arXiv:2303.11132v1 [math.AG] 20 Mar 2023

SY约化群作用的辛复杂度 S

AVRAHAM AIZENBUD 和 DMITRY GOUREVITCH

Abstract. 设复代数约化群 G 作用于复代数流形 X。对于幂零锥 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*) \subset \mathfrak{g}^*$ 的一个 G-不变子簇 Ξ，我们定义 X 的Ξ-辛复杂度这一概念。该概念推广了 [Vin86] 中定义的复杂度概念。我们证明了这一概念的若干性质，并将其与 [AG] 中定义的 Ξ-复杂度概念联系起来；后者的提出是受其与表示论的关系所启发。

1. Introduction

设 G 是一个复代数约化群，X 是一个复代数 G-流形。在 [Vin86], 中，Vinberg 定义了 X 的复杂度这一概念，用以衡量 X 距离成为球面 [1] 有多远。对于幂零锥 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*) \subset \mathfrak{g}^*$ 的一个 G-不变子簇 Ξ，我们在 [AG] 中定义了 Ξ-球面簇的概念，以及 X 的 Ξ-复杂度，记作 $c_\Xi(X)$，用以衡量 X 距离成为 Ξ-球面有多远。

本文定义了这一概念的一个变体，称为 Ξ-辛复杂度，并记作 $sc_\Xi(X)$。这一概念似乎更为粗略，但性质更好，并且同样适用于表示论中的应用。特别地，我们证明以下定理。

定理 A（§4）。设 $\Xi \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)$ 是一个 G-不变的（局部闭）子簇。

(i) $sc_\Xi(X) \geq \max(c_\Xi(X), 0)$ (ii) 设 $\{Y_i\}_{i=1}^k$ 是 X 的光滑 G-不变（局部闭）子簇，且 $X = \bigcup_i Y_i$，并设 $\{\Xi_i\}_{i=1}^l$ 是 Ξ 的光滑 G-不变（局部闭）子簇，满足 $\Xi = \bigcup_j \Xi_j$。则 $sc_\Xi(X) = \max_{i,j} sc_{\Xi_j}(Y_i)$。(iii) 对于任意抛物子群 $P \subset G$，$sc_{\overline{O_P}}(X)$ 等于 X 的 P-模态，其中 O_P 表示由 P 定义的 Richardson 轨道。(iv) $sc_{\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)}(X) = c_{\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)}(X) = c(X)$。

我们主要关注 G 在 X 上具有有限多个轨道的情形。根据定理 A(ii)，此类 X 的 sc_Ξ 的计算可归结为 X 和 Ξ 均为 G- 传递的情形。在这种情况下，我们将在下文的命题 4.0.9 中给出 $sc_\Xi(X)$ 的一个更简单的描述。

等式 $c_{\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)}(X) = c(X)$ 已在 [AG] 中得到证明。因此，满足$c_\Xi(X) \leq 0$ 的簇称为 Ξ-球面簇。对这一概念的研究源于 [AG，定理 D]，该定理表明，对于闭的 Ξ 且 Ξ-球面簇 X，

日期：2023年3月21日。2020年数学主题分类。20G07、14L30、53D20、53D12、43A85 20G05、14L24。关键词和短语：代数群、幂零轨道、齐性空间、球空间、球空间、非交换调和分析、各向同性子簇。[1] 事实上， [Vin86] 并未假设 X 光滑。[2]参见下文 §3.1。

来自由 Ξ 定义的某个范畴的 G(ℂ) 的 Casselman-Wallach 表示，会以有限重数[3]出现在 X(ℂ) 上的施瓦茨函数空间中。

定理 A 与 [AG、定理 B]，一起推出以下推论。

推论 B（§4）。对于任意抛物子群 P ⊂G，以下条件等价。
(a) $^{sc}\overline{\mathrm{O_P}}(X) = 0$。 (b) X 是 O_P-球面空间。 (c) $\overline{P}$ 在 X 上只有有限多个轨道。

如果 $0 \notin \Xi$，那么 c_Ξ(X) 可能为负。然而，我们没有发现这样的例子： c_Ξ(X) 非负，但不同于 sc(X)。这引出了以下问题。

问题 C。

(i) 我们是否有 $sc_\Xi(X) = \max(c_\Xi(X), 0)$? 特别是， Ξ-球面是否蕴含 $sc_\Xi(X) = 0$? (ii) 对于抛物子群 P ⊂ G，$^{c}\overline{\mathrm{O_P}}(X)$ 是否等于 $^{sc}\overline{\mathrm{O_P}}(X)$? (iii) 设 H ⊂ G 是一个代数子群，令 $\mathfrak{h}$ 表示 H 的李代数， $\mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$表示它的湮灭子。设 O ⊂ $\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)$ 是一个与 $\mathfrak{h}^\perp$ 相交的幂零轨道。我们是否有$sc_{\mathrm{O}}(G/H) = sc_{\overline{\mathrm{O}}}(G/H)$?

1.1. 动机。虽然 Ξ-复杂度 c_Ξ(X) 的概念在表示论中很有用，但它似乎不够稳健。例如，当 Ξ 不是单个轨道时，即使是它的定义也较为间接，且必须对 Ξ中的所有轨道取最大值。此外，我们不知道定理 A(ii)、(iii) 的类似结论是否对它成立。辛复杂度的概念解决了这些问题，同时保留了与表示论的联系。

1.2. 主要思想。我们的辛复杂度概念基于我们在 §2 中定义的辛维数。辛维数可用于衡量辛簇的子簇距离成为各向同性子簇还有多远。我们将 X 的 Ξ-辛复杂度定义为附属于 Ξ 的 T^*(X × G/B) 中某个子簇的辛维数，其中 G/B 表示 G 的旗簇。

1.3. 约定。我们所考虑的所有代数簇和群都定义在 ℂ 上。我们将它们与其复点等同。对于代数簇的子簇，我们始终指局部闭子簇。

1.4. 致谢。感谢 Edward Bierstone、Dmitry Kerner 和 Michael Temkin 富有成果的电子邮件交流。

两位作者均获得了以色列科学基金会 249/17 号资助的部分支持。A.A. 还获得了米涅瓦基金会的资助。

2. Symplectic dimension

定义 2.0.1. 对于复向量空间 W 及其上的反对称双线性形式 ω，我们将 W 的辛维数定义为 $\mathrm{sdim}_\omega(W) := (\dim W - \mathrm{Ker}\ \omega)/2$。若形式已明确，我们将省略下标 ω。

[3]如果 G 和 X 定义在 ℝ 上，那么它们的实点也同样如此。

定义 2.0.2. 对于代数簇 Y 及其上的 2-形式 ω，我们将 Y 的辛维数 sdim_ωY 定义为各不可约分支在其泛点处切空间的辛维数的最大值。按照约定，空代数簇的辛维数定义为零。

命题 2.0.3（附录 A）。对于任意代数簇 Z、Z 上的一个 2-形式 ω，以及一个（局部闭）子簇 Y $\subset$ Z，有 sdim Y $\leq$ sdim Z。

推论 2.0.4。设 Z 是一个代数簇，且 ω 是 Z 上的一个 2-形式。设 Z_1,Z_2 是 Z 的（局部闭）子簇，满足 Z $= Z_1 \cup Z_2$。那么 sdim Z $=$ max(sdim Z_1, sdim Z_2)。

引理 2.0.5。对于光滑辛代数簇 M，以及一个（局部闭）子簇 Y $\subset$ M，有 sdim Y $\geq$ dim Y $-$ dim M/2。此外，当且仅当 Y 是余各向同性时，等号成立。

证明。只需证明线性空间 $V \subset W$ 和非退化反对称形式 ω 的相应结论。令 $V^\angle$ 表示关于 ω 与 V 正交的空间。则 dim $V^\angle = \dim W - \dim V$，且 Ker($\omega|_V$) $= V \cap V^\angle \subset V^\angle$；等式 Ker($\omega|_V$) $= V^\angle$ 成立当且仅当 V 是余各向同性的，即 $V \supset V^\angle$。因此

$$\mathrm{sdim}_{\omega|_V}(V) = (\dim V - \operatorname{Ker}\omega|_V)/2 \geq (\dim V - \dim V^\angle)/2 = (\dim V - (\dim W - \dim V))/2 = \dim V - \dim W/2,$$

且等式成立当且仅当 V 是余各向同性的。 □

命题 2.0.6。设 ϕ : Z $\to$Y 是代数簇之间的一个态射。设 ω 是 Y 上的一个 2-形式，$\phi^*\omega$ 是其在 Z 上的拉回。那么

(i) sdim$_{\phi^*\omega}$(Z) $\leq$sdim$_\omega$(Y). (ii) 若 φ 是支配的，

则 sdim$_{\phi^*\omega}$(Z) $=$sdim$_\omega$(Y).

证明。在不失一般性的前提下，我们假设 Z 是光滑的。

步骤 1. 当 Y 和 Z 是线性空间，且 ϕ 是线性算子时，陈述（ii）成立。这可直接由定义得出。

步骤 2. 当 Y 光滑且映射 ϕ 光滑时，陈述（ii）成立。这一步可由上一步立即推出。步骤 3. 当 Y 光滑且映射 ϕ 光滑时，陈述（i）成立。这一步可由上一步立即推出。步骤 4. 一般情形下的陈述（i）。我们用诺特归纳法证明。设 $Y_1 \subset$ Y 为 ϕ 的奇点集（其中包含 Y 的奇点集）。令 $Y_2 :=$ Y $\setminus Y_1$ 表示其补集。将它们的原像记为 $Z_1 := \phi^{-1}(Y_1)$ 和 $Z_2 := \phi^{-1}(Y_2)$。由归纳假设，sdim $Z_1 \leq$ sdim Y_1。由上一步，sdim $Z_2 \leq$ sdim Y_2。由推论 2.0.4，我们有

$$\mathrm{sdim}\,\mathbf{Z} = \max(\mathrm{sdim}\,\mathbf{Z}_1, \mathrm{sdim}\,\mathbf{Z}_2) \leq \max(\mathrm{sdim}\,\mathbf{Y}_1, \mathrm{sdim}\,\mathbf{Y}_2) = \mathrm{sdim}\,\mathbf{Y}$$

步骤 5. 对一般支配 ϕ 的陈述（ii）。根据步骤（4），只需证明 sdim$_{\phi^*\omega}$ (Z) $\geq$ sdim$_\omega$(Y)。

令 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 如上一步所述。根据步骤（2），$\operatorname{sdim} Z_2 = \operatorname{sdim} Y_2$。由于 Z_2 是 Z 中的开集，我们有 $\operatorname{sdim} Z \geq \operatorname{sdim} Z_2$。由于 Y_2 是 Y 中的开稠密集，我们有 $\operatorname{sdim} Y = \operatorname{sdim} Y_2$。综上，我们有

$$\operatorname{sdim} \mathbf{Z} \geq \operatorname{sdim} \mathbf{Z}_2 = \operatorname{sdim} \mathbf{Y}_2 = \operatorname{sdim} \mathbf{Y}$$

□

3. Preliminaries on modality and complexity

3.1. 模态。我们回顾一下 [Vin86] 和 [Tim11, §6] 中模态和一般模态的概念。设 H 是一个代数群，X 是一个光滑 H-簇。根据 Rosenlicht 定理 [Ros56]，，X 存在一个非空开子集 U ⊂，其上有 H 的几何商。特别地，U 中所有轨道的维数都相同。该定理推出以下等式。

$$\operatorname{tr.deg} \mathbb{C}(\mathbf{X})^{\mathbf{H}} = \min_{x \in \mathbf{X}(\mathbb{C})} \operatorname{codim}_{\mathbf{X}} \mathbf{H}x$$

这个数称为 X 的一般模态，记作 $d_{\mathbf{H}}(\mathbf{X})$。

令 $lcl(\mathbf{X})$ 表示所有不可约 H-稳定局部闭子簇的集合，并令 $cl(\mathbf{X}) \subset lcl(\mathbf{X})$ 表示其中由闭子簇构成的子集。Rosenlicht 定理推出

$$\begin{aligned}\max_{\mathbf{Y} \in lcl(\mathbf{X})} d_{\mathbf{H}}(\mathbf{Y}) &= \max_{\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{X})} d_{\mathbf{H}}(\mathbf{Y}) \\ &= \dim\{(g,x) \in \mathbf{H} \times \mathbf{X} \mid gx = c\} - \dim \mathbf{H} \\ &= \dim\{(x,\xi) \in T^*\mathbf{X} \mid \forall \alpha \in Lie(\mathbf{H}),\ \langle \alpha x, \xi \rangle = 0\} - \dim \mathbf{X}\end{aligned}$$

这个数称为 X 的模态。我们将其记作 $m_{\mathbf{H}}(\mathbf{X})$。

3.2. 复杂度。设 G 为约化代数群，X 为光滑 G-簇。设 B ⊂ G 为 G 的一个 Borel 子群。根据 [Vin86，定理 2]（参见 [Bri86]），我们有

$$m_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = d_{\mathbf{B}}(\mathbf{X})$$

这个数称为 X 的复杂度，记作 $c(\mathbf{X})$。

设 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数，$\mathfrak{g}^*$ 表示其对偶空间，$\mathcal{N}(\mathfrak{g}^*) \subset \mathfrak{g}^*$ 表示幂零锥。对于任意点 $x \in \mathbf{X}$，设 a_x：G → X 表示作用映射，da_x：$\mathfrak{g} \to T_x\mathbf{X}$ 表示其微分。我们将 $\mu_{\mathbf{G},\mathbf{X}}$ 所定义的动量映射记为 $T^*\mathbf{X} \to \mathfrak{g}^*$

$$\mu_{\mathbf{G},\mathbf{X}}(x,\xi)(\alpha) := \xi(da_x(\alpha))$$

对于 G-不变（局部闭）子簇 $\Xi \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)$，我们在 [AG, §2.2] 中定义了 Ξ-复杂度 $c_\Xi(\mathbf{X})$：

$$c_\Xi(\mathbf{X}) := \max_{\text{orbit } \mathbf{O} \subset \Xi} \left(\dim \mu^{-1}(\mathbf{O}) - \dim \mathbf{O}/2\right) - \dim \mathbf{X}$$

并证明了 $c_{\mathcal{N}}(\mathbf{X}) = c(\mathbf{X})$。

4. Symplectic complexity and the proof of Theorem A

设 G 为约化代数群，X 为代数 G-流形。设 B ⊂G 为一个 Borel 子群，并令

$$\kappa := \kappa_{\mathbf{X}} := \mu_{\mathbf{\Delta G},\mathbf{X}\times(\mathbf{G}/\mathbf{B})} : T^*(\mathbf{X}\times\mathbf{G}/\mathbf{B}) \to \mathfrak{g}^*$$

表示 G 的对角作用下的动量映射。

记号 4.0.1. 令 $\nu := \nu_{\mathbf{X}}$： T^*(X × G/B) → $\mathfrak{g}^*$ 为投影T^*(X × G/B) ↠ T^*(G/B) 与斯普林格解消 $\mu_{\mathbf{G},\mathbf{G}/\mathbf{B}}$： T^*(G/B) ↠ $\mathcal{N}$($\mathfrak{g}^*$) ⊂ $\mathfrak{g}^*$ 的复合。

定义 4.0.2. 对于 G-不变的（局部闭）子簇 Ξ ⊂ $\mathcal{N}$($\mathfrak{g}^*$)，我们定义

$$\mathbf{T}_\Xi := \kappa^{-1}(0)\cap\nu^{-1}(\Xi)\subset T^*(\mathbf{X}\times\mathbf{G}/\mathbf{B})$$

并将 X 的 Ξ-辛复杂度定义为

$$sc_\Xi(X) = \operatorname{sdim}(\mathbf{T}_\Xi).$$

我们记录推论 2.0.4 的以下直接推论。

推论 4.0.3. 对任意 G-不变（局部闭）子簇 Ξ ⊂ $\mathcal{N}$($\mathfrak{g}^*$)，我们有

$$sc_\Xi(X) = \max_{orbit\ \mathbf{O}\subset\mathbf{\Xi}} sc_{\mathbf{O}}(\mathbf{X}).$$

命题 4.0.4. 我们有 $sc_{\mathcal{N}}$(X) = c(X)。

证明. 我们有

$$c(\mathbf{X}) = m_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = m_{\mathbf{G}}(\mathbf{X}\times\mathbf{G}/\mathbf{B}) = \dim\kappa^{-1}(\{0\}) - \dim\mathbf{X} - \dim\mathbf{G}/\mathbf{B}$$

由于 κ^{-1}(0) 是轨道的余法丛之并，因此它是余各向同性的。于是引理 2.0.5 推出

$$\operatorname{sdim}\kappa^{-1}(0) = \dim\kappa^{-1}(0) - \dim T^*(\mathbf{X}\times\mathbf{G}/\mathbf{B})/2 = \dim\kappa^{-1}(0) - \dim\mathbf{X} - \dim\mathbf{G}/\mathbf{B}.$$

由于 ν 的像包含于 $\mathcal{N}$ 中，我们有 ν^{-1}($\mathcal{N}$) = T^*(X × G/P)。综上，我们有

$sc_{\mathcal{N}}$(X) = 超维(κ^{-1}(0) ∩ ν^{-1}($\mathcal{N}$)) = 超维 κ^{-1}(0) = 维数 κ^{-1}(0) − 维数 X − 维数 G/B = c(X)。

□

记号 4.0.5. 对于任意幂零轨道 O，记 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ ⊂ T^*(X) ×O 为 $\mathbf{T}_{\mathbf{O}}$ 在

$$\mathrm{Id}\times\nu : T^*(\mathbf{X})\times T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B}) \to T^*(\mathbf{X})\times\mathfrak{g}^*.$$

注意， $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 是−$\mu_{\mathbf{G},\ \mathbf{x}}$ 的图像与投影 T^*(X) × $\mathfrak{g}^*$ ↠ $\mathfrak{g}^*$下 O 的原像的交集。

定义 4.0.6. 设 O ⊂ $\mathfrak{g}^*$ 是一个余伴随轨道，且令 a ∈ O。O 上的 Kirillov-Kostant-Souriau 辛形式在 a 处定义为

$$\omega_{\mathbf{O}}(\mathrm{ad}^*(x)(a),\mathrm{ad}^*(y)(a)) = \langle a,[x,y]\rangle.$$

与 T^*X 上的标准辛形式结合，定义了 T^*X ×O 上的一个辛形式，从而在 $\Gamma_{\mathbf{O}}$上定义了一个 2-形式。

引理 4.0.7. 对任意幂零轨道 O，我们有 sdim($\Gamma_{\mathbf{O}}$) = $sc_{\mathbf{O}}$(X)。

证明. 根据 [AG，命题 2.2.4(ii)]，，Id $\times\nu$ 下 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 上的形式的拉回与 $\mathrm{T}_{\mathbf{O}}$ 上的形式一致。因此，根据命题 2.0.6(ii)，我们有 $\mathrm{T}_{\mathbf{O}} = \mathrm{sdim}\,\Gamma_{\mathbf{O}}$。□

对于一个抛 子群 $\mathrm{P} \subset \mathrm{G}$，记 $\nu_P := \mu_{\mathbf{G},\ \mathbf{G}/\mathbf{P}}$：$T^*(\mathrm{G}/\mathrm{P}) \to \mathrm{O}_{\mathbf{P}} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)$ 和

$$\mu_{\mathbf{P}} := \mu_{\mathbf{\Delta G},\mathbf{X}\times(\mathbf{G}/\mathbf{P})} : T^*(\mathbf{X} \times \mathbf{G}/\mathbf{P}) \to \mathfrak{g}^*$$

仿照引理 4.0.7 的证明可得以下引理。

引理 4.0.8. 设 $\mathrm{P} \subset \mathrm{G}$ 是一个抛子群，且 $\mathrm{O} \subset \mathrm{O}_{\mathbf{P}}$ 是一个幂零轨道。那么

$$\mathrm{sdim}(\Gamma_{\mathbf{O}}) = \mathrm{sdim}(\mu_{\mathbf{P}}^{-1}(0) \cap \nu_{\mathbf{P}}^{-1}(\mathbf{O}))$$

定理 A 的证明。

(i) 根据推论 4.0.3，只需证明 Ξ 由单个轨道 O 构成的情形。由于 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 是 $-\mu_{\mathbf{G}}$ 的 $\mathbf{X}$ 图像与投影到 $\mathfrak{g}^*$ 的映射下 O 的原像的交集，我们有

$$\dim \Gamma_{\mathbf{O}} = \dim \mu_{\mathbf{G},\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{O}) = \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{O}/2 + c_{\mathbf{O}}(\mathbf{X}) = \dim(T^*\mathbf{X} \times \mathbf{O})/2 + c_{\mathbf{O}}(\mathbf{X}$$

根据引理 4.0.7 和 2.0.5，我们有

$$sc_{\mathbf{O}}(\mathbf{X}) = \mathrm{sdim}\,\Gamma_{\mathbf{O}} \geq \dim \Gamma_{\mathbf{O}} - \dim(T^*\mathbf{X} \times \mathbf{O})/2 = c_{\mathbf{O}}(\mathbf{X})$$

(ii) 根据推论 4.0.3，我们可以假设 $l = 1$，从而 $\Xi = \Xi_1$。令 $\mathrm{T} := \mathrm{T}_\Xi = \kappa^{-1}(0) \cap \nu^{-1}(\Xi)$ 且 $\mathrm{T}_i := \mathrm{T}_{\mathbf{Y}_i,\ \Xi} = \kappa^{-1}{}_{\mathbf{Y}_i}(0) \cap \nu^{-1}{}_{\mathbf{Y}_i}(\Xi) \subset T^*(\mathrm{Y_i} \times \mathrm{G}/\mathrm{B})$。我们有

$$T^*\mathbf{X} \times T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B}) = \bigcup_i T^*\mathbf{X}|_{\mathbf{Y}_i} \times T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B})$$

因此，根据推论 2.0.4，

$$sc(\mathbf{X}) = \mathrm{sdim}\,\mathbf{T} = \max_i \mathrm{sdim}(\mathbf{T} \cap T^*\mathbf{X}|_{\mathbf{Y}_i} \times T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B}))$$

我们有一个投影 p_i：$T^*\mathrm{X}|_{\mathbf{Y}_i} \to T^*\mathrm{Y}_i$。容易看出，$p_i$ 下 $T^*\mathrm{Y}_i$ 上的辛形式的拉回，是 $T^*\mathrm{X}$ 上辛形式的限制。根据定义，$(p_i \times \mathrm{Id}_{T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B})})^{-1}(\mathrm{T}_i) = \mathrm{T} \cap T^*\mathrm{X}|_{\mathbf{Y}_i}$，因此 $p_i \times \mathrm{Id}_{T^*(\mathbf{G}/\mathbf{B})}(\mathrm{T} \cap T^*\mathrm{X}|_{\mathbf{Y}_i}) = \mathrm{T}_i$。由命题 2.0.6(ii)，这意味着 $\mathrm{sdim}\ \mathrm{T} \cap T^*\mathrm{X}|_{\mathbf{Y}_i} = \mathrm{sdim}\ \mathrm{T}_i$。因此

$$sc_\Xi(\mathbf{X}) = \mathrm{sdim}\,\mathbf{T} = \max \mathrm{sdim}(\mathbf{T} \cap T^*\mathbf{X}|_{\mathbf{Y}_i}) = \max \mathrm{sdim}\,\mathbf{T}_i = \max sc_\Xi(\mathbf{Y}_i)$$

(iii) 根据推论 4.0.3 以及引理 4.0.7 和 4.0.8，我们有

$$sc_{\overline{\mathbf{O}_{\mathbf{P}}}}(\mathbf{X}) = \max_{\mathbf{O} \subset \overline{\mathbf{O}_{\mathbf{P}}}} sc_{\mathbf{O}}(\mathbf{X}) = \max_{\mathbf{O} \subset \overline{\mathbf{O}_{\mathbf{P}}}} \mathrm{sdim}\,\Gamma_{\mathbf{O}} = \max_{\mathbf{O} \subset \overline{\mathbf{O}_{\mathbf{P}}}} \mathrm{sdim}(\mu_{\mathbf{P}}^{-1}(0) \cap \nu_{\mathbf{P}}^{-1}(\mathbf{O})) = \mathrm{sdim}(\mu_{\mathbf{P}}^{-1}(0))$$

(iv) 根据命题 4.0.4，我们有 $sc_{\mathcal{N}}(\mathrm{X}) = c(\mathrm{X})$。根据 [AG，命题 2.2.8]，我们有 $c_{\mathcal{N}}(\mathrm{X}) = c(\mathrm{X})$。□

推论 B 的证明。根据定理 A(iii)，(a) 等价于 (c)。根据 [AG，定理 B]，中的 (c) 等价于 (b)。□

定理 A(ii) 促使我们考虑 X 为齐性空间的情形，即 $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\mathrm{H}$，其中 $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ 是某个代数子群。下面给出这种情形下辛复杂度的公式。令 $\mathfrak{h}$ 表示 H 的李代数，令 $\mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ 表示在 $\mathfrak{h}$ 上取值为零的泛函空间。

命题 4.0.9. 对于任意幂零轨道 $\mathrm{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}^*)$，我们有 $sc_{\mathbf{O}}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \mathrm{sdim}(\mathrm{O} \cap \mathfrak{h}^\perp)$.

证明. 设 $\Gamma_{\mathbf{O}} \subset T^*(\mathbf{G}/\mathbf{H}) \times \mathbf{O}$ 如记号 4.0.5 所示。由引理 4.0.7，我们有 $sc_{\mathbf{O}}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = \operatorname{sdim}(\Gamma_{\mathbf{O}})$。设 $p : \Gamma_{\mathbf{O}} \twoheadrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ 为自然投影，并设 $\mathbf{Y} := p^{-1}([1])$。则 $\mathbf{Y}$ 与 $\mathbf{O} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ 自然同构。令 $a : \mathbf{G} \times \mathbf{Y} \to \Gamma_{\mathbf{O}}$ 表示作用映射。于是由命题 2.0.6(ii)，$\operatorname{sdim} \Gamma_{\mathbf{O}} = \operatorname{sdim}_{a^*\omega}(\mathbf{G} \times \mathbf{Y})$，其中 ω 表示 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 上的辛形式。

剩下要证明的是 $\operatorname{sdim}_{a^*\omega}(\mathbf{G} \times \mathbf{Y}) = \operatorname{sdim}(\mathbf{O} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$。为此，只需证明对于任意光滑点 $y \in \mathbf{Y}$，$\operatorname{sdim} T_{(1,y)}\mathbf{G} \times \mathbf{Y} = \operatorname{sdim} T_y\mathbf{Y}$。要证明这一点，只需证明 $\mathfrak{g}$ 属于形式 $a^*\omega_{(1,y)}$的根基，或者等价地，证明 $\mathfrak{g} \cdot y$ 属于 ω的根基。由于 $\mathbf{G}$ 在 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 上的作用保持 ω，空间 $\mathfrak{g} \cdot y \subset T_y\Gamma_{\mathbf{O}}$ 是各向同性的。另一方面，$T_y\Gamma_{\mathbf{O}} = \mathfrak{g} \cdot y + T_y\mathbf{Y}$。因此，只需证明 $\omega(\mathfrak{g} \cdot y, T_y\mathbf{Y}) = 0$。

设 $\alpha \in \mathfrak{g}$ 和 $\xi \in T_y\mathbf{Y}$。设 $p_{\mathbf{O}}$ 和 q 分别为从 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 到 $\mathbf{O}$ 以及到 $T^*(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ 的投影。设 ω' 和 $\omega_{\mathbf{O}}$ 分别表示 $T^*(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ 和 $T^*\mathbf{O}$ 上的辛形式。

我们首先证明 $\omega'(\alpha \cdot q(y)\ d_yq(\xi)) = -\langle d_yp_{\mathbf{O}}(\xi)\ \alpha\rangle$。事实上，由于 $p(\mathbf{Y}) = \{[1]\}$，向量 $d_yq(\xi)$ 是“垂直的”，即属于 $T_{q(y)}T^*_{[1]}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) \cong \mathfrak{h}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$。根据 $\Gamma_{\mathbf{O}}$ 的定义，我们得到 $d_yq(\xi) = -d_yp_{\mathbf{O}}(\xi)$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 中的一个元素。根据 ω' 的定义（参见例如 [AG，例 2.1.6]），我们有 $\omega'(\alpha \cdot q(y)\ d_yq(\xi)) = \langle d_yq(\xi)\ \alpha\rangle$。综上可得

$$\omega'(\alpha \cdot q(y), d_yq(\xi)) = \langle d_yq(\xi), \alpha\rangle = -\langle d_yp_{\mathbf{O}}(\xi), \alpha\rangle.$$

令 $\beta \in \mathfrak{g}$ 满足 $\beta \cdot y = \xi$。那么我们有

$$\begin{aligned}
&\omega(\alpha \cdot y, \xi) = \omega'(d_yq(\alpha \cdot y), d_yq(\xi)) + \omega_{\mathbf{O}}(d_yp_{\mathbf{O}}(\alpha \cdot y), d_yp_{\mathbf{O}}(\xi)) = \\
&\omega'(\alpha \cdot q(y), d_yq(\xi)) + \omega_{\mathbf{O}}(\alpha \cdot p_{\mathbf{O}}(y), \beta \cdot p_{\mathbf{O}}(y)) = -\langle d_yp_{\mathbf{O}}(\xi), \alpha\rangle + \langle p_{\mathbf{O}}(y), [\alpha, \beta]\rangle = \\
&-\langle \beta \cdot p_{\mathbf{O}}(y), \alpha\rangle + \langle p_{\mathbf{O}}(y), [\alpha, \beta]\rangle = \langle p_{\mathbf{O}}(y), [\beta, \alpha]\rangle + \langle p_{\mathbf{O}}(y), [\alpha, \beta]\rangle = 0
\end{aligned}$$

因此 $\omega(\mathfrak{g} \cdot y, T_y\mathbf{Y}) = 0$，从而 $\operatorname{sdim}_{a^*\omega}(\mathbf{G} \times \mathbf{Y}) = \operatorname{sdim}(\mathbf{O} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$。综上可得

$$sc_{\mathbf{O}}(\mathbf{G}/\mathbf{H}) = \operatorname{sdim}(\Gamma_{\mathbf{O}}) = \operatorname{sdim}_{a^*\omega}(\mathbf{G} \times \mathbf{Y}) = \operatorname{sdim}(\mathbf{O} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$$

□

Appendix A. Nash blowing up and the proof of Proposition 2.0.3

设 M 为一个光滑簇。

记号 A.0.1. 对任意向量空间 V，记 $Gr(V)$ 为由 V 的所有向量子空间（维数不限）构成的簇。这是 V 上所有 Grassmann 簇的不交并。

对于 M 上的任意向量丛 E，令 $Gr(E)$ 表示 Grassmann丛

$$Gr(E) := \{(x, L) \mid L \subset E_x \ a\ linear\ subspace\}.$$

定义 A.0.2（纳什爆破）。设 $Z \subset M$ 是一个局部闭子簇，且 $U \subset Z$ 是 Z 的光滑轨迹中的一个开子簇。令 $p\colon Gr(TM) \to M$ 表示投影。定义 Z 的纳什爆破（在 M 内）为

$$\tau_U(Z, M) := \overline{\{(x, T_xU) \mid x \in U\}} \cap p^{-1}(Z) \subset Gr(TM).$$

注 A.0.3.

(i) 不难看出，簇 $\tau_U(Z, M)$ 不依赖于 U 的选取。因此，我们将其记为 $\tau(Z, M)$。(ii) 可以证明，$\tau_U(Z, M)$ 不依赖于环境流形 M，且相差一个典范同构，参见 [Nob75]。

命题 2.0.3 的证明基于以下定理。

定理 A.0.4. 设 $Z_1 \subset Z \subset M$ 为局部闭子簇，且 $z \in Z_1$ 是一个光滑点。则存在 L，使得 $(z, L) \in \tau(Z, M)$ 且 $T_z Z_1 \subset L$。

证明中需要以下临时定义和引理。

定义 A.0.5. 如果代数簇的三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 如定理 A.0.4 所述，并且满足该定理的结论，我们就称其为良好三元组。

引理 A.0.6. 若 $Z_1 \subset Z \subset M$是一个良好三元组，则对于任意 $(z, L) \in \tau(Z_1, M)$，存在 L'，使得 $(z, L') \in \tau(Z, M)$ 且 $L \subset L'$。

证明。考虑闭子簇

$$C := \{(z, L, L') \in Gr(M) \times_M Gr(M) \mid (z, L) \in \tau(Z_1, M), (z, L') \in \tau(Z, M) \text{ and } L \subset L'\}$$

记 p: $Gr(M) \times_M Gr(M) \to Gr(M)$ 为第一坐标上的投影。我们需要证明 $p(C) \supset \tau(Z_1, M)$。像 $p(C)$ 是闭的，因为 C是闭的且 p是适当的。因此，只需证明 $p(C)$ 包含 $\tau(Z_1, M)$ 的一个稠密子集。令 Z_1^0为 Z_1的光滑轨迹。三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 是好的这一假设意味着 $p(C)$ 包含$\tau(Z_1^0, M)$。□

推论 A.0.7。设 $Z_2 \subset Z_1 \subset Z \subset M$ 是闭子簇。假设三元组$Z_1 \subset Z \subset M$ 和 $Z_2 \subset Z_1 \subset M$ 是好的。那么三元组 $Z_2 \subset Z \subset M$ 是好的。

证明。设 $z \in Z_2$ 是一个光滑点。由三元组 $Z_2 \subset Z_1 \subset M$ 良好的假设，存在 L，使得 $(z, L) \in \tau(Z_1, M)$ 且 $T_z Z_2 \subset L$。由三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 良好的假设，引理 A.0.6 表明存在 L'，使得 $(z, L') \in \tau(Z, M)$ 且 $L \subset L'$。因此 $T_z Z_2 \subset L'$，如所需。□

引理 A.0.8。设 $Z_1 \subset Z \subset M$ 是闭子簇。若对任意不可约分支$Z_1' \subset Z'$，三元组 $Z_1' \subset Z \subset M$ 良好，则三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 也良好。

证明。这是因为 Z_1 的正则轨迹包含在 Z_1的所有不可约分支 Z_1' 的正则轨迹之并中。□

下面的引理显然。

引理 A.0.9. 设 $Z_1 \subset Z \subset M$ 如定理 A.0.4 中所述。假设以下条件之一成立。

(i) Z 是光滑的。(ii) 存在一个开稠密子集 $U \subset Z_1$，使得三元组 $U \subset Z \subset M$ 是良好的。那么三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 是良好的。

定理 A.0.4 的证明。由引理 A.0.8 可知，不妨设 Z_1 不可约。根据 [Whit65a, Whit65b]，Z 具有惠特尼分层 $Z = \bigcup S_i$。设 i_0，使得 $S_{i_0} \cap Z_1$ 在 Z_1 中开且稠密。根据惠特尼分层的定义，三元组 $S_{i_0} \subset Z \subset M$ 是良好的。由引理 A.0.9(i)，三元组 $S_{i_0} \cap Z_1 \subset S_{i_0} \subset M$ 是良好的。因此，由推论 A.0.7 可知，三元组 $S_{i_0} \cap Z_1 \subset Z \subset M$ 是良好的。因此，由引理 A.0.9(ii) 可知，三元组 $Z_1 \subset Z \subset M$ 是良好的。□

A.1. 命题 2.0.3 的推导。下面的引理显然成立。

引理 A.1.1. 设 W 是一个线性空间，并令 $\Omega^2(W)$ 表示 W 上反对称双线性形式构成的线性空间。那么函数 $\nu\colon\ Gr(W)\times\Omega^2(W)\to\mathbb{N}$，定义为 $\nu(\omega,L):=\operatorname{sdim}(L,\omega|_L)$，满足

(i) 下半连续；(ii) 关于 $Gr(W)$ 中的包含关系弱递增。

下面的引理是众所周知的。

引理 A.1.2. 设 $X\subset\mathbb{A}^n$ 是一个闭子簇。那么 X 上的任意 k-形式都是 $\mathbb{A}^n$ 上某个 k-形式的限制。

证明. 只需证明 $k=1$ 的情形，因为 k-形式是 1-形式的楔积。此情形可由“第二正合列”推出，参见例如 [Har77, §命题 II.8.4A] 或 [Mat70, 定理 58]. □

命题 2.0.3 的证明。该结论是局部的，因此我们可以假设 Z 是仿射的，并作为闭子簇嵌入仿射空间 M 中。由引理 A.1.2，我们可以将形式 ω 延拓到 M。将 M 在所有点处的切空间视为同一个空间，并记为 W。M 上的形式 ω 给出一个映射 $M\to\Omega^2(W)$。

设 $z\in$Y 是一个光滑点。由定理 A.0.4，存在 L，使得 $(z,L)\in\tau(Z,M)$ 且 $T_z\mathrm{Y}\subset L$。由引理 A.1.1(ii)，我们有 sdim $T_z\mathrm{Y}\le\operatorname{sdim}L$。由引理 A.1.1(i)，我们有 sdim $L\le\operatorname{sdim}$ Z。□

References

[AG] A. Aizenbud, D. Gourevitch：超越球对的有限重数，arXiv:2109.00204。[Bri86] M. Brion：球形齐性空间的一些性质，Manuscripta Math. 55，第 2 期，191–198（1986）。[Har77] R. Hartshorne：代数几何，Graduate Texts in Mathematics，第 52 卷。Springer-Verlag，纽约—海德堡（1977）。xvi+496页。[Mat70] H. Matsumura：交换代数，W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1970。xii+262页。[Nob75] A. Nobile：“Nash 膨胀的一些性质”，Pacific Journal of Mathematics，60（1）：297–305（1975），doi:10.2140/pjm.1975.60.297[Ros56] M. Rosenlicht：“关于代数群的一些基本定理”，Am. J. Math.，78，第 2 期，401–443 （1956）。[Tim11] D.A. Timashev：齐性空间与等变嵌入。Encyclopaedia of Mathematical Sciences，138。《不变量理论与代数变换群》，8。Springer，海德堡（2011）。xxii+253 页。ISBN: 978-3-642-18398-0。[Vin86] E.B. Vinberg：约化群作用的复杂度。（俄文）。Funktsional. Anal. i Prilozhen. 20，第 1 期，1–13，96（1986）。[Whit65a] Whitney, Hassler：解析簇的局部性质。《微分与组合拓扑》（纪念 Marston Morse 的专题研讨会），205–244，Princeton Univ. Press，普林斯顿，新泽西州（1965）。[Whit65b] Whitney, Hassler：解析簇的切线，Annals of Mathematics 81，第 3 期，496–549（1965）。

Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, POB 26, Rehovot 76100, Israel
电子邮箱地址：aizenr@gmail.com
网址：http://www.aizenbud.org

电子邮箱地址：dimagur@weizmann.ac.il 网址：
http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dimagur