多情形，例如对静态平衡进行建模，或应力张量散度相对于洛伦兹力仍然较小的动态情形。尽管如此，这仍是一种截断，因为高阶变量被直接设为零，而非通过近似来处理。此外，在太阳日冕等环境中，碰撞性较低，因此应力张量可能会对多种动态现象产生显著影响，包括磁流体波。

Braginskii磁流体力学采用了一种限制较少的闭合方法。正如Braginskii (1965年)所详述的，当碰撞平均自由程显著短于流体量发生变化的长度尺度时，热流矢量呈现各向异性热传导的形式，而应力张量则呈现各向异性黏度的形式。因此，可以通过将$\mathbf{q}$ 和 π 表示为低阶流体变量来实现闭合；这些变量通常通过类似于Chapman & Cowling (1939年)或Grad (1949年)的方法推导得出。

通过考察磁化等离子体中带电粒子的螺旋运动，可以直观地理解$\mathbf{q}$ 和 π 所固有的各向异性。沿磁场方向的平均自由程与未磁化等离子体中的相同，这意味着沿磁场方向的输运也与未磁化等离子体中的相同。与此同时，垂直于磁场方向的平均自由程为回旋半径，通常远小于沿磁场方向的平均自由程，因此垂直输运受到抑制。因此，相对于磁场方向，热传导和黏性应力都具有各向异性，而且这种各向异性往往极为显著。

§ 3 中使用的完整 Braginskii 应力张量包含五个黏度系数。§ 5 中采用了一种有用的简化：对于强磁化，$\Omega_i \tau_i \gg 1$，平行 η_0 系数远大于其他黏度系数。因此，通常可以忽略较小的系数来简化处理（不过，如§ 3 所示，如果长度尺度高度各向异性，也可能需要保留其他黏度系数）。在这种简化下，可得到以下

平行黏度的协变表达式（Lifshitz &Pitaevskii 1981；Hollweg, 1986）：

$$\pi_{\alpha\beta} = -3\eta_0 \left(h_\alpha h_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right)\left(h_\mu h_\nu - \frac{\delta_{\mu\nu}}{3}\right)\partial_\mu V_\nu,$$
$$Q_{visc} = 3\eta_0 \left(\left(h_\alpha h_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right)\partial_\alpha V_\beta\right)^2, \tag{5}$$

其中，$\mathbf{h} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ 是沿磁场方向的单位向量。这些表达式不同于纳维－斯托克斯方程中的各向同性黏性，这是因为磁场引入了各向异性。

平行黏度与压力各向异性密切相关。正如Chew 等人 (1956)指出的，当 $\Omega_i\tau_i \gg 1$ 时，粒子的洛伦兹力会使压力张量呈回旋对称，其形式为

$$P_{\alpha\beta} = p_\perp \delta_{\alpha\beta} + (p_{||} - p_\perp) h_\alpha h_\beta. \tag{6}$$

这是一个重要的简化，因为一般压力张量的六个自由度被两个变量取代，即$p_{||}$ 和 $p_\perp$。于是，式（4）中的定义给出 $p = \left(p_{||} + 2p_\perp\right)/3$ 以及

$$\pi_{\alpha\beta} = (p_{||} - p_\perp)\left(h_\alpha h_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right). \tag{7}$$

方程（7）表明，压力各向异性具有一个等效应力张量，它与$p_{||} - p_\perp$成正比。此外，式（5）和（7）的形式均为 $\pi_{\alpha\beta} \sim \left(h_\alpha h_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)$，因此，两个应力张量等效的问题可归结为两式中标量因子的等效问题。Hollweg （1985、1986）对二者趋于一致的条件作了深入分析，其中最重要的条件是：碰撞（或波粒相互作用等其他过程）会松弛由速度梯度驱动的压力各向异性，使压力仅呈弱各向异性。相比之下，经典磁流体力学假定压力各向异性可以完全忽略。

在低碰撞率下，Braginskii磁流体力学中的准静态近似不再有效，并且可能会产生强烈的压力各向异性。在这些条件下，可以分别为$p_{||}$ 和 $p_\perp$ (Chewet al. 1956；Hollweg 1986)推导演化方程。然而，闭合问题再次浮现，因为这些方程依赖于热流矢量。获得闭合系统的一种简单方法是忽略热流矢量，从而得到CGL双绝热方程（Chew et al. 1956），这类方程常用于无碰撞等离子体。还有更复杂的方法，通过求解压力各向异性或应力张量的演化来保留热流矢量，并通过其他方式实现闭合。以下著作Balescu(1988)；Schunk &Nagy(2009)；Zank (2014)；Hunana et al. (2019a、b、2022)可供进一步阅读。

总而言之，等离子体存在一系列彼此相邻（有时相互重叠）的单流体模型。对于特定问题和/或情境，最合适的模型取决于碰撞性。当磁流体力学时间尺度大于离子碰撞时间时，布拉金斯基磁流体力学能够提供严格的闭合，并比经典磁流体力学更准确地处理内力和热流。

3. 布拉金斯基黏度引起的阿尔芬波加热

3.1. 模型

我们定量考察阿尔芬波的黏性耗散。阿尔芬波是一种横波，其偏振方向使磁扰动垂直于平衡磁场和波矢。令平衡磁场沿 z方向，磁扰动沿 x方向，波矢位于 yz平面内，则考虑如下形式的总磁场

$$\mathbf{B} = b(y,z,t)\mathbf{e}_x + B_0\mathbf{e}_z. \tag{8}$$

T他的假设自动满足 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$。对于速度场，我们假设其形式为

$$\mathbf{V} = V_x(y,z,t)\mathbf{e}_x + V_z(y,z,t)\mathbf{e}_z. \tag{9}$$

该 V_x 是主要的速度分量。在线性化理论中，它将是$\mathbf{V}$的唯一分量。此外，我们明确加入了一个高阶 V_z 项，表示沿平衡磁场方向的非线性有质动力流，该流由有限振幅阿尔芬 $b^2/2\mu_0$ 波相关的磁压扰动梯度驱动（例如，Hollweg 1971）。当等离子体不可压缩时，可以省略 V_z 项（见§ 3.3）；然而，对可压缩等离子体进行非线性处理时，该项不可或缺，并且会通过平行黏度系数影响波加热 η_0 （如§ 1所述）。经典磁流体力学中 V_z 的表达式将在后文的式（29）中给出。

在完整解中，对 $b^2/2\mu_0$ 关于 y 的导数会产生一个额外的非线性 y 分量的 $\mathbf{V}$，进而产生非线性 y 分量的 $\mathbf{B}$。这些项未在方程（8）和（9）中明确展示。Nocera et al.（1986）纳入了这些项；只要阿尔芬波的垂直波长足够大，这些项似乎不会影响我们的主要结论。

黏性力由黏性应力张量 $\pi_{\alpha\beta}$ 确定，表达式为

$$F_{visc,\alpha} = -\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \tag{10}$$

黏性加热率则由下式确定

$$Q_{visc} = -\pi_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}, \tag{11}$$

其中， $\alpha \in \{x, y, z\}$、 $\beta \in \{x, y, z\}$ 是位置矢量的分量， x_β 是 $\mathbf{V}$ 的分量；重复指标表示按照爱因斯坦求和约定求和。

关键在于，黏性应力张量取决于磁场的方向，该方向由单位向量表示$\mathbf{h} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$。对于方程（8）中的阿尔芬波模型，该向量为

$$h_x = \frac{b}{\sqrt{B_0^2 + b^2}}, \quad h_y = 0, \quad h_z = \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 + b^2}}, \tag{12}$$

与 $h_x^2 + h_z^2 = 1$。我们的分析不同于许多以往的研究，因为我们考虑了 $h_x \neq 0$，并在最后确定了主要的加热贡献，而不是在评估对阿尔芬波的阻尼效应之前先设定 $h_x = 0$。

应用 §4 中的 Braginskii (1965年) 的公式（Hogan 1984给出了等价的矩阵表达式），应力张量与五个黏度系数的关系为

$$\pi_{\alpha\beta} = -\sum_{i=0}^{2}\eta_i W_{i\alpha\beta} + \sum_{i=3}^{4}\eta_i W_{i\alpha\beta}. \tag{13}$$

陀螺黏性 η_3 项和 η_4 项不会产生加热，因此计算加热率 Q_{visc} 需要

$$\begin{aligned} W_{0\alpha\beta} &= \frac{3}{2}\left(h_\alpha h_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)\left(h_\mu h_\nu - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\right)W_{\mu\nu}, \\ W_{1\alpha\beta} &= \left(\delta^\perp_{\alpha\mu}\delta^\perp_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\delta^\perp_{\alpha\beta}h_\mu h_\nu\right)W_{\mu\nu}, \\ W_{2\alpha\beta} &= \left(\delta^\perp_{\alpha\mu}h_\beta h_\nu + \delta^\perp_{\beta\nu}h_\alpha h_\mu\right)W_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 为克罗内克δ，

$$\delta^\perp_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta, \tag{15}$$

并且应变率张量为

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\nabla\cdot\mathbf{V}. \tag{16}$$

对于式（9）所描述的剪切 Alfvén 波几何构型，$\mathbf{W}_i$ 张量变为

$$\mathbf{W}_0 = \left(h_x h_z \partial_z V_x + \left(\tfrac{2}{3} - h_x^2\right)\partial_z V_z\right)\begin{pmatrix} 3h_x^2-1 & 0 & 3h_x h_z \\ 0 & -1 & 0 \\ 3h_x h_z & 0 & 3h_z^2-1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathbf{W}_1 = h_x\left(h_z\partial_z V_x - h_x \partial_z V_z\right)\begin{pmatrix} -h_z^2 & 0 & h_x h_z \\ 0 & 1 & 0 \\ h_x h_z & 0 & -h_x^2 \end{pmatrix} + \left(h_x \partial_y V_x - h_z \partial_y V_z\right)\begin{pmatrix} 0 & h_z & 0 \\ h_z & 0 & -h_x \\ 0 & -h_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathbf{W}_2 = \left(\left(1-2h_x^2\right)\partial_z V_x - 2h_x h_z \partial_z V_z\right)\begin{pmatrix} 2h_x h_z & 0 & 1-2h_x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-2h_x^2 & 0 & -2h_x h_z \end{pmatrix} + \left(h_x \partial_y V_x + h_z \partial_y V_z\right)\begin{pmatrix} 0 & h_x & 0 \\ h_x & 0 & h_z \\ 0 & h_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

保留 $h_x \neq 0$ 后的黏性加热率因此为

$$Q_{visc} = \frac{\eta_0}{3}\left(3h_x h_z \partial_z V_x + (2-3h_x^2)\partial_z V_z\right)^2 + \eta_1 h_x^2\left(h_z\partial_z V_x - h_x \partial_z V_z\right)^2 + \eta_1\left(h_z \partial_y V_x - h_x \partial_y V_z\right)^2 + \eta_2\left(\left(1-2h_x^2\right)\partial_z V_x - 2h_x h_z \partial_z V_z\right)^2 + \eta_2\left(h_x \partial_y V_x + h_z \partial_y V_z\right)^2. \tag{20}$$

3.2. 两个小参数

正如第 1 节所预期的（例如图 1），两个参数决定了方程（20）中各项的相对重要性。第一个小参数是 $(b/B_0)^2$，，即波的磁能密度与背景磁场能量密度之比，它通过 h_x 和 h_z 引入。在现代，针对日冕磁流体力学波的大量观测（Nakariakov & Verwichte 2005；De Moortel & Nakariakov 2012）使得可以较为准确地量化 $(b/B_0)^2$，既可直接依据已分辨的波观测，也可间接依据谱线宽度。例如，Morton et al.（2015）采用这两种方法研究了日冕开放磁场区底部的波，报告的波速为 v_A =400 km s^{-1}，波动速度为 $v = 35$ km s^{-1}。这两项测量结果均与此前对日冕洞和宁静太阳的研究发现一致（例如 McIntosh 等（2011））。根据此类观测，$h_x^2 \sim (b/B_0)^2 \sim (v/v_A)^2 \sim 10^{-2}$。

第二个小参数是 $(\Omega_i\tau_i)^{-2}$，它决定黏度系数 η_1 和 η_2 相对于 η_0的大小。$\Omega_i\tau_i$ 在日冕中的取值可能有很大变化，但若排除磁零点，所得数值与 Hollweg (1985) 的估算相近；他得到太阳活动区的 3.4×10^5 以及日冕洞底部附近的 7.2×10^5。因此，在常见条件下，我们预计 $(\Omega_i\tau_i)^{-2} \lesssim 10^{-11}$，而 η_1 和 η_2 可简化为

$$\eta_2 = \frac{6408}{5125}\left(\Omega_i\tau_i\right)^{-2}\eta_0, \quad \eta_1 = \frac{1}{4}\eta_2. \tag{21}$$

方程（21）中的数值系数是在极限 $(\Omega_i\tau_i)^{-2} \to 0$下得到的，例如可由 Hunana et al.(2022) 的方程（73）得出。对于有限的 $(\Omega_i\tau_i)^{-2}$，这些系数只是近似值，但精度很高，因为系数修正量的阶为 $(\Omega_i\tau_i)^{-2} \lesssim 10^{-11}$。考察方程（21）并考虑到 $(\Omega_i\tau_i)^{-2} \lesssim 10^{-11}$，$\eta_2$ 和 η_1系数都远小于 η_0。

$(b/B_0)^2$ 的微小性与 $(\Omega_i\tau_i)^{-2}$ 的微小性相互竞争，导致不同项主导黏性加热。若尝试通过令 $(b/B_0)^2$ 为零来简化方程（20），则 $h_x = 0$ 和 $V_z = 0$ 给出 $Q_{visc} = \eta_2\left(\partial_z V_x\right)^2 + \eta_1\left(\partial_y V_x\right)^2$，，这与 Braginskii（1965年）所得结果一致。另一方面，若尝试先令 $(\Omega_i\tau_i)^{-2}$ 为零来简化，则只剩下η_0 项，这表明会得出不同的结论。因此，定量结果重现了图1所示的两个分支。要正确确定日冕条件下的阻尼，必须仔细比较完整方程（20）中的各项，并牢记其中存在两个小参数；我们现在就来进行这一分析（图1中的对角分支）。

3.3. 不可压缩等离子体的加热率

不可压缩等离子体的分析相对简单，因此自然适合作为讨论的起点。不可压缩性假设适用于液态金属或高β等离子体，但请注意，它并不适用于日冕。因此，本节使用日冕波振幅和磁化强度仅作说明；要处理日冕，则需要采用本文后文将介绍的可压缩有限β处理。

在不可压缩情形下，$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ 应用于我们的 Alfv´én 波几何结构意味着 $V_z = 0$。因此，式（20）在 $\eta_1 = \frac{1}{4}\eta_2$ 的条件下简化为

$$Q_{visc} = \left\{ 3\eta_0 h_x^2 h_z^2 + \eta_2 \left(\left(1 - 2h_x^2\right)^2 + \frac{1}{4} h_x^2 h_z^2 \right) \right\} \left(\partial_z V_x\right)^2 + \eta_2 \left(\frac{1}{4} h_z^2 + h_x^2 \right) \left(\partial_y V_x\right)^2 . \tag{22}$$

这些项 $\partial_z V_x$ 决定了平行于平衡磁场方向的波长所导致的黏性耗散。我们首先要探讨，平行波长导致的耗散究竟是由自 η_2 以来便广为人知的线性Braginskii (1965年贡献占主导，还是由非线性 η_0 贡献占主导。方程（22）中花括号内两项之比为

$$3h_x^2 \frac{\eta_0}{\eta_2} \left[\frac{1 - h_x^2}{(1 - 2h_x^2)^2 + \frac{1}{4} h_x^2 (1 - h_x^2)} \right] \approx 3h_x^2 \frac{\eta_0}{\eta_2} \approx 2.4 h_x^2 (\Omega_i \tau_i)^2, \tag{23}$$

其中，第一步利用 $h_x^2 \ll 1$ 进行了简化（对于 $h_x^2 \approx 10^{-2}$的观测值，保留方括号中的项会使比值增加 2.8%，因此这一近似既准确又保守），而η_0/η_2 的代入依据方程（21）。对于$_i\tau_i$ § 3.2中所述的日冕波振幅和 Ω 值，该比值超过 10^9, , 通过 η_0 产生的非线性阻尼使加热率提高了相应倍数。换言之，沿平衡磁场方向的导数所导致的阿尔´芬波黏性耗散，比线性理论预测强 10^9 倍。

现在，我们通过比较非线性η_0 项（见方程（22））与涉及 $\partial_y V_x$的项，来评估垂直于平衡磁场的导数所起的作用。这些加热率项之比为

$$12h_x^2 \frac{\eta_0}{\eta_2} \left(\frac{\lambda_\perp}{\lambda_{||}} \right)^2 \left[\frac{1 - h_x^2}{1 + 3h_x^2} \right] \approx 12h_x^2 \frac{\eta_0}{\eta_2} \left(\frac{\lambda_\perp}{\lambda_{||}} \right)^2 \approx 9.6 h_x^2 \left(\Omega_i \tau_i\right)^2 \left(\frac{\lambda_\perp}{\lambda_{||}} \right)^2 , \tag{24}$$

其中，$\lambda_\perp$ 和 $\lambda_{||}$ 分别是垂直于和平行于平衡磁场的波长（对于观测到的 $h_x^2 \approx 10^{-2}$值，h_x^2 中各项的近似误差为 3.9%）。对于上述日冕参数，若 $\lambda_\perp \approx \lambda_{||}$，则非线性 η_0 项再次占主导，其优势超过 10^9。对于更短的横向波长，只要 η_0，非线性 $\lambda_\perp \gtrsim 10^{-5}\lambda_{||}$项就占主导。若考虑波速为 400 km s^{-1}且频率为 3 mHz 的波，这与Morton et al. (2015) 的观测结果一致，则非线性 η_0项占主导的条件变为 $\lambda_\perp \gtrsim 800$ m。鉴于 CoMP 使用 3 Mm 像素对阿尔芬波进行了成像，这一条件显然远远满足，因此非线性 η_0 耗散占主导，强于 η_2 线性耗散。

推导方程（22）以及方程（23）和（24）左侧比值的目的，是使其包含 h_x 和 h_z 的所有出现形式，从而能够针对给定的 h_x值进行精确求值。这样便明确表明，我们的结论对 h_x的具体取值并不敏感，只要求 h_x 的取值大致符合日冕观测。尽管这种方法最为全面，但也可以通过分别简化方程（22）中的各项，利用 $h_x^2 \ll 1$ 和 $h_z^2 = 1 - h_x^2 \approx 1$ 得到更简洁的公式

$$Q_{visc} = \left\{ 3\eta_0 h_x^2 + \eta_2 \right\} \left(\partial_z V_x\right)^2 + \eta_1 \left(\partial_y V_x\right)^2 , \tag{25}$$

并比较各项，从而得出相同的结论。

3.4. 大雷诺数可压缩等离子体

在典型的日冕条件下，热压不足以阻止非线性磁压力对等离子体的压缩，因此会形成一种非线性 V_z，称为有质动力流（Hollweg 1971）。这种流动分量通过平行黏度系数 η_0影响黏性加热率，因此，描述等离子体中阿尔芬´波的非线性黏性阻尼需要采用可压缩理论。

我们将阿尔芬雷诺数定义为

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_A}{k_{||} \eta_0}. \tag{26}$$

这个无量纲参数不同于传统雷诺数，因为它指的是阿尔芬´速度 $v_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$，而不是典型的流体速度。这一区别类似于电阻性磁流体力学中的伦德奎斯特数与磁雷诺数之间的区别。根据方程（26）定义雷诺数的合理性，将在详细的

数学解中找到，见§ 5，其中发现它是系统的一个自然参数（另见Nocera 等（1986））。

本节将通过对主波场振幅进行展开，建立有质动力 V_z 与 V_x 之间的关系。为此，我们采用了若干假设。首先，我们利用如下结果：沿正 z方向传播的行波解满足

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -v_A \frac{\partial}{\partial z}, \tag{27}$$

其中， v_A 为波速。为简化问题，假设背景量的导数足够小，不会对动力学产生高阶影响。我们还将完整的热传导处理简化为两种热力学情形：绝热和等温。最后，假设雷诺数足够大，因此在求解 V_z时，可在主阶忽略黏性力，从而能够得到 V_z 与 b^2之间的代数关系。对于§ 5，我们将不再采用这一假设，并计入黏性力对 V_x 和 V_z 的影响。

在波振幅的主阶上，动量方程和感应方程的 x分量不受有质动力流的影响。由此可恢复传播阿尔芬波的 Wal´en 关系 $b/B_0 = -V_x/v_A$。在主阶上，动量方程的 z分量为

$$\rho_0 \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta p + \frac{b^2}{2\mu_0}\right) = 0, \tag{28}$$

由于我们目前考虑大雷诺数的极限，因此忽略了黏性力。利用方程（27）并积分，可得 V_z、 δp 和 b^2之间的代数关系。在绝热处理中，能量方程给出 $\delta p = \gamma p_0 V_z/v_A$，因此我们得到

$$\frac{V_z}{v_A} = \frac{1}{2(1-\beta)}\left(\frac{b}{B_0}\right)^2, \tag{29}$$

其中

$$\beta = \left(\frac{c_s}{v_A}\right)^2 = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{p}{B_0^2/2\mu_0}\right). \tag{30}$$

在等温处理中，理想气体定律 $p = \rho RT$ 给出 $\delta p/p_0 = \delta\rho/\rho_0 = V_z/v_A$。这不会改变方程（29）的形式；只需在 β的定义中令 $\gamma = 1$，即可得到等温情形。

将 β 定义为声速（$c_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$）与阿尔芬速度之比的平方，与将 β 定义为热压和磁压之比的惯例略有不同，这是因为存在因子 $\gamma/2$；对于绝热单原子气体，该因子为 5/6，而对于等温模型则为 $1/2$。将 β 定义为速度比的平方，可使包括本文问题在内的许多磁流体波动问题的数学推导更加简洁，因此这已成为磁流体波动理论中的惯例。

方程（ $\beta = 1$ 29）中的奇点源于 $c_s = v_A$ 意味着阿尔芬´波与声波之间发生共振，从而在两种波之间共振传递能量。在这个特定情况下，方程（27）并不适用，因为它没有考虑共振导致的演化。同样，方程（28）假设 $V_z \ll v_A$ 以简化对流导数，而方程（29）中的解在 $\beta = 1$的紧邻区域不满足这一条件。对于大多数日冕应用而言， $\beta = 1$共振以及方程（29）中的奇点都不构成问题，因为这类应用通常具有 $\beta < 0.2$；但在一些特殊情况下，这一现象值得关注，例如波向日冕磁零点传播，或穿过太阳低层大气中的 $\beta = 1$ 层。Russell 等人（2016）此前已将这种非线性共振耦合应用于研究太阳耀斑期间磁场变化引发的日震产生问题。

对式（29）求导并利用关系式 $b/B_0 = -V_x/v_A$ 可得

$$\partial_\alpha V_z = -\frac{1}{(1-\beta)}\frac{h_x}{h_z}\partial_\alpha V_x, \tag{31}$$

由此可消去式（ V_z 20）中的 。在各黏度系数的 h_x^2 阶主导项下，我们得到

$$Q_{visc} = \left\{C\eta_0 h_x^2 + \eta_2\right\}(\partial_z V_x)^2 + \eta_1(\partial_y V_x)^2, \tag{32}$$

其中

$$C = \frac{1}{3}\left(\frac{1-3\beta}{1-\beta}\right)^2. \tag{33}$$

有几个特殊情形值得注意。在 § 3.3 中，当 $\beta \to \infty$时，可得到不可压缩结果 $V_z \to 0$和 $C \to 3$。类似地，令 $\beta = 0$，即可得到冷等离子体解 $V_z = (b/B_0)^2/2$ 和$C = 1/3$。

冷等离子体（$\beta = 0$）的非线性加热率比不可压缩等离子体（$\beta \to \infty$）低九倍，这表明可压缩性对此问题至关重要。此外，C（β）在 $\beta = 0$ 与 $\beta = 1/3$之间单调递减。由于对于大多数日冕应用而言，$0 < \beta < 1/3$，这些环境中非线性布拉金斯基黏度造成的耗散率低于冷等离子体解。例如，给定 $\beta = 0.1$时，加热率约为冷等离子体情况下的60%。因此显然，在评估阿尔芬 ́波的黏性耗散时，必须考虑可压缩性和有限β效应。

另一个重要特征是，C 在 $\beta = 1/3$处为零。这是以下情况之一：

$$\frac{V_z}{v_A} = \frac{3}{4}\left(\frac{V_x}{v_A}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{b}{B_0}\right)^2, \tag{34}$$

这会导致 η_0 对 Q_{visc}的贡献发生抵消。特定的 V_z/v_A 排列方式能够抑制非线性黏性耗散，这是一个重要的新发现，§ 4 将在低雷诺数背景下进一步探讨。

的最后一个特征是 C 在 $\beta = 1$处的奇点。正如本节前面所述，$c_s = v_A$ 意味着阿尔芬 ́波与声波发生共振，从而在阿尔芬 ́波和声波之间传递能量。共振附近需要谨慎处理，因为共振能量传递无法用式（27）来描述，而式（33）正是利用该式推导得到的。

根据式（32）评估加热项之比的方法与第3.3节中的比较相同，但需将 η_0 乘以 $C/3$。主要结论仍然成立：布拉金斯基黏性应力张量导致的加热由一个η_0 项主导，该项关于波振幅是非线性的；对于日冕参数，非线性 η_0 项导致的加热比线性 η_1 项和 η_2 项导致的加热高出许多个数量级。

3.5. 多大的波振幅才是线性的？

前述分析的一个重要启示是，对于各向异性黏度而言，非线性效应在远低于磁流体力学方程中其他项所对应的波振幅时就会变得显著。只有当 $h_x^2 \sim (b/B_0)^2 \ll (\Omega_i \tau_i)^{-2}$ 时，对布拉金斯基黏性应力张量进行线性化才是恰当的；在日冕中，这意味着波能量密度必须小于背景磁场能量密度的 10^{-11} 倍，这一数值小得远不足以对日冕能量学产生影响。振幅足够小、因而受线性黏性阻尼理论支配的波将无法观测，也不会影响日冕的能量平衡。因此，对于日冕阿尔芬波，黏度不仅必须针对波振幅进行非线性处理，还必须考虑磁场导致的各向异性。有趣的是，这一线性化条件远比磁流体力学方程中其他项的线性化条件严格；对于后者，通常将 h_x^2 与 1 比较。这些线性化条件之间的巨大差异源于强磁化所产生的大 η_0/η_2 比值。

3.6. 大雷诺数下的阻尼尺度（能量推导）

了解波在何种时间和长度尺度上发生阻尼十分重要。本节利用能量原理，给出一个相对简单的推导，说明大雷诺数下传播剪切阿尔芬 ́波发生非线性黏性阻尼时的衰减尺度。

去掉 η_1 和 η_2 项 式（32）中的项后，大雷诺数下由 η_0 平行黏度系数导致的加热率 is

$$Q_{visc} = \frac{\eta_0}{3}\left(\frac{1-3\beta}{1-\beta}\right)^2 \left(\frac{b}{B_0}\right)^2 (\partial_z V_x)^2. \tag{35}$$

根据 $\tau_d = \langle E_w \rangle / \langle Q_{visc} \rangle$，可定义波能量衰减时间，其中 $\langle . \rangle$ 表示对一个波周期取时间平均，E_w 表示波能量密度。相应的衰减长度为 $L_d = v_A \tau_d$。

For f向前传播 传播的 Alfv ́én 波、 $E_w \approx \rho_0 V_x^2$ 和 $V_x = a\cos(\phi)$，其中 $\phi = k_{||}(z - v_A t)$。因此 ，

$$E_w = \rho_0 a^2 \frac{(1+\cos(2\phi))}{2}. \tag{36}$$

同样，利用方程（35）和（b/B_0）$^2 \approx$（V_x/V_A）^{2}，

$$Q_{visc} = \frac{\eta_0 k_{||}^2}{3 v_A^2}\left(\frac{1-3\beta}{1-\beta}\right)^2 a^4 \frac{(1-\cos(4\phi))}{8}, \tag{37}$$

可得快速时间平均值

$$\langle E_w \rangle = \frac{\rho_0 a^2}{2}, \tag{38}$$

$$\langle Q \rangle = \frac{\eta_0 k_{||}^2 a^4}{24 v_A^2} \left(\frac{1-3\beta}{1-\beta} \right)^2. \tag{39}$$

因此，波能量衰减尺度为

$$\tau_d = \frac{12\rho_0}{\eta_0 k_{||}^2 (a/v_A)^2} \left(\frac{1-\beta}{1-3\beta} \right)^2, \tag{40}$$

$$L_d = \frac{12\rho_0 v_A}{\eta_0 k_{||}^2 (a/v_A)^2} \left(\frac{1-\beta}{1-3\beta} \right)^2. \tag{41}$$

方程（40）和（41）表明，具有较大 $k_{||}$ （等价于较高频率）的波会在更短的尺度上受到阻尼。我们还注意到，由于 L_d 取决于 V_x 的振幅（常数 a），衰减包络并非指数形式。第§ 5节将更全面地阐述阻尼特性；该节不再采用大雷诺数假设，并确定波包络的函数形式。

4. 自组织黏性流

在雷诺数 $\to 0$ 的极限下，动量方程的 z分量中的黏性力有可能变得极大，除非流动通过自组织来避免这种情况。相应地，在雷诺数 $\to 0$ 的极限下，强烈的耗散会阻止波传播，除非 V_z 由黏度决定。因此，可以预期，高黏性等离子体中阿尔芬波的流动模式会发生自组织（雷诺数较小），这一概念此前由Montgomery （1992）提出。

为了进行定量研究，我们分析强磁化区 $\Omega_i \tau_i \gg 1$，仅保留 η_0 平行黏度系数，从而简化应力张量和加热率。检查方程（5）可知， $\pi_{\alpha\beta}$ 的各分量与（$h_\mu h_\nu - \delta_{\mu\nu}/3$）$\partial_\mu V_\nu$成正比，而 Q_{visc} 与该表达式的平方成正比。采用方程（8）和（9）所示的剪切阿尔芬波几何结构，并通过 $h_x^2 \ll 1$进行简化，

$$\left(h_\mu h_\nu - \frac{\delta_{\mu\nu}}{3} \right) \frac{\partial V_\nu}{\partial x_\mu} \approx h_x \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial V_z}{\partial z}. \tag{42}$$

如果流动通过自组织使该表达式接近于零，黏性力和加热便可受到抑制，从而允许阿尔芬波传播。利用阿尔芬波关系代入 $h_x \approx b/B_0 \approx -V_x/v_A$ 并积分，我们发现，对于较小的雷诺数

$$\frac{V_z}{v_A} = \frac{3}{4} \left(\frac{V_x}{v_A} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{b}{B_0} \right)^2. \tag{43}$$

方程（43）所给出的关系此前曾在另一种背景下出现，即§ 3.4，其中可以看到，对于高雷诺数等离子体中的阿尔芬波，特殊情况 $\beta = 1/3$下的黏性耗散会受到抑制。要在 η_0 部分的 Q_{visc} 中产生抵消所需的流动模式不依赖于雷诺数和 β，但两种情况下产生这一模式的原因不同：在§ 3.4 中，它是有限 β时有质动力流的一种特殊情况；当雷诺数较小时，它则是流动通过黏性力自组织形成的结果。

这一新结果表明，不应将§ 3 中推导出的衰减尺度及其他性质外推至较小的雷诺数。相反，我们预期，随着雷诺数 $\to 0$，黏性力会组织流动，使得 V_z 满足式（43，其中耗散通过 η_0 部分内部的抵消而受到抑制 Q_{visc}。

5. 多尺度分析

第 3 节采用基于加热率和能量原理的分析方法。第5节则采用互补的方法，通过多尺度分析求解完整的控制方程组，以印证§ 3节的结果，将其推广至一般雷诺数，并纳入黏性力对 $\mathbf{V}$的影响，同时获得包括非线性衰减函数形式在内的更多结果。

5.1. 与 *Nocera* 等人（*1986*）的比较

在介绍本文的多尺度分析部分之前，我们先谈谈 Noceraet al. (1986年的相关计算。他们的工作与我们的研究都着重于 η_0 将黏度视为波阻尼的主要来源，并对波振幅进行非线性处理（图 1中的水平分支）。此外，两者都考虑了波压和有限 β 效应。

Nocera et al.（1986）此前推导出了一个黏性应力张量形式，其中包含 $h_x \neq 0$ 在 η_0 项中的主导阶效应。随后，他们比较了黏度张量中的各项，并得出结论：与我们的§ 3（虽然论证方式不同）一样，当（ η_0 项的非线性b/B_0）$^2 \gg (\Omega_i\tau_i)^{-2}$ 时，非线性项超过了其他黏度系数的贡献（他们的公式（3.13））。因此，两项研究都认同非线性 η_0 黏度占主导地位。

Nocera et al. （1986）随后采用以下方法求得衰减长度。他们引入了自洽的微扰排序，接着结合动量方程和感应方程的 x分量，得到一个关于 V_x的单一方程，该方程在线性阶为波动方程。然后，从主导阶非线性项中消去除 V_x 以外的所有变量。最后，他们通过稳定性分析得出结论：具有 $k_\perp = 0$ 的波会发生非线性阻尼，其衰减时间的形式与我们的公式（40）相同（他们的公式（5.7），以归一化变量表示）。

接下来在§ 5.2 中的详细推导借鉴了Nocera etal. (1986)提出的框架。我们也借此机会作了几处我们认为有所改进的调整，其中最重要的是：

1.Nocera et al. (1986)假设 V_z 的快速时间平均为零，因此必须在 V_z中加入一个非零积分常数。相比之下，我们将积分常数设为零；只有这样，当阿尔芬波驱动器在一个边界处启动时，才不会以不合物理的方式向无穷远瞬时发送信号。阿尔芬波产生的非线性纵向流动的模拟结果（例如McLaughlin 等人，2011）也为我们的选择提供了进一步支持，因为这些结果与本研究采用的约束一致。

2. §5 Nocera et al.(1986)中的稳定性分析被替换为多尺度分析，其类型见Bender 与 Orszag (1978)第11章。

3. Nocera et al. (1986) 将波包络设为 $z + v_A t$的函数。我们将包络视为与时间无关，因此明确研究传播波随距离的阻尼。

4. 我们的推导给出了 V_x 的包络以及衰减长度。

5. 我们的解对一般雷诺数 Re 均有效，而 Nocera et al. (1986) 仅求解了高 Re 低黏度极限下的衰减尺度。

同样，Noceraetal. (1986) 还研究了我们未涉及的情形，包括 $k_\perp$ 足够大时，阿尔芬波与快模之间的耦合会改变波属性（他们在论文中将此称为相位混合波情形）。

5.2. *Detailed solution*

5.2.1. *Geometry and perturbations*

我们假设采用方程（8）和（8）9）中的阿尔芬波几何构型，令 $\partial/\partial y \equiv 0$ ，以聚焦于不具有短垂直尺度的波，并引入密度和压力扰动 $\delta\rho$ 和 δp ，同时采用满足 $V_x/v_A \sim b/B_0 \sim \epsilon^{1/2}$ 和 $V_z/v_A \sim \delta\rho/\rho_0 \sim \delta p/p_0 \sim \epsilon$的自洽微扰排序。为简化起见，将黏度 η_0 和背景量 B_0、 ρ_0 和 p_0 视为局部均匀。

5.2.2. *Nonlinear wave equation*

从理想感应方程出发，

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \tag{44}$$

我们得到

$$\frac{\partial b}{\partial t} - B_0 \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(bV_z) \quad \text{(exact)}, \tag{45}$$

其中线性项 已归并至等式左侧，而非线性项位于右侧 e.

动量方程为

$$\rho\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)V_\alpha\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)B_\alpha-\frac{\partial\pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \tag{46}$$

当 η_0 项主导黏性力时，方程（13）和（17）给出

$$-\pi_{xz}=3\eta_0\frac{b}{B_0}\left(\frac{b}{B_0}\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)+O(\epsilon^{5/2}) \tag{47}$$

因此，方程（ x分量的方程（46）变为

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}-\frac{B_0}{\mu_0\rho_0}\frac{\partial b}{\partial z}=-\frac{\delta\rho}{\rho_0}\frac{\partial V_x}{\partial t}-V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{3\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{B_0}\left[\frac{b}{B_0}\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]\right)+O(\epsilon^{5/2}), \tag{48}$$

其中线性项方程。取其 nonl线性项 h^ave again b^een p laced 在相反的一 des of th

方程 (48) 对时间求导，并利用方程 (45) 消去线性项中的 b ，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_x=-v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{b}{B_0}V_z\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)+\frac{3\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(\frac{b}{B_0}\left[\frac{b}{B_0}\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]\right)+O(\epsilon^{5/2}). \tag{49}$$

对方程 (49) 的理解是：线性项（左边）对应于一个波速为 v_A 的波动方程。主要非线性项（右边明确写出的项）包含各向异性黏度的主导阶效应；这一效应与理想阿尔芬 波的微扰非线性理论中出现的主导非线性项处于同一阶。

接下来，我们从方程 (b 和 $\delta\rho$ 中的 $O(\epsilon^{3/2})$ 非线性项中消去49)。方程 (45) 和 (48) 在线性阶由阿尔芬波关系求解 。

$$\frac{b}{B_0}=\pm\frac{V_x}{v_A}+O(\epsilon^{3/2}). \tag{50}$$

我们取负号，使波沿 z 正方向传播，得到

$$\frac{b}{B_0}=-\frac{V_x}{v_A}+O(\epsilon^{3/2}). \tag{51}$$

线性解的行波行为，加上波包络在由式中主阶非线性项所控制的距离尺度上变化这一假设49，允许进行替换

$$\frac{\partial}{\partial t}=-v_A\frac{\partial}{\partial z}+O(\epsilon). \tag{52}$$

密度扰动由质量连续性方程决定

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0, \tag{53}$$

这对我们的剪切阿尔芬波给出

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial V_z}{\partial z}+O(\epsilon^2). \tag{54}$$

然后，利用式（52）并进行积分，

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0}=\frac{V_z}{v_A}+O(\epsilon^2). \tag{55}$$

积分常数设为零，原因见§ 5.1。

利用这些结果，方程（49）变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_x=v_A\frac{\partial^2}{\partial z^2}(V_xV_z)+\frac{3\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(\frac{V_x}{v_A}\left[\frac{V_x}{v_A}\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]\right)+O(\epsilon^{5/2}). \tag{56}$$

现在，问题已简化为两个变量 V_x 和 V_z，为了明确表示对 ϵ 的依赖关系，我们可以引入无量纲变量 v 和 w，其定义为

$$V_x(z,t) = \epsilon^{1/2} v_A v(z,t), \quad V_z(z,t) = \epsilon v_A w(z,t). \tag{57}$$

将式（56用无量纲变量 v 和 w表示，并略去右端显式写出的高阶项，我们寻求以下方程的解:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v = \epsilon \left(v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}(vw) + \frac{\eta_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z}\left(\frac{\partial v^3}{\partial z} - 2v\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right). \tag{58}$$

5.2.3. *Multiple scale analysis*

现在使用多尺度分析（例如 58）求解式。运用这一方法，引入一个新变量 $Z = \epsilon z$，用于定义一个长尺度，并作如下扰动展开:

$$v(z,t) = v_0(z,Z,t) + \epsilon v_1(z,Z,t) + \ldots \tag{59}$$
$$w(z,t) = w_0(z,Z,t) + \epsilon w_1(z,Z,t) + \ldots. \tag{60}$$

利用链式法则处理导数，将 z 和 Z 视为独立变量，并令 $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}z = \epsilon$。因此,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z} + \epsilon\left(\frac{\partial v_0}{\partial Z} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + O(\epsilon^2), \tag{61}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \epsilon\left(2\frac{\partial^2 v_0}{\partial Z \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right) + O(\epsilon^2), \tag{62}$$

对 w 的导数也有相应的表达式。

代入 代入方程（58，收集 ϵ^0 项，从而求解齐次波动方程 n

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_0 = 0, \tag{63}$$

可得达朗贝尔解

$$v_0(z,Z,t) = f(z - v_A t, Z) + g(z + v_A t, Z). \tag{64}$$

对于向前传播波，函数 g 为零。

相应的 w_0 可通过 对动量方程（ z分量积分得到，方程为（46），即

$$\frac{V_z}{v_A} = \frac{1}{\rho_0 v_A^2}\left(\delta p + \frac{b^2}{2\mu_0} + \pi_{zz}\right) + O(\epsilon^2). \tag{65}$$

由方程（13）和（17），可得

$$-\pi_{zz} = 2\eta_0\left(\frac{b}{B_0}\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{2}{3}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + O(\epsilon^2). \tag{66}$$

代 通过对能量方程积分，可得压力扰动 δp ，

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + \gamma p \nabla\cdot\mathbf{V} = (\gamma - 1)Q_{visc}. \tag{67}$$

黏性加热 Q_{visc} 的量级为 $O(\epsilon^2)$，因此积分可得绝热关系

$$\frac{\delta p}{p_0} = \gamma\frac{V_z}{v_A} + O(\epsilon^2). \tag{68}$$

或者，可以根据理想气体定律采用等温条件 $\delta p/p_0 = V_z/v_A$ ； 理想气体定律可通过在式（68）中令 $\gamma = 1$得到。

使用方程 式（66）和（68），并利用式（ b 51）、式（65）消去相关项后，可表示为

$$\left(1-\beta+\frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0 v_A}\frac{\partial}{\partial z}\right)w=\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta_0}{\rho_0 v_A}\frac{\partial}{\partial z}\right)v^2, \tag{69}$$

其中 $\beta=(c_s/v_A)^2$，省略的项为 $O(\epsilon)$。当 v 和 w 按照方程（59）和（60）展开后，一个与（69）相同的方程将 w_0 和 v_0联系起来。

考察方程（69）可知，若已知 w，要得到 v 通常需要求解一个一阶线性偏微分方程。在可忽略黏性项的极限下，问题简化为第 $w=v^2/2(1-\beta)$ 节中使用的代数关系。类似地，当黏性项占主导时，可得到第 $w=(3/4)v^2$节讨论的黏性自组织平行流关系。对于本节的详细求解，我们保留决定 V_z的全部作用力，并求解完整的方程（69）。

为便于求解，考虑 v_0 随时间作正弦振荡这一特殊情形。因此，在其余推导过程中，我们设

$$v_0=A(Z)\mathrm{e}^{i\phi}+A^*(Z)\mathrm{e}^{-i\phi}, \qquad \phi=k_{||}(z-v_A t), \tag{70}$$

其中 $A(Z)\in\mathbb{C}$ 和 $*$ 表示复共轭。将 A 表示为极坐标形式，

$$A(Z)=R(Z)\mathrm{e}^{i\theta(Z)}, \tag{71}$$

方程（70）等价于

$$v_0(z,Z,t)=2R(Z)\cos(k_{||}(z-v_A t)+\theta(Z)). \tag{72}$$

观察可知，$2R$（Z）是局部振幅，而 θ（Z）是相移。我们发现，在下文中使用方程（70）中的复数形式更为方便。

现在我们求解相应的 w_0。注意到

$$v_0^2=A^2\mathrm{e}^{2i\phi}+2|A|^2+A^{*2}\mathrm{e}^{-2i\phi}, \tag{73}$$

其中 $|A|^2=AA^*$，我们设解的形式为

$$w_0=D\mathrm{e}^{2i\phi}+D^*\mathrm{e}^{-2i\phi}+\hat{w}_0. \tag{74}$$

代入方程（69）后，e^0 中的项给出

$$\hat{w}_0=\frac{|A|^2}{1-\beta}, \tag{75}$$

而 $\mathrm{e}^{2i\phi}$ 和 $\mathrm{e}^{-2i\phi}$ 中的项分别给出

$$D=\alpha A^2, \quad \alpha=\frac{1}{2}\frac{(1+4ik_{||}\eta_0/\rho_0 v_A)}{(1-\beta+(8/3)ik_{||}\eta_0/\rho_0 v_A)}. \tag{76}$$

w_0 的解也可以用不含复数的形式表示。将 $\alpha=\alpha_r+i\alpha_i$ 的实部和虚部明确写出，可得实常数

$$\alpha_r=\frac{1}{2}\frac{(1-\beta+(32/3)(\mathrm{Re})^{-2})}{((1-\beta)^2+(64/9)(\mathrm{Re})^{-2})}, \tag{77}$$

$$\alpha_i=\frac{2}{3}\frac{(1-3\beta)(\mathrm{Re})^{-1}}{((1-\beta)^2+(64/9)(\mathrm{Re})^{-2})}, \tag{78}$$

其中雷诺数 $=\rho_0 v_A/k_{||}\eta_0$ 与方程（26）一致。由此很容易证明

$$\frac{w_0}{2R(Z)^2}=\alpha_r\cos(2(k_{||}(z-v_A t)+\theta(Z)))-\alpha_i\sin(2(k_{||}(z-v_A t)+\theta(Z)))+\frac{1}{2(1-\beta)}. \tag{79}$$

为推导 $R(Z)$ 和 $\theta(Z)$，我们重新分析方程 (58)。方程 (58中的 ϵ^1 项给出以下非齐次偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_1=2v_A^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial Z\partial z}+v_A^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_0 w_0)+\frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(\frac{\partial v_0^3}{\partial z}-2v_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right). \tag{80}$$

v_0 和 w_0 项驱动 v_1，而 v_1 的解会出现世俗贡献（即一个或多个相对于齐次方程对应解不断增长的项），如果右端的项与无驱动波动方程的解发生共振。在 v_0 由方程 (70给出的特定情况下，如果方程 (80的右端包含 $\mathrm{e}^{i\phi}$ 或 $\mathrm{e}^{-i\phi}$ 项，那么 v_1 解中的世俗项会限制 v_0 作为有效近似的适用范围。多尺度分析的核心思想是求出使共振消失的 $A(Z)$，从而使 v_0 成为 v的持久近似。

利用方程 （70）和（74）–（76），$\mathrm{e}^{i\phi}$ 项在且仅在以下条件下才会从方程（80）的右端消失

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Z} = -\frac{k_{||}|A|^2}{2}\left[i\left(\alpha + \frac{1}{1-\beta}\right) + \frac{k_{||}\eta_0}{\rho_0 v_A}(3-4\alpha)\right]. \tag{81}$$

相同的条件也会消去 $\mathrm{e}^{-i\phi}$ 项。

改写为极坐标形式后，方程（71）意味着

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Z} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Z} + i\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}Z}. \tag{82}$$

因此，方程（81）的实部和虚部给出实常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Z} = -\frac{\kappa_1}{2}R^3, \tag{83}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}Z} = \kappa_2 R^2, \tag{84}$$

其中

$$\kappa_1 = k_{||}\left(\frac{k_{||}\eta_0}{\rho_0 v_A}(3-4\alpha_r) - \alpha_i\right), \tag{85}$$

$$\kappa_2 = -\frac{k_{||}}{2}\left(\alpha_r + \frac{1}{1-\beta} - \frac{k_{||}\eta_0}{\rho_0 v_A}4\alpha_i\right). \tag{86}$$

方程（83）和（84）控制 阿尔芬波的局部振幅和相位漂移，分别为′（参见 方程（72）） .

我们主要关注 R（Z），它决定了波如何衰减。方程（83）是一个可分离一阶微分方程，其解为

$$R(Z) = \frac{R(0)}{\sqrt{1+\kappa_1 R(0)^2 Z}}. \tag{87}$$

对于 $\kappa_1 > 0$，波包络呈非指数衰减，其阻尼长度与初始波振幅的平方成反比。得到 R（Z）后，可通过直接积分方程（84）求得 θ（Z）的解。利用方程（87），

$$\theta(Z) = \theta(0) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\ln\left|1+\kappa_1 R(0)^2 Z\right|. \tag{88}$$

5.2.4. *Solution in original variables*

在确保对 $v \approx v_0$ 的修正仍为 $\epsilon \sim (b/B_0)^2 \ll 1$阶后，多尺度分析通过使用 v_0 作为 v的近似而告结束。回到原变量，

$$V_x(z,t) = \frac{a_0}{\sqrt{1+z/L_d}}\cos\left(k_{||}(z-v_A t) + (\kappa_2/\kappa_1)\ln|1+z/L_d| + \theta_0\right), \tag{89}$$

其中，a_0 是 V_x的振幅（0，t），θ_0 设定波的初始相位（在 $z=0$，$t=0$处），并且

$$L_d = \frac{4}{\kappa_1 (a_0/v_A)^2} \tag{90}$$

是衰减长度。利用方程（77）、（78）和（85），

$$\kappa_1 = \frac{k_{||}}{3\mathrm{Re}}\frac{(1-3\beta)^2}{(1-\beta)^2 + (64/9)(\mathrm{Re})^{-2}}, \tag{91}$$

其中 Re 是该波的雷诺数，定义见方程（26）。因此，

$$L_d = \frac{12\mathrm{Re}}{k_{||}(a_0/v_A)^2}\frac{(1-\beta)^2+(64/9)(\mathrm{Re})^{-2}}{(1-3\beta)^2}. \tag{92}$$

若忽略式（$^{-2}$ 92）分子中的雷诺数 项，则 L_d 与我们从能量原理推导出的式（41）完全一致。式（ L_d 92）中的公式更为一般，因为推导时并未对雷诺数 $= k_{||}\eta_0/\rho_0 v_A$的取值作出直接假设，不过多尺度分析要求参数组合 $k_{||}$、a_0^2 和雷诺数满足这样的条件：波的阻尼尺度远大于波长。

5.3. 非指数衰减与阻尼长度的解释

一般而言，由于能量与扰动的振幅平方成正比，阿尔芬 波能量密度 $E_w = \rho V_x^2$ 比扰动 V_x衰减得更快。对于指数衰减，这体现为相应的 e 折叠$^{-1}$ 衰减长度相差一倍。对于非线性黏性阻尼导致的非指数衰减，情况则有所不同。同一个 L_d 描述了 V_x 和 E_w，但它们的函数形式不同。速度振幅按（$1+z/L_d$）衰减$^{-1/2}$ （见式（89）），而波能量密度按（$1+z/L_d$）衰减$^{-1}$。因此，经过距离 L_d后，速度振幅缩小为原来的 $\sqrt{2}$，能量密度则减半。

5.4. 纳入热传导

多尺度分析也可以进行修正，以纳入显式热传导。由于热传导具有高度各向异性，我们纳入平行热传导，并将热流矢量设为

$$\mathbf{q} = -\mathcal{K}_{||}(\mathbf{h}\cdot\nabla T)\mathbf{h}, \tag{93}$$

其中， $\mathcal{K}_{||}$ 是平行热传导系数，温度 $T = p/\rho\mathcal{R}$ ，其中 $\mathcal{R}$ 是气体常数。包含热流的能量方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + \gamma p\nabla\cdot\mathbf{V} = (\gamma-1)(Q_{visc} - \nabla\cdot\mathbf{q}), \tag{94}$$

其取代了方程（67）。

由此可知， $\delta p/p_0$ 与 v_z/v_A 之间满足偏微分方程

$$\left(1+\Lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\delta p}{p_0} = \left(\gamma+\Lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{V_z}{v_A} + O(\epsilon^2). \tag{95}$$

其中

$$\Lambda = \frac{(\gamma-1)\mathcal{K}_{||}}{\rho_0\mathcal{R}v_A} \tag{96}$$

是一个热传导长度尺度。在热传导较弱的极限下， $\Lambda\to 0$ 给出 $\delta p/p_0 = \gamma V_z/v_A$，从而恢复上文讨论的绝热情形。同样地，在热传导较强的情况下， $\Lambda\to\infty$ 给出 $\delta p/p_0 = V_z/v_A$，从而恢复等温情形。

引入无量纲压力变量 c，定义为 $\delta p = \epsilon p_0 c(z,t)$，展开 $c(z,t) = c_0(z,Z,t)+\epsilon c_1(z,Z,t)+$。..并设 $c_0 = C\mathrm{e}^{2i\phi} + C^*\mathrm{e}^{2i\phi} + \hat{c}_0$，则方程（95）中$\mathrm{e}^0$ 的各项给出$\hat{c}_0 = \gamma\hat{}w_0$，而$\mathrm{e}^{2i\phi}$ 的各项给出 $C = \Gamma D$，其中

$$\Gamma = \frac{\gamma + 2ik_{||}\Lambda}{1+2ik_{||}\Lambda}. \tag{97}$$

进一步求解，可得一个与方程（ $D = \alpha A^2$ 76）类似的方程，但其中的 β 被公式中复数值的$\Gamma p_0/\rho_0 v_A^2$ 取代。 α 与此同时， （75）和（81）保持不变，仍保留实数值的 $\beta = \gamma p_0/\rho_0 v_A^2$。因此，波振幅由与方程（83）和（85）完全相同的结果所支配，只需按上述方式改变 α的定义。

6. 讨论

6.1. 最佳阻尼

考察方程（92）， $L_d k_{||}$ 的公式关于阿尔芬雷诺数在 $\mathrm{Re} = 8/(3|1-\beta|)$ 处达到最小值。因此，满足 $k_{||} = 3\rho_0 v_A |1-\beta|/3\eta_0$ 的剪切阿尔芬波所经历的波长数最少，我们将这种情况称为最佳阻尼。达到最佳阻尼的波具有

$$\frac{L_d}{\lambda_{||}} = \frac{32}{\pi} \frac{|1-\beta|}{(a_0/v_A)^2(1-3\beta)^2}. \tag{98}$$

当 $\beta \ll 1$时，方程（98）右侧近似等于十除以归一化波幅的平方。因此，尽管非线性黏性阻尼原则上可以在较短的波长范围内阻尼阿尔芬波，但这需要较大的振幅 $a/v_A \sim 1$，或 $\beta \sim 1$。对于较常见的振幅 $a/v_A \sim 10^{-1}$和较低的 β，可得 $L_d/\lambda_{||} \gtrsim 1000$，因此在许多日冕情形下，非线性黏性阻尼可以忽略不计。

6.2. *Viscous self-organisation*

小雷诺数（高黏性等离子体）下非线性黏性阻尼受到抑制，并不意味着黏性效应在这一条件下无关紧要。恰恰相反，小 Re 下非线性阻尼受到抑制，是因为黏性力会调节与阿尔芬波相关的平行流，使其趋近于关系式 $V_z/v_A = (3/4)(V_x/v_A)^2$。在采用 Braginskii 磁流体力学建模的高黏性等离子体中，平行流的这种变化对于避免显著的非线性阻尼至关重要。

6.3. 有效性约束

本文始终假设 $\beta \neq 1$，以避免共振波耦合。日冕的大部分区域都满足这一条件，因此它适用于我们的主要应用场景。此外，第 § 5 节中的多尺度分析将 $\epsilon \sim (V_x/v_A)^2 \sim (b/B_0)^2$ 作为小参数，其后果之一是非线性阻尼发生的距离远大于平行波长。正如第 § 3.2节所述，在开磁场区域观测到了横向日冕波，其 $\epsilon \sim 10^{-2}$，因此弱非线性理论适用于这类情况。尽管如此，在共振和强非线性区域中求得非线性黏性解，仍是等离子体理论未来值得探索的课题。

本文结果在物理问题中的适用性，还受到 Braginskii 磁流体力学能够严格适用的条件限制。正如§ 2中所述，Braginskii 磁流体力学的传统推导假设碰撞平均自由程小于宏观尺度。将沿磁场方向的平均自由程与平行波长进行比较，这一条件可表示为 $k_{||}\lambda_{mfp} < 1$，其中 $\lambda_{mfp} = v_{Ti}\tau_i$，$v_{Ti} = \sqrt{k_B T/m_i}$且$\tau_i$ 为离子碰撞时间。使用公式（Braginskii 1958，1965年；Hollweg 1985）

$$\eta_0 = 0.96 n k_B T \tau_i, \tag{99}$$

以及式（26）中 Re 的定义，可以得到

$$k_{||}\lambda_{mfp} < 1 \;\Leftrightarrow\; \beta^{1/2}\mathrm{Re} = \frac{\rho c_s}{k_{||}\eta_0} > 1. \tag{100}$$

换言之，Braginskii 磁流体力学要求基于声速定义的雷诺数大于 1。因此，将小阿尔芬雷诺数下的结果（如黏性自组织）应用于真实的低-β 等离子体时，应当谨慎。

6.4. *Formulas for applications*

对于实际等离子体的应用，以下公式较为方便。当平行黏度系数由库仑碰撞决定时，

$$\eta_0 = 0.96 n k_B T \tau_i = \frac{22}{\lambda_C} \times 10^{-17} T^{5/2}, \tag{101}$$

其中该公式采用国际单位制表示，T 的单位为开尔文，且 λ_C 为库仑对数（例如Hollweg 1985）。随后，式（26）中定义的雷诺数可表示为

$$\mathrm{Re} = 5.8 \times 10^{20} \lambda_C B^2 f^{-1} T^{-5/2}, \tag{102}$$

同样采用国际单位制，其中 $f = v_A k_{||}/2\pi$ 为波频率。该公式明确表明了其对频率、磁场强度和温度的依赖关系。等离子体温度较高、磁场强度较低，以及波频率较高时，阿尔fvén雷诺数最小。最后，我们将式（92）中的阻尼长度表示为频率和均方速度$\langle V_x^2 \rangle = a_0^2/2$的函数，得到

$$L_d = \frac{3}{\pi} \frac{v_A^3 \mathrm{Re}}{f \langle V_x^2 \rangle} \frac{(1-\beta)^2 + (64/9)(\mathrm{Re})^{-2}}{(1-3\beta)^2}. \tag{103}$$

6.5. 日冕开放磁场区域中的波

磁开放日冕中的外传横向波所含能量足以加热开放日冕并加速快速太阳风（McIntosh 等（2011）；Morton 等（2015）），且观测发现，这些波在太阳表面上方一个太阳半径以内显著衰减（Bemporad 与 Abbo，2012；Hahn 等，2012；Hahn 与 Savin，2013；Hahn 等，2022）。人们还认为，这些高度处的加热对于产生观测到的快速太阳风迅速加速现象十分重要（Habbal 等，1995；McKenzie 等，1995）。外传波如何衰减这一问题尚未得到定论，不过一种主要假说认为，湍流级联由向下传播的阿尔芬波相互作用驱动（Hollweg，1986；Heyvaerts 与 Priest，1992；Matthaeus 等，1999；Cranmer 等，2007；Verdini 等，2010；Miki´c 等，2018）；这些向下传播的波由密度非均匀性引起的反射（van Ballegooijen 与 Asgari-Targhi，2016；Pascoe 等，2022）或参量衰变不稳定性（Galeev 与 Oraevskii，1963；Derby（1978）；Goldstein（1978）；Shoda 等，2019；Hahn 等，2022）产生。

在此，我们证明，在传统布拉金斯基磁流体力学推导成立的高度范围内，布拉金斯基黏度不会对阿尔芬波造成显著阻尼。具体而言，我们采用 Morton 等人（2015）报告的观测值，研究 2012年3月27日太阳北极开放磁场区域的情况。约在 $f = 5$ mHz 处存在增强的波功率，这表明这些阿尔芬波是由 p 模产生的（Morton et al. 2019）。我们将计算该频率下的阻尼长度，并指出雷诺数 Re 和 L_d 取决于 f，而在高 Re 极限下，$L_d \sim f^{-2}$。Morton 等人（2015）推断，在其研究范围 $r = 1.05$ 至 $1.20 R_\odot$ 内，阿尔芬速度几乎保持不变，为 $v_A = 400$ km s^{-1}。温度方面，我们取 $T = 1.6 \times 10^6$ K，即 CoMP 仪器所用 Fe XIII 谱线的形成温度；由此可得质子热速度 $V_{Ti} = \sqrt{k_B T/m_i}$ 为 115 km s^{-1}。因此，在等温状态方程下，$\beta = 0.083$ 且 $\beta^{1/2} = 0.29$。对于波速度振幅，Morton 等人（2015）建议采用报告的非热线宽，该数值随高度变化。

从 Morton et al. (2015) 观测到的最低高度开始，$r = 1.05 R_\odot$，我们设定 $n = 10^{14}\,\mathrm{m}^{-3}$，$B = 2 \times 10^{-4}$ T，并取 V_x 的均方根值为 35 km s^{-1}。因此，我们得到 $\lambda_C = 19$ 以及雷诺数 $= 28$。由于 $\beta^{1/2}$雷诺数 $= 8 > 1$，适用 Braginskii 磁流体力学，我们计算得 $L_d = 4.2 \times 10^8$ km $\equiv 600 R_\odot$。

在 $r = 1.20$处，我们设定 $n = 10^{13}\,\mathrm{m}^{-3}$，$B = 6 \times 10^{-5}$ T，并取 V_x 的均方根值为 50 km s^{-1}。因此，观测参数给出 $\lambda_C = 21$ 以及雷诺数 $= 2.7$。由于 $\beta^{1/2}$雷诺数 $= 0.8 \approx 1$，该高度接近传统推导 Braginskii 磁流体力学所依据的假设仍然成立的最高高度（针对这个特定的开放磁场区域，并假设式（101）成立）。在此处计算得到的阻尼长度为 $L_d = 4.2 \times 10^7$ km $\equiv 61 R_\odot$。

我们得出结论，布拉金斯基黏度不会在 $r = 1.2 R_\odot$以下造成显著的波阻尼；这与观测结果一致：日冕洞中的阿尔芬波振幅在达到这一高度附近之前遵循理想 WKB 标度（Cranmer 和 van Ballegooijen（2005）；Hahn 与 Savin，2013）。

在我们考察的高度范围内，L_d 降低了一个数量级。若依据高雷诺数或不可压缩结果进行外推，似乎黏性阻尼会在观测到波发生阻尼的高度附近变得重要。对此我们谨慎看待，原因有二。首先，如§ 6.1所述，我们的结果表明，当雷诺数 $< 8/(3|1-\beta|)$ 时，在布拉金斯基磁流体力学模型中，随着沿磁场流动自行组织以抑制黏性阻尼，阻尼长度会再次增加。其次，随着等离子体变得越来越无碰撞（$\beta^{1/2}$雷诺数 < 1），传统的布拉金斯基磁流体力学推导便不再适用。

值得注意的是，波阻尼开始出现的高度大致与无法再有把握地应用 Braginskii 磁流体力学的高度相吻合；若采用 η_0 方程（101）给出的库仑碰撞表达式，这一点或许意义重大。这种对应关系表明，日冕洞中观测到的波阻尼可能涉及常见流体模型中未包含的无碰撞效应和热流效应。

6.6. 未来工作

未来应将目前这类分析扩展到其他类型的传播横向磁流体波。伴随传播的扭转阿尔芬波产生的非线性纵向流，与其对应于

传播的剪切阿尔芬波（Vasheghani Farahani 等人（2011））产生的非线性纵向流不同，研究这种差异如何影响非线性黏性阻尼将会很有意义。同样值得探究的是，非线性黏度如何影响传播的扭曲波（Edwin 和 Roberts（1983））。

对于传播的剪切阿尔芬波，黏性阻尼在 $c_s = v_A$ 奇点附近似乎最有望发挥作用；但必须采用不同于本文所用的方法来处理奇点。太阳风中经常存在 $\beta \sim 1$，而 $\beta = 1$则出现在太阳低层大气以及日冕磁零点附近。因此，这种情况具有相当重要的物理意义。将该方法应用于磁零点的一项挑战在于，磁场单位矢量$\mathbf{h} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$在零点本身并无定义，因此必须谨慎地通过适当计算来求取布拉金斯基应力张量，例如参见 MacTaggart 等人近期的讨论 (2017)。

另一个挑战是建立适用于振幅 $b \sim B_0$ 及更强振幅的强非线性波的非线性黏性阻尼理论。第§ 5 节中的多尺度分析结果仅对弱非线性情形严格成立；在这种情况下，$\epsilon \sim (b/B_0)^2$ 可视为小参数，并假设阻尼长度显著大于波长。具有的强非线性阿尔 $b \sim B_0$ 芬波是太阳风的一种特征。尽管太阳风的低碰撞率意味着 Braginskii 磁流体力学可能并不适用于这一应用，但将当前工作拓展至强非线性波仍是一个值得研究的问题。

除波阻尼之外，还有各种磁流体波动问题，其中黏性效应很可能十分显著。首要的一类是涉及阿尔芬波的非线性现象；在这些问题中，非线性黏度张量与所关注的效应处于同一阶。例如，驻立阿尔芬波所驱动的沿磁场流动，显著强于传播波所产生的流动，因为驻立阿尔芬波会形成不均匀的时间平均磁压。研究黏度如何改变波相互作用也可能很有价值，包括阿尔芬波碰撞和参量衰变不稳定性（Galeev 与 Oraevskii，1963；Derby（1978）；Goldstein（1978）），这些过程是磁开放日冕中波加热主流假说的核心。

最后，我们强调，基础等离子体物理研究仍有必要不断提供更严谨的推导，并验证弱碰撞和无碰撞等离子体适用的流体方程，以应对§ 2中概述的闭合问题。正如§ 2 和6.3中所述，随着日冕中的等离子体变得越来越无碰撞，Braginskii磁流体力学在较高日冕高度处不再适用（见方程（100）和（102））。在这些条件下，CGL双绝热方程以及其他演化应力张量的模型，可能是更合适的框架。Hunana et al. (2019a,b, 2022)近期讨论了这类模型及其局限性。另一种可能是，太阳波研究领域需要更广泛地采用非流体等离子体模型。然而，动理学模型的可处理性仍是一个限制因素，尤其考虑到太阳日冕中动理学尺度与宏观尺度之间存在典型的巨大尺度差异。关于这些问题的精辟评论，见 Montgomery(1996)。

7. 结论

本文研究了受布拉金斯基黏性应力张量非线性效应影响的剪切阿尔芬传播波的性质。主要结论如下：

1. 对许多等离子体环境（包括低层太阳日冕）而言，Braginskii磁流体力学通过严格处理应力张量和热传导，比经典磁流体力学能更准确地描述等离子体。然而，对于许多太阳磁流体现象，应力张量效应仍未得到充分研究。
2. 剪切阿尔芬传播波的主要黏性效应是波振幅的非线性效应，并通过“平行”黏度系数 η_0 产生。基于对应力张量按波振幅线性化所得的理论结果，仅适用于满足 $(b/B_0)^2 \ll (\Omega_i \tau_i)^{-2}$ 的振幅。此类波在正常日冕条件下的能量贡献微不足道，因此必须采用非线性处理。3. 可压缩性和压力会影响剪切阿尔芬波伴随的非线性沿磁场流动，进而影响非线性波阻尼。要获得准确的日冕结果，二者都必须纳入考虑。

4. 布拉金斯基黏度会非线性地阻尼传播的剪切 Alfvén 波，使主波场 b 和V_x 按 $(1 + z/L_d)^{-1/2}$衰减，其中衰减长度

$$L_d = \frac{12\mathrm{Re}}{k_{||}(a_0/v_A)^2} \frac{(1-\beta)^2 + (64/9)(\mathrm{Re})^{-2}}{(1-3\beta)^2}.$$

这里， a_0 是该波的初始速度振幅， $\beta = (c_s/v_A)^2$ ，而 Re $= \rho v_A/k_{||}\eta_0$ 是该波的阿尔芬雷诺数。能量密度按 ($1 + z/L_d)^{-1}$衰减。

5. 当 Re $= 8/(3|1-\beta|)$ 时，可获得最优阻尼（即最小归一化阻尼长度 $k_{||}L_d$）。对于低β 等离子体且 (a_0/v_A) $\lesssim 10^{-1}$ 的情况，可得 $L_d/\lambda_{||} \gtrsim 1000$，这表明在许多日冕情形下，非线性黏性阻尼可以忽略。

6. 高黏性状态下 $L_d \to \infty$ 的渐近行为归因于黏性力使平行流自组织，从而满足 $V_z/v_A \approx (3/4)(V_x/v_A)^2$, , 进而抑制耗散。

7. Braginskii磁流体力学解对真实等离子体的适用性，受到 Braginskii磁流体力学传统推导的限制；该推导假设 $k_{||}\lambda_{mfp} < 1$ ，这等价于 $\beta^{1/2}$雷诺数 $= \rho c_s/k_{||}\eta_0 > 1$。换言之，Braginskii磁流体力学要求以声速为基准的雷诺数大于 1。因此，我们建议仅将大阿尔芬雷诺数下的阻尼结果应用于真实日冕等离子体，并采用本文通过两种不同方法——能量原理和多尺度分析——推导出的简化公式 $L_d = 12\text{Re}(1-\beta)^2/(k_{||}(a_0/v_A)^2(1-3\beta)^2)$)。

8. 对极区开放磁场区域中观测到的横向波的应用表明，在布拉金斯基磁流体力学传统推导所依据的假设仍然成立的高度范围内，非线性布拉金斯基黏滞不会导致波出现显著阻尼（$r \lesssim 1.2R_\odot$ 对于所研究的区域和波属性）。耐人寻味的是，观测到的波阻尼起始高度大致与这样一个高度相吻合：若采用 η_0 方程（101）中给出的库仑碰撞表达式，便无法再有把握地应用布拉金斯基磁流体力学。

本研究缘起于研究访问期间与 Paola Testa、Bart De Pontieu、Vanessa Polito、Graham Kerr、Mark Cheung、Wei Liu、David Graham、Joel Allred、Mats Carlsson、Iain Hannah 和 Fabio Reale 的交流，并从中受益。此次访问 LMSAL 的经费来自欧洲航天局对 IRIS任务的支持（2018年8月）；此外，本研究也受益于2018年11月在伯尔尼举行的国际空间科学研究所国际团队355会议。我感谢 Peter Cargill、Andrew Wright、Bart De Pontieu 和 Paola Testa 于2019年6月对早期稿件提出意见，也感谢 Declan Diver 鼓励我探索与压力各向异性的联系。感谢审稿人提出审慎且富有建设性的建议，也感谢几位未具名人士提出的意见，这些意见同样改进了稿件。本研究使用了NRL等离子体公式手册、美国国家航空航天局的ADS文献服务以及英国图书馆的按需服务，并得到邓迪大学图书馆员的协助。

参考文献

阿尔芬，H. 1942年，《自然》，150，405，doi: 10.1038/150405d0—. 1943年，Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik，29B，1 —. 1947年，《皇家天文学会月刊》，107，211，doi: 10.1093/mnras/107.2.211—. 1950年，《宇宙电动力学》（克拉伦登出版社）Arregui, I. 2015，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》，373，20140261，doi: 10.1098/rsta.2014.0261Balescu, R. 1988，《等离子体中的输运过程》。（阿姆斯特丹：北荷兰出版社）Batchelor, G. K. 1950，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，201，405，doi: 10.1098/rspa.1950.0069Belcher, J. W., & Davis, Leverett, J. 1971，《地球物理研究杂志》，76，3534，doi: 10.1029/JA076i016p03534Bemporad, A., & Abbo, L. 2012，《天体物理学杂志》，751，110，doi: 10.1088/0004-637X/751/2/110

Bender, C. M., & Orszag, S. A. 1978, 科学家与工程师的高等数学方法 (施普林格) Braginskii, S. I. 1958, 《苏联实验与理论物理学杂志》, 6, 358 —. 1965, 《等离子体物理学评论》, 1, 205 Chapman, S., & Cowling, T. G. 1939, 非均匀气体的数学理论 (剑桥大学出版社) Chew, G. F., Goldberger, M. L., & Low, F. E. 1956, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑》, 236, 112, doi: 10.1098/rspa.1956.0116Coleman, Paul J., J. 1967, 《行星与空间科学》, 15, 953, doi: 10.1016/0032-0633(67)90166-3Cranmer,S. R., & van Ballegooijen, A.A. 2005, 《天体物理学杂志增刊》, 156, 265, doi: 10.1086/426507

Cranmer, S. R., van Ballegooijen, A. A., & Edgar, R. J. 2007, 《天体物理学杂志增刊》, 171, 520, doi: 10.1086/518001 De Moortel, I., & Browning, P. 2015, 《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》, 373, 20140269, doi: 10.1098/rsta.2014.0269 De Moortel, I., Falconer, I., & Stack, R. 2020, 《天文学与地球物理学》, 61, 2.34, doi: 10.1093/astrogeo/ataa031 De Moortel, I., & Nakariakov, V. M. 2012, 《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》, 370, 3193, doi: 10.1098/rsta.2011.0640 De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Carlsson, M., et al. 2007, 《科学》, 318, 1574, doi: 10.1126/science.1151747 Derby, N. F., J. 1978, 《天体物理学杂志》, 224, 1013, doi: 10.1086/156451 Edwin, P. M., & Roberts, B. 1983, 《太阳物理学》, 88, 179, doi: 10.1007/BF00196186 Erdelyi, R., & Goossens, M. 1995, 《天文学与天体物理学》, 294, 575 Galeev, A. A., & Oraevskii, V. N. 1963, 《苏联物理学文献》, 7, 988 Goldstein, M. L. 1978, 《天体物理学杂志》, 219, 700, doi: 10.1086/155829 Grad, H. 1949, 《纯粹与应用数学通讯》, 2, 331, doi: https://doi.org/10.1002/cpa.3160020403 Habbal, S. R., Esser, R., Guhathakurta, M., & Fisher, R. R. 1995, 《地球物理研究快报》, 22, 1465, doi: 10.1029/95GL01064 Hahn, M., Fu, X., & Savin, D. W. 2022, 《天体物理学杂志》, 933, 52, doi: 10.3847/1538-4357/ac7147 Hahn, M., Landi, E., & Savin, D. W. 2012, 《天体物理学杂志》, 753, 36, doi: 10.1088/0004-637X/753/1/36 Hahn, M., & Savin, D. W. 2013, 《天体物理学杂志》, 776, 78, doi: 10.1088/0004-637X/776/2/78 Hartmann, J. 1937, 《数学与物理通讯》. XV, 15, 6 Heyvaerts, J., & Priest, E. R. 1992, 《天体物理学杂志》, 390, 297, doi: 10.1086/171280 Hogan, J. T. 1984, 《流体物理学》, 27, 2308, doi: 10.1063/1.864886 Hollweg, J. V. 1971, 《地球物理研究杂志》, 76, 5155, doi: 10.1029/JA076i022p05155 —. 1985, 《地球物理研究杂志》, 90, 7620, doi: 10.1029/JA090iA08p07620 —. 1986, 《地球物理研究杂志》 , 91, 4111, doi: 10.1029/JA091iA04p04111 —. 1987, 《天体物理学杂志》, 320, 875, doi: 10.1086/165604 Hunana,P.,Tenerani, A., Zank, G. P., et al. 2019a, 《等离子体物理学杂志》, 85, 205850602, doi: 10.1017/S0022377819000801 —. 2019b, 《等离子体物理学杂志》, 85, 205850603, doi: 10.1017/S0022377819000850 Hunana, P., Passot, T., Khomenko, E., 等. 2022, 《天体物理学杂志增刊》, 260, 26, doi: 10.3847/1538-4365/ac5044 Lifshitz, E. M., & Pitaevskii, L. P. 1981, 《物理动力学》（Butterworth-Heinemann） Lin, Y., Engvold, O., Rouppe van der Voort, L. H. M., & van Noort, M. 2007, 《太阳物理学》, 246, 65, doi: 10.1007/s11207-007-0402-8 MacTaggart, D., Vergori, L., & Quinn, J. 2017, 《流体力学杂志》, 826, 615, doi: 10.1017/jfm.2017.463 Matthaeus, W. H., Zank, G. P., Oughton, S., Mullan, D. J., &Dmitruk,P.1999,《天体物理学杂志快报》, 523, L93,doi: 10.1086/312259 McIntosh, S. W., de Pontieu, B., Carlsson, M., 等. 2011, 《自然》, 475, 477, doi: 10.1038/nature10235 McKenzie, J. F., Banaszkiewicz, M., & Axford, W. I. 1995, 《天文学与天体物理学》, 303, L45 McLaughlin, J. A., de Moortel, I., & Hood, A. W. 2011, 《天文学与天体物理学》, 527, A149, doi: 10.1051/0004-6361/201015552 Miki´c, , Z., Downs, C., 等. 2018, 《自然·天文学》, 2, 913, doi: 10.1038/s41550-018-0562-5 Montgomery, D. 1992, 《地球物理研究杂志》, 97, 4309, doi: 10.1029/92JA00144 —. 1996, 《等离子体物理学杂志》, 56, 387, doi: 10.1017/S0022377800019358 Morton, R. J., Tomczyk, S., & Pinto, R. 2015, 《自然 · 通讯》, 6, 7813, doi: 10.1038/ncomms8813 Morton, R. J., Weberg, M. J., & McLaughlin, J. A. 2019, 《自然·天文学》, 3, 223, doi: 10.1038/s41550-018-0668-9 Nakariakov, V. M., & Verwichte, E. 2005, 《太阳物理学生活评论》, 2, 3, doi: 10.12942/lrsp-2005-3 Nocera, L., Priest, E. R., & Hollweg, J. V. 1986, 《地球物理与天体物理流体动力学》, 35, 111, doi: 10.1080/03091928608245889 Ofman, L., Davila, J. M., & Steinolfson, R. S. 1994, 《天体物理学杂志》, 421, 360, doi: 10.1086/173654 Okamoto, T. J., Tsuneta, S., Berger, T. E., 等. 2007, 《科学》, 318, 1577, doi: 10.1126/science.1145447 Osterbrock, D. E. 1961, 《天体物理学杂志》, 134, 347, doi: 10.1086/147165 Oughton, S. 1996, 《等离子体物理学杂志》, 56, 641, doi: 10.1017/S0022377800019504 —. 1997, 《等离子体物理学杂志》, 58, 571, doi: 10.1017/S0022377897005928 Pascoe, D. J., De Moortel, I., Pagano, P., & Howson, T. A. 2022, 《皇家天文学会月刊》, 516, 2181, doi: 10.1093/mnras/stac2294 Priest, E. 2014, 太阳磁流体力学（剑桥大学出版社）, doi: 10.1017/CBO9781139020732 Ruderman, M. S. 1991, 《太阳物理学》, 131, 11, doi: 10.1007/BF00151740

Russell, A. J. B. 2018, 《太阳物理学》, 293, 83, doi: 10.1007/s11207-018-1296-3Russell, A. J. B., Mooney, M. K., Leake, J. E., & Hudson, H. S. 2016, 《天体物理学杂志》, 831, 42, doi: 10.3847/0004-637X/831/1/42Schunk, R., & Nagy,A. 2009, 《电离层：物理学、等离子体物理学与化学》（剑桥大学出版社）, doi: 10.1017/CBO9780511635342Shoda, M., Suzuki, T. K.,Asgari-Targhi, M., & Yokoyama, T. 2019, 《天体物理学杂志快报》, 880, L2, doi:10.3847/2041-8213/ab2b45Spitzer, L. 1962, 《全电离气体物理学》, 第二版（IntersciencePublishers, Dover Publications 重印）Steinolfson, R. S., Priest, E. R., Poedts, S., Nocera, L., & Goossens, M. 1986, 《天体物理学杂志》, 304, 526, doi:10.1086/164187 Tomczyk, S., McIntosh, S. W., Keil, S. L. 等 2007, 《科学》, 317, 1192, doi: 10.1126/science.1143304van Ballegooijen, A. A., & Asgari-Targhi, M. 2016, 《天体物理学杂志》, 821, 106, doi: 10.3847/0004-637X/821/2/106Van Doorsselaere, T., Srivastava, A. K., Antolin, P. 等 2020, 《空间科学评论》, 216, 140, doi: 10.1007/s11214-020-00770-yVasheghani Farahani, S., Nakariakov, V. M., van Doorsselaere, T., & Verwichte, E. 2011, 《天文学与天体物理学》, 526, A80, doi: 10.1051/0004-6361/201016063Verdini, A., Velli, M., Matthaeus, W. H., Oughton, S., & Dmitruk, P. 2010, 《天体物理学杂志快报》, 708, L116, doi: 10.1088/2041-8205/708/2/L116Zank, G. P. 2014,《空间物理与天体物理学中的输运过程》, 第877卷（施普林格）, doi: 10.1007/978-1-4614-8480-6