arXiv:2303.11140v1 [math.DG] 20 Mar 2023

导出流形作为微分分次流形

DAVID CARCHEDI

摘要。 一方面，我们最近与 Pelle Steffens 一起，通过泛性质刻画了导出流形的 ∞-范畴，直至等价。另一方面，文献 [4] 表明，微分分次流形范畴具有同伦论。本文证明，与之相关的 ∞-微分分次流形范畴与导出流形的范畴等价。这使成熟发展的微分分次几何理论得以与导出微分几何的 ∞-范畴化方法共生。由此，我们证明，微分分次$\mathbf{C}^\infty$-代数是同伦有限表示的，当且仅当它与某个微分分次流形上的光滑函数准同构。

目录

引言 2
组织结构与主要结果 2 约定与记号 3 致谢 3 1. 导出微分几何简史（略带偏见）4 1.1. 导出流形的动机与文献综述。4 1.2. 微分分次流形 7

第1部分。背景 9
2. 微分分次几何综述 9 2.1. $\mathbb{Z}_2$-分次几何 10 2.2. $\mathbb{N}$-分次几何 15 2.3. 作为等变超流形的微分分次流形 19 2.4. 作为曲弯 L_∞ [1]-代数丛的微分分次流形 27 3. $\mathbf{C}^\infty$-代数 28 3.1. 同伦$\mathbf{C}^\infty$-代数 31 3.2. 微分分次$\mathbf{C}^\infty$-代数 32 3.3. 同伦有限表示的微分分次$\mathbf{C}^\infty$-代数与导出流形 34 3.4. $\mathbf{C}^\infty$-局部化 35 3.5. $\mathbf{C}^\infty$-Koszul复形 36 4. 导出$\mathbf{C}^\infty$-概形 38

第2部分。新结果 40
5. 微分分次几何，第二部分 40 5.1. 从微分分次流形到导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形 40 5.2. 可纤维对象范畴结构 44

5.3. 导出纤维积 6. ∞-范畴的等价 51
6.1. 完全忠实性 6.2. 本质满射 参考 56
文献 56
61
63

引言

本文将证明，微分分次流形可用于构造导出流形的模型。微分分次流形（微分分次流形，简称 dg-manifold）通过允许其光滑函数代数为具有特定局部形式的微分分次交换代数，推广了光滑流形的概念。这可以用超几何的语言来阐述。它们源自物理学中的一些思想，用于处理退化的作用泛函，具体而言，涉及 BRST 和 BV量子化方案。20 世纪 90 年代，Kontsevich 推广了微分分次流形，将其作为变形理论背景下导出几何的一种表述；随后，人们又将其引入代数几何背景，用来定义微分分次概形[13, 12, 14, 2, 3]。遗憾的是，微分分次概形并不适用于导出代数几何，例如，我们应当能够沿拟同构以同伦相干的方式粘合结构层，而且它们还应满足高阶下降。这是现代导出概形采用高阶范畴定义的诸多原因之一。我们将证明，在 $\mathbf{C}^\infty$-背景下，这些同伦论缺陷并不存在；要用微分分次流形构造导出流形的模型，只需形式地将拟同构取逆（以 ∞-范畴的意义而言）。

组织结构与主要结果

本文的组织结构略有不同寻常之处：全文分为两部分。第1部分包含第2—4节，为读者提供丰富的背景材料。专家可以跳过这一部分。第4部分包含本文的主要结果。

第1节概述导出微分几何的现状，旨在为读者提供指引，并将本文置于现有文献的背景之中。

第1部分从第2节开始，该节为不熟悉分次超几何的读者提供了详细的回顾。专家或许可以快速浏览本节，因为在本文其余部分中，我们会在微分分次流形理论的等价表述之间来回切换。具体而言，我们讨论以下三个等价范畴：微分分次流形范畴、带有 $\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$ 作用的超流形范畴，以及 $L_\infty[1]$ 代数丛理论。

第 3 节回顾 $\mathbf{C}^\infty$-代数（又称 $\mathbf{C}^\infty$-环）的概念，以及由单纯 $\mathbf{C}^\infty$-代数和微分分次 $\mathbf{C}^\infty$-代数导出的同伦版本。本节还回顾导出流形的定义（见第 3.3 节）。最后，本节阐述此背景下的 Koszul复形理论，并特别关注奇正则序列的情形。

第 4 节回顾导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形的理论。

第 2 部分介绍主要的新结果。首先是第 5 节，我们在其中将微分分次流形理论与导出 C∞-概形理论联系起来。主要结果如下定理：

定理。 *(定理 5.7)。*设 $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathrm{D})$ 是一个微分分次流形。那么存在一个典范等价

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}), D\right) \simeq \left(\pi_0(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\pi_0(M)}\right),$$

其中 $\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad D)$ 是与光滑函数的微分分次 $\mathbf{C}^\infty$-代数相关联的导出仿射 $\mathbf{C}^\infty$-概形 $\mathcal{M}$.

在第 5.2 节中，我们回顾曲L_∞ [1]-代数丛上的纤维对象范畴结构，该结构在 [4], 中提出，并将其转化为微分分次流形的语言。我们还证明了该论文中的以下关键猜想：

定理。 *(定理 5.20。)*设 $f\colon (M, L, \lambda) \to (N, E, \mu)$ 是曲L_∞ [1]-代数丛之间的一个态射，相应的微分分次流形分别为 $(\mathcal{M}, D)$ 和 $(\mathcal{N}, D')$ 。那么， f 是弱等价，当且仅当诱导映射 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是拟同构。

在第 5.3 节中，我们说明如何计算微分分次流形的导出纤维积的一个特殊情形，并用它证明每个微分分次流形都可以从普通流形出发，通过有限次迭代导出纤维积构造出来（定理 5.26。）

第 6 节包含本文的主要结果：

定理。 *(定理 6.11。)* 存在一个 ∞-范畴的典范等价

$$\mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \mathsf{DMfd}$$

介于 微分分次流形的 ∞-范畴与导出流形的 ∞-范畴之间 .

约定与记号

- 我们所说的 ∞-范畴，是指 (∞,1)-范畴或拟范畴。 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 表示空间的∞-范畴。
- 我们将采用以下字体来区分不同对象：分次流形或微分分次流形将使用此字体： $\mathcal{M}$ 超流形将使用此字体： $\mathfrak{M}$.若 $\mathcal{M}$ 是一个微分分次流形，我们将相应的带有 End $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$-作用的超流形记为 $\mathfrak{M}$，反之亦然。
- 全文将采用上同调分次约定和爱因斯坦求和约定。

致谢。 我们尤其感谢 Dmitry Roytenberg，他在研究生院期间将我们庇护在他的微分分次羽翼之下，并一直支持我们至今。

1. 导出微分几何的（偏颇）历史

1.1. 导出流形的动机与文献综述。 回顾一下，若光滑流形 L 中的两个闭子流形 $M \hookrightarrow L$ 和 $N \hookrightarrow L$ 满足：对于所有点 $p \in M \cap N$，两个子空间 T_pM 和 T_pN 的并集张成 T_pL，则称它们横截相交。在这种情况下，它们的交也是一个闭子流形。更一般地，给定两个不一定是嵌入的光滑映射 $f\colon M \to L$ 和 $g\colon N \to L$，若对于所有满足 $f(x) = g(y)$ 的点 $x \in M$ 和 $y \in N$，令 $p = f(x)$，则 f 与 g 横截，

$$f_* (T_xM) + g_* (T_yN) = T_pL.$$

在这种情况下，子空间

$$\{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq M \times N \tag{1}$$

是一个闭子流形，并且是范畴纤维积 $M \times_L N$. A 的一个特例是 $N = \{p\}$，其中 $p \in L$. 于是，如果存在一个邻域 U，使得 $f|_U$ 是次浸没，则 f 与 g 横截；这还原了一个众所周知的事实：任意次浸没的纤维都是闭子流形。

若不满足横截性，情况可能会变得任意糟糕，具体来说：若 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是任意一个光滑映射，且 $p \in \mathbb{R}$，那么根据连续性，$f^{-1}(\{p\})$ 是 M. 的闭子集。反过来，由于隆起函数的存在，任意 M 的闭子集都是某个光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$. 在 $\{0\}$ 上的纤维。特别地，可以将康托尔集实现为光滑函数 $f \in \mathsf{C}^\infty(M)$ 的零点。这会带来许多问题。例如，我们可能希望通过考虑流形上向量丛 $V \to M$ 的光滑截面 s 的零点集来构造一个模空间，也就是说，考虑 M 中 s 为零的子空间。如果 s 与零截面不横截，这个交集可能不是流形，模空间也会变成奇异的。许多著名的模空间至少在局部都以这种方式出现。例如，J-全纯曲线模空间中的任意一点都有一个倉西邻域，这基本上意味着该邻域可以表示为（带角）流形上的向量丛截面的零点集除以一个有限群所得的商。这些模空间在格罗莫夫-威滕理论中有重要应用。

在任何导出流形理论中，给定两个光滑映射 $f\colon M \to L$ 和 $g\colon N \to L$，其（导出）纤维积 $M \times_L N$ 作为一个光滑对象存在；当这些映射横截时，它与通常的纤维积一致。这类导出流形（以及局部具有这种形式的导出流形）称为拟光滑。当然，任何此类理论若要有用，就必须表现良好：任意映射的导出交应当具有与横截交相同的良好性质。在 Spivak 的开创性工作中，他列出了一个（单纯）导出流形范畴应满足的若干期望条件。其中之一是，对于任意流形 M，都存在一个导出配边环

$$\Omega^{der}(M)$$

在余循环层面上，可将其建模为映射到 M 的紧致（准光滑）导出流形，其中杯积公式严格成立：

$$[\mathcal{N}_1] \smile [\mathcal{N}_2] = [\mathcal{N}_1 \times_M \mathcal{N}_2],$$

以及诱导映射

$$\Omega^{der}(M) \to \Omega(M)$$

到经典配边环的映射是一个单射。他构造了一个显式的（单纯）范畴，使得这个映射实际上是一个同构。

读者可能会对形容词“单纯”的插入感到疑惑。Spivak 给出了一个非常优雅的证明（[38, 命题 1。10]），证明为了使导出流形理论满足他的要求，其对象不能构成一个1-范畴，而必须构成一个高阶范畴。（证明中有一个小错误，但可以通过将$\mathbb{R}$ 替换为 S^1.来修正。）因此，纯粹从几何考量出发，若要建立导出流形理论，就必须研究高阶范畴论。迄今为止，已有若干种在 C^∞-框架下研究导出几何的方法，它们本质上都是高阶范畴论的，例如 [38, 23, 7,8, 31, 10, 4, 39]。Joyce 的模型将其对象称为 d-流形，实际上是2-范畴论的。尽管这一理论丢失了一些同伦信息（它本质上是完整理论的一个2-范畴论影子 [6]），其应用却产生了重大影响。特别是，Joyce 证明了任何 $\mathcal{J}$-全纯曲线的模空间都具有带角的 d-轨形结构 [21, 定理 16。2]。

在某些应用中，能够对导出交进行导出交等操作十分重要。例如，假设 $\pi_1 : E_1 \to M$ 和 $\pi_2 : E_2 \to M$ 是纤维丛，并且

$$H : \Gamma_M(E_1) \to \Gamma_M(E_2)$$

是一个次数为 k. 的非线性微分算子。给定 $\psi \in \Gamma_M(E_2)$，人们可能会关注满足 $H\varphi = \psi$. 的那些 $\varphi \in \Gamma_M(E_1)$。作为初步近似，可以如下研究形式解空间。考虑 k^{th}阶射丛

$$\pi_1^k : \mathcal{J}_M^k E_1 \to M.$$

那么 H 对应于纤维丛的一个映射 $\hat{}H : \mathcal{J}_M^k E_1 \to E_2$，使得 $H(\varphi) = \hat{}H\left(j^k(\varphi)\right)$. 因此，可以先求 $\mathcal{J}_M^k E_1$ 中满足 $\hat{}H(\lambda) = \psi$ 的截面λ 所构成的子空间 FSol_ψ（然后再由此尝试弄清哪些截面是作为延拓得到的，也就是说，哪些是全纯截面）。如果横截性不是问题，就可以构造纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{pr_2} & M \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \mathcal{J}^k E_1 & \xrightarrow[\hat{H}]{} & E_2. \end{array}$$

然后由此得到纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle \pi_1^k \circ pr_1, pr_2 \rangle} \\ M & \xrightarrow[\Delta_M]{} & M \times M. \end{array}$$

于是便有 $\mathrm{FSol}_\psi = \Gamma_M(\mathcal{S})$。

除 [4], 外，现有导出流形方法的共同之处，在于 $\mathbf{C}^\infty$-代数（又称 $\mathbf{C}^\infty$-环）扮演着显著角色。粗略地说，$\mathbf{C}^\infty$-代数是一个交换的 $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{A}$，并且具有额外结构：对于每个光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，都有一个由其诱导的 n 元运算，作用于 $\mathcal{A}$，且该运算关于 f. 是自然的。$\mathbf{C}^\infty$-代数的典型例子是流形 M 上的光滑函数环，而 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由 n 个生成元生成的自由 $\mathbf{C}^\infty$-代数。$\mathbf{C}^\infty$-代数范畴具有张量积 $\underset{\mathbb{R}}{\otimes}$（余积），使得对于任意两个流形 M 和 N，有

$$\mathbf{C}^\infty(M) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(N) \subsetneq \mathbf{C}^\infty(M) \underset{\otimes}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(N) \cong \mathbf{C}^\infty(M \times N).$$

事实上，通过取光滑函数得到的函子会从流形范畴到 $\mathbf{C}^\infty$-代数范畴的反范畴给出一个全忠实函子，该函子保持横截拉回。这一事实，加上 $\mathcal{A}/I$ 对于 $\mathcal{A}$ 的任意理想I 都是一个 $\mathbf{C}^\infty$-代数这一事实，是这些代数成为许多导出微分几何研究方法基石的主要原因之一。事实上，[31, 39] 发展了基于同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数的导出代数几何理论，而 Joyce 的方法则是 $\mathbf{C}^\infty$-代数上“经典”代数几何理论的一种 2-范畴增强。

有如此多关于导出流形的理论，人们或许会想知道这类理论是否唯一。Pelle Steffens 和我在[10], 中通过泛性质对导出流形的 ∞-范畴进行分类，从而厘清了这一点。随后我们证明，Spivak 的模型全忠实地嵌入到拟光滑对象构成的子范畴中。概括而言：无论 ∞-范畴 DMfd 是什么，它都应当接收一个来自光滑流形范畴的全忠实函子

$$i : \mathsf{Mfd} \hookrightarrow \mathsf{DMfd}$$

并且 i 应保持横截拉回和终对象。此外，DMfd 应在适当意义下对取纤维积和收缩封闭。一种表述方式是要求 DMfd 具有有限极限且幂等完备（对于 ∞-范畴，具有有限极限并不意味着幂等元分裂）。最后，还应使这样一种观点表述得通：导出流形完全由它们通过纤维积和收缩从流形构造出来的方式所决定。这引出了以下定义：

定义 1.1。 导出流形的 ∞-范畴 DMfd 是一个具有有限极限的幂等完备 ∞-范畴，并配备一个函子 $i : \mathsf{Mfd} \to \mathsf{DMfd}$，该函子保持横截拉回和终对象；此外，对所有其他具有有限极限的幂等完备 ∞-范畴$\mathcal{C}$，沿 i 的复合会在∞-范畴之间诱导一个等价：

$$\mathsf{Fun}^{\mathbf{lex}}(\mathsf{DMfd}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Fun}^{\pitchfork}(\mathsf{Mfd}, \mathcal{C})$$

即从 DMfd 到$\mathcal{C}$ 的保持有限极限的函子所成的 ∞-范畴，与从 Mfd 到$\mathcal{C}$ 的保持横截拉回和终对象的函子所成的 ∞-范畴之间的等价。

注 1.2. 事实证明，无需要求 i 是全忠实的，而且这一性质会自动满足。

可以证明，这样一个抽象的 ∞-范畴必然存在，但显然，这样的定义并不容易处理。然而，导出流形与 $\mathbf{C}^\infty$-代数之间存在如下显著联系：

定理 1.3。 [10, 定理 5。3] 对于所有具有有限极限的幂等完备 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，与典范函子复合 $\mathbf{C}^\infty \to$流形 $\to$导出流形 会诱导出 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathsf{Fun}^{\mathbf{lex}}\left(\mathsf{DMfd}, \mathcal{C}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathcal{C}\right),$$

在 ∞从 DMfd 到 $\mathcal{C}$ 的保持有限极限函子范畴与 ∞ 范畴$\mathbf{C}^\infty$中的代数对象 $\mathcal{C}$。

代数理论的抽象形式体系意味着以下推论，它为导出流形提供了一个具体模型：

推论 1.4. 存在一个 ∞-范畴之间的典范等价

$$\mathsf{DMfd} \simeq \left(\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathcal{S}\mathrm{pc}\right)^{\mathbf{fp}}\right)^{op}$$

即导出流形的 ∞-范畴与空间中同伦有限呈示$\mathbf{C}^\infty$-代数的 ∞-范畴的反范畴之间的等价，也就是由紧对象构成的全子范畴。

这直接联系到 Borisov-Noel [7] 基于单纯 $\mathbf{C}^\infty$-环的方法，因为由此得到的模型范畴是 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的一个呈示。还有一个谱函子 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}$，它将同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$ 映射为同伦 $\mathbf{C}^\infty$-环化空间 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A})$；由此可以发展出良好的导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形概念。用概形语言来说，上述定理表明 DMfd 等价于有限型仿射 $\mathbf{C}^\infty$-概形的∞-范畴。因此，DMfd 理论也包含在[31, 39]所发展的、关于同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数上导出代数几何的理论之中。事实上，这也正是它与 Spivak 模型建立联系之处：他的导出流形 ∞-范畴几乎可以直接认作有限型拟光滑导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形（局部）的范畴。

1.2. **微分分次流形**。 与众不同的是 [4],发展起来的导出流形理论。该理论以微分分次流形 为基础（但采用了弯曲 L_∞ [1]-代数丛这一替代性语言），因此是运用微分分次几何形式体系发展起来的理论，而这一形式体系以超几何为基础。其研究的核心对象称为微分分次流形，在物理学文献中尤其常称为 Q-超流形。微分分次流形是非常容易处理的对象，在其上几乎可以像往常一样进行微分几何，甚至可以使用局部坐标。关于该理论的详细回顾，请参见第 2 节。

微分分次几何源自数十年前物理学家发展出的同调工具。例如，在计算规范理论（如量子色动力学中的规范理论）的费曼图时，物理学家发现必须加入“鬼场”才能得到合理的结果。类似地，作为为处理超引力而发展出的巴塔林-维尔科维斯基形式的一部分，物理学家引入了与每个场配对的“反场”。后来，Kontsevich [25] 提出了如何利用这些思想定义虚基本类；虚基本类是镜像对称中的一项关键技术工具。这些思想得到了进一步发展

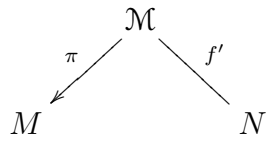
并在代数几何的研究中进一步发展，用于定义微分分次概形，相关工作见 Ciocan- Fontanine 和 Kapranov [13, 12, 14] 以及 Behrend 后续的工作 [2, 3], ，这些工作是现代导出概形的先驱。

Dmitry Roytenberg 和我十多年来一直致力于开发一种基于微分分次流形的导出流形模型。事实上，正是通过这些努力，我们定义并构造了一个微分分次 $\mathbf{C}^\infty$-代数的模型范畴；微分分次 $\mathbf{C}^\infty$-代数的典型例子是微分分次流形上的光滑函数代数。学位论文 [31] 正是基于这一同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数概念撰写的，其中还证明了相应的 ∞-范畴 $\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}^{\leq 0}$ 等价于 $\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathbf{pc})$（因此也等价于基于单纯 $\mathbf{C}^\infty$-环的模型）。

基于微分分次流形研究导出流形的方法，其思想是：在微分分次流形的拟同构意义下，可以用微分分次流形将任意光滑映射替换为次浸没。例如，若 $E \to M$ 是一个向量丛，s 是一个截面，那么插入 ι_s可视为分次代数的一个导子

$$\Gamma_M\left(\Lambda^\bullet\left(E^*\right)\right).$$

在分次微分几何的语言中，这个分次代数是向量丛 $E[-1] \to M$ 底层分次流形上的光滑函数代数，其中将 E 的纤维移至次数 1，而 ι_s 则成为该分次流形上的一个 上同调向量场 ，从而使 $(E[-1], \iota_s)$ 成为微分分次流形。可以证明，如果 s 与零截面 Z 横截相交，那么 $(E[-1], \iota_s)$ 上光滑函数的微分分次代数与 $\mathbf{C}^\infty(s \cap Z)$ 拟同构。利用这一点以及管状邻域的存在性，可以轻易地从光滑函数 $f\colon M \to N$构造出一个分解 $f = f' \circ \lambda$，其中



λ 是 π的一个截面， π 和 f' 是分次流形之间的次浸没，此外 π 还是一个拟同构。特别地， f' 将以适当的分次意义与任何到 N.的光滑映射横截

十多年来，Dmitry Roytenberg 一直公开猜想，在非正分次微分分次流形范畴 $\mathbf{dg\text{-}Mfd}^{\leq 0}$ 上存在一种纤维对象范畴结构（这是对模型结构的一种弱化，它只定义纤维化和弱等价，并且不要求存在小的（甚至有限的）极限和余极限），其中：

- f： 若 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是分次流形之间的次浸没，则它是一个**纤维化**。
- f： 若 f^*： $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是拟同构，则 $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个**弱等价**。

给定任意一个范畴$\mathcal{C}$，以及一组态射 $\mathcal{W}$，称为弱等价，可以将 $\mathcal{W}$ 中的态射形式地同伦求逆，从而得到一个 ∞-范畴$\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]_\infty$，使得对于任意 ∞-范畴$\mathcal{D}$ 以及任意函子

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

对于所有 $f \in \mathcal{W}$， $F(f)$ 在 $\mathcal{D}$ 中都是等价，则存在一个（同伦意义下）唯一的延拓

$$\tilde{F} : \mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_{\infty} \to \mathcal{D}.$$

只需通过 Dwyer-Kan 局部化，就可以将其建模为一个单纯范畴。对于 $\mathcal{C}$ 是一个模型范畴，且 $\mathcal{W}$ 是其弱等价类的情形，这就是通常的构造。对于一般的相对范畴，我们几乎不了解如何在 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]_{\infty}$ 中计算极限和余极限，甚至这些极限和余极限是否存在也无从知晓。然而，对于纤维对象范畴，$\mathcal{C}\ [\mathcal{W}^{-1}]_{\infty}$ 总是具有有限极限，并且只需将其中一个映射替换为纤维化，就可以计算同伦拉回。既然我们关心的是取导出纤维积，并且希望它们在导出流形的 ∞- 范畴中恰好就是通常的拉回，这正是进行具体计算所需的结构。

借助 AKSZ 理论和同调扰动理论中的思想， [4]相关作者在微分分次流形上建立了一种纤维化对象结构，与我们提出的结构几乎相同。唯一微妙之处在于，他们将弱等价定义为 f 诱导一个双射

$$\pi_0(\mathcal{M}) \to \pi_0(\mathcal{N})$$

在经典轨迹的底层集合 上，并且对于每个经典点 $x \in \pi_0(\mathcal{M})$，诱导的切复形映射 $T_x\mathcal{M} \to T_{f(x)}\mathcal{N}$ 是拟同构。本文通过证明微分分次流形的反函数定理来解决这一问题；具体来说，我们证明这两种弱等价的概念是一致的。

本文的主要结果是

定理 1.5. 存在一个典范等价的 ∞-范畴

$$\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}\left[\mathbf{qi}^{-1}\right]_{\infty} \xrightarrow{\sim} \mathsf{DMfd}$$

介于与微分分次流形上的纤维对象范畴结构相关联的 ∞-范畴和导出流形的 ∞-范畴之间。

注 1.6. 需要指出的是，我们采用上同调分次约定，并且只考虑函数代数集中在非正次数上的微分分次流形。代数集中在非负 次数上的微分分次流形表现则大不相同，并且与李锚丛和变形理论密切相关。例如，可参见 Joost Nuiten 的学位论文 [31]。

第1. 部分 背景

2. 微分分次几何综述

本节将对分次几何和微分分次几何作一番基本自足的介绍。我们认为这首先是必要的，因为许多同伦论学家可能不熟悉这套语言。其次，在本文余下部分的论证中，我们会在许多不同但等价的微分分次流形范畴之间来回切换，因此为了方便读者，我们将详细说明这些不同观点之间的关系。本文内容大多是标准的。此外还有许多参考资料。以下列出一份不完全的清单：[36, 34, 11, 32, 20, 18, 35]

2.1. $\mathbb{Z}_2$**分次几何**。

定义 2.1. A $\mathbb{Z}_2$**-分次向量空间** （亦称超向量空间） $\mathbb{V}$在 $\mathbb{R}$上只是由一对实向量空间（V_0, V_1）组成。 V_0 中的元素称为**偶** 元素， V_1中的元素称为**奇**元素。对于 $v \in V_i$，记作 $|v| = i \in \mathbb{Z}_2$. 。态射 $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ 是一对线性映射， $f_0\colon V_0 \to W_0$ 和 $f_1\colon V_1 \to W_1$. 。也就是说，范畴 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$ 就是函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathbb{Z}_2, \mathsf{Vect})$。对于 V，普通（即非分次）向量空间将视为$\mathbb{Z}_2$-向量空间（V, 0）。这种形式的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间称为**纯偶**。我们将 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间（$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$）记作 $\mathbb{R}^{n|m}$，其中 n 为**偶维数** ， m为**奇维数**，而（$n|m$）为**超维数**。

张量积定义为

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_0 = (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1),$$
$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_1 = (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0).$$

我们将 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$视为对称幺半范畴 $(\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}, \otimes, \tau)$，其中 τ是 Koszul 编织，其在齐次元素上的定义为

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{W} \otimes \mathbb{V} \\ v \otimes w & \mapsto & (-1)^{|v|\cdot|w|}\, w \otimes v. \end{array}$$

注 2.2. 或者，许多作者将 $\mathbb{Z}_2$分次向量空间定义为一个向量空间V 连同一个直和分解

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

并将保持次数的态射定义为态射。这个范畴与 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$. 有典范同构。需要注意的唯一差异是，在我们的方法中，不能将 V_0 中的元素与 V_1中的元素相加；也就是说，上述定义中的 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间的所有元素都是齐次的。尽管如此，这两种方法在范畴上等价。

定义 2.3. 范畴 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$存在一个典范的幂等自同构 Π ，称为**奇偶反转** 函子，其定义如下:

$$\Pi = \mathbb{R}^{0|1} \otimes (\,\cdot\,).$$

$\mathbb{Z}_2$-分次 形式为 ΠV、其中 V 为纯偶的向量空间称为**纯奇** .

注意，对于任意 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 $\mathbb{V} = (V_0, V_1)$，有 $\mathbb{R}^{0|1} \otimes \mathbb{V} = (V_1, V_0)$。特别地，$\mathbb{R}^{0|1} \otimes \mathbb{R}^{0|1} = \mathbb{R}$. 由此可得，对于所有 $\mathbb{V}$., $\Pi(\Pi(\mathbb{V})) = \mathbb{V}$

$(\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}, \otimes, \tau)$是对称闭幺半的，且

$$\underline{\mathbb{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = (\mathbb{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \mathbb{Hom}(\mathbb{V}, \Pi\mathbb{W})).$$

相应地， $\mathbb{V}$的**对偶** 定义为

$$\mathbb{V}^* := \underline{\mathbb{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{R}).$$

定义 2.4. $\mathsf{SCom}_{\mathbb{R}}$ 范畴由对称幺半范畴 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$. 中的交换幺半群对象组成，亦即**超交换** $\mathbb{R}$ **代数**的范畴。具体而言，这些是满足以下条件的 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{A} = (A_0, A_1)$:

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|}\, b \cdot a.$$

定义 2.5. 奇偶反转函子 Π 为每个超交换 $\mathbb{R}$-代数诱导出一个自同构 $\Pi_{\mathcal{A}}$，定义如下：

$$\Pi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^{|x|} \cdot x.$$

这称为**奇偶反转**自同构。

存在一个遗忘函子 $U : \mathsf{SCom}_{\mathbb{R}} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$，它有一个左伴随 Sym，其中 $\mathsf{Sym}(\mathbb{V})$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次对称代数。注意，对于任意 $\mathbb{V}$，

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= (V_0, 0) \oplus (0, V_1) \\ &= V_0 \oplus \Pi V_1. \end{aligned}$$

由于 Sym 是左伴随，它由以下事实唯一确定：对于 V 纯偶的情形，$\mathsf{Sym}(V)$ 是通常的（非分次）对称代数，且集中在次数 0；并且

$$\mathsf{Sym}(\Pi V) = \Lambda(V),$$

其中 $\Lambda(V)$ 是外代数（其 $\mathbb{Z}$-分次模 2 后所得）。也就是说，对于一般的 $\mathbb{V}$，

$$\mathsf{Sym}(\mathbb{V}) = \mathsf{Sym}(V_0) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Lambda(V_1).$$

（与非分次交换情形一样，张量积成为超交换代数的余积。）

假设我们有 V_0 的一组基 $(x_1, \ldots, x_n)$，以及 V_1. 的一组基 $(y_1, \ldots, y_m)$。那么，$\mathsf{Sym}(\mathbb{V})$ 的元素是由 n 个可交换变量 $x_1, \ldots, x_n$ 和 m 个反交换变量 $y_1, \ldots, y_m$. 构成的多项式。

设 $\mathbb{V} = (V_0, V_1)$是一个有限维的 $\mathbb{Z}_2$分次向量空间（亦称超向量空间），其上的 $\mathbb{R}$. 与 $\mathbb{V}$ 相对应，有一个环空间$(V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$，其中 $\mathbb{Z}_2$分次结构层定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{V}}(U) &= \mathbf{C}^{\infty}(U) \underset{\mathsf{Sym}((V_0)^*)}{\otimes} \mathsf{Sym}(\mathbb{V}^*) \\ &\cong \mathbf{C}^{\infty}(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Lambda((V_1)^*). \end{aligned}$$

定义 2.6。 **超域** 是一个拓扑空间与一个超交换 $\mathbb{R}$代数的层 $\mathcal{O}_X$ 所构成的二元组 $(X, \mathcal{O}_X)$，它作为环空间同构于某个有限维 $\mathbb{Z}_2$分次向量空间所对应的 $(V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$。

定义 2.7。 一个**超流形** $\mathfrak{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$是一个第二可数豪斯多夫空间 M，其上有一个超交换 $\mathbb{R}$代数的<style>层 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$，并且存在一个开覆盖$(U_\alpha \hookrightarrow M)_\alpha$，使得对于所有 α，$(U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}|_{U_\alpha})$都是一个超域。我们将超交换 $\mathbb{R}$代数 $\Gamma_M(\mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$记作 $\mathbf{C}^{\infty}(\mathfrak{M})$ 。

定义 2.8. 对于 $\mathbb{V}$ 有限维的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间，我们记作 $\mathbb{V} = (V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$，这意味着我们将 $(V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$ 视为 $\mathbb{V}$ 作为超流形的几何实现，正如我们可以用 $\mathbb{R}^n$ 同时表示 n-维向量空间和光滑流形。这定义了一个自然函子 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2} \to$SMfd。此函子的像中的态射称为**线性的**。

注 2.9. 任意超流形 $\mathfrak{M}$ 在局部都微分同胚于某个 $\mathbb{R}^{p|q}$，其中 p为非负数，且 q.

例 2.10. 任意光滑流形 M 都是一个超流形，因为 $\mathbb{R}^n$ 是一个纯偶$\mathbb{Z}_2$-分次向量空间，而 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ 就是带有其标准光滑函数结构层的 $\mathbb{R}^n$。这种形式的超流形称为**纯偶**。

定义 2.11. 对于超流形 $\mathfrak{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$，令 $\mathcal{I}_{\mathfrak{M}}$ 为由奇元素局部生成的（齐次）理想层。那么 $|\mathfrak{M}| := (M, (\mathcal{O}_{\mathfrak{M}})/\mathcal{I}_{\mathfrak{M}})$ 是一个光滑流形（视为局部环化空间）。它称为 $\mathfrak{M}$. 的**核心**。函子 $|\cdot| : \mathsf{SMfd} \to \mathsf{Mfd}$ 是从超流形到流形的嵌入的左伴随。

注 2.12. 正如 $\mathcal{O}_M$ 赋予 M 局部坐标系，$\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ 赋予 $\mathfrak{M}$ 形如 $(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_m)$ 的局部坐标系，其中 $\xi_1, \ldots, \xi_m$ 是 V_1. 对偶的一组基。唯一需要注意的是，变量 ξ_i 是奇的且反交换。这些坐标称为**费米子**坐标，而 M 的坐标 $(x_1, \ldots, x_n)$ 称为**玻色子**。这可由众所周知的事实解释：超流形态射可以在这些坐标下局部表示。更确切地说：

一个光滑函数 $f\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$，即环空间的一个态射 $(M, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}) \to (\mathbb{R}, \mathsf{C}^\infty_{\mathbb{R}})$，可以等同于选取一个偶元素 $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$；而一个光滑函数$g : M \to \mathbb{R}^{0|1}$ 则对应一个奇元素。综合起来可知，光滑函数$f\colon \mathbb{R}^{n|m} \to \mathbb{R}^{l|k}$与以下数据相同：$l$个偶元素 $f^1, \ldots, f^l$，属于

$$\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n|m}\right) = \mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Lambda\left((\mathbb{R}^m)^*\right)$$

以及 k个奇元素 $f^{l+1}, \ldots f^{l+k}$.设 $x_1, \ldots, x_n$为 $\mathbb{R}^n$上的标准坐标，$y_1, \ldots, y_l$为 $\mathbb{R}^l$. 上的标准坐标。设 $\xi_1, \ldots, \xi_m$为 $\mathbb{R}^m$的一组对偶基，$\eta_1, \ldots, \eta_k$为 $\mathbb{R}^k$. 的一组对偶基。$\mathsf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n|m}\right)$ 中的一个偶元素具有如下形式

$$h_0(x_1, \ldots, x_n) + h_{12}(x_1, \ldots, x_n)\xi_1\xi_2 + \ldots = \sum_{I \subset \{1,\ldots,m\}, |I| \in 2\mathbb{Z}} h_I(x_1, \ldots, x_n)\xi^I,$$

其中每个 h_i 都是一个光滑函数，而奇元素的形式相同，但求和遍及所有奇数基数的子集 I。（这里我们将 I 视为多重指标。）因此，使用爱因斯坦求和约定，可以得到如下形式的表达式

$$\begin{aligned}
y_1(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) &= f_I^1(x_1, \ldots, x_n)\xi^I \\
y_2(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) &= f_I^2(x_1, \ldots, x_n)\xi^I \\
&\ldots \\
y_l(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) &= f_I^l(x_1, \ldots, x_n)\xi^I \\
\eta_1(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) &= f_I^{l+1}(x_1, \ldots, x_n)\xi^I \\
&\ldots \\
\eta_k(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_m) &= f_I^{l+k}(x_1, \ldots, x_n)\xi^I.
\end{aligned}$$

使用这些局部坐标后，大部分微分几何内容只需稍作修改即可沿用（但要特别注意符号！），积分理论则是一个显著的例外。

It i众所周知，超流形是仿射的，也就是说，函子

$$\mathsf{SMfd} \to \mathsf{SCom}_{\mathbb{R}}^{op}$$

将 $\mathfrak{M}$ 发送到 $\mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$ 是全忠实的。这很容易由单位分解的存在性得出。

超流形上的向量场可以通过导子来定义。

定义 2.13. 超流形 $\mathfrak{M}$ 上的**偶向量场** 是一个导子 X，其定义在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ 上，取值于 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$-模 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$，记作 $|X| = 0.$ 。**奇向量场** 是一个导子 X，其定义在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ 上，取值于 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$- 模 $\Pi\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$，记作 $|X| = 1.$

展开来说，对于奇向量场 X，若 f 是 $\mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$ 的一个元素，则 $X(f) \in \mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$ 是一与 f 奇偶性相反的元素；也就是说，若 f 为偶，则 $X(f)$ 为奇，等等。此外，有

$$X(fg) = X(f)\, g + (-1)^{|X|} fX(g).$$

$\mathbb{R}^{n|m}$ 上的向量场形式如下

$$f^i \frac{\partial}{\partial x_i} + g^j \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ 是左偏导数，例如

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\xi_2 \xi_1) &= -\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \xi_1 \\ &= -\xi_2. \end{aligned}$$

如果向量场是偶的，那么 f^i 是偶函数，而 g^j 是奇函数；反之，如果向量场是奇的，则情况相反。 $\mathfrak{M}$ 上的向量场构成一个 $\mathbb{Z}_2$-分次李代数（即 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$ 中的李代数对象），其李括号定义为 $[X, Y] = XY - (-1)^{|X||Y|} YX.$

超流形上的向量丛按显然的方式定义，即对于一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间，其典型纤维为 $\mathbb{V}$ 的纤维丛，且其转移函数是线性的。正如有限维实向量空间上的任意自然（多元）函子都可延拓到向量丛（例如直和、张量积等），$\mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}_2}$ 上的奇偶反转自函子也可延拓到超流形上的向量丛。也就是说，给定一个典型纤维为 $\mathbb{V}$ 的向量丛 $E \to \mathfrak{M}$，可以以典范方式构造一个典型纤维为 $\Pi\mathbb{V}.$ 的向量丛 $\Pi E \to \mathfrak{M}$

要讨论超流形上的向量丛 $\mathcal{V} \to \mathfrak{M}$ 的截面，必须格外小心。例如，对于一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间 $\mathbb{V}$，人们会希望平凡丛 $\mathfrak{M} \to \mathbb{V}$ 的截面是 $\mathbb{V}.$ 。但这并没有意义，因为 $\mathbb{V}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间，而不是集合。我们可以用以下定义来解决这个问题：

定义 2.14。给定超流形上的一个向量丛 $\mathcal{V} \to \mathfrak{M}$，$\mathbb{Z}_2$ 分次模 $\underline{\Gamma}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})$ 定义为 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间中的 $\mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$-模，其偶分量为

$$\underline{\Gamma}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})_0 = \Gamma_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})$$

以及奇分量

$$\underline{\Gamma}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})_1 = \Gamma_{\mathfrak{M}}(\Pi\mathcal{V}).$$

向量丛的截面的 $\mathbb{Z}_2$-分次模构成一个 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$-模的局部自由层，反之，任意 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$-模的局部自由层都由此产生。例如，可以用显而易见的方式定义超流形的切丛 $T\mathcal{M}$，它对应的局部自由层的偶分量是偶向量场，奇分量是奇向量场。也就是说，奇向量场实际上是 $\Pi T\mathcal{M}$ 的一个截面，而不是 $T\mathcal{M}$.

向量丛纤维奇偶性反转的构造，可以在 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathbb{V}$ 为纯偶的特殊情形下进行；也就是说，此时 $E \to M$ 是经典意义下光滑流形的普通向量丛。若 M 的维数为 n且 E 的秩为 k，则 ΠE局部同构于 $\mathbb{R}^{n|k}$.具体而言：

$$\Pi E = (M, \mathcal{O}_{\Pi_E})$$

with

$$\mathcal{O}_{\Pi_E} = \Gamma\left(\Lambda E\right),$$

对于截面 λ 和 κ，我们定义 $\lambda \cdot \kappa := \lambda \wedge \kappa$.。对于 E为经典向量丛的情形，形如 ΠE 的超流形称为**分裂**的。

Batchelor 有以下著名结果：

定理 2.15 (Batchelor 定理)。[1] 每个光滑超流形都（非典范地）分裂。

这种分裂不是典范的。不过，作为具有纯奇纤维的纤维丛，存在一种典范的 分裂，下面将对此作出说明。设 $\mathfrak{M}$ 为超流形， $U \subseteq |\mathfrak{M}|$ 为其核心的一个开子流形。那么存在如下形式的拉回图

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}|_U) & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & |\mathfrak{M}|. \end{array}$$

根据超流形的定义，存在 $|\mathfrak{M}|$ 的一个开覆盖 $(U_\alpha \hookrightarrow |\mathfrak{M}|)_\alpha$，由开子流形构成，并存在超流形同构

$$\varphi_\alpha : (U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}|_U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V},$$

对于某个 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间 $\mathbb{V}$.。由于 $\mathbb{V} = (V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$，这意味着 $|\varphi_\alpha| : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_0$ 是一个微分同胚。此外，注意到 $\mathbb{V} \cong V_0 \oplus \Pi V_1$，由此可知 $\mathbb{V} \cong V_0 \times \Pi V_1$ 是一个超流形。典范投影 $\mathbb{V} = V_0 \times \Pi V_1 \to V_0$ 是单位 $\pi_{\mathbb{V}}$，它表明 Mfd 是一个反射子范畴，因此根据自然性，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}|_U) & \xrightarrow{\sim} & U_\alpha \times \Pi V_1. \\ {\scriptstyle \pi_{\mathfrak{M}}} \downarrow & \swarrow_{pr} & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

总之，我们证明了以下结论：

命题 2.16。 对于每个局部建模于 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间$\mathbb{V}$的超流形，反射函子 $\pi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \to |\mathfrak{M}|$ 展示了 $\mathfrak{M}$ 是以 $|\mathfrak{M}|$ 为底空间、纤维为 ΠV_1. 的纤维丛

由此可见，Batchelor 定理可以改述为：纤维丛 $\pi_{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{M} \to |\mathfrak{M}|$ 的结构群可以（非典范地）约化为 GL (ΠV_1)。

2.2. $\mathbb{N}$**分次几何**。

定义 2.17. $\mathbb{Z}$**分次向量空间**在 $\mathbb{R}$ 上的范畴是 Fun $(\mathbb{Z}, \mathrm{Vect})$，因此， $\mathbb{Z}$分次向量空间 $\mathbb{V}$ 是由向量空间组成的集合 $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。有时我们也将 $\mathbb{V}$ 写作 $V_\bullet$. 。如果元素 v 属于 V_n ，且 n 是偶的（分别为奇的），我们就称该元素为**偶**（分别为**奇**），并记作 $|v| = n \in \mathbb{Z}$. 。我们按通常方式定义张量积。

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})_n = \bigoplus_{l+k=n} V_l \otimes W_k.$$

Koszul 编织的定义与 $\mathbb{Z}_2$分次情形类似，由此得到一个对称幺半范畴 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}$.

定义 2.18. 设 $n \in \mathbb{Z}$. 。用 $\mathbb{R}[n]$ 表示满足 $\mathbb{R}$ 位于次数-n 且在其他次数为零的 $\mathbb{Z}$分次向量空间。我们定义**悬移**

$$\Sigma := \mathbb{R}[1] \otimes (\,\cdot\,)$$

和**环路**

$$\Omega := \mathbb{R}[-1] \otimes (\,\cdot\,)\,\Sigma^{-1}$$

函子。对于 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $V_\bullet$ a $\mathbb{Z}$-分次向量空间，我们定义

$$V[n] := \Sigma^n(\mathbb{V}),$$

具体而言，我们有

$$\mathbb{V}[n]_i = V_{n+i}.$$

因此， $\mathbb{V}[n]$ 向左平移了 n 个次数。

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}$ 是对称闭幺半，且

$$\underline{\mathbb{H}\mathrm{om}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})_n = \mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{V}, \mathbb{W}[n]).$$

我们将 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $\mathbb{V}$ 的**对偶** 定义为

$$\mathbb{V}^* := \underline{\mathbb{H}\mathrm{om}}(\mathbb{V}, \mathbb{R}).$$

具体而言，有如下公式

$$\mathbb{V}^*_n = (V_{-n})^*.$$

存在一个典范函子

$$\cdot/2 : \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}},$$

它将 $\mathbb{V}$ 映射为 $\mathbb{V}/2 := \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{2n}, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{2n+1}\right)$，也就是说，它将分次模 2 化简。

定义 2.19. $\mathbb{Z}$**-分次交换代数** 的范畴是对称幺半范畴 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}$. 中的交换幺半群范畴。它们是满足以下性质的 $\mathbb{Z}$-分次代数：

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|}\, b \cdot a.$$

我们将其范畴定义为 $\mathsf{g}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Com}_{\mathbb{R}}$。通过将 $\mathbb{Z}$-分次模 2 化，可以得到一个到 $\mathbb{Z}_2$-交换代数的显然遗忘函子。

注 2.20. 一个 $\mathbb{Z}$-分次交换代数 $\mathcal{A}$连同一个 $\mathcal{A}$ 的次数为 1 的导子 d （即取值于 $\mathcal{A}[1]$ 的导子），其分次交换子 $[d,d]=2d^2=0$，等价于一个 $\mathbb{R}$ 上的交换微分分次代数，其中 d 是微分。这里我们采用上同调分次约定。

还有一个遗忘函子 $\mathsf{g}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Com}_{\mathbb{R}} \to \mathsf{Vect}_{\mathbb{Z}}$，它有一个左伴随，我们仍不严谨地记作 Sym。它是对分次向量空间构造**分次对称代数**的通常方法。特别地，对于 V 一个处于 0 次的向量空间，

$$\mathsf{Sym}(V[-1]) = \Lambda(V),$$

此时 $\Lambda(V)$ 配备其标准的 $\mathbb{N}$-分次。

现在我们要定义什么是分次流形。不过，我们将只讨论那些以集中在非负次数的 $\mathbb{Z}$-分次向量空间为模型的分次流形。对于非正次数的 $\mathbb{Z}$-分次流形，这种方法同样适用；但它不适合用于研究（甚至定义）一般的 $\mathbb{Z}$-分次流形。

定义 2.21。 设 $\mathbb{V}=(V_0,V_1,\dots)$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次向量空间（视为一个 $\mathbb{Z}$-分次∞空间），其总维数有限，即 $\bigoplus_{n=0} V_n$ 是有限维的。我们将 $(V_0,\mathcal{O}_{\mathbb{V}})$ 定义为如下环空间：其结构层将开集 U （属于 V_0 ）赋予 $\mathbb{Z}$-分次交换代数

$$\mathcal{O}_{\mathbb{V}}(U) = \mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathsf{Sym}((V_0)^*)}{\otimes} \mathsf{Sym}(\mathbb{V}^*).$$

（注意，由于 $\mathbb{V}$ 集中在非负次数上， $\mathbb{V}^*$ 集中在非正次数上， $\mathcal{O}_{\mathbb{V}}$.也如此。）

一个**分次域** 是一个拓扑空间 X，连同一个层 $\mathcal{O}_X$，其取值于 $\mathbb{Z}$-分次交换 $\mathbb{R}$-代数（集中在非正次数上），并且作为$\mathbb{Z}$-分次交换环空间同构于 $(V_0,\mathcal{O}_{\mathbb{V}})$，其中 $\mathbb{V}=(V_0,V_1,\dots)$ 是一个总维数有限的 $\mathbb{N}$- 分次向量空间。

定义 2.22。 一个**分次流形** $\mathcal{M}=(M,\mathcal{O}_{\mathcal{M}})$是一个第二可数豪斯多夫空间$M$，配有一个层，该层取值于 $\mathbb{Z}$-分次交换 $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$，并且局部同构于一个分次域。我们记作 $\mathbb{V}=(V_0,\mathcal{O}_{\mathbb{V}})$，意即将 $(V_0,\mathcal{O}_{\mathbb{V}})$ 视为 $\mathbb{V}$ 作为分次流形的几何实现。我们用 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 表示 $\mathbb{Z}$-分次交换 $\mathbb{R}$-代数$\Gamma_M(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})$。分次流形之间的光滑映射是环空间态射。[1]

令 $\mathcal{I}_0$ 为由 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 中负次数元素局部生成的理想层。则$|\mathcal{M}| := (M,\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{I}_0)$是一个光滑流形，称为 $\mathcal{M}.$ 的**核心**。注意，存在一个典范光滑映射 $\mathcal{M}\to|\mathcal{M}|.$

注记 2.23。 注意，存在一个典范光滑映射 $\mathcal{M}\to|\mathcal{M}|$。事实上，这是一个伴随的单位，它表明范畴 Mfd 是分次流形的一个反射子范畴，而核心函子 $|\cdot|$ 是其左伴随。

[1]无需担心局部环，因为分次流形的点对应于剩余域为 $\mathbb{R}$.的极大理想

特别地，任意分次流形的态射 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 都构成一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathcal{M}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{N}}} \\ |\mathcal{M}| & \xrightarrow[|f|]{} & |\mathcal{N}|. \end{array}$$

注 2.24. 分次流形核心 $|\mathcal{M}|$还有一种或许更简单的描述：它是 $(M, (\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_0)$。这是因为负次数的元素无法生成任何新的 0 次元素。当考虑无界 $\mathbb{Z}$-分次流形时，这一现象便不再成立。请注意，这也与超流形的 $\mathbb{Z}_2$-分次情形形成对比。例如，如果 (η_1, η_2) 是 $\mathbb{R}^{0|2}$, f 上的局部坐标，那么 $(\eta_1, \eta_2) = \eta_1\eta_2$ 是一个非平凡的偶光滑函数，但 $\mathbb{R}^{0|1}$ 的核心只是一个点 $\mathbb{R}^0$.

请注意，特别地，对于一个 $\mathbb{N}$-分次向量空间 $\mathbb{V}$，$(V_0, \mathcal{O}_{\mathbb{V}})$ 是一个分次流形。因此，存在一个典范函子 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{N}} \to \mathbf{Mfd}_{\mathbb{N}}$. 。该函子像中的态射称为**线性**。由此，可以直接（从几何角度）定义分次流形 $\mathcal{M}$ 上的向量丛，其范畴等价于集中在非正次数的 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-模局部自由层的范畴。正如奇偶反转函子 Π在 $\mathbb{Z}_2$-分次情形下可逐纤维扩展为超流形上的向量丛，环函子 $\Omega = (\,\cdot\,)[-1]$ 也可扩展为分次流形上的向量丛。[2]若 $\mathcal{M}$ 是一个普通流形 M，那么在分次流形的范畴 $\mathbf{Mfd}_{\mathbb{N}}$ 中，M 上的向量丛与 M上的分次向量丛之间存在自然的一一对应；后者即由一列 $V_0, V_2, V_3, \ldots$ 构成的 M. 上的（经典）向量丛。对于这样一列向量丛，我们可以关联得到向量丛

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n\,[-n]$$

在 M. 上（这会将 V_n 置于次数 n。）

分次情形中有一个与 Batchelor 定理类似的定理：

定理 2.25. [27, 定理 2.1] 每个分次流形 $\mathcal{M}$ 都（非典范地）同构于一个向量丛的全空间 $\mathbb{V}$，该向量丛定义在其核心 $|\mathcal{M}|$上，其中 $\mathbb{V}_0 = 0$.

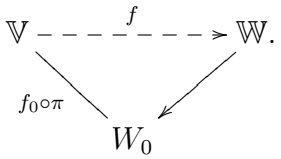
注 2.26. 上述定理可以改写为更接近超流形情形的形式。它等价于如下陈述：每个分次流形 $\mathcal{M}$ 都（非典范地）同构于全空间 $\mathbb{V}[-1]$，其中 $\mathbb{V}$源自定义在 $|\mathcal{M}|$. 上的分次向量丛 $V_\bullet$。注意，这个移位将 V_0 置于次数 1，因此 $\mathbb{V}[-1]_0 = 0$.

在 co mplete analogy with the proof of 命题 2.16，我们有如下结论：

命题 2.27。设 $\mathcal{M}$ 是一个局部以 $\mathbb{N}$ 分次向量空间$\mathbb{V} = (V_0, V_1, \ldots)$ 建模的分次流形。那么，反射函子 $\pi_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \to |\mathcal{M}|$ 将 $\mathcal{M}$ 表示为以 $|\mathcal{M}|$为底空间、纤维为 $\mathbb{V}' = (0, V_1, V_2, \ldots)$ 的纤维丛。

[2]如果我们花时间定义真正的 $\mathbb{Z}$-分次流形，也可以扩展悬挂函子。

设 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$ 是 $\mathbb{N}$ 分次的（总）有限维向量空间，定义在 $\mathbb{R}$. 上。我们来看看分次流形之间的光滑映射 $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ 是什么。我们需要一个普通流形之间的光滑映射 $f_0\colon V_0\to W_0$，以及一个层的态射 $\alpha\colon f_0^*\mathcal{O}_{\mathbb{W}}\to\mathcal{O}_{\mathbb{V}}$。注意，任意态射 $f\colon\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ 都使下面的图表可交换



令 $\mathbb{V}':=(0,V_1,V_2,...)$ 并以类似方式定义 $\mathbb{W}'$。由此可知， α 与以下情况相同：对 W_0 的每个开子集 U，都有一个关于 $U.$ 自然的交换图表。这样的交换三角形等价于一个同态

$$\mathsf{Sym}\left((\mathbb{W}')^*\right)\to(f_0)_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{V}}(U).$$

展开定义可知，自然性的要求意味着 α 与一个层或 $\mathbb{R}$-代数的态射数据相同： $\Delta($ $\mathsf{Sym}(\mathbb{W}')^*)$ $\to(f_0)_*\,\mathcal{O}_{\mathbb{V}}$，其中 $\Delta(\mathsf{Sym}\,(\mathbb{W}')^*)$ 是常值层。根据伴随关系，以及推前与整体截面可交换这一事实，这等价于如下形式的 $\mathbb{R}$-代数同态：

$$\mathsf{Sym}\left((\mathbb{W}')\right)\to\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\right).$$

由于 Sym 是左 伴随，因此最终等价于一个 $\mathbb{Z}$-分次向量空间之间的线性映射

$$\mathbb{W}'\to\mathbf{C}^\infty(\mathbb{V})=\mathbf{C}^\infty(V_0)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathsf{Sym}\left((\mathbb{V}')^*\right).$$

最后，如果 $\dim(W_k)=n_k$，那么这与以下选择一一对应：对每个 k，选取 n_k 个 $\mathbf{C}^\infty(V_0)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathsf{Sym}\,((\mathbb{V}')^*)$ 中次数为 $-k.$ 的元素。为每个 V_i 选取一个基后，这样一个次数为 $-k$ 的元素是由对偶基向量构成、系数属于 $\mathbf{C}^\infty(V_0)$ 的齐次多项式表达式。

与超流形的情形类似，给定一个位于分次流形上的向量丛 $\mathcal{V}\to\mathcal{M}$，我们可以关联一个截面的分次 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-模：

定义 2.28。 截面的分次 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-模 $\mathcal{V}$ 定义为

$$\underline{\Gamma}_{\mathcal{M}}(\mathcal{V})_n=\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{V}[n]).$$

定义 2.29。 分次流形 $\mathcal{M}$ 上的**次数为** n 的向量场是一个导子$D\colon\ \mathcal{O}_{\mathcal{M}}\to\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[n]$. 将 n 视为分次时，这是一个局部自由的分次 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-模层，我们记作 $\mathfrak{TM}$——即**切层**。当然，它是切丛 $T\mathcal{M}\to M.$的截面模

注 2.30。 （分次）交换子李括号以显然的方式定义，其符号规则与 $\mathbb{Z}_2$-分次情形相同。这使切层成为一个分次李代数层。

对于一个次数为偶数的向量场 X， $[X,X]=X\circ X-X\circ X=0$，也就是说，一维偶分布总是可积的。然而，对于次数为奇 的向量场，情况就不再如此，可积性需要满足一个条件。

定义 2.31。次数为 $+1$ 、其分次交换子 $[D,D]=2D^2=0$ 的向量场称为**上同调向量场**。

定义 2.32. 一个**微分分次流形**或**微分分次流形**是由一个分次流形 $\mathcal{M}$ 和一个上同调向量场 D. 组成的二元组 $(\mathcal{M},D)$。微分分次流形之间的态射 $\varphi:(\mathcal{M},D)\to(\mathcal{M}',D')$ 是分次流形的态射 $\varphi\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}'$，且满足 D' 与 D 相关，即对于任意 $f\in\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M}')$,

$$\varphi^*D'f=D\varphi^*f. \tag{2}$$

我们将所得范畴记为 $\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}$. （更准确地说，这是由非正次数集中的微分分次流形构成的范畴。）

注 2.33. $\mathcal{M}$ 上的上同调向量场 D 使 $(\mathcal{O}_\mathcal{M},D)$ 成为 $\mathbb{R}$. 上的交换微分分次代数层。事实上，D 成为一个微分，使 $(\mathcal{O}^\bullet_\mathcal{M},D)$ 成为上链复形，因为 D 的次数为 1，且 $D^2=0$；又由于它是导子，代数结构与该微分相容。上述条件 (2) 等价于要求 f^* 是交换微分分次代数的映射。类比超流形的情形，函子

$$\mathbf{C}^\infty:\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}\to\mathsf{dg\text{-}}\mathbb{R}\mathsf{Alg}^{op}_{\leq 0}$$

是全忠实的。

给定一个微分分次流形（$\mathcal{O}_\mathcal{M},D$），对上同调向量场$D$ 取李括号，便在 $\mathfrak{T}\mathcal{M}$. 上定义了一个次数为 1 的微分 $\mathcal{L}_D:=[D,\cdot]$。借助此微分， $\mathfrak{T}\mathcal{M}$ 成为（$\mathcal{O}^\bullet_\mathcal{M},D$）的微分分次模。对于任意 n，此微分对应于将 D 提升到 $T[n]\mathcal{M}$的典范提升，即 D.的切丛提升

任意分次流形 $\mathcal{M}$ 都可以视为一个微分分次流形，其中 $D=0.$。特别地，每个光滑流形 M 都是一个微分分次流形。给定一个微分分次流形（$\mathcal{M},D$），映射 $\pi_\mathcal{M}:\mathcal{M}\to|\mathcal{M}|$ 是微分分次流形的态射。在代数层面，这只是微分分次代数的态射

$$\mathbf{C}^\infty(|\mathcal{M}|)=\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})_0\to(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})_\bullet,D).$$

由于 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})_1=0.$，这是一个链映射。然而，除非上同调向量场 D 仅依赖于纤维坐标，即沿纤维为常量，否则此映射不是纤维丛。

2.3. **作为等变超流形的微分分次流形**。

2.3.1. 作为超流形的分次流形。

定义 2.34. 设 S 是一个配备了映射空间 $\omega:S\to\mathbb{N}$ 的有限集，称为其权函数。令 S_0 和 S_1 分别为复合映射中 0 和 1 的原像

$$S\xrightarrow{\omega}\mathbb{N}\xrightarrow{\text{mod }2}\mathbb{Z}_2.$$

标准 $\mathbb{N}$权为 ω 的分次超域是超流形 $\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1},E_\omega\right)$，其中 $\mathbb{R}^{S_0|S_1}$ 是 $\mathbb{R}^{n|m}$，具有 $n=|S_0|$和 $m=|S_1|$，并配备局部坐标 $(x_i;\ \eta_j)_{i\in S_0,\ j\in S_1}$，而 E 是偶向量场

$$\omega(i)\,x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\omega(j)\,\eta_j\frac{\partial}{\partial\eta^j},$$

称为**欧拉向量场**。

如果一个标准分次超区域的权函数恒为 0，我们就称它为**平凡的**。

一个 $\mathbb{N}$**分次超域**是一个序对（$\mathfrak{M}$， E），由超流形 $\mathfrak{M}$ 及其上的一个偶向量场 E组成，并且存在一个微分同胚 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{p|q}$，使得对于某个 $\mathbb{N}$-权 $\omega.$，有 $\varphi_* E = E_\omega$。一方面，如果 $E = 0$，则称（$\mathcal{M}$， E）是**可平凡化的**；另一方面，如果 $\ker(E) = 0.$，则称其为**非退化的**。

分次超流形之间的一个态射 $f\colon (\mathfrak{M},\ E) \to (\mathfrak{M}',\ E')$ 是一个光滑映射 $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$，满足 E' 与 $E.$ 相关。

设 f 是分次超域（$\mathfrak{M}$， E）上的一个函数，并设 $n \in \mathbb{N}.$。如果 $E(f) = nf.$，我们称 f 是**次数为** n 的齐次函数。

注意，任意平凡分次超域都微分同胚于 $\mathbb{R}^n$，其中 n，因为奇元素不能具有权 0。[3] 此外，每个分次超域都同构于一个可平凡化分次超域与一个非退化超域的积：

$$\mathfrak{M} \cong M_0 \times \mathfrak{M}' \tag{3}$$

此外，欧拉场是相对于投影的垂直向量场

$$\pi : \mathfrak{M} \to M_0.$$

注 2.35. M_0 通常不是 $\mathfrak{M}$.的核心。当且仅当不存在正偶权坐标时，情况才是如此。

分解 (3) 应视为将 $\mathfrak{M}$ 呈现为一个以普通流形域 M_0.为底空间的非退化分次超域的（平凡）丛

此外，

$$\pi^* : \mathbf{C}^\infty(M_0) \to \mathbf{C}^\infty(\mathfrak{M})$$

是一个单态射，它将 $\mathbf{C}^\infty(M_0)$ 与满足 $f\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ 且 $E(f) = 0$ 的那些函数对应起来。因此，给定任意映射空间

$$\varphi : (\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}) \to (\mathfrak{N}, E_{\mathfrak{N}})$$

必须限制为普通流形之间的光滑映射 $M_0 \to N_0$。

例如，若 $(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_k;\ \eta_1, \eta_2, \dots \eta_l)$ 是 $\mathbb{R}^{n+k|l}$ 上的坐标，其中x_i 的权为 0，其余坐标的权为正。这等同于 $\mathbb{R}^n$ （带有其平凡的欧拉场）与带有 $pr_* E$ 的 $\mathbb{R}^{k|l}$ 的积。坐标 $(y_1, y_2, \dots y_k;\ \eta_1, \eta_2, \dots \eta_l)$ 称为**纤维坐标**。

引理 2.36。[24, 引理 5。6] 函数 f 在标准分次超区域 $\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1},\ E_\omega\right)$是 n-齐次的，当且仅当它是一个关于纤维坐标的齐次多项式，其系数取自基坐标，且该多项式的总权为 n。

[3]这可以放宽，这样便能建立 $\mathbb{N}$ 分次超流形的理论。

由此可知，任意态射 $f:(\mathfrak{M},E_{\mathfrak{M}})\to(\mathfrak{N},E_{\mathfrak{N}})$ 都是分次超域之间的态射，也是定义在映射空间 $f_0=f|_{M_0}$ 上的非退化分次超域丛的丛态射。

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{M} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{N}\\ {\scriptstyle\pi_{\mathfrak{M}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{\mathfrak{N}}}\\ M_0 & \xrightarrow[f_0]{} & N_0.\end{array}$$

这等价于一个丛态射 $\varphi\colon \mathfrak{M}\to f_0^*\mathfrak{N}$，其定义在 $M_0.$ 上的非退化分次超域之间。分别为 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 选取纤维坐标 $(x_1,\dots,x_n;\ \eta_1,\dots,\eta_m)$ 和 $(y_1,\dots,y_k;\ \xi_1,\dots,$。那么，$\varphi$ 在局部 $\xi_k)$ 坐标下唯一确定，并且每个坐标 y_i 都必须是 $\mathfrak{M}$ 上的函数，满足 $E_{\mathfrak{M}}(y_i)=\omega(i)\,y_i$；对每个 $\xi_j.$ 也类似。由引理 2.36 可知，当且仅当每个 y_i 都是纤维坐标 $(x_1,\dots,x_n;\ \eta_1,\dots,\eta_m)$ 中次数为 $\omega(i)$ 的齐次多项式，且其系数属于 $\mathsf{C}^\infty(M_0)$ 时，上述条件成立。这与 $\mathbb{Z}$-分次向量空间之间的分次流形映射具有相同的描述。也就是说，存在一个典范的全忠实函子

$$F:\mathsf{SDom}_{\mathbb{N}}\to\mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}}$$

来自标准分次超域范畴，其本质像是由 $\mathbb{N}$-分次向量空间张成的分次流形子范畴 $\mathsf{CartMfd}_{\mathbb{N}}$。函子 F 在对象上的定义为

$$F\left(\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1},E_\omega\right)\right)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\left[\left(\mathbb{R}\left[-2n\right]\right)^{\omega^{-1}(2n)}\oplus\left(\mathbb{R}^{0|1}\left[-2n-1\right]\right)^{\omega^{-1}(2n+1)}\right].$$

注 2.37. 这里需要对符号作一些调整，以便得到坐标次数为非正而非非负的分次流形。这是因为我们不愿采用同调分次约定。

定义 2.38. 设 M 为一个普通流形。以 M 为底空间、纤维为 $\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1},E_\omega\right)$ 的**分次超域丛**，是指一个纤维为 $\mathbb{R}^{S_0|S_1}$ 的纤维丛，其转移函数为分次超域之间的映射。如果其典型纤维是非退化的，则称其为非退化分次超域丛。

注 2.39. 注意，这样的非退化分次超域丛 $\mathfrak{M}\to M$ 带有一个典范向量场 E，它沿纤维粘合在一起，称为其**欧拉向量场**。如果该丛是非退化的，则 M 可识别为 $E.$ 的零点集

下面的定理虽是众所周知的结果，但为方便起见，我们仍给出证明：

定理 2.40。存在范畴等价

$$\mathsf{GrSMfdBun}_0\xrightarrow{\sim}\mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}}$$

介于光滑流形上的非退化分次超域丛范畴与分次流形范畴之间。

证明。这形式上源于分次超域——等价地，底空间为 $\mathbb{R}^n$、属于某个 n 的非退化分次超域丛——与 $\mathbb{N}$-分次向量空间上的分次流形范畴的子范畴之间的等价。将这两个等价范畴

都视为格罗滕迪克位点，其中分次流形情形下的开覆盖由其核心的开覆盖诱导。于是，它们的群胚层的 2-范畴之间存在等价

$$F^* : \mathrm{St}\left(\mathsf{CartMfd}_{\mathbb{N}}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{St}\left(\mathsf{SDom}_{\mathbb{N}}\right).$$

由于每个分次流形都有一个由 $\mathbb{N}$-分次向量空间组成的开覆盖，因此典范函子

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}} & \to & \mathbf{Sh}\left(\mathsf{CartMfd}_{\mathbb{N}}\right) \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}}}\left(\cdot, \mathcal{M}\right) \end{array}$$

是全忠实的。为方便起见，我们仍将 $\mathcal{M}$ 的点函子记为 $\mathcal{M}.$。类似地，给定流形 M 上的一个非退化分次超域丛 $\mathfrak{M} \to M$，存在一个覆盖 M 的开子流形，使其与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚，并且该丛在这些开子流形上平凡化；对于此覆盖中的一个开子流形 U，$\mathfrak{M}_U \to U$ 是一个分次超域。因此，通过点函子构造，非退化超域丛范畴全忠实地嵌入 $\mathbf{Sh}\left(\mathsf{SDom}_{\mathbb{N}}\right)$ 中。

设 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ 是形如 $M \times \mathbb{V}$ 的分次流形，其中某个分次向量空间仅集中在严格正次数上。注意，$\mathcal{M}$ 的任意自同构 φ 都在核心 $|\mathcal{M}| = M$ 上方交换，也就是说，它是一个纤维丛自同构。用更范畴论的语言来说，这意味着 $\varphi \in \mathbf{Aut}_M(M \times \mathbb{V}, M \times \mathbb{V})$。设 $\mathfrak{N}$ 是一个非退化分次超域，满足 $F(\mathfrak{N}) = \mathbb{V}.$。由此可得

$$F^* \underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathbb{V}\right) \simeq \underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathfrak{N}\right),$$

其中 $\underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathbb{V}\right)$ 是（与 $\mathbb{V}$ 相关联的可表层的）自同构层 .

现在设 $\mathcal{M}$ 是任意的分次流形。由于 $\mathcal{M} \to |\mathcal{M}|$ 是一个纤维丛，其纤维为上述相同的纯正纤维 $\mathbb{V}$，它由一个 $\mathbf{Aut}\left(\mathbb{V}\right)$-主丛通过伴随丛构造得到，且该构造发生在拓扑斯 $\mathbf{Sh}\left(\mathsf{CartMfd}_{\mathbb{N}}\right)$ 中。设 $p : |\mathcal{M}| \to \mathsf{BAut}(\mathbb{V})$ 是在 $\mathrm{St}\left(\mathsf{CartMfd}_{\mathbb{N}}\right)$ 中对该主丛进行分类的映射。那么存在一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & [\mathbb{V}/\underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathbb{V}\right)] \\ {\scriptstyle \pi_{\mathcal{M}}}\downarrow & & \downarrow \\ |\mathcal{M}| & \xrightarrow[p]{} & \mathsf{B}\underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathbb{V}\right). \end{array}$$

等价 F^* 的右伴随 F_* 给出一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} F_*\left(\mathcal{M}\right) & \longrightarrow & [\mathfrak{N}/\underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathfrak{N}\right)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\mathcal{M}| & \xrightarrow[F_*p]{} & \mathsf{B}\underline{\mathbf{Aut}}\left(\mathfrak{N}\right), \end{array}$$

从而表明 $F_*(\mathcal{M})$ 是 $|\mathcal{M}|.$ 的非退化分次超域丛的点函子。反过来，给定一个非退化超域丛 $\mathfrak{M} \to M$，同样的论证表明 $F^*\mathfrak{M}$ 是一个分次流形的点函子。结论由此得证。□

设 $\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1},E_\omega\right)$ 是一个权为 ω 的标准分次超区域，其坐标为 $(x_i;\ \eta_j)_{i\in S_0,\ j\in S_1}$ · 通过如下定义，给出乘法幺半群 $(\mathbb{R},\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^{S_0|S_1}$ 上的作用 ρ

$$t\star(x_i;\eta_j)=\left(t^{\omega(i)}x_i;t^{\omega(j)}\eta_j\right),$$

其中对于 $\omega(i)=0$, $t^{\omega(i)}=1$ (对于任意 t)。注意， -1 通过奇偶反转作用。指数映射

$$\exp:(\mathbb{R},+)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$$

给出了李群的一个同构，将 $\rho|_{\mathbb{R}_{>0}}$ 与一个微分同胚单参数子群相对应。相应的向量场为

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|_{s=0} &= e^s\star(x_i;\eta_j)\\ \frac{d}{ds}|_{s=0} &= \left(e^{\omega(i)\cdot s}x_i;e^{\omega(j)\cdot s}\eta_j\right)\\ &= (\omega(i)x_i;\omega(j)\eta_j)\\ &= E_\omega.\end{aligned}$$

由此可知，对于任意其他分次超域 $\left(\mathbb{R}^{T_0|T_1},E_\lambda\right)$，超流形之间的光滑映射 f : $\mathfrak{M}=\mathbb{R}^{S_0|S_1}\to\mathbb{R}^{T_0|T_1}=\mathfrak{N}$ 关于典范的 $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$-作用等变，当且仅当它是分次超域的映射。此外，显然，关于 $(\mathbb{R},\cdot)$-的等变性蕴含欧拉向量场的保持，因为它们是无穷小生成元。反过来， $\rho(0,\cdot)$ 可与到 M_0 的典范投影相对应，从而使 $\mathfrak{M}$ 成为一个纤维丛；而分次超域的所有态射都是这种纤维丛的态射，因此 $f(0\star(\cdot))=0\star f(\cdot)$。最后， [19, 注 4.1] 蕴含 f 对整个幺半群作用等变。

根据上述论证，对于任意由非退化超域构成的丛 $\mathfrak{M}\to M$ ，其转移函数必定是（$\mathbb{R}$, $\cdot$）-等变的，因此存在一个在 $\mathfrak{M}.$ 上全局定义的纤维逐点（$\mathbb{R}$, $\cdot$）-作用

定义2.41。 超流形 $\mathfrak{M}$ 上的（$\mathbb{R}$, $\cdot$）作用 ρ 称为**偶**作用，若 -1 通过奇偶反转作用。也就是说，对所有 $f\in\mathsf{C}^\infty(\mathfrak{M})$,

$$f\circ\rho(-1,\cdot)=(-1)^{|f|}\cdot f.$$

Let

$$\rho:\mathbb{R}\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M},$$

设其为任意光滑幺半群作用，并设 ρ_0 是 $\mathcal{M}.$ 的光滑自同态 $\rho(0,\cdot)$。注意， ρ_0 是幂等元，因为 $0\cdot x$ 是一个不动点。由超流形的常秩定理可知， ρ_0 的像是一个子超流形，并且 ρ_0 可分解为

$$\mathfrak{M}\xrightarrow{p_0}\rho_0(\mathfrak{M}):=M_0\xhookrightarrow{i_0}\mathfrak{M},$$

其中 p_0 是次浸没， i_0 是嵌入，且 $r_0\circ i_0=id.$。特别地， p_0 是（$\mathbb{R}$, $\cdot$）-不变的。假设该作用是偶的。那么 M_0 是纯偶的。为此，注意到 M_0 上的所有坐标函数都必须保持不变。

事实证明，总能在 $\mathfrak{M}$ 上找到坐标，使其具有分次超域的局部形式:

定理 2.42。 [24, 定理 5。8] 设 ρ 是 $(\mathbb{R},\cdot)$ 在超流形 $\mathfrak{M}$上的偶光滑作用，且 E是其无穷小生成元 $\rho_*\left(\frac{d}{dt}\right)$. 那么

$$p_0 : \mathfrak{M} \to M_0$$

将 $\mathfrak{M}$ 表示为一个非退化分次超域丛，带有欧拉场 E.

推论 2.43。 存在范畴的典范等价

$$\mathsf{GrSMfdBun}_0 \simeq \mathsf{SMfd}_0^{(\mathbb{R},\cdot)}$$

介于以纯偶底空间为底的非退化分次超域丛范畴，与配备了 $(\mathbb{R},\ \cdot)$ 的偶作用的超流形范畴及其等变映射之间。

总之，我们有

$$\mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}} \simeq \mathsf{GrSMfdBun}_0 \simeq \mathsf{SMfd}_0^{(\mathbb{R},\cdot)}.$$

值得将这个等价关系展开说明

$$\mathsf{SMfd}_0^{(\mathbb{R},\cdot)} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mfd}_{\mathbb{N}}.$$

给定超流形 $\mathfrak{M}$ 上的 $(\mathbb{R},\cdot)$ 偶作用，存在一个次浸没 $p:\ \mathfrak{M} \to M$ onto 不动点轨迹；该轨迹是一个纯偶流形。此外， $\mathfrak{M}$admits 齐次坐标，即 $E(x_i) = n_i \cdot x_i$，其中 $n \in \mathbb{N}$；特别地，它是一个非退化分次超域丛。令 $U \subseteq M$ be 一个开子集。令 n be 一个非负整数。将 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}(U)_{-n}$ 记为 $\mathfrak{M}_U$ 上次数为 n的齐次函数所组成的子集，并记

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}(U) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}(U)_{-n}.$$

$\mathbf{C}^\infty(\mathfrak{M}_U)$ 上的超交换 $\mathbb{R}$-代数结构下降为 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}(U)$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次交换$\mathbb{R}$-代数结构，其集中于非正次数。这定义了 M 上一个由 $\mathbb{Z}$-分次交换代数组成的层 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$ 。由于在任意平凡化上，齐次函数都是关于纤维坐标的齐次多项式，因此，如果 $\mathfrak{M} \to M$ trivializes over U，且其典型纤维为非退化分次超域$\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1}, E_\omega\right)$，那么存在一个典范同构

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}(U) \cong \mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathsf{Sym}\left(F\left(\left(\mathbb{R}^{S_0|S_1}, E_\omega\right)\right)^*\right).$$

现在我们转向非零微分的情形。

2.3.2. 微分分次流形作为超流形。 内部指数对象 $\mathsf{End}\left(\mathbb{R}^{1|1}\right) = \mathbb{R}^{0|1^{\mathbb{R}^{0|1}}}$ 存在于 SMfd 中，其底层超流形为 $\mathbb{R}^{1|1}$. 。也就是说，对于任意超流形 $\mathfrak{M}$，存在一个典范双射

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{SMfd}}\left(\mathfrak{M}, \mathbb{R}^{1|1}\right) \cong \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{SMfd}}\left(\mathfrak{M} \times \mathbb{R}^{0|1}, \mathbb{R}^{0|1}\right).$$

此外，它还可以表示为以下一系列自然同一 s

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{SMfd}}\left(\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^{0|1},\mathbb{R}^{0|1}\right) &\cong \mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^{0|1}\right)_1\\ &\cong \left(\mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\Lambda\left(\mathbb{R}\right)\right)_1\\ &\cong \left(\mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{R}^{1|1}\right)_1\\ &\cong \left(\mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)_0\otimes\mathbb{R}\right)\oplus\left(\mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)_1\otimes\mathbb{R}\right)\\ &\cong \mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)_0\times\mathbf{C}^{\infty}\left(\mathfrak{M}\right)_1\\ &\cong \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{SMfd}}\left(\mathfrak{M},\mathbb{R}^{1|1}\right).\end{aligned}$$

$\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)=\mathbb{R}^{1|1}$ 因此继承了 SMfd 中幺半群对象的结构。为了具体了解其运作方式，考察求值映射会很有帮助

$$ev:\mathbb{R}^{1|1}\times\mathbb{R}^{0|1}\to\mathbb{R}^{0|1}.$$

这是 $\mathbb{R}^{1|1}$ 对 $\mathbb{R}^{0|1}$. 的忠实作用。如果 (x,α) 是 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的坐标，而 ξ 是 $\mathbb{R}^{0|1}$ 的唯一奇坐标，那么上述映射为

$$(t,\alpha)\cdot\xi=\xi\mapsto t\xi+\alpha.$$

由此可得

$$(t,\alpha)\circ(y,\beta)=(ty,\alpha+x\beta),$$

并且因此我们有

$$\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)\cong(\mathbb{R},\cdot)\ltimes\left(\mathbb{R}^{0|1},+\right).$$

我们还有相应的李超群

$$\mathbf{Aut}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)\cong\mathbb{R}^{*}\ltimes\mathbb{R}^{0|1}.$$

因此，其李超代数等价于 $\mathbb{R}^{0|1}$ 上的向量场李代数；作为 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间，它与 $\mathbb{R}^{1|1}$ 同构。它由偶向量场张成

$$\varepsilon:=-\xi\frac{\partial}{\partial\xi},$$

以及奇向量场

$$\delta:=\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

或者，也可以直接计算为

$$-\varepsilon=ev_{*}\frac{\partial}{\partial t},$$

and

$$\delta=ev_{*}\frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

负号只是约定问题；它会诱导出一个分次，而我们希望它集中在非正次数，而非非负次数上，这样就可以采用上同调分次约定。

它们满足对易关系

$$[\varepsilon, \delta] = \delta \tag{4}$$

and

$$[\delta, \delta] = 0. \tag{5}$$

当然，$[\varepsilon, \varepsilon] = 0$，不过这是自动成立的，因为它是偶向量场。

因此，超流形 $\mathfrak{M}$ 上的光滑作用 ρ of Aut $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$，会导出一个偶向量场 $E = \rho_*\varepsilon$ 和一个奇向量场 $D = \rho_*\delta$，使得 $[E, D] = D$ and $[D, D] = 2D^2 = 0.$。追溯定义可知，$-E$ 可以认作由 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ 诱导的作用的欧拉场，而 D 则是奇加法群 $\left(\mathbb{R}^{0|1}, +\right)$. 的作用的无穷小生成元。尽管如此，我们仍会不严格地将 E 称为欧拉场。

定义 2.44. 超流形 $\mathfrak{M}$ 上的 Aut $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$-作用称为**偶**，如果 -1在 $\mathfrak{M}$ 上以奇偶反转的方式作用，即 $(\mathbb{R}, \cdot)$ 所诱导的作用是偶的。

一般而言，光滑的自同构群 $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$作用可能十分复杂；然而，能够延拓为 End $\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)$作用的那些表现则好得多。若 ρ 是 End $\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)$ 在 $\mathfrak{M}$上的偶作用，则 $(\mathbb{R}, \cdot)$ 的诱导作用也是偶的，并且我们得到一个次浸没 $p\colon \mathfrak{M} \to M$ 到不动点轨迹上的映射；该不动点轨迹是一个纯偶流形。由齐次元素张成的 $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}|_M$ 的子层 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$，进而使 $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr})$ 成为一个 $-\mathbb{N}$-分次流形。这里出现负号，是因为我们取了欧拉场的相反数。

设 f 是 $\mathfrak{M}_U$ 上的一个次数为 n 的齐次函数，其中 $\mathfrak{M}_U$ 是 M的某个开子集；这里的次数是相对于 $(\mathbb{R}, \cdot)$-作用而言的。这意味着 $E(f) = -n$，因为我们令 E为无穷小生成元的相反数。我们可以将 f 与分次流形 $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}|_U)$ 上的一个次数为 $-n$的函数对应起来，反之亦然。因此我们有

$$E(f) = |f| \cdot f,$$

其中，$|f|$是 f作为（$U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}|_U$）上的函数的次数。自同构群 $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$ 的李代数的对易关系意味着，对于任意这样的 f，ED（f）$=$（$n+1$）D（f）。因此，D限制为 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$ 上的一个次数为 $+1.$ 的导子。此外，由于 $[D, D] = 0$ 在 $\mathfrak{M}$上成立，其限制也满足这一性质，因此它在（M, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$）上诱导出一个上同调向量场（我们姑且也称之为 D），使得（$M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}, D$）成为一个微分分次流形。由于 $\mathfrak{M}$ 上的向量场D 由其在局部坐标函数上的作用决定，而这些函数可以选为齐次的，因此 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$ 的元素 D 可由其在（$M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}$）上的限制恢复。反过来，给定一个微分分次流形（$\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, Q$），我们知道可以为 $\mathcal{M}$ 关联一个超流形 $\mathfrak{M}$，其带有（$\mathbb{R}, \cdot$）的偶作用，且不动点轨迹为 M；相对于这一作用，$\mathcal{M}$ 上的局部坐标成为 $\mathfrak{M}$ 上的齐次坐标系。随后，我们可以将 Q 扩展为$\mathbf{C}^\infty$（$\mathfrak{M}$）上的导子，因为我们知道它在局部坐标上的作用。

下面的定理也是众所周知的：

定理 2.45。存在一个范畴的典范等价

$$\mathsf{SMfd}_0^{\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)} \simeq \mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0},$$

将带有偶 $\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)$-作用及等变映射的超流形范畴，与非正分次微分分次流形范畴联系起来。

证明。我们已经知道对象上的函子：具体而言，若 $\mathfrak{M}$ 是带有偶 End $\left(\mathbb{R}^{1|1}\right)$ 作用的超流形，其诱导的偶向量场和奇向量场分别为上述的 E 和 D，那么 $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr}, D)$ 就是相应的微分分次流形，其中 M 是不动点轨迹。由于 D 由其在 $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{gr})$ 上的限制唯一确定，并且我们已经在带有偶 $(\mathbb{R}, \cdot)$ 作用的超流形与分次流形之间建立了范畴等价，因此只需证明：两个带有 $\left(\mathbb{R}^{0|1}, +\right)$ 作用的超流形之间的态射是等变的，当且仅当它与无穷小生成元相互交织。但 $\left(\mathbb{R}^{0|1}, +\right)$ 作用是一个奇单参数子群，它自动完备，因此完全由其对应的奇向量场确定。□

2.4. **微分分次流形作为弯曲 $L_\infty[1]$-代数丛**。 最后，我们将介绍另一种与微分分次流形等价的观点。我们不会花太多时间解释它，因为本文中不会用到它。不过，我们将依赖 [4] 的结果，而这些结果是用这种语言表述的，因此我们会简要回顾这一观点，以便能够轻松地转换表述。

定义 2.46。 光滑流形 M 上的**弯曲 $L_\infty[1]$-代数丛** 是一个三元组$_n(M, L, \lambda)$，其中有限维分次向量丛 $L = \bigoplus L_i$配备了光滑的$_{i=1}$多重线性映射

$$\lambda^k : L \times_M^k L = L \times_M L \times_M \ldots \times_M L \to L$$

次数为 $+1$，对每个 $k = 0, \ldots n$ 都成立；这些映射使 L 的每个纤维成为一个弯曲的 $L_\infty[1]$-代数。该范畴中的**态射**

$$(M, L, \lambda) \to (N, E, \mu)$$

是一个有序对 (f, ϕ)，其中 $f\colon M \to N$ 是一个光滑映射，而 ϕ 是一组映射

$$\phi^k : L \times_M^k L = L \times_M L \times_M \ldots \times_M L \to E$$

开覆盖 f，它们在每个纤维上诱导弯曲 $L_\infty[1]$-代数的态射。

注 2.47. 这个定义的记号中隐含着， λ_0 只是 L_1.的一个截面

给定这样的一个 L，我们可以自然地关联得到分次流形中的向量丛

$$\mathbb{L} := \bigoplus_{i=1}^{n} L_i[-i] \to M,$$

它将每个 L_i 置于次数 i. 。这个丛的全空间充当相应微分分次流形的底层分次流形。 λ 的定义中隐含着，每个λ^k 都必须是分次对称的，因此我们得到一个分次向量丛态射

$$\lambda : \bigoplus_k \mathsf{Sym}^k(\mathbb{L}) \to \mathbb{L}[1]$$

其对偶化为一个映射空间

$$\mathbb{L}^*[-1] \to \mathsf{Sym}(\mathbb{L}^*).$$

如果每个 L_i 都具有典型纤维 V_i，且 $\mathbb{V}$ 是与之关联的 $\mathbb{N}$-分次向量空间，那么在它可被平凡化的开集上局部地有一个分次 $\mathbf{C}^\infty(U)$-模的映射

$$\mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{V}^*[-1] \to \mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathsf{Sym}(\mathbb{V}^*) = \mathbf{C}^\infty(\mathbb{L}|_U).$$

这个映射唯一地延拓为一个次数为 $+1$ 的导子 D_λ，而 L_∞-代数条件等价于 $D_\lambda^2 = 0$.

注 2.48. 同样，对情形 $k = 0$. 需要谨慎处理。此时 $\mathsf{Sym}^0(\mathbb{L}) = \underline{\mathbb{R}}$，即 M 上的平凡线丛，而映射

$$\underline{\mathbb{R}} \to \mathbb{L}[1]$$

与一个（次数为 0 的）整体截面相同，也就是说，是 $\mathbb{L}[1]_0 = L_1$ 的一个截面，并且可以识别为 λ_0。展开定义可知，来自 λ_0 的微分 D_λ 的部分是插入算子 ι_{λ_0}；它通过配对作用于 L_1^* 的截面，然后作为导子延拓。

反过来，给定一个微分分次流形 $(M, \mathcal{O}_\mathcal{M}, D)$，利用分次 Batchelor 定理 2.25，我们可以约化纤维丛 $\mathcal{M} \to M$ 的结构群，从而构造出一个相关的分次流形中的向量丛 $\mathbb{L} \to M$，其典型纤维为 $\mathbb{V}$，作为分次流形与 $\mathcal{M}$（非典范地）同构。上同调向量场 D 由其在局部坐标中的作用决定，因此局部确定了模之间的映射

$$\mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{V}^*[-1] \to \mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathsf{Sym}(\mathbb{V}^*),$$

诱导一个向量丛映射

$$\mathbb{L}^*[-1] \to \mathsf{Sym}(\mathbb{L}^*),$$

它对偶化后会定义一个曲弯的 L_∞-代数丛。

这在[4,命题 118]中提升为范畴等价。

3. $\mathbf{C}^\infty$-ALGEBRAS

$\mathbf{C}^\infty$-代数（又称 $\mathbf{C}^\infty$-环）的典型例子是光滑流形 M. 上的光滑函数环 $\mathbf{C}^\infty(M)$。该环对每个光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都有一个 n-元运算：

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}^\infty(M)^n \cong \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{Mfd}}(M, \mathbb{R}^n) & \to & \mathbf{C}^\infty(M) \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi : M \to \mathbb{R}^n & \mapsto & f \circ \varphi. \end{array}$$

精确定义如下：

令 $\mathbf{C}^\infty$ 表示 Mfd 的全子范畴，其对象由欧几里得流形 $\mathbb{R}^n$ 张成，其中$n \geq 0$. 。每个对象都是 $\mathbb{R}$. 的有限积。这使得 $\mathbf{C}^\infty$ 成为一个单一代数理论，其仅有一个类型，即 $\mathbb{R}$ 是它的单生成元。

定义 3.1. 代数理论是一个具有有限积的范畴 $\mathbf{T}$（或更一般地，一个 ∞-范畴）。代数理论的一个态射

$$\mathbf{T} \to \mathbf{T}'$$

是一个保有限积函子。

例 3.2. 令 $\mathbb{S}$ 为一个集合。将该集合视为一个离散范畴，令 $\mathbf{T}_{\mathbb{S}}$. 为关于有限积的 $\mathbb{S}$ 自由完备化。具体而言，其对象是有限族

$$(s_i \in \mathbb{S})_{i\in I}$$

以及态射

$$(s_i \in \mathbb{S})_{i\in I} \to (t_j \in \mathbb{S})_{j\in J}$$

是有限集 $f\colon J \to I$ 的函数，使得

$$s_{f(j)} = t_j$$

对所有 $j \in J$。于是 $\mathbf{T}_{\mathbb{S}}$ 是 $\mathbb{S}$-**种类的代数理论**。

若 $\mathbb{S}$ 是一个单元素集合，则 $\mathbf{T}_{\mathbb{S}} \cong \mathrm{FinSet}^{op}$ 为有限集的对偶范畴。我们将这个代数理论记作 $\mathbf{T}_{obj\cdot}$

定义 3.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴。**T-代数在** $\mathcal{C}$ 中的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$，是 $\mathrm{Fun}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ 的全子范畴，其对象为保持有限积的函子。

特别重要的情形是 $\mathcal{C} = \mathrm{Set}$（集合范畴），以及 $\mathcal{C} = \mathcal{S}\mathrm{pc}$（空间的 ∞-范畴，也称 ∞-群胚）。我们将 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{T}}(\mathrm{Set})$ 的对象称为 T-代数，将 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{T}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的对象称为同伦 T-代数。

例 3.4. 对于任意具有有限积的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，存在一个典范等价 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{T}_{obj\cdot}}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$，由在 $*$ 处求值给出。更一般地，对于任意集合 $\mathbb{S}$，存在一个典范等价 $\mathrm{Alg}_{T_{\mathbb{S}}}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}^{\mathbb{S}}$. 例如，若 $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$，则 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbf{T}_{\mathbb{S}}$-代数与选择 n 个 $\mathcal{C}$ 中的对象所需的数据相同。

定义 3.5. 给定一个代数理论 $\mathbf{T}$，若对象 $r \in \mathbf{T}_0$, 是一个**生成元**，则 $\mathbf{T}$ 中的每个对象都等价于 r^n，其中 $n \geq 0.$。更一般地，若子集 $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{T}_0$ 满足 $\mathbf{T}$ 中的每个对象都等价于 $\mathbb{S}$.中对象的有限积，则称它为 $\mathbf{T}$ 的生成元集。

大多数类型的代数对象都有相应的代数理论。例如：

例 3.6. 设 k 是一个交换环，并令 Com_k 为有限生成自由 k-代数的对偶范畴。将其骨架化后，可将其表示为形如 $\mathbb{A}_k^n$的仿射 k-概形范畴，其中 $n \geq 0.$。于是，Com_k 是一个以 $\mathbb{A}_k^1$ 为生成元的单排序 Lawvere 理论。

集合中的 Com_k-代数是通常的交换 k-代数。更准确地说，给定一个 Com_k-代数

$$\mathcal{A} : \mathbf{Com}_k \to \mathrm{Set},$$

集合 $\mathcal{A}(\mathbb{A}_k^1)$ 具有自然诱导的交换 k-代数结构。这是因为 $\mathbb{A}_k^1$ 是概形中的交换 k-代数对象（因而也是 Com_k 中的交换代数对象），而任何保有限积函子都会保交换 k-代数对象。例如，这些映射

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^2 &\to \mathbb{A}_k^1 \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

and

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k & \to & \mathbb{A}^1_k \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

为环对象 $\mathbb{A}^1_k$. 定义加法和乘法。反过来，给定一个交换k-代数 B，函子

$$\mathbb{H}\mathrm{om}\left(\cdot, B\right) = \mathbb{H}\mathrm{om}\left(\mathbf{Spec}\ (B), \cdot\right)$$

保持有限积，因此是集合中的 Com_k-代数。这些构造在范畴意义下互为逆。

定义 3.7。 令 C^∞ 表示光滑流形范畴 Mfd 的全子范畴，其对象为形如 $\mathbb{R}^n$ 的流形，其中 $n \geq 0$ 。那么 C^∞ 是一个代数理论， $\mathbb{R}$ 是其生成元。集合中的 C^∞-代数也称为 C^∞-环。

注 3.8。 若 $k = \mathbb{R}$，$\mathsf{Com}_\mathbb{R}$ 也可视为由形如 $\mathbb{R}^n$的流形构成的范畴，其态射由多项式给出。因此，显然存在一个函子 $\tau \colon \mathsf{Com}_\mathbb{R} \to \mathsf{C}^\infty$ ， 它是单排序 Lawvere 理论的一个态射。

$$\tau : \mathbf{SCom}_\mathbb{R} \to \mathbf{SC}^\infty.$$

C^∞-代数是带有额外结构的交换 $\mathbb{R}$-代数。事实上，若 $\mathcal{A} \colon \mathsf{C}^\infty \to \mathsf{Set}$ 是一个 C^∞-代数，那么

$$i \circ \mathcal{A} : \mathbf{Com}_\mathbb{R} \to \mathrm{Set}$$

是一个 $\mathsf{Com}_\mathbb{R}$-代数。正如例 3.6 所示，这定义了一个底集合为 $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ 的交换 $\mathbb{R}$-代数。对于 M光滑流形，作为代数理论 C^∞ 的一个代数，$\mathbf{C}^\infty(M)$ 是函子

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{Mfd}}\left(M, \cdot\right) : \mathbf{C}^\infty \to \mathrm{Set}.$$

对于任意代数理论 $\mathcal{T}$ 和生成元 r， $j(r^n) = \mathbb{H}\mathbf{om}_\mathcal{T}(r, \cdot)$ 是由 n 个生成元（类型为 r）生成的自由 $\mathcal{T}$-代数（在集合范畴中）。也就是说，根据 Yoneda 引理（因为 $\mathbf{Alg}_\mathcal{T}(\mathbf{Set})$ 是 $\mathbf{Psh}(\mathcal{T}^{op})$ 的全子范畴），对于任意 $\mathcal{T}$-代数 $\mathcal{A} : \mathcal{T} \to \mathbf{Set}$，都存在一个典范双射

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Alg}_\mathcal{T}(\mathrm{Set})}\left(j\left(r^n\right), \mathcal{A}\right) \cong \mathcal{A}\left(r\right)^n.$$

定义 3.9. 该由 n 个生成元生成的自由 $\mathbf{C}^\infty$-代数是 $j(r^n) = \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{Mfd}}(\mathbb{R}^n, \cdot)$，即

$$\mathbf{C}^\infty\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cong \mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

C^∞-代数之所以值得研究，一个主要原因是以下定理:

定理 3.10。 [30, 命题 1。2], [9, 推论 2。116] 设 I 是底层$\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{A}_\sharp$ 的一个理想，而 $\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$. 则 I 是一个 $\mathbf{C}^\infty$-同余，并且 $\mathcal{A}_\sharp/I$ 具有典范的 $\mathbf{C}^\infty$-代数结构，使得 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_\sharp/I =: \mathcal{A}/I$ 是一个 $\mathbf{C}^\infty$-同态。

$\mathbf{C}^\infty$-代数范畴是可表的，因此尤其具有余积。交换 k-代数范畴中的余积由张量积给出：若 $\mathcal{A}$ 和 B 是交换环，则它们的余积为 $\mathcal{A}\otimes$B——即 k-模的张量积$_k$，并赋予由此诱导的 k-代数结构。对于（经典）$\mathbf{C}^\infty$-代数，情况不再如此；这是件好事，因为对于 n、$m>0$,

$$\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)\subsetneq\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n+m}\right).$$

但是，$\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ 和 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ 分别是以 n 个和 m 个生成元为自由生成元的 $\mathbf{C}^\infty$-代数，因此它们的余积必定是以 $(n+m)$ 个生成元为自由生成元的 $\mathbf{C}^\infty$-代数，即 $\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$。我们将经典 $\mathbf{C}^\infty$-环范畴中的余积记作 $\underset{\cdot}{\otimes}$，于是有

$$\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\underset{\cdot}{\otimes}\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)\cong\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n+m}\right).$$

类似地，我们将推出记作

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{B}\underset{\mathcal{A}}{\otimes}\mathcal{C}.\end{array}$$

张量积 $\underset{\cdot}{\otimes}$ 的性质非常好。

命题 3.11。 [30, 第 1 章，定理 2。8] 若 $f:\ M\to N$ 和 $g:\ L\to N$ 是光滑流形之间的横截映射，则

$$\mathbf{C}^\infty\left(M\times_N L\right)\cong\mathbf{C}^\infty\left(M\right)\underset{\mathbf{C}^\infty(N)}{\otimes}\mathbf{C}^\infty\left(L\right).$$

以下事实至关重要：

命题 3.12。 典范函子

$$\mathbf{C}^\infty\left(\,\cdot\,\right):\mathsf{Mfd}\to\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathrm{Set}\right)$$

是全忠实的。

3.1. **同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数**。 根据定义，同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数是一个保持有限积的函子

$$\mathcal{A}:\mathbf{C}^\infty\to\mathcal{S}\mathrm{pc}\,.$$

特别地，它有一个底层空间 $\mathcal{A}(\mathbb{R})$，其带有同伦$\mathbb{R}$-代数结构。连通分支的集合 $\pi_0\left(\mathcal{A}(\mathbb{R})\right)$ 继承了经典 $\mathbf{C}^\infty$-代数结构。这直接源于 π_0 保持有限积这一事实。这定义了一个截断函子

$$\pi_0:\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathcal{S}\mathrm{pc}\right)\to\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathrm{Set}\right)$$

从同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数到经典 $\mathbf{C}^\infty$-代数。反过来，由于嵌入i：集合 $\hookrightarrow\mathcal{S}$pc 保持所有 极限，对于任意 $\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$, $i\circ\mathcal{A}$ 都是一个同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数。这定义了一个完全忠实的嵌入

$$i:\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathrm{Set}\right)\hookrightarrow\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathcal{S}\mathrm{pc}\right),$$

右 与 π_0 伴随，因此将 Alg$\mathcal{C}^\infty$(集合) 表示为一个反射子范畴 .

我们已经指出，典范函子 $M \mapsto \mathcal{C}^\infty(M)$ 给出了从 Mfd 到 Alg$\mathcal{C}^\infty$(Set)^{op} 的全忠实嵌入，并且保持横截拉回；但由于 i^{op} 是一个左伴随，无法由此推出 Alg$\mathcal{C}^\infty$($\mathcal{S}$pc)^{op} 的类似结果。也就是说，若 $f\colon M \to N$ 和 $g\colon L \to N$ 是横截光滑映射，那么尽管

$$\mathbf{C}^\infty(M \times_N L) \cong \mathbf{C}^\infty(M) \underset{\mathbf{C}^\infty(N)}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(L),$$

必须证明这个张量积（推出）是一个导出张量积（同伦推出）。尽管如此，结论仍然成立：

定理 3.13。[10, 定理 4。51] 函子 $\mathbf{C}^\infty\colon$ Mfd $\hookrightarrow$ $\mathbf{Alg}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^{op}$ 将流形 M 映至 $\mathbf{C}^\infty(M)$ 是全忠实的，并且保持横截拉回。

定理 3.14。 [5, 定理 5。1],[29, 推论 5.5.9。2] 对于任意代数理论$\mathbf{T}$，存在一个 ∞-范畴等价

$$N_{hc}\left(\mathbf{Alg}_{\mathbf{T}}(\mathrm{Set})^{\Delta^{op}}_{proj.}\right) \simeq \mathbf{Alg}_{\mathbf{T}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$$

从赋予投射模型结构的单纯$\mathbf{T}$-代数范畴的同伦相干神经，到 ∞-范畴中 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$. 的$\mathbf{T}$-代数之间

根据定理 3.14，任何同伦 $\mathcal{C}^\infty$-代数都可以由集合中的单纯 $\mathcal{C}^\infty$-代数来建模。由于任何 $\mathcal{C}^\infty$- 代数都有一个底层阿贝尔群，因此这样的单纯代数也有一个底层单纯阿贝尔群。由此可知，其底层单纯集合是一个 Kan 复形。集合 Set$^{\Delta^{op}}$ 中 $\mathcal{C}^\infty$-代数范畴上的投射模型结构满足：

i) $f\colon X \to Y$ 是弱等价，当

$$f(\mathbb{R}) : X(\mathbb{R}) \to Y(\mathbb{R})$$

是单纯集合之间的弱同伦等价，并且

ii) $f\colon X \to Y$ 若上述映射是 Kan 纤维化，则它是一个**纤维化** 。

该 ∞- 与该模型范畴相关的范畴等价于 Algs$\mathcal{C}^\infty$($\mathcal{S}$pc) .

3.2. **微分分次 $\mathcal{C}^\infty$-代数**。设一个同伦论 $\mathcal{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$ 由一个单纯 $\mathcal{C}^\infty$-代数 $A_\bullet$. 表示。如前所述， $A_\bullet$ 具有单纯阿贝尔群的底层结构。经典的 Dold-Kan 对应将这个单纯阿贝尔群与一个上链复形对应起来。事实上，这个阿贝尔群是一个 $\mathbb{R}$-模，因此得到的是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上、集中于非正次数的上链复形。我们不禁会问，能否将 $\mathcal{C}^\infty$- 代数结构转移到这个上链复形上。

定义 3.15。 一个（分次集中于非正次数的）**微分分次 $\mathcal{C}^\infty$-代数** （dg-$\mathcal{C}^\infty$-代数）是一个交换微分分次 $\mathbb{R}$-代数（$\mathcal{A}^\bullet, d$），并附加以下结构：将 $\mathcal{A}_0$ 上诱导的交换 $\mathbb{R}$-代数结构提升为 $\mathcal{C}^\infty$- 代数结构。两个这样的代数之间的态射 $f : (\mathcal{A}, d) \to (\mathcal{A}', d')$ 是微分分次 $\mathbb{R}$- 代数的态射，并且态射 $f^0\colon \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}'^0$ 是 $\mathcal{C}^\infty$-代数的态射。

注 3.16。 如果 $\mathcal{A}^\bullet$ 并非集中于非正次数，则 C$^\infty$-代数结构定义在 0-循环的代数上。

微分分次 C$^\infty$-代数的典型例子，是微分分次流形上的光滑函数构成的微分分次代数 (C$^\infty$ ($\mathcal{M}$) D)。

定理 3.17。 [8, 定理 6。5] 在（非正分次）微分分次 C$^\infty$-代数范畴上存在一种余纤维生成、几乎单纯的模型范畴结构，且该结构由以下性质唯一确定：

$$f : (\mathcal{A}, d) \to (\mathcal{A}', d')$$

当且仅当其底层上链复形的诱导映射相对于上链复形上的投射模型结构 $\boldsymbol{Ch}(\mathbb{R})^{\leq 0}$ 是弱等价（分别是纤维化）

定义 3.18。 用 dgC$^\infty$Alg$^{\leq 0}$ 表示非正分次微分分次 C$^\infty$-代数构成的 1-范畴，并用 dgC$^\infty$ Alg$^{\leq 0}$ 表示与上述模型范畴关联的 ∞-范畴；再用 Ch$(\mathbb{R})^{\leq 0}$ 表示与非正分次上链复形关联的 ∞-范畴。

上述模型结构是通过从非正次数上链复形的投射模型结构转移而构造的，因此存在一个自然的 Quillen 伴随。右伴随将一个 dg-C$^\infty$-代数 $(\mathcal{A}^\bullet, d)$ 映射为其底层上链复形。左伴随将一个上链复形 $(V^\bullet, d)$ 映射为由 $(V^\bullet, d)$ 生成的自由 dg-C$^\infty$-代数。明确地说，它是

$$\mathsf{Sym}_{\mathbf{C}^\infty}\left((V^\bullet, d)\right) := \mathbf{C}^\infty\left(V^0\right) \underset{\mathsf{Sym}(V^0)}{\otimes} \mathsf{Sym}\left((V^\bullet, d)\right).$$

注意，对于 $\mathbb{V}$ 一个 $\mathbb{N}$-分次有限维向量空间，若同时将其视为微分为零的上链复形和分次流形，则有如下同一性

$$\mathbf{C}^\infty(\mathbb{V}) \cong \mathsf{Sym}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbb{V}^*).$$

定义 3.19。 设 $\mathbb{V}$ 是一个集中于非正次数的 $\mathbb{Z}$-分次向量空间，且总维数有限；设 m 为满足 $V_k \neq 0.$ 的最小 k 。对于所有 $n \geq 0$，令 $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i}$ 为 $V_{-n}.$ 的一组基。那么记作

$$\mathbf{C}^\infty\{x_{1,1}, x_{i,2}, \ldots x_{1,n_1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots x_{m,nm}\} := \mathsf{Sym}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbb{V}),$$

对于**由 n_1 个次数为 -1 的生成元、 n_2 个次数为 -2 的生成元、.....以及 n_m 个次数为 $-m.$ 的生成元自由生成的 C$^\infty$-代数**，

最后，我们注意到，在投射模型结构中，每个上链复形都是余纤维的，因此 Sym$_{\mathbf{C}^\infty}$ 的左导出函子就是它本身。

定义 3.20。dg-C$^\infty$-代数之间的一个态射 $f : (\mathcal{A}, d) \to (\mathsf{B}\ d)$ 若存在一个 $-\mathbb{N}$-分次超向量空间 $W^\bullet$ ，使得在遗忘微分后， f 同构于从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathsf{Sym}_{\mathbf{C}^\infty}(W^\bullet)$ 的嵌入，则称其为**拟自由的**。

命题 3.21。 [8] 非正分次微分C$^\infty$-代数之间的态射 $f : (\mathcal{A}, d) \to (\mathsf{B}\ d)$ 是余纤维化，当且仅当它是某个拟自由扩张的收缩。

这意味着，根据推论 6。20]，$\mathbf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$ 中的余纤维对象都是拟自由 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数的收缩。特别地，每个代数$\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$，作为 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数来看，都是余纤维对象；这些代数构成的集合对余积封闭，因此也对导出$\mathbf{C}^\infty$-张量积封闭，因为在这种情况下二者相同。由此可得典范函子

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{C}^\infty & \to & \mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0} \\ \mathbb{R}^n & \mapsto & \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\end{array}$$

保有限积。因此，由 [29, 命题 5.5.8.15],可知，这可以扩张为一个唯一的保余极限函子，作用于 ∞-范畴

$$N_{\mathbf{C}^\infty} : \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \to \mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$$

它将每个形如 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的代数映到其自身。由伴随函子定理可知，存在一个右伴随 $\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}$。事实上，由 Yoneda 引理可知， $\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}$ 将一个 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$ 映到

$$\begin{array}{rcl}\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A}) : \mathbf{C}^\infty & \to & \mathcal{S}\mathrm{pc} \\ n & \mapsto & \mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{A}).\end{array}$$

定理 3.22. *[$\mathbf{C}^\infty$ Dold-Kan 对应] [31, 推论 2.2.10]* 上述伴随是 ∞-范畴之间的伴随等价。

推论 3.23. 对于任意 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数 $(\mathcal{A}^\bullet, d)$ $\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) \ \mathcal{A}) \simeq |\Gamma(\mathcal{A})|$,其中 $|\Gamma(\mathcal{A})|$ 是通过 *Dold-Kan* 对应得到的、与 $\mathcal{A}$ 的底层上链复形相对应的单纯集合的同伦类型。特别地，对于所有 n，我们有

$$\pi_n \mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{A}^\bullet) \cong H^{-n}(\mathcal{A}, d).$$

3.3. **同伦有限呈示的 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数与导出流形。**

定义 3.24. 一个 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$ 若满足以下条件，则称为**同伦有限呈示的：**

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}}(\mathcal{A}, \cdot) : \mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0} \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

保留的 ，即 $\mathcal{A}$ 是 $\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$ 这一 ∞-范畴中的紧对象 .

命题 3.25. 一个 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数是有限呈示的，当且仅当它是形如$\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数的有限余极限的收缩，也就是说，它是有限生成的自由 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数的有限余极限的收缩。

证明。 这是在定理 3.22 的等价下对 [10, 引理 3.21]的转述。 □

推论 3.26。 存在一个典范等价

$$\left(\mathsf{dgC^\infty Alg}^{\mathbf{fp}}_{\leq 0}\right)^{op} \simeq \mathsf{DMfd}$$

介于 ∞-范畴中同伦有限表示的 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数的对立范畴与 ∞-导出流形范畴之间。

推论 3.27。 对于每个导出流形 $\mathcal{X}$，都存在一个导出流形 $\mathcal{X}'$，它可以通过对 $\mathbb{R}$进行有限次拉回迭代得到，使得 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}'$.的收缩

证明。 这立即由推论 3.26、命题 3.25 得出，当然还有 $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R})^n$. □

3.4. **$\mathbf{C}^\infty$-局部化**。

定义 3.28. 设 $\mathcal{A}$ 是一个同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数，并设 $a \in \pi_0(\mathcal{A})$。我们称映射 $f\colon \mathcal{A} \to \mathsf{B}$ 为一种**关于 A 的** a局部化，若 $f(a) \in \pi_0(B)$ 可逆，并且对于每个 $\mathcal{C} \in \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$，由与 f 复合给出的映射 $\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\mathsf{B}\ \mathcal{C}) \to \mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 诱导一个等价

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\mathsf{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{M}\mathrm{ap}^0_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\mathcal{A}, \mathcal{C}),$$

其中 $\mathbb{M}\mathrm{ap}^0_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 是由那些连通分支组成的并集 f

对于集合 $\mathcal{A}$ 中的普通 $\mathbf{C}^\infty$-代数以及某个 $a \in \mathcal{A}$，上述定义化为通常的 $\mathbf{C}^\infty$ 局部化 $\mathcal{A}[1/a]$，它在等价意义下由推出给出

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{q_a} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathcal{A}[1/a] \end{array}$$

C^∞-环的.....。同伦 C^∞-环的局部化有类似的刻画，为此我们需要以下定义。

定义 3.29. (1) 映射空间 $f\colon \mathcal{A} \to \mathsf{B}$ 属于 $\mathbf{Alg}^{\mathbf{Com}_{\mathbb{R}}}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 是**强**(按 [40,定义 2.2.2。1]的含义

$$\pi_n(\mathcal{A}) \underset{\pi_0(\mathcal{A})}{\otimes} \pi_0(\mathsf{B}) \to \pi_n(\mathsf{B})$$

对所有 $n \geq 0$ 都是同构。

(2) 同伦 C^∞-代数的映射空间 $f\colon \mathcal{A} \to \mathsf{B}$ 若 $f^\sharp\colon \mathcal{A}^\sharp \to \mathsf{B}^\sharp$ 是强的，则称其为**强**。

命题 3.30. 设 $\mathcal{A}$ 是一个同伦$\mathbf{C}^\infty$-代数，且设 $a \in \pi_0(\mathcal{A})$，再设 $f\colon A \to B$ 是一个单纯形 C^∞-环的映射。以下条件等价：

(1) 映射空间 $f\colon A \to B$ 使 B 成为关于 a 的局部化。(2) 对每个 $n \geq 0$，诱导的映射

$$\pi_n\left(\mathcal{A}^\sharp\right) \underset{\pi_0\left(A^{alg}\right)}{\otimes} \left(\pi_0(\mathcal{A})[1/a]\right)^{alg} \to \pi_n\left(B^{alg}\right)$$

是一个等价；也就是说， f 是强的，而对应于$\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ 的 C^∞-概形映射空间是一个开浸入。

(3) B 适合于一个推出图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{q_a} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & B \end{array}$$

其中 q_a 是与 $a \in \pi_0(A)$ 相关联的、在同伦意义下唯一的映射（注意，由此可知，局部化总是存在的）。

我们将同伦 $\mathbf{C}^\infty$-环 $\mathcal{A}$ 按元素 $a \in \pi_0\mathcal{A}$ 进行 $\mathbf{C}^\infty$-局部化，记作 $\mathcal{A}[1/a]$.

3.5. $\mathbf{C}^\infty$-Koszul复形。

定义 3.31。超交换环 $\mathcal{A}$ 的偶元素 q 若不是零因子，则称为**正则**。

超交换环 $\mathcal{A}$ 的奇元素 p 若满足以下序列**正则**，

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\cdot p} \mathcal{A} \xrightarrow{\cdot p} \mathcal{A}$$

是正合的。

超交换环 $\mathcal{A}$ 中（偶或奇）元素的序列 $(a_1, a_2, ..., a_n)$ 称为**正则序列**，如果对于所有$i.$，a_{i+1} 在 $\mathcal{A}/(a_1, \dots, a_i)$ 中的像都是正则元

若 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次交换代数，则元素序列 $(a_1, a_2, ..., a_n)$（元素的次数可以不同）称为**正则**，当且仅当它是底层 $\mathbb{Z}_2$-分次交换代数中的正则序列。

定义 3.32。设 $\mathcal{A}$ 是一个 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数。设 $a_1, \dots, a_k$ 是 $\mathcal{A}$ 中一组次数为 $n_1, \dots, n_k$ 的元素，且每个 a_i 都是闭的，即 $da_i = 0.$。与这组元素相关联的 $\mathcal{A}$ 的**Koszul 代数**是以下（1-范畴）推出

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^\infty\{x_1, \dots, x_k\}, |x_i| = |a_i|, 0) & \longrightarrow & \left(\mathbf{C}^\infty\{x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, \xi_k\}, d = x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}, |\xi_i| = n_i - 1\right) \\ \downarrow{\scriptstyle (a_1, \dots, a_k)} & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & K(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_k), \end{array}$$

在 $\underline{\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}^{\leq 0}}$ 中。若 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, d)$，则 $K(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_k)$ 的底层 $\mathbb{Z}$-分次交换代数是 $K(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_k) \cong \mathcal{A}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$，即由生成元 $\xi_1, \dots, \xi_k.$ 生成的自由 $\mathcal{A}$-代数（在 $\mathbf{C}^\infty$-代数中）。由于这些生成元的次数都严格为负，我们有

$$\mathcal{A}\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \cong \mathcal{A} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_k],$$

其中，$\mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ 是由（分次）生成元 ξ_1，...，ξ_k.生成的自由交换 $\mathbb{R}$-代数。根据爱因斯坦求和约定，微分的形式为

$$D = D_{\mathcal{A}} + a^i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

注 3.33. a_1，...，a_k的 Koszul 代数可以归纳构造，使得

$$K(\mathcal{A}, a_1, ...\circ, a_n) = K(K(\mathcal{A}, a_1), a_2, \dots, a_n) = \dots = K(K \dots (K(\mathcal{A}, a_1), a_2), \dots, a_n)$$

引理 3.34. 设 $\mathcal{A}$ 是一个微分为零的 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数，并设 a_i 是 $\mathcal{A}$ 中次数为 $i.$ 的正则元。则存在 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数之间的一个拟同构

$$K(\mathcal{A}, a_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}/(a_i),$$

其中 (a_i) 是由 $a_i.$ 生成的齐次理想

证明。情形 1： i 是偶数。因此， a_i 不是零因子。设 ξ_{i-1} 表示次数为 $i-1.$ 的新增生成元。于是 ξ_{i-1} 是奇数，因此其平方为零。因此，作为分次向量空间，我们有

$$K(\mathcal{A},a)\cong\mathcal{A}^\bullet\oplus\xi_{i-1}\cdot\mathcal{A}^\bullet[1-i].$$

我们有

$$d_k:\mathcal{A}^k\oplus\xi_{i-1}\cdot\mathcal{A}^{k-i+1}\to\mathcal{A}^{k+1}\oplus\xi_{i-1}\cdot\mathcal{A}^{k-i}$$

对于 $k=0$、.....、 i，以及对于 $k<i$，其值为零，

$$d_k\left(b_k+\xi_{i-1}c_{k-i+1}\right)=a_i\cdot c_{k-i+1}.$$

由于 a_i 不是零因子，我们有

$$d_k\left(b_k+\xi_{i-1}c_{k-i+1}\right)=0\iff c_{k-1+i}=0.$$

这意味着 $\ker(d_k)=\mathcal{A}^k.$。显然，$\mathrm{Im}(d_{k-1})=(a_i)_k$，也就是说，它是主理想 (a) 的 k^{th} 分量。由此可得，典范映射 $K(\mathcal{A},a)\to\mathcal{A}/(a)$ 是一个拟同构。

情形 2： i 是奇的。那么我们有 $a_ix=0$ 当且仅当 $x=a_ib$，其中 $b.$。因此，$K(\mathcal{A},a)$ 的底层分次代数是以偶 次数 $i-1.$ 的一个生成元为变量的多项式代数 $\mathcal{A}[\xi_{i-1}]$。次数为 k 的元素是形如 $x=c_k+\sum c_{k-j\cdot(i-1)}\xi_{i-1}^j$ 的多项式，$j\geq1$
其中每个 $c_r\in\mathcal{A}^r.$。因此

$$dx=\sum_{j\geq1}c_{k-j\cdot(i-1)}\cdot a_i\cdot j\xi_{i-1}^{j-1}.$$

这意味着 $dx=0$ 当且仅当对所有 $j\geq1$,

$$c_{k-j\cdot(i-1)}\cdot a_i=0,$$

但由于 a_i 是正则的，这意味着对于 $j\geq1$，每个 $c_{k-j\cdot(i-1)}=0$ 都满足 $x=c_k$，即 d_k，所以 $\ker(d_k)=\mathcal{A}_{k.}$。同样，显然有 $\mathrm{Im}(d_{k-1})=(a)_k$，因此再次可得，典范映射 $K(\mathcal{A},a)\to\mathcal{A}/(a)$ 是一个拟同构。□

命题 3.35. 设 $\mathcal{A}$ 是一个微分为零的 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数，且 $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ 是 $\mathcal{A}.$ 中的正则序列。那么

$$K(\mathcal{A},a_i)\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}/(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

证明。 我们将对序列中元素的个数使用归纳法来证明这一点。对于 $n=1.$，我们已经证明了这一点。现在假设对于所有由 $n-1$ 个正则元组成的序列，这一结论都成立。我们希望证明，对于长度为 $n.$ 的序列，这一结论也成立。

令 $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ 是 $\mathcal{A}.$ 中元素构成的正则序列。首先请注意，由于我们不允许出现次数为 1 的元素，Koszul 构造永远不会添加次数为 0 的生成元。因此，对于任意 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{B}$，都可以将其底层交换微分分次代数识别为

次数为 i 的元素 $b_i \in \mathcal{B}$ 的 Koszul 代数，即推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x_i] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x_i, \xi_{i-1}] \\ {\scriptstyle b_i}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & K(\mathcal{B}, b_i). \end{array}$$

将此应用于 $\mathcal{B} = K(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_{n-1})$ 的情形，我们可以考虑推出图的层

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x_i] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x_i, \xi_{i-1}] \\ {\scriptstyle a_n}\downarrow & & \downarrow \\ K(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_{n-1}) & \longrightarrow & K(\mathcal{A}/(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_{n-1}), b_i) \\ \wr\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}/(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_{n-1}) & \longrightarrow & K(\mathcal{A}/(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n), \end{array}$$

其中

$$K(A, a_1, \dots, a_{n-1}) \to \mathcal{A}/(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_{n-1})$$

是一个拟同构。由于非正分次微分代数上的投射模型结构在 $\mathbb{R}$ 上是左正合的，且上方的水平映射是余纤维化，因此映射

$$K(a_1, \dots, a_n) \to K(\mathcal{A}/(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

也是一个拟同构。由于外方块也是一个推出图，且 a_n 在 $\mathcal{A}/(a_1, \dots, a_{n-1})$ 中是正则的，引理 3.34 表明 $K(\mathcal{A}/(a_1, \dots, a_{n-1}) \quad a_n) \to \mathcal{A}/(a_1, \dots, a_n)$ 是一个拟同构。证明至此完成。□

4. 导出 C^∞-概形

定义 4.1。一个**同伦C^∞-环空间**是一个二元组 $(X, \mathcal{O}_X)$，其中 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{O}_X$ 是一个取值于 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 中的层。态射是如下二元组

$$(f, \alpha) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y),$$

其中 f 是一个连续映射，并且

$$\alpha : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X.$$

[4] 更形式地说，$\mathrm{Loc}_{\mathsf{C}^\infty}$（同伦 C^∞-环空间的 ∞-范畴）是与该函子相关联的余笛卡尔纤维化的全空间中由此类空间构成的满子范畴：

$$\mathrm{Shv}(\,\cdot\,, \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})) : \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbf{Cat}}_\infty$$

$\widehat{\ }$ 由层的正向推导所诱导，其中 Cat_∞ 是大 ∞-范畴的 ∞-范畴，而 Top 是（小）拓扑空间的 1-范畴。

[4] 为简单起见，我们不要求 $\pi_0 \mathcal{O}_X$ 具有局部茎，因为我们只关注每个此类茎的剩余域都是 $\mathbb{R}$ 的例子，因此任何态射都自动是局部的。

考虑典范函子

$$\Gamma : \mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty} \to \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$$

由对每个结构层取整体截面所诱导。这个函子有一个右伴随

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty} : \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^{op} \to \mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty}$$

[31, 命题 5.1.8]可描述如下:

首先来描述 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A})$ 中带下划线的空间。考虑典范函子 $\mathbf{C}^\infty \to$Top，它将 $\mathbb{R}^n$ 映到自身。这个函子保持有限积，因此由 [29, 命题 5.5.8.15] 诱导出唯一的保极限函子

$$\underline{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}} : \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^{op} \to \mathbf{Top}.$$

具体而言，$\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A})$ 的底层集合是同态的集合 s

$$\mathbb{H}\mathrm{om}(\pi_0(\mathcal{A}), \mathbb{R}).$$

给定一个元素 $a \in \pi_0(\mathcal{A})$，考虑函数

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{H}\mathrm{om}(\pi_0(\mathcal{A})_0, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \varphi(a). \end{aligned}$$

那么，形如 $U_a := f_a^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 的子集构成了 $\mathbb{H}$om $(\pi_0(\mathcal{A})\ \mathbb{R})$ 上某个拓扑的一个基，并且对有限交封闭——参见 [10,第 4.3 节.1]。由于这个基对有限交封闭，要描述 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A})$ 上的一个层，只需在 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A})$ 的所有开子集构成的子范~~畴中，对~~形如 U_a. 的开子集定义一个层。因此，存在唯一的层 $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$，它由该预层~~层化而~~来

$$U_a \mapsto \mathcal{A}\left[a^{-1}\right],$$

并且我们有

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A}) = \left(\underline{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}}(\mathcal{A}), \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\right).$$

定义 4.2. 一个**仿射导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形** 是 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\cdot$ 的像中的一个同伦 $\mathbf{C}^\infty$-环空间。用 $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}^\infty}$. 表示 $\mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty}$ 中由这些对象构成的全子范畴

尽管如此，与经典代数几何不同，谱函子 $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}$ 一般并非全忠实。这一点对于 Set 中的 $\mathbf{C}^\infty$-环，Dubuc [16] 早已指出。不过，参见上述文献可知，将其限制在由芽决定的有限呈示 $\mathbf{C}^\infty$-环上时，它是全忠实的。

定义 4.3. 同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$ 是**完备的**，如果余单位

$$\varepsilon : \mathcal{A} \to \Gamma(\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{A}))$$

是一个等价 。将完备代数构成的全子范畴记为 $\mathrm{dSC}^\infty\mathrm{Alg}^\wedge$.

命题 4.4。 [31, 例 5.1。30], [10, 推论 4。45] 如果 $\mathcal{A} \in$ 代数$_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 是有限呈示的，那么它就是完备的。

注意，伴随 $\Gamma \dashv \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}$ 限制为一个伴随

$$\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^{op} \underset{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}}{\overset{\Gamma}{\leftarrow\!\!\!\rightarrow}} \mathbf{Aff}_{\mathbf{C}^\infty}$$

命题 4.5。 [31,命题 5.1。26] 单位

$$\eta : id_{\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}^\infty}} \Rightarrow \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty} \circ \Gamma$$

是一个等价。

以下推论可直接得出：

推论 4.6。 复合

$$\left(\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^\wedge\right)^{op} \hookrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^{op} \xrightarrow{\quad\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\quad} \mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty}$$

是全忠实的，其本质像为 仿射$_{\mathbf{C}^\infty}$. 特别是

$$\left(\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^\wedge\right)^{op} \simeq \mathbf{Aff}_{\mathbf{C}^\infty}.$$

此外，$\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})^\wedge$ 是$\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的一个反射子范畴，其嵌入的左伴随 $i^\wedge$ 由 $L^\wedge := \Gamma \circ \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}$·给出

第2. **部分　新结果**

5. Differential Graded Geometry, Part II

5.1. **从微分分次流形到导出$\mathbf{C}^\infty$-概形**。

定义 5.1. 设 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M}, D)$为一个微分分次流形。$\mathbf{C}^\infty$-概形 $\pi_0(\mathcal{M}) := \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(H^0(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})))$ 称为 $\mathcal{M}$.的**经典轨迹**

注记 5.2. 作为拓扑空间，$\pi_0(\mathcal{M})$是 M 中上同调向量场消失的子空间。

引理 5.3. 设$(M, \mathcal{O}_\mathcal{M}, \mathrm{D})$ 为一个微分分次流形。那么 $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ 是一个微分分次$\mathbf{C}^\infty$-代数的同伦层。

证明。只需证明底层的上链复形层是同伦层。由于 M 的任意开子集自动也是微分分次流形，因此只需证明 M. 的开覆盖满足下降。设 $(U_\alpha \hookrightarrow M)_\alpha$ 是一个开覆盖，并记 $\mathcal{U}_\alpha$ 为微分分次流形 $(U_\alpha, \mathcal{O}_\mathcal{M}|_{U_\alpha}, D)$。我们需要证明典范映射

$$\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \varprojlim \left[\prod_\alpha \mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \;\; \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow} \cdots \right]$$

是一个拟同构。对于每个 $n < 0$，令 $\check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}^n_\mathcal{M})$ 表示阿贝尔层 $\mathcal{O}^n_\mathcal{M}$ 关于上述开覆盖的 $\check{}$ Cech 复形。于是这些复形构成一个双复形 $\check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\bullet_\mathcal{M})$。由于 $\mathcal{O}^\bullet_\mathcal{M}$ 有下界，上述同伦极限可以计算为该双复形的全化。注意，对于每个 n， $\mathcal{O}^n_\mathcal{M}$ 都是 M 上某个向量丛所对应的局部自由层，因此是软层。由此可知，其层上同调

消失。因此，双复形谱序列在 E_2 页退化，从而得到我们的结果。□

引理 5.4。设 $U \subseteq M$ 是微分分次流形 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, D)$ 的一个开子集，并假设 $U \cap \pi_0(\mathcal{M}) \neq 0$，那么 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_U$ 是无环的。

证明。由于 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 是一个同伦层，只需对足够小的 $U.$ 证明这一点。因此，我们可以假设 $U \cong \mathbb{R}^n$，且 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$ 是一个拟自由 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数。因此，我们可以找到分次坐标 $(x_1, \ldots, x_n; \eta_{ij})$，使得 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个坐标系，并且对每个 i，$(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im_i})$ 的次数为 $-i$，其中 i 从 $i = 1$ 到 N 变化，对某个有限的 $N.$ 成立。因此，微分的形式为

$$D = f_i^1 \frac{\partial}{\partial \eta_{1i}} + f_j^2 \frac{\partial}{\partial \eta_{2j}} + \ldots,$$

对所有 $i.$，f_j^i的次数为 $-i+1$。由此可知，我们可以迭代地构造 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$，使其为 $\mathcal{A}^{(0)} = \mathbf{C}^\infty(U)$，

$$\mathcal{A}^{(k)} = K\left(\mathcal{A}^{(k-1)}, f_1^k, f_2^k, \ldots, f_{m_k}^k\right),$$

其中 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U) = \mathcal{A}^{(N)}.$。由于 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$ 是拟自由的，因此它在 $\mathrm{dg}\underline{\mathbf{C}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0}}$ 中是余纤维的；又由于所有映射

$$\mathbf{C}^\infty\{y_1, \ldots, y_{m_k}\} \to \left(\mathbf{C}^\infty\{y_1, \ldots, y_{m_k}, \eta_{i1}, \ldots, \eta_{m_k}\}, d = y_i \frac{\partial}{\partial \xi_{ki}}, |\xi_i| = k\right)$$

都是余纤维化（事实上，它们就是生成余纤维化），因此每个推出图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^\infty\{y_1, \ldots, y_{m_k}\} & \longrightarrow & \left(\mathbf{C}^\infty\{y_1, \ldots, y_{m_k}, \eta_{i1}, \ldots, \eta_{m_k}\}, d = y_i \frac{\partial}{\partial \xi_{ki}}, |\xi_i| = k\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f_1^k, \ldots, f_{m_k}^k)} & & \Big\downarrow \\ \mathcal{A}^{(k-1)} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{(k)}, \end{array}$$

都是同伦推出。因此，如果 $\mathcal{A}^{(k-1)}$ 是无环的，那么 $\mathcal{A}^{(k)}.$ 也是无环的。因此，要证明$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$是无环的，只需证明 $\mathcal{A}^{(1)}$是无环的。设 $x \in U$。那么，根据假设，$x \in \pi_0(\mathcal{M})$，这意味着存在一个 j，使得 $f_j^1(x) \neq 0.$。不失一般性地，为了简化记号，假设 $f_1^1(x) \neq 0.$。如果有必要，可以缩小 U，但保持其与 $\mathbb{R}^n$微分同胚，从而使得 $f_1^1(y) \neq 0$ 对所有 $y \in U.$都成立。这意味着 f_1^1是一个单位，尤其是一个正则元。注意，

$$\mathcal{A}^{(1)} \cong K\left(K\left(\mathbf{C}^\infty(U), f_1^1\right), f_2^1, \ldots, f_{m_1}^1\right).$$

通过与刚才给出的论证类似的论证，定义外层 Koszul 代数的推出是一个同伦推出，因此只需证明 $K(\mathbf{C}^\infty(U) \quad f_1^1)$ 是无环的。由于 f_1^1 不是零因子，我们知道

$$K\left(\mathbf{C}^\infty(U), f_1^1\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^\infty(U) / \left(f_1^1\right),$$

并且由于 f_1^1 是一个单位，这个商为 0。证明至此完成。 □

命题 5.5. 设$(\mathcal{A}, d)$ 是一个有限生成的拟自由 *dg*-$\mathbf{C}^\infty$-代数。那么 $\mathcal{A}$ 是同伦有限表示的，即是$\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0}$中的一个紧对象

证明。 紧对象在有限余极限下封闭。引理 5.4 的证明表明，任何这样的代数都可以通过对有限生成的自由 $\mathbf{C}^\infty$-环进行有限次推出而得到。结论由此得出。□

引理 5.6。 设$(M,\ \mathcal{O}_{\mathcal{M}},\ \mathrm{D})$ 是一个微分分次流形。那么存在一个典范拟同构

$$\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \simeq \Gamma_{\pi_0(\mathcal{M})}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\pi_0(\mathcal{M})}\right).$$

证明。 令 $\mathcal{J}$ 为 M中 π_0(M)的开邻域范畴，并按嵌入排序。那么

$$\Gamma_{\pi_0(\mathcal{M})}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\pi_0(\mathcal{M})}\right) \cong \varinjlim_{U\in\mathcal{J}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U).$$

令 V为 $M.$ 中 π_0 (M)的补集。那么对任意开集 $U \supset K,\ U\cup V$都是 $M.$ 的二项覆盖。根据引理 5.4, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$($V$)和 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ ($U\cap V$)是无环的。由于 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 是一个同伦层，因此典范映射 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$(M) $=\mathbf{C}^\infty$(M) $\to$ $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$($U$)是拟同构。这些典范映射由视为函子的 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 给出，因此构成一个自然变换

$$\Delta_{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})} \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{J}},$$

它在各分量上都是拟同构。这意味着，在函子范畴 $\mathrm{Fun}\left(\mathcal{J}^{op}、\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0}\right).$的 ∞-范畴中，$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{J}}$ 等价于$\Delta_{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})}$。回想一下，我们有一个 ∞-范畴的等价 $\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}: \mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0} \xrightarrow{\sim}$ $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$。因此，只需证明，对于任意同伦 $\mathbf{C}^\infty$-代数 $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \simeq \varinjlim_{U\in\mathcal{J}} \mathcal{A}.$$

由于 $\mathbf{C}^\infty$ 是一个代数理论，遗忘函子

$$\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \to \mathcal{S}\mathrm{pc}$$

是保守的，并且保持滤过余极限，因此只需证明，对于任意空间 $X \in\mathcal{S}$pc,

$$X \simeq \varinjlim_{U\in\mathcal{J}} X.$$

但是 $\varinjlim_{B\mathcal{J}} X = \varinjlim_{\mathcal{J}} \Delta_X \simeq X \times B\mathcal{J}.$ 由于我们处理的是一个滤过余极限，$B\mathcal{J}$ 是$U\in\mathcal{J}$ $\mathcal{J}$可缩的。结论得证。 □

定理 3.22 给出了 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc}) \simeq \mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0}$ 之间的一个同一。因此， ∞-范畴 $\mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty}$ 有另一种描述，其对象为对 $(X, \mathcal{O}_X)$，其中 O_X 是一个 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数的同伦层。因此，我们将交替地把同伦 $\mathbf{C}^\infty$-环化空间视为带有一个取值于 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathrm{pc})$ 的层的空间，或视为一个取值于（等价的） ∞-范畴 $\mathrm{dgC}^\infty\mathrm{Alg}_{\leq 0}$ 的层——也就是说，一个 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数的同伦层。

定理 5.7. 设 $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathrm{D})$ 是一个微分分次流形。那么

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}), D\right) \simeq \left(\pi_0(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\pi_0(M)}\right).$$

证明。 首先，注意到

$$\pi_0 \Gamma^{\mathbf{C}^\infty} \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \cong H^0 \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

因此，底层的经典 C^∞-概形 $\pi_0(\mathcal{M}) = \mathsf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(H^0\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$ 与底层的经典 C^∞-概形 $\pi_0\left(\mathsf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\pi_0\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}\right)\right)$. 一致。特别地，它们底层的拓扑空间同胚。因此，只需证明结构层等价。只需证明它们在足够小的 U上相同，因此可将问题归结为 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 拟自由的情形。这意味着 $\Gamma^{\mathbf{C}^\infty}\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是 $\mathsf{Alg}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathcal{S}\mathsf{pc})$ 中的紧对象。

任意开子集 $\pi_0(\mathcal{M})$ 都可写成 $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap \pi_0(\mathcal{M})$，其中光滑函数 f: $M \to \mathbb{R}$. 由 [10, 推论 4.45], 可知，$\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))}(U)$ 是将 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 在元素 $[f] \in H^0\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 处进行同伦局部化所得。由引理 5.6，只需证明 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$ 是将 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 在 f. 处进行同伦局部化所得。由命题 3.30，只需证明典范映射

$$H^n\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \underset{H^0\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right)}{\otimes} \left(H^0\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right)[1/a] \to H^n\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)\right)$$

i对于所有的 n，都是一个同构，其中 a 是 f 在 0^{th} 上同调中的像。

注意，我们将 1-范畴推出图层叠在一起:

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathsf{C}^\infty(U) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\
H^0\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))}(U)
\end{array}$$

由于 p 是有效满射，根据 [10, 引理 4.6]，我们可得

$$H^0\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})[1/a] \cong H^0\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \underset{\mathbf{C}^\infty(M)}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(U).$$

因此我们有

$$H^n\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \underset{H^0\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right)}{\otimes} \left(H^0\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right)[1/a] \cong H^n\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(M)}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(U).$$

因此，只需证明

$$H^n\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(M)}{\otimes} \mathbf{C}^\infty(U) \cong H^n\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)\right).$$

将 $(H^n\mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ 记作预层的层化

$$W \mapsto H^n\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(W)\right).$$

考虑$\mathbf{C}^\infty(M)$-模 $H^n(\mathbf{C}^\infty(M))$。由于它是有限呈示的， [22,例 528]意味着我们可以推导出

$$(H^n\mathcal{O}_\mathcal{M})(W) \cong \mathbf{C}^\infty(W) \underset{\mathbf{C}^\infty(M)}{\otimes} H^n(\mathbf{C}^\infty(M)).$$

注意，我们有一个 $\mathcal{O}_M$-模的正合列:

$$0 \to \ker(d_n) \to \mathcal{O}^n_\mathcal{M} \to \ker(d_{n+1}) \to (H^n\mathcal{O}_\mathcal{M}) \to 0.$$

由[22, 命题 5.11] 可知

$$0 \to \ker(d_n(U)) \to \mathcal{O}^n_\mathcal{M}(U) \to \ker(d_{n+1}(U)) \to (H^n\mathcal{O}_\mathcal{M})(U) = \mathbf{C}^\infty(U) \underset{\mathbf{C}^\infty(M)}{\otimes} H^n(\mathbf{C}^\infty(M)) \to 0$$

也正合。结论由此得证。 □

推论5.8。 将微分分次流形 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ 视为带有微分分次$\mathbf{C}^\infty$-代数同伦层的拓扑空间。那么存在一个典范映射

$$\psi_\mathcal{M} : \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \simeq \left(\pi_0(\mathcal{M}), \mathcal{O}_\mathcal{M}|_{\pi_0(M)}\right) \to \mathcal{M}$$

它是同伦环化空间之间的映射，并在整体截面上诱导拟同构。

5.2. 纤维对象范畴结构。如引言中所述， [4] 的作者证明，在非正分次微分分次流形范畴 dg-Mfd$^{\leq 0}$ 上，或者更准确地说，在与之等价的曲弯 $L_\infty[1]$- 代数丛范畴上，存在纤维对象范畴结构。

5.2.1. 纤维对象范畴。

定义5.9。纤维对象范畴是一个具有有限积的范畴$\mathcal{C}$，并带有两类分别称为纤维化和弱等价的态射，满足以下公理:

> 0. 每个对象 C 都是可纤维的（即 $C \to 1$ 是纤维化）。1. 沿纤维化的拉回存在，且仍是纤维化。2. 无圈纤维化（同时是纤维化和弱等价的态射）在拉回下保持不变。3. 弱等价满足三取二性质。4. 满足以下**分解性质**: 若 $f : C \to D$ 是任意态射，则存在一个平凡纤维化 $\pi : C' \to C$，它有一个截面 λ，以及一个纤维化 $f' : C' \to D$，使得 $f' \circ \lambda = f$.

典范例子类是模型范畴中以其可纤维对象为对象的全子范畴，但还有许多并非这种形式。

定义5.10。 在一个纤维对象范畴中，若拉回图的一条边是纤维化，则称该图为**同伦拉回**。

给定任意图表

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{g} & D, \end{array}$$

存在一个平凡纤维化 $\pi\colon C'\to C$，它有一个截面 λ；还存在一个纤维化 $f'\colon C'\to D$，使得 $f'\circ\lambda=f$. 在这种情况下，纤维积 $B\times_D C'$ 将称为上述图表的**同伦拉回**。

给定任意范畴 $\mathcal{C}$ 以及其中一组态射 $\mathcal{W}$，可以以一种泛性的方式将它们反演至同伦意义下，从而构造一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty$.。对此有许多经典构造（例如 Dwyer-Kan 单纯局部化），它们彼此等价，但最清楚地满足所需泛性质的一种构造如下：令 $y\colon \mathcal{C}\hookrightarrow \mathrm{Psh}_\infty(\mathcal{C})$ 表示 Yoneda 嵌入，它将对象嵌入到空间预层的 ∞-范畴中。令 $y(\mathcal{W})$ 表示 $\mathcal{W}$. 中这些态射的像。预层 $F\colon \mathcal{C}^{op}\to \mathcal{S}\mathrm{pc}$ 称为 $\mathcal{W}$-**局部**的，若对所有 $w:C\to D$ 属于 $\mathcal{W}$,

$$F(w):F(D)\to F(C)$$

是 $\mathcal{S}\mathrm{pc}$ 中的等价（即 Kan 复形之间的弱等价。）由于 $\mathcal{W}$ 是一个集合，由 $\mathcal{W}$-局部预层张成的全子范畴是一个反射子范畴 [29, 命题 5.5.4。15],也就是说，嵌入存在一个左伴随 $L_{\mathcal{W}}$.

定义 5.11。 在上述情形中，我们令 $\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty:=L_{\mathcal{W}}(\mathcal{C})$ 为复合函子 $L_{\mathcal{W}}\circ y$ 下 $\mathcal{C}$ 的本质像，并令 $h_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty$ 为典范函子。

令 $\mathcal{D}$ 为任意一个 ∞-范畴，并令 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{W}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 为 ∞-范畴中从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子所构成的全子范畴，其中的函子将 $\mathcal{W}$ 的态射映为等价。由于反射函子 $L_{\mathcal{W}}$ 下 $\mathcal{W}$ 的像由等价组成，对于任意函子

$$F:\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty\to\mathcal{D},$$

$F\circ h_{\mathcal{W}}$ 属于 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{W}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$。因此存在一个诱导函子

$$h_{\mathcal{W}}^*:\mathrm{Fun}\left(\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty,\mathcal{D}\right)\to\mathrm{Fun}^{\mathcal{W}}(\mathcal{C},\mathcal{D}).$$

下面的命题广为人知：

命题 5.12。 在上述情形中，$h_{\mathcal{W}}^*$ 是 ∞-范畴之间的等价。

定理 5.13。 若 $\mathcal{W}$ 是纤维对象范畴中的弱等价集合，则 $h_{\mathcal{W}}$ 将同伦拉回应为 ∞-范畴 $\mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]_\infty$. 中的拉回。

证明。 由 [15, 命题 3.6 和命题 3.23],立即可得，因为在单纯预层上，沿着 $\mathcal{W}$ 像进行投射模型结构的 Bousfield 局部化，所得模型范畴刻画了 ∞-范畴中的 $\mathcal{W}$-局部预层。□

5.2.2. 微分分次流形上的纤维对象范畴结构。现在我们将回顾[4] 的作者在曲弯 L_∞-代数的丛范畴上定义的纤维对象范畴结构，并将其含义转换为微分分次流形的语言。我们还将证明同一篇论文中的一个猜想，该猜想给出了弱等价的另一种刻画。

给定 (M,L,λ) 为一个曲弯 L_∞-代数丛，它们将经典轨迹 定义为 λ_0 的零点集，其中 λ_0 是 L_1. 的一个截面。回忆一下，相关联的微分分次流形 $(\mathbb{L},D_\lambda)$ 上的微分D_λ的首项为 ι_{λ_0}; 若 $\xi_1,\dots,\xi_k$ 是点 p 周围的局部坐标，其次数为 -1，对应于 L_1 的一个局部平凡化（的

秩 k）中的项为 $(\lambda_0)_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. 因此我们看到，这与定义 5.1 一致，并且零点集为 π_0（$\mathbb{L}$, D_λ），但 [4] 的作者只考虑点的底层集合，而不考虑$\mathbf{C}^\infty$-概形的结构。

定义 **第 5.14 条。**态射 $f\colon \mathcal{M} = (M, L, \lambda) \to (N, E, \mu) = \mathcal{N}$是一个 **纤维化** i f:

i) $f\colon M \to N$ 是光滑流形之间的次浸没。ii) ϕ_1 :

$L \to E$ 是光滑流形之间的次浸没。

态射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是**弱等价**，如果

i) f 在经典轨迹上诱导底层集合之间的双射。ii) 对于每个点 $p \in \pi_0(\mathcal{M})$，诱导的切复形映射 $T_p\mathcal{M} \to T_{f(p)}\mathcal{N}$ 是拟同构。

参见 [4, 定义 1.9、1.12、1.21]。

首先，假设 $f\colon \mathcal{M} = (M, L, \lambda) \to (N, E, \mu) = \mathcal{N}$是一个纤维化。记 End $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$ $\mathfrak{M}$ 为相应的等变超流形。我们有， $\mathfrak{M}$ 是向量丛的全空间

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{2n} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Pi L_{2n+1}.$$

由此不难看出，该条件转化为：关联超流形之间诱导的映射 $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$是超流形之间的次浸没。

其次，给定一个弯曲 L_∞ [1]-代数丛 (M, L, λ)，以及经典轨迹中的一个点 p， [4] 的作者将 p 处的 切复形 定义为复形

$$TM_p \xrightarrow{D_p\lambda_0} L_p^1 \xrightarrow{\lambda_1|_p} L_p^2 \xrightarrow{\lambda_1|_p} \dots$$

注意，在分次流形的范畴中，我们有

$$T_p\mathbb{L} \cong T_pM \oplus \mathbb{L}_p \cong T_pM \oplus \bigoplus_i (L_i)_p [-i],$$

它成为复形

$$TM_p \xrightarrow{\mathcal{L}_D(p)} L_p^1 \xrightarrow{\mathcal{L}_D(p)} L_p^2 \xrightarrow{\mathcal{L}_D(p)} \dots$$

微分一致这一点只需简单计算即可得出。

下面给出另一种描述。设 $\mathfrak{M}$为具有 End $\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$作用的相应超流形，并记 $\hat{}D$为 D. M的典范延拓，即 $(\mathbb{R}, \cdot)$-作用的不动点，而 $\pi_0(\mathcal{M})$为 $\mathbb{R}^{0|1}$作用的不动点，也就是 $\hat{}_D$.的奇流。对于任意 $x \in M$，由于 x 是 $(\mathbb{R}, \cdot)$-作用的不动点，因此 $(\mathbb{R}, \cdot)$在 $T_x\mathfrak{M}$. 上诱导出一个线性作用。这在 $T_x\mathfrak{M}$上诱导出一个 $\mathbb{N}$分次；由于该作用为偶作用，这是来自超流形 $\mathfrak{M}$.的 $\mathbb{Z}_2$分次的提升。具体而言，切向量 $v \in T_x\mathfrak{M}$ 的次数为 n，当且仅当对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $t \star v = t^n \cdot v$，其中 $\star$表示线性化作用。等价地，

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} t \star v = n \cdot v.$$

$\hat{}\hat{}$若 x 另外属于 $\pi_0(\mathcal{M})$，那么 $D_x = 0$. D，或者更确切地说，其奇流，因此诱导出一个线性映射 $d_x : T_x\mathfrak{M} \to \Pi T_x\mathfrak{M}$. 。但这恰好是（$\mathcal{L}_D$）$_x \cdot$ 。此外，关于

由 E 诱导的分次， $\mathcal{L}_D$ 变成一个次数为 1 的映射；由于 $\left[\hat{}D,\ \hat{}D\right] = 0$， $\mathcal{L}_D$ 变成一个微分。总之，$(T_x\mathfrak{M}, (\mathcal{L}_D)_x)$ 变成一个集中在非负次数上的上链复形。由此可得

$$T\mathfrak{M}|\pi_0(\mathcal{M})$$

是拓扑空间 $\pi_0(\mathcal{M})$ 上的拓扑向量丛复形[5]。因此，弱等价的条件$ii)$表明

$$T\mathfrak{M}|\pi_0(\mathcal{M}) \to f^*T\mathfrak{N}|\pi_0(\mathbb{N})$$

是逐 纤维拟同构的拓扑向量丛复形 .

考虑包含映射

$$\pi_0(\mathcal{M}) \xhookrightarrow{j} M \xhookrightarrow{i_0} \mathfrak{M}.$$

于是得到 $(i_0)^* T\mathfrak{M}$ 与 dg-流形 $\mathcal{M}.$ 的切层 $\mathcal{TM}$ 之间的典范识别

命题 5.15。 回顾典范映射

$$\psi_{\mathcal{M}} : \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \simeq \left(\pi_0(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|_{\pi_0(M)}\right) \to \mathcal{M}$$

存在一个典范识别 $\psi_{\mathcal{M}}^* \mathcal{TM} \simeq \mathcal{T}(Spec_{C^\infty}(C^\infty(\mathcal{M})))$，其中 $\mathcal{T}(Spec_{C^\infty}(C^\infty(\mathcal{M})))$ 是仿射导出 C^∞-概形 $Spec_{C^\infty}(C^\infty(\mathcal{M}))$ 的余切复形的对偶，定义见 [39,第 5] 章。

证明。 由于这是一个关于层的问题，只需在局部证明，因此可以归结为 $C^\infty(\mathcal{M})$ 拟自由的情形。取局部坐标后，由 [39, 备注 5.1.018] 中对拟自由 dg-C^∞-代数的余切复形的具体描述即可得到结论。□

引理 5.16。 [33] 设 $F: (V^\bullet, d) \to (W^\bullet, d)$ 是仿紧豪斯多夫空间 $X.$ 上有限维实向量丛的有界上链复形之间的态射。假设 F 诱导逐纤维拟同构。那么 F 在整体截面上诱导拟同构。

证明。 首先，通过取 F 的映射锥，可以将问题归结为证明：若 $(V^\bullet, d)$ 纤维逐点无环，则 $\Gamma(V^\bullet)$ 是一个无环复形。令 $x \in X.$。取某个 $k \in \mathbb{Z}$，并令V^k 和 V^{k-1} 的秩分别为 n 和 m。令 $x \in X.$。于是

$$\dim\left(V_x^k\right) = \dim(\ker(d_k(x))) + \dim(\mathrm{Im}(d_k(x))).$$

但像的维数就是秩，并且由于 $(V_x^\bullet, d_x)$ 无环，$\ker d_k(x) = \mathrm{Im}(d_{k-1}(x))$。因此

$$\mathrm{rank}(d_k(x)) = n - \mathrm{rank}(d_{k-1}(x)). \tag{6}$$

取一个开集 $U \ni x$，在该开集上 V^k 和 V^{k-1} 都平凡化。于是我们可以将d_k 和 d_{k-1} 识别为函数

$$U \to \mathbf{End}(\mathbb{R}^n)$$

[5]更准确地说，它有一个典范关联的拓扑向量丛复形。

and

$$U \to \mathbf{End}\left(\mathbb{R}^m\right).$$

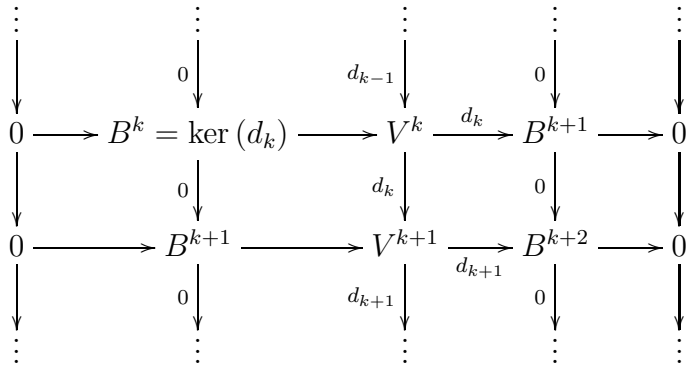
回忆一下，对于任意 n，函数

$$\operatorname{rank} : \mathbf{End}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{N}$$

是下半连续的。由此结合等式（6），可知 $\circ d_k$ 的秩也上半连续，因此是连续的，进而局部常值。所以 d_k 的像的维数是局部常值的。由此可得，对所有 k,

$$B_k := \operatorname{Im}\left(d_{k-1}\right)$$

是一个向量丛。由于 $(V^\bullet, d)$ 是纤维逐点无环的，我们有一个向量丛上链复形的短正合列



由于 X 是仿紧豪斯多夫的，且所有复形都有界，由 [17,引理 17。13]可知，存在一个向量丛上链复形的分裂。因此，可以选取一个非典范同构，将 $(V^\bullet,\ d)$ 与以下对象的映射锥

$$id : (B^\bullet, 0) \to (B^\bullet, 0),$$

并由此得出它是无环的。 □

推论 5.17。 设 $f : (M,\ L,\ \lambda) \to (N,\ E,\ \mu)$ 是曲弯 L_∞ [1]-代数丛之间的弱等价，并设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是相应的微分分次流形，配有相应的 $\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$-等变超流形 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 。那么，诱导映射的相对余切复形

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \to \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N})\right)$$

导出$\mathbf{C}^\infty$-概形的.....消失。

证明。 取对偶后，只需证明

$$\mathcal{T}\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\right) \to f^*\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N})\right)$$

是拟同构。根据命题 5.15，只需证明

$$T\mathfrak{M}|_{\pi_0(\mathcal{M})} \to f^*T\mathfrak{N}|_{\pi_0(\mathcal{N})}$$

是拓扑空间 $\pi_0(\mathcal{M})$ 上向量丛复形之间的拟同构。它在每个纤维上也是如此，而 $\pi_0(\mathcal{M})$ 是 M 的闭子空间，因此是仿紧豪斯多夫的。

此外，由于两个超流形都是有限维的，因此这两个复形都有界。结论现由引理 5.16 得出。□

回忆一下，给定任意超流形 $\mathfrak{M}$，都有一个典范识别 $\mathfrak{M}^{\mathbb{R}^{0|1}} \cong \Pi T\mathfrak{M}$。因此存在一个 $\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)^{op}$. 的典范作用。注意其中的 op，也就是说，这现在是幺半群的一个右作用，因为它由前复合给出。由于它是一个群，因此存在一个典范同构 $\mathbf{Aut}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right) \cong \mathbf{Aut}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)^{op}$，由取逆给出。它对无穷小生成元的影响是改变其符号。若 $\varepsilon' = -\varepsilon$ 且 $\delta' = -\delta$，则得到 $[\varepsilon', \delta'] = -\delta'$，这意味着微分的方向与之前相反！一个广为人知且备受赞誉的事实是，相应的 dg-$\mathbf{C}^\infty$-代数就是微分形式，而德拉姆微分即为上同调向量场 [37]。更具体地说，若 $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^{p|q}$，其坐标为 $(x_1, \ldots, x_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$，则 $\Pi T\mathfrak{M}$ 的坐标为 $\left(x_1, \ldots, x_p, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_q; \xi_1, \ldots, \xi_q, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p\right)$，其中带横线的坐标奇偶性相反。由典范 $\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)^{op}$ 作用诱导的上同调向量场具有如下形式

$$d = \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

¯要将其识别为德拉姆微分，作如下代换： $dx_i := \bar{x}_i$，以及 $d\xi_i := \xi$.

定理 5.18. 上同调向量场的莫尔斯引理。[41, 26] 设 $\mathfrak{M}$ 为一个超流形，带有上同调向量场 Q，且 p 为核心中的一个点，使得 $Q_p = 0$。那么存在 U 的一个邻域 p，以及与之对应的开超子流形 $\mathfrak{U} = (U, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}})$，和一个使上同调向量场相互交织的带基点微分同胚

$$\varphi : (\mathfrak{U}, Q, p) \xrightarrow{\sim} \left(\left(\Pi T\mathbb{R}^{p|q}, d\right) \times (V, D), (0, 0)\right)$$

其中 d 为德拉姆微分，V 为一个超域，且 $\mathcal{L}_D(p) = 0$. 此外，若Q 由 $\mathfrak{M}$上的$\mathbf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$-作用导出，则可以使其与欧拉场所诱导的分次相容。

推论 5.19. [33] 设 $f : (M, L, \lambda) \to (N, E, \mu)$ 是曲弯曲 L_∞ [1]-代数丛之间的一个弱等价。那么诱导的映射

$$\pi_0\left((M, L, \lambda)\right) \to \pi_0\left((N, E, \mu)\right)$$

是$\mathbf{C}^\infty$-概形的同构。

证明。设 $(\mathfrak{M}, Q)$ 和 $(\mathfrak{N}, Q')$ 是相应的带有上同调向量场的超流形。设 $p \in \pi_0((M, L, \lambda))$。于是我们可以将 p 视为 $|\mathfrak{M}|$ 中的一个点，使得 $Q_p = 0.$。由于 Q' 与 Q 是 f-相关的，我们也有 $Q'_{f(p)} = 0.$。由定理 5.18，我们可以找到包含 p 和 $f(p)$ 的开子超流形 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{U}'$，以及使上同调向量场相互交织的带基点微分同胚

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{U}, Q) & \xrightarrow{f|_{\mathfrak{U}}} & (\mathfrak{U}', Q') \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \left(\left(\Pi T\mathbb{R}^{p|q}, d\right) \times (V, D),\ (0,0)\right) & \xrightarrow{\varphi} & \left(\left(\Pi T\mathbb{R}^{p'|q'}, d'\right) \times (V', D'),\ (0,0)\right), \end{array}$$

使得 $\mathcal{L}_D(p)$ 且 $\mathcal{L}_{D'}(f(p)) = 0.$。考虑复合映射

$$\begin{array}{ccc} \left(\Pi T\mathbb{R}^{p|q}, d, 0\right) \times (V, D, 0) & \xrightarrow{\varphi} & \left(\Pi T\mathbb{R}^{p'|q'}, d, 0\right) \times (V', D', 0) \\ \uparrow{\scriptstyle \{0\}\times id} & & \downarrow{\scriptstyle pr_{V'}} \\ (V, D, 0) & & (V', D', 0), \end{array}$$

并将其记为 θ. 垂直箭头是拟同构，因为 $\left(\mathbf{C}^\infty\left(\Pi T\mathbb{R}^{p|q}\right), d\right) \simeq \mathbb{R}$. 由此可知，复合映射在 0 处的切复形上诱导拟同构。但切复形的微分分别是 $\mathcal{L}_D$ 和 $\mathcal{L}'_D$，而它们均为零。因此，θ 在超流形的切空间上诱导同构

$$\theta_* : T_0V \to T_0V',$$

因此，必要时缩小 V'，我们可以假设它是微分同胚。由于是拟同构，垂直映射还在 H^0 上诱导 $\mathbf{C}^\infty$- 环的同构，进而诱导经典轨迹作为 $\mathbf{C}^\infty$- 概形的同构。由于 θ 是微分同胚，因此 φ 在经典轨迹之间诱导 $\mathbf{C}^\infty$-概形的同构。由此可知，$\pi_0(f)$ 在 $\pi_0(\mathfrak{M})$ 中任意一点附近局部地是 $\mathbf{C}^\infty$-概形的同构。由于它也是集合之间的双射，因此必定是整体同构。□

定理 5.20. 设 $f : (M, L, \lambda) \to (N, E, \mu)$ 是曲弯 $L_\infty[1]$-代数丛之间的一个态射，其对应的微分分次流形分别为 $(\mathcal{M}, D)$ 和 $(\mathcal{N}, D')$。那么，f 是弱等价，当且仅当诱导映射 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是拟同构。

证明. 假设 f 是弱等价。由于 $\pi_0(f)$ 是满射，根据 [39, 命题 5.1.0.16]，我们可以将其相对余切复形识别为

$$\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$$

它作为 $\mathbb{R}$ 上交换微分分次代数映射的相对余切复形，即其代数的 相对余切复形。因此，根据推论 5.17，其代数余切复形消失。由于 $H^0(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$ 和 $H^0(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}))$ 是有限呈示的 $\mathbf{C}^\infty$-代数，由推论 5.19 可知，这些 $\mathbf{C}^\infty$-代数之间诱导的同态是同构。由此，根据 [28, 推论 7.4.3.4]，诱导映射

$$\mathbf{C}^\infty(\mathcal{N}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$$

是一个拟同构。

反过来，假设上述映射是一个拟同构。那么诱导的映射

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \to \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$$

是导出 $\mathbf{C}^\infty$-概形之间的等价。特别地，它在底层集合上是双射，因此

$$\pi_0(\mathcal{M}) \to \pi_0(\mathcal{N})$$

是一个双射，且相对余切复形消失。因此，根据命题 5.15，我们得出逐点切复形上的映射是拟同构。□

5.3. **导出纤维积**。导出微分几何研究的核心构造是导出纤维积。微分分次流形范畴 dg-Mfd$^{\leq 0}$ 上的纤维化对象结构使得这一构造可以精确定义，即

$$derived\ fibered\ products = homotopy\ pullbacks\ of\ dg\text{-}manifolds$$

此处我们不会介绍如何构造导出纤维积的完整理论。（例如，[4] 中介绍了一种利用 AKSZ 理论思想的构造方法。）不过，有一类微分分次流形的同伦拉回，其描述非常简单。假设 $\pi:\ \mathbb{E}\to\mathcal{M}$ 是分次流形上的一个分次向量丛（两者都配备平凡的上同调向量场），并且 s 是一个截面。我们将说明如何构造 s 与零截面的导出交。当然，其中最重要的情形是光滑流形上的经典向量丛的截面。

考虑移位向量丛 $\mathbb{E}[-1]$. 的底层分次流形。让我们看看在局部平凡化下这是什么样子。此时，截面可以等同于一个光滑映射 $\mathcal{M}\to\mathbb{V}.$。由于 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{V})$ 是由 $\mathbb{V}^*$生成的自由分次 $\mathbf{C}^\infty$-代数，这些数据等同于一组元素 $s_i^{(k)}\in\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$，每个 $s_i^{(k)}$ 的次数为 $-k$，其中 i 从 1 变化到 $\dim V_k.$。对每个 k 选取一组基 $\xi_1^{(k)}$，……，$\xi_{n_k}^{(k)}$，它属于 $(V_k)^*$，这样我们就可以将 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{E}[-1])$ 识别为分次多项式代数

$$\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\left[\xi_i^{(k)}\right],$$

其中每个 $\xi_i^{(k)}$ 的次数为 $-k-1$. 另一方面，表达式

$$s_i^{(k)}\frac{\partial}{\partial\xi_i^{(k)}}$$

是 $\mathbb{E}[-1]$ 上的上同调向量场，但另一方面，它实际上只是 Koszul 微分：

$$K\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}),s_i^{(k)}\right)=\left(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})\left[\xi_i^{(k)}\right],s_i^{(k)}\frac{\partial}{\partial\xi_i^{(k)}}\right).$$

然而，这个上同调向量场是全局定义的。在流形上的经典向量丛 $E\to M$ 这一情形中，最容易看出这一点。此时，

$$\mathcal{O}_{E[-1]}^{-\bullet}=\Gamma\left(\wedge^\bullet E^*\right).$$

这个上同调向量场是导子 ι_s，由将 s 插入 $E^*.$ 的截面的楔积中诱导而来。对于一般情形，由于 $\mathbb{E}[-1]$ 的 0 次纤维是零维的，因此有

$$\mathcal{O}_{\mathbb{E}}\cong\mathsf{Sym}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}\left(\underline{\Gamma}\left(\mathbb{E}^*\right)\right),$$

因此可以再次使用插入。

命题 5.21. 在上述情形下，$(\mathbb{E}[-1],\iota_s)$ 是 s 与零截面的导出纤维积。

证明。令 $\mathbb{E}\to\mathcal{M}$ 为任意一个分次向量丛，然后考虑拉回丛 $\pi^*\mathbb{E}\to\mathbb{E}.$。由于作为分次流形，$\pi^*\mathbb{E}\cong\mathbb{E}\times_{\mathcal{M}}\mathbb{E}$，因此存在 $\pi^*\mathbb{E}$ 的典范截面 Δ

由 $\mathbb{E}.$ 的恒等映射诱导。注意，若 s 是 $\mathbb{E}$ 的截面，则下图是一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}[-1], \iota_s) & \longrightarrow & (\pi^*\mathbb{E}[-1], \iota_\Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow[s]{} & \mathbb{E}. \end{array}$$

记 Z 为 $\mathbb{E}$ 的零截面，并记 Z_{-1} 为 $\pi^*\mathbb{E}[-1].$ 的零截面。于是我们可以分解

$$Z = \pi_{-1} \circ (Z_{-1} \circ Z),$$

其中 π_{-1} 是丛投影。我们断言 $Z_{-1} \circ Z$ 是弱等价。首先，注意到 ι_Δ 的零点集恰好是 $|\mathcal{M}| =$在 $Z_{-1} \circ Z$ 下的像： M，因此诱导的经典轨迹上的映射是双射。只需证明该映射在局部诱导结构层的拟同构。只需在局部进行讨论，并假设 $\mathbb{E}$ 平凡。若 e_1、.....、 e_m 是 $\mathbb{E}$ 的局部标架（取对偶，次数各不相同），引入 $\overline{e}_1$、 ..... 、 $\overline{e}_m$ 作为 $\mathbb{E}[-1]$ 的对应标架，于是 $|\overline{e}_i| = |e_1| - 1$，那么 ι_Δ 具有如下形式：$e_i \frac{\partial}{\partial \overline{e}_i}$. 因此，我们可以将结构层的局部取值识别为 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})\{e_1, \ldots, e_m\}$ 关于正则序列 e_1、.....、 e_m 的 Koszul 代数。由命题 3.35 可知，它拟同构于 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$。由于 $Z_{-1} \circ Z$ 是复合纤维化的截面

$$\pi^*\mathbb{E}[-1] \to \mathbb{E} \to \mathcal{M},$$

且 $Z_{-1} \circ Z$是一个截面，上述纤维化是平凡纤维化。因此，上述拉回图是下图表的同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{M} \\ & & \downarrow Z \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{s} & \mathbb{E}. \end{array}$$

□

设 $E \to M$ 是流形上的一个向量丛，且有一个截面 $s.$ 。考虑 s 本身就是零截面的特殊情形。那么 $\iota_s = 0$.这意味着，零截面与自身的导出交是 $E[-1]$，即一个微分为 0 的分次流形。由于微分为零， $E[-1]$ 的零截面是一个微分分次映射，因此我们可以继续这一过程，取零截面与自身的导出交，得到 $E[-2]$，依此类推。此外，若 E_1 和 E_2 是向量丛，那么作为分次流形（而非向量丛），我们有

$$E_1[-1] \oplus E_2[-2] \cong E_1[-1] \times_M E_2[-2].$$

以此类推，根据 Batchelor 定理，我们可以得出结论：每个分次流形都可以通过流形的同伦拉回得到。

注5.22。 上述情况的一个特例是 $M = *$，而 E 只是一个向量空间。此时，零截面就是零向量 $* \to E.$ 的嵌入。因此，导出纤维积 $* \times^h_E * = E[-1].$ 。也可以将其视为一个导出环空间。 在这里，我们看到

对于向量空间，导出环空间就是环函子 $\Omega = (\cdot)[-1]$（对于分次向量空间，情况也更一般地成立）。

定义 5.23。 设微分分次流形 $(\mathcal{M}, D)$ 上的一个**微分分次向量丛** 是一个分次向量丛$\mathbb{E} \to \mathcal{M}$，并配备一个上同调向量场 Q_E，使得丛投影是一个微分分次映射。

定义 5.24。 设 $\mathcal{M}$ 是一个分次流形。根据分次流形的 Batchelor 定理（定理 2.25），存在定义在核心 $M = |\mathcal{M}|$ 上的向量丛 $E_1, E_2, \ldots, E_m$，使得

$$\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E_i[-i],$$

其中每个 $\pi_k : E_k \to M$ 都是正秩向量丛。整数 m 称为 $\mathcal{M}$的振幅。（按照惯例，我们称 $\mathcal{M}$ 的振幅为 $[-m, 0]$.）

注记 5.25。 振幅为 0 的微分分次流形就是一个流形。

定理 5.26。 给定任意一个振幅为 m 的微分分次流形 $\mathcal{M}$， 存在一个规范的、振幅为 $m-1$ 的微分分次流形 $\mathcal{N}$， 一个微分分次向量丛 $\mathbb{W} \to \mathcal{N}$，其中 $\mathbb{W}$ 的振幅也为 $m-1$，以及一个微分分次截面 λ，使得 $\mathcal{M}$ 是 λ 与零截面的导出纤维积。

特别地，每个微分分次流形都可以通过有限次迭代导出纤维积由流形构造而成。

证明。 为固定非 定化，根据 Batchelor 定理，存在一个分次流形的同构 s

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{M} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i[-i] \\ \downarrow & \swarrow_{\pi} & \\ M. & & \end{array}$$

其中每个 $\pi_k : E_k \to M$ 都是秩为 $n_k > 0$. 的向量丛

显然，$(\mathcal{M}, D) \cong (\mathbb{E}, \psi_* D)$。记 $Q = \psi_* D$. 对于所有 $k = 0, \ldots, m$，令 $\mathbb{E}_{\leq k}$为分次向量丛

$$\bigoplus_{i=1}^{k} E_i[-i] \xrightarrow{\pi_{\leq k}} M.$$

将其底层分次流形记为 $\mathcal{M}_k$。注意，底层分次流形之间存在一个典范同构

$$\mathcal{M}_{k+1} \cong \pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k-1]$$

（尽管向量丛结构不同），在此映射下，位于 M 上的分次向量丛之间的典范映射

$$\mathbb{E}_{\leq k+1} \to \mathbb{E}_{\leq k},$$

仅将其视为分次流形之间的光滑映射时，可以将其识别为

$$\pi_{\leq j}^* E_{k+1}[-k-1] \to \mathcal{M}_k.$$

由于 Q 必须使函数的次数增加 $\mathbf{1}$，因此对于所有 k， Q 都限制为 $\mathcal{M}_k$上的上同调向量场 Q_k ，从而产生一个微分分次流形的纤维化塔（对应于相应超流形的次浸没）

$$(\mathcal{M}, D) \cong (\mathcal{M}_m, Q_m) \xrightarrow{p_m} (\mathcal{M}_{m-1}, Q_{m-1}) \xrightarrow{p_{m-1}} \dots (\mathcal{M}_1, Q_1) \xrightarrow{\pi_1} (\mathcal{M}_0, Q_0) = (M, 0)$$

选取一个开覆盖 $(U_\alpha \hookrightarrow M)_\alpha$ ，使得每个 E_k 都平凡化为

$$\varphi_\alpha^{(k)} : E_k|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times V_k,$$

对于某个固定的向量空间 V_k。对于所有 k，令

$$\mathbb{V}_{\leq k} := \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \left[-i\right],$$

并记

$$\varphi_\alpha : \mathbb{E}|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{V} \text{ and } \varphi_\alpha^{\leq k} : \mathbb{E}_{\leq k}|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{V}_{\leq k}$$

为诱导的平凡化。

对于每个 V_k，选取一个基 $\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{n_k}^{(k)}$，其中属于 $(V_k)^*$。那么在 $U_\alpha \times \mathbb{V}$ 上诱导的坐标系中，

$$(\varphi_\alpha)_* Q = f_{j,\alpha}^{(-k+1)} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(k)}},$$

其中 $f_{j\,\alpha}^{(-k+1)}$，是一个次数为 $-k+1$ 的 $(\varphi_\alpha)_* Q$-恰当元素，属于

$$\mathbf{C}^\infty\left(U_\alpha \times \mathbb{V}\right) \cong \mathbf{C}^\infty\left(U_\alpha\right) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathsf{Sym}\left(\mathbb{V}^*\right).$$

固定 k，注意到对于所有的 $j = 1, \dots, n_{k+1}$

$$f_{j,\alpha}^{(-k)} = \left(\varphi_\alpha^{\leq k+1}\right)_* Q_{k+1}\left(\xi_j^{k+1}\right),$$

其次数为 $-k$，因此它不依赖于 p_{k+1}. 的纤维坐标。将这些组合起来，得到一个分次流形之间的映射

$$f_\alpha^{(k)} : U_\alpha \times \mathbb{V}_{\leq k} \to V_{k+1}\left[-k\right],$$

由于 $f_\alpha^{(k)}$ 的每个分量都是 Q_{k+1}-闭的，因此它成为一个微分分次流形之间的映射

$$\left(U_\alpha \times \mathbb{V}_{\leq k}, \left(\varphi_\alpha^{\leq k}\right)_* Q_k\right) \to \left(V_{k+1}\left[-k\right], 0\right),$$

因此它是平凡微分分次向量丛的一个截面

$$\left(U_\alpha \times \mathbb{V}_{\leq k}\right) \times V_{k+1}\left[-k\right] \to \left(U_\alpha \times \mathbb{V}_{\leq k}\right).$$

记 λ_α 为 $pr_{k+1}^* E_{k+1}\left[-k\right]$ 在 $\mathcal{M}_k$. 的分次开子流形 $\mathbb{E}_{\leq k}|_{U_\alpha}$ 上的限制所典范诱导的截面。令

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta}^k := \mathbb{E}_{\leq k}|_{U_\alpha} \cap \mathbb{E}_{\leq k}|_{U_\beta}.$$

我们声称

$$\lambda_\alpha|_{\mathcal{U}_{\alpha\beta}^k} = \lambda_\beta|_{\mathcal{U}_{\alpha\beta}^k}. \tag{7}$$

由于 E_{k+1} 是 M上的向量丛，我们可以将诱导的转移函数写成如下形式

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta}\times V_{k+1} & \xrightarrow{\left(\varphi_\beta^{(k)}\right)^{-1}} & E_{k+1}|_{U_{\alpha\beta}} & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{(k)}} & U_{\alpha\beta}\times V_{k+1} \\ (x,v) & & \mapsto & & \left(x, g_{\alpha\beta}^{(k+1)}(x)\, v\right). \end{array}$$

为验证 (7)，只需证明

$$f_{i,\alpha}^{(k)} = \left(g_{\alpha\beta}^{(k+1)}\right)_{il} f_{l,\beta}^{(k)}.$$

首先，注意到

$$\begin{aligned} f_{j,\alpha}^{(-k)} &= \left(\varphi_\alpha^{\leq k+1}\right)_* Q_{k+1}\left(\xi_j^{k+1}\right) \\ &= Q_{k+1}\left(\xi_i^{(k+1)}\circ\varphi_\alpha^{\leq k+1}\right) \\ &= Q_{k+1}\left(\xi_i^{(k+1)}\circ\varphi_\alpha^{\leq k+1}\circ\left(\varphi_\beta^{\leq k+1}\right)^{-1}\circ\varphi_\beta^{\leq k+1}\right) \\ &= Q_{k+1}\left(\xi_i^{(k+1)}\circ\varphi_{\alpha\beta}^{\leq k+1}\circ\varphi_\beta^{\leq k+1}\right) \\ &= \left(\varphi_\beta^{\leq k+1}\right)_* Q_{k+1}\left(\xi_i^{(k+1)}\circ\varphi_{\alpha\beta}^{\leq k+1}\right) \\ &= \left(\varphi_\beta^{\leq k+1}\right)_* Q_{k+1}\left(\left(g_{\alpha\beta}^{(k+1)}\right)_{il}\xi_l^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

注意， $g_{\alpha\beta}^{(k+1)}$ 是 M上的函数，因此 $Q\left(g_{\alpha\beta}^{(k+1)}\right)_{il}=0$，从而

$$\begin{aligned} f_{j,\alpha}^{(-k)} &= \left(g_{\alpha\beta}^{(k+1)}\right)_{il}\left(\varphi_\beta^{\leq k+1}\right)_* Q_{k+1}\left(\xi_l^{(k+1)}\right) \\ &= \left(g_{\alpha\beta}^{(k+1)}\right)_{il} f_{l,\beta}^{(k)}. \end{aligned}$$

因此，我们构造了 $\pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k]$ 的一个整体截面 λ

Let

$$r_k : \pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k] \to \mathcal{M}_k$$

是丛投影。拉回丛 $r_k^*\pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k] \to \pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k]$ 具有一个由对角映射 Δ 导出的典范截面。插入算子 ι_Δ 因而可以识别为 $r_k^*\pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k-1]$上的典范上同调向量场；在局部坐标中，它可以识别为~丛 $\pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k]$. 的纤维坐标所构成的 Koszul复形。此外， ι_Δ 与由 Q_k. 诱导的自然上同调向量场 Q_k~交换。因此， $\iota_\Delta + Q_k$ 是一个上同调向量场。事实上，它不过是将 $\pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k]$ 写成微分分次流形的拉回时所得到的自然上同调向量场

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\leq k}^* E_{k+1}[-k] & \longrightarrow & (E_{k+1}[-k], \iota_\Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_k & \xrightarrow{\pi_{\leq k}} & M. \end{array}$$

根据命题 5.21 的证明，复合映射

$$\left(\pi_{k+1}^* E_{k+1}\left[k-1\right], \iota_\Delta\right) \to E_{k+1}\left[-k\right] \to M$$

是一个平凡纤维化。由于平凡纤维化在拉回下保持不变，

$$\left(r_k^* \pi_{\leq k}^* E_{k+1}\left[-k-1\right], \iota_\Delta\right) \to \pi_{\leq k}^* E_{k+1}\left[-k\right] \xrightarrow{\rho} \mathbb{E}_{\leq k}$$

也同样如此。此外，$\pi_{\leq k}^* E_{k+1}\left[-k\right]$ 的零截面分解为此映射的一个截面，随后再接上面的映射 ρ。根据构造，我们有

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_{k+1}, Q_{k+1}\right) & \longrightarrow & \left(r_k^* \pi_{\leq k}^* E_{k+1}\left[-k-1\right], \iota_\Delta\right) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{k+1}} & & \downarrow \\ \left(\mathcal{M}_k, Q_k\right) & \xrightarrow[\lambda]{} & \left(\pi_{\leq k}^* E_{k+1}\left[-k\right], 0\right) \end{array}$$

是一个拉回图，并且由于右侧的垂直箭头是一个纤维化，因此它是一个同伦拉回；根据上文，它可以被识别为 λ与零截面的导出纤维积。由于此构造对所有 k均成立，特别地对 m 也成立，从而证明了该定理。□

6. The equivalence of ∞-categories

6.1. 完全忠实性。记$\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}$ 为通过形式地将弱等价取逆而得到的 dg-Mfd$_{\leq 0}$ 上的 ∞-范畴。

考虑 1-范畴的典范函子

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}^\infty : \mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0} & \to & \left(\underline{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}}_{\leq 0}\right)^{op} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right) \end{array}$$

根据定理 5.20，它将弱等价映为拟同构，因此得到一个诱导函子，介于 ∞-范畴之间

$$\mathbf{C}^\infty : \mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \to \mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}^{op}.$$

我们将证明它是全忠实的。

引理 6.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个微分分次流形。那么 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是同伦有限表示的。

证明。设 $\mathcal{M}$ 是一个微分分次流形。选取一个嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$，使其成为闭子流形。设 $M \subset U_i$ 是 $i=1$的管状邻域（其中 $i=1$为 2），且 U_1 是 U_2. 的真子集。令 $f_i : M \hookrightarrow U_i$ 为嵌入，其收缩为 p_i.。令 $\mathcal{U}_i$ 为微分分次流形的拉回

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_M \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow[p_i]{} & M. \end{array}$$

那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 的收缩。令 Q 为 $\mathcal{U}_2.$ 上的上同调向量场。令 λ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数，使其在 U_1 上恒等于 1，并在 $U_2.$ 之外为零。令 $E_1, \ldots, E_m$ 为 U_2 上的一列向量丛，使得

$$\mathcal{U}_2 \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E_i\left[-i\right]$$

作为分次流形。对于每个 i，选取一个向量丛 F_i，使得 $E_i \oplus F_i$ 可平凡化为 $U_2 \times \mathbb{R}^{N_i}.$。记 V_i 为 $\mathbb{R}^n$ 上秩为 $N_i.$ 的平凡向量丛。考虑分次流形

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i\left[-i\right].$$

赋予其奇向量场 $\lambda \cdot Q$，由于 $Q\lambda = 0.$，该向量场是上同调的。这个微分分次流形的核心是 $\mathbb{R}^n$，而 $\mathcal{N} \times_{\mathbb{R}^n} U_2$ 是一个微分分次流形，$\mathcal{U}_2$ 是它的收缩。注意，$\mathsf{C}^\infty(\mathcal{N})$ 是拟自由且有限生成的。由命题 5.5，$\mathsf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right)$ 是同伦有限表示的。由于 $\mathsf{C}^\infty\left(\mathcal{N} \times_{\mathbb{R}^n} U_2\right)$ 是 $\mathsf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right)$ 的局部化，因此它也是（因为 $\mathsf{C}^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ 和 $\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 都是同伦有限表示的，且紧对象在推出下封闭）。由此可知，$\mathsf{C}^\infty(\mathcal{N} \times_{\mathbb{R}^n} U_2)$ 是一个紧对象。因此，它的任意收缩也都是紧对象。所以 $\mathsf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ 是一个紧对象，即同伦有限表示的。□

推论 6.2。 函子 $\mathbf{C}^\infty : \mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \to \mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}^{op}$ 诱导出一个函子

$$\Psi : \mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \to \mathsf{DMfd},$$

从微分分次流形的 ∞-范畴到导出流形的 ∞-范畴。

证明。 这由推论 3.26 立即得出。 □

命题 6.3。

$$\mathbf{C}^\infty : \mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \to \mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}^{op}$$

保持拉回。

证明。 只需证明，若

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathfrak{L} & \xrightarrow[f]{} & \mathfrak{N} \end{array}$$

是 $\mathsf{End}\left(\mathbb{R}^{0|1}\right)$-超流形的拉回图，其中 $\mathcal{L}$、$\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{P}$ 是相应的微分分次流形，而 p 是次浸没，则 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{P})$ 是

$$\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\otimes^{\mathbb{L}}} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)$$

在 $\underline{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}$ 中。根据定理 5.7，我们知道

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{P}\right)\right) \simeq \left(\pi_0\left(\mathcal{P}\right), \mathcal{O}_{\mathcal{P}}|_{\pi_0(\mathcal{P})}\right).$$

存在一个典范同构

$$\pi_0\left(\mathcal{P}\right) \cong \pi_0\left(\mathcal{L}\right) \times_{\pi_0(\mathcal{N})} \pi_0\left(\mathcal{M}\right).$$

由于

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty} : \mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}^{op}_{\leq 0} \to \mathrm{Loc}_{\mathbf{C}^\infty}$$

保持极限，因此我们还有

$$\pi_0\left(\mathcal{L}\right) \times_{\pi_0(\mathcal{N})} \pi_0\left(\mathcal{M}\right) \cong \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(H^0\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\otimes^{\mathbb{L}}} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right)\right).$$

因此，我们得到了 $\mathsf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathsf{C}^\infty(\mathcal{P}))$ 与下列空间之间的底层空间的一个识别

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\otimes^{\mathbb{L}}} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

设 $(z,x) \in \pi_0(\mathcal{L}) \times_{\pi_0(\mathcal{N})} \pi_0(\mathcal{M})$。那么，$x$ 可识别为 $\mathfrak{M}.$ 中的一个点。由于 p 是浸没，存在 x 的一个开邻域 $\mathcal{U}$，以及 $p(x)$ 的相应开邻域 $\mathcal{W}$ 和微分同胚，使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^{n|m} \times \mathbb{R}^{l|k} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^{n|m} \end{array},$$

这里我们将开子集与其超子流形相识别，并假设 $\mathcal{U} \subseteq p^{-1}(\mathcal{W})$。令 $\mathcal{V} := (f^{-1}(\mathcal{W}) \times \mathcal{U}) \cap \mathcal{P}.$。注意

$$\mathcal{V} \cap \pi_0\left(\mathcal{P}\right)$$

是 (z,x) 的一个开邻域。由引理 5.6 和定理 5.7 可知

$$\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{P}))}\left(\mathcal{V}\right) \cap \pi_0\left(\mathcal{P}\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{P}}\left(\mathcal{V}\right).$$

此外，我们有

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\otimes^{\mathbb{L}}} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right)|_{\mathcal{V}} \simeq \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(f^{-1}\mathcal{W}\right)\right) \times_{\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{W}))} \mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{U}\right)\right).$$

因此，结构层在 $\mathcal{V}$ 处取值为同伦推出

$$\mathbf{C}^\infty\left(\left(f^{-1}\mathcal{W}\right) \cap \mathcal{L}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{W}\cap\mathcal{N})}{\otimes^{\mathbb{L}}} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{U} \cap \mathcal{M}\right).$$

但 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{W} \cap \mathcal{N}) \to \mathsf{C}^\infty(\mathcal{U} \cap \mathcal{M})$ 是一个拟自由扩张，因为相应的超流形映射 $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ 只是投影掉 $\mathbb{R}^{l|k}$ 因子。因此，同伦推出就是普通推出。注意，我们可以写成

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{W} \times \mathbb{R}^{l|k},$$

并识别

$$\left(f^{-1}\left(\mathcal{W}\right) \times \mathcal{U}\right) \cap \mathfrak{P} \cong f^{-1}\left(\mathcal{W}\right) \times \mathbb{R}^{l|k}.$$

由于在代数层面，自由扩张的推出总是自由扩张，因此我们可以将其识别为

$$\mathbf{C}^\infty\left(\left(f^{-1}\mathcal{W}\right) \cap \mathcal{L}\right) \to \mathbf{C}^\infty\left(\left(f^{-1}\mathcal{W}\right) \cap \mathcal{L}\right) \underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{W}\cap\mathcal{N})}{\otimes} \mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{U} \cap \mathcal{M}\right)$$

with

$$\mathbf{C}^\infty\left(f^{-1}\mathcal{W}\cap\mathcal{L}\right)\to\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{V}\cap\mathcal{P}\right).$$

由此可得

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{P}\right)\right)\simeq\mathbf{Spec}_{\mathbf{C}^\infty}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right)\underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}}\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

根据引理 6.1，$\mathsf{C}^\infty(\mathcal{L})$、$\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{N})$ 是 $\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}$ 中的紧对象。由于紧对象的推出仍是紧对象，因此可得

$$\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{N}\right)\underset{\mathbf{C}^\infty(\mathcal{L})}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}}\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)$$

是紧的，即同伦有限表示。命题 4.4 随即推出，它等于其结构层的整体截面。由于 $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{P})$ 也满足同样性质，故得证。□

定理 6.4.

$$\mathbf{C}^\infty:\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}\to\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}^{op}$$

是全忠实的。

证明。根据定理 5.26，每个微分分次流形都可以通过从流形开始，在$\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}$ 中进行有限次拉回迭代得到。这将问题归结为证明，对于任意微分分次流形 $\mathcal{M}$

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}\left(\mathcal{M},N\right)\simeq\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}\left(\mathbf{C}^\infty\left(N\right),\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right)$$

对任意流形 N. 同理，每个流形都是某个笛卡尔流形的横截拉回的收缩，也就是说，它们具有 $\mathbb{R}^n$ 的形式；而每个 $\mathbb{R}^n$ 显然都是$\mathbb{R}$. 的有限积。因此，这进一步归结为证明

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)\simeq\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}\right),\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

注意，对于所有 k，$(\mathbb{R}[-k],+)$ 在 $\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}$ 和 $\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}$ 中都是阿贝尔群对象，因为积是同伦纤维积。此外，C^∞ 是一个保有限积的函子，因此典范映射

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\left[-k\right]\right)\to\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}\left[-k\right]\right),\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right)$$

是 $\mathcal{S}\mathsf{pc}$ 中阿贝尔群对象的同态。应用 π_0 后，我们得到一个普通阿贝尔群的同态

$$F:\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\left[-k\right]\right)\to\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathbb{R}\left[-k\right]\right),\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

注意，在 1-范畴的情形下，我们有 $\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R}[-k]) \cong Z^{-k}\mathsf{C}^\infty(\mathcal{M})$，即由 $\mathsf{C}^\infty(M)$ 中次数为 $-k$ 的元素 f 所构成的阿贝尔群，满足 $Df=0$. 函子

$$h_{\mathcal{W}}:\mathsf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}\to\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}$$

因此诱导出一个同态

$$Z^{-k}\left(\mathbf{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)\right)\to\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\left[-k\right]\right).$$

此外，作为带基点微分分次流形， $\mathbb{R}[-k] \cong \Omega^k\mathbb{R}$. 我们的意思是， $\mathbb{R}[-1]$ 是原点与其自身在 $\mathbb{R}$中的导出交， $\mathbb{R}[-2]$ 是原点与其自身在 $\mathbb{R}[-1]$中的导出交，依此类推。由此可知

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{D}g\mathcal{M}fd_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}[-k]) \simeq \Omega^k \mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{D}g\mathcal{M}fd_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}).$$

应用 $\mathbf{C}^\infty$，我们还有 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}[-k])$ 是 $\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}^{op}_{\leq 0}$. 中 $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ 的 k 重环空间。因此

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}[-k]), \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \simeq \Omega^k \mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}), \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})).$$

因此，由推论 3.23 可得

$$\begin{aligned}
\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}[-k]), \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) &\cong \pi_0\Omega^k\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}), \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \\
&\cong \pi_0\Omega^k\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}) \\
&\cong \pi_k\Gamma(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \\
&\cong H^{-k}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})),
\end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$ 是相应的单纯阿贝尔群。由于复合态射

$$\begin{array}{c}
Z^{-k}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \cong \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathbf{dg\text{-}Mfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}[-k]) \\
\downarrow \\
\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{D}g\mathcal{M}fd_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}[-k]) \\
\downarrow{\scriptstyle F} \\
\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathbf{dgC}^\infty\mathbf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}[-k]), \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})) \cong H^{-k}(\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))
\end{array}$$

is s满射，所以 F. 此外，由 [15, 命题 3.23],映射空间

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{D}g\mathcal{M}fd_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}[-k])$$

是一个上循环范畴的几何实现，也就是说，是一个跨度范畴 $\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathcal{M}' \to \mathbb{R}[-k]$，因此每个元素 $\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}^{\mathcal{D}g\mathcal{M}fd_{\leq 0}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}[-k])$ 都具有如下形式： $[f]$，其中 $f\colon \mathcal{M}' \to \mathbb{R}[-k]$，且$\mathcal{M}'$ 与 $\mathcal{M}$. 拟同构。若 $F([f]) = 0$，通过对 $\mathcal{M}'$ 重复相同的论证，这意味着 f 在 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}')$ 中的 $-k^{th}$ 次上同调类为零。这意味着存在$g \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 中次数为 $-k-1$ 的元素，使得 $Dg = f$. 因此，存在一个虚线同态 φ，如

$$\begin{array}{ccc}
\left(\mathbf{C}^\infty\{x, \epsilon\}, x\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}') \\
\uparrow & \nearrow_{f} & \\
\mathbf{C}^\infty\{x\} & &
\end{array}$$

其中 $|x| = -k$ 和 $|\epsilon| = -k-1$. 一方面， 代数 $\left(\mathbf{C}^\infty\{x, \epsilon\}, x\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)$ 是 Koszul 代数 $K(\mathbf{C}^\infty\{x\}, x)$，且 x 不是零因子，因此 $\left(\mathbf{C}^\infty\{x, \epsilon\}, x\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)$ 与 $\mathbf{C}^\infty\{x\}/(x)$ 拟同构 $= \mathbb{R}$. 但是 $\left(\mathbf{C}^\infty\{x, \epsilon\}, x\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)$ 也等于 $\mathbf{C}^\infty(D)$，其中 D 是一个微分分次流形，其

底层分次流形为 $\mathbb{R}[-k]\times\mathbb{R}[-k-1]$，其上同调向量场为 $x\frac{\partial}{\partial\epsilon}$. 因此我们得到 f 的一个分解：$\mathcal{M}'\to\mathbb{R}[-k]$ 为

$$\mathcal{M}'\xrightarrow{\tilde{g}}D\xrightarrow{f'}\mathbb{R}[-k],$$

因此 f 属于.....的本质像

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},D)\to\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R}[-k]).$$

但 D 与点弱等价，因此 $\mathbb{M}\mathrm{ap}^{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},D)$ 是可缩的。这意味着 f 与常值映射 $\mathcal{M}\to\mathbb{R}[-k]$（取值为 0）处于同一个连通分支中，因此 $[f]=0$ 属于阿贝尔群

$$\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R}[-k]).$$

因此 F 也是单射，从而是一个同构。但由于

$$\begin{aligned}\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R}[-k]) &\cong \pi_0\Omega^k\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R})\\ &\cong \pi_k\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R})\end{aligned}$$

类似地

$$\pi_0\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}[-k]),\mathcal{M})\cong\pi_k\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}),\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})),$$

由此可知，所诱导的 Kan 复形映射

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}}(\mathcal{M},\mathbb{R})\simeq\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{dgC}^\infty\mathsf{Alg}_{\leq 0}}(\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}),\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M}))$$

在 π_0 上是双射，并且在以值为 0 的常值映射为基点的所有同伦群上诱导同构；但由于这些空间是 $\mathcal{S}\mathsf{pc}$ 中的阿贝尔群对象，它们是群状的 E_∞- 空间，因此这足以证明该映射是弱等价。□

推论6.5。

$$\Psi:\mathcal{DgMfd}_{\leq 0}\to\mathsf{DMfd}$$

是全忠实的。

6.2. **本质满射**。 若 $\mathcal{C}$ 是任意纤维对象范畴，由于它具有有限同伦拉回和一个终对象，且每个对象都是可纤维的，因此可知 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]_\infty$具有有限极限。由于 Ψ 是全忠实的，并且根据命题 6.3，它保持有限极限（显然它保持终对象），因此 Ψ 的本质像在 DMfd 中对有限极限封闭。根据推论 3.27，这意味着每个导出流形都是本质像中某个导出流形的收缩。 Ψ. 我们希望证明 Ψ 实际上是本质满的，即对这些收缩封闭。我们将需要一系列预备结果。

记 Idem 为由一个幂等元生成的自由 1-范畴 $e:\ C\to C$. 展开定义可以看出，对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$， 函子 $E:\ \mathsf{Idem}\to\mathcal{C}$ 等价于定义 [29, 定义 4.4.5。4]意义下的一个幂等元——这正是一个同伦相干幂等元。

引理 6.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个组合模型范畴。将 $\mathcal{C}$ 中的幂等元 $e:\ C\to C$ 视为图表 $E:\mathsf{Idem}\to\mathcal{C}$. 若 C 是余纤维的，则 e 是投射余纤维的。

证明。设 $b\colon B\to B$ 和 $a\colon A\to A$ 是幂等元。根据投射模型结构的定义，若映射 $\pi\colon A\to B$ 与这些幂等元相容，则它是平凡纤维化，当且仅当π 属于 $\mathcal{C}$。只需证明：给定这样的 π，若 B 是余纤维的，则存在 π的一个截面 s，使得 $sb=as.$。由于 $\mathcal{C}$是幂等完备的，我们可以将 b 分解为

$$B\xrightarrow{r}C\xhookrightarrow{i}B,$$

与 $r\circ i=id_C$，并将 a 分解为

$$A\xrightarrow{p}K\xhookrightarrow{j}A,$$

与 $jp=a.$。由于 C 是 B的一个收缩， B 也是余纤维的。因此，拉回平凡纤维化

$$C\times_B A\to C$$

有一个截面 $\lambda.$。令 $s=j\lambda r.$。于是，由于 $b=ir$，我们有 $sb=s.$。但又由于 $a=jp$，$as=s.$。这意味着 λ 是一个态射（B，b）$\to$（A，a），它是 $\pi.$ 的一个截面。由此可知（B，b）是投射余纤维的。□

定义 6.7。令 Qf 表示 dgC$^\infty$Alg$_{\leq 0}$ 中由有限生成的拟-

。自由 dg-C$^\infty$-代数，并令 Qf 表示其在 ∞-范畴 dgC$^\infty$Alg$_{\leq 0}$· 中对应的子范畴

注 6.8. 函子 C$^\infty$: dg-Mfd$_{\leq 0}$ →dgC$^\infty$Alg$_{\leq 0}$ 限制后，在具有欧几里得底空间的 dg-Mfd$_{\leq 0}$ 全子范畴与 Qf^{op}.之间给出一个等价

引理 6.9. 设 $p\colon \mathcal{A}\to \mathsf{B}$ 是 Qf. 中的一个映射。那么存在一个规范分解$\mathcal{A}\to\overline{B}\to B,$，其中 $\overline{B}\in$ Qf,，使得 $A\to\overline{B}$ 是一个余纤维化，而 $\overline{B}\to B$ 是一个平凡纤维化。

证明. 设 $\mathcal{A}=\left(\mathbf{C}^\infty\{x_1,\dots,x_n\},d=f^i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$，其中 $|x_i|=n_i$，并设 $\mathsf{B}=\left(\mathbf{C}^\infty\{y_1,\dots,y_m\},d=g^j\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$，其中 $|y_i|=m_i.$。对于所有 i，令 $p_i:=p(x_i)\in\mathcal{B}.$ 令其底层分次代数为

$$\overline{B}=\mathbf{C}^\infty\{x_1,\dots,x_n,\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},y_1,\dots,y_m\},$$

取 $|\overline{x_i}|=n_i-1$，并赋予它微分

$$D=f^i\frac{\partial}{\partial x_i}+g^j\frac{\partial}{\partial y_j}+\left(p_i-x_i-\overline{x_k}\frac{\partial f^i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial\overline{x_i}}.$$

容易验证其平方为零。设 $q\colon \mathcal{A}\to\overline{B}$ be 给定 y $q(x_i)=x_i$，且$r:\overline{B}\to$B 由 $r(x_i)=p_i$，$r(\overline{x_i})=0$和 $r(y_j)=y_j.$给出。容易验证这两者都是微分分次代数的同态。注意，还有一个同态$\varphi\colon \mathcal{B}\to\overline{\mathcal{B}}$，定义为 $\varphi(y_j)=y_j$，它是 $r.$的截面。我们有一个分解 $p=r\circ q$，且 q 是拟自由扩张，因此是余纤维化。此外，$\overline{B}$ 属于 Qf。态射 r是满射，因此是纤维化。只需证明它是拟同构。设 $\Gamma:=\overline{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$。那么 Γ 是$\overline{\mathcal{B}}.$ 的次数为 -1 的导子。可以验证

$$[D,\Gamma]=(D\circ\Gamma+\Gamma\circ D)=jr-id.$$

由此可知， jr 与恒等映射链同伦。由于 $rj=id$，这尤其意味着 r 是一个拟同构，因此也是一个平凡纤维化。□

。**命题 6.10.** Qf 在 $\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$ 中对有限余极限封闭

证明。 由于它包含初始对象，只需证明 Qf 在 $\mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$ 中对同伦推出封闭。根据引理 6.9，可以通过将一个映射替换为拟自由扩张来显式构造同伦推出。这意味着该推出也将是一个拟自由代数的拟自由扩张，因而是拟自由的（并且显然是有限生成的）。□

定理 6.11. 函子 $\Psi : \mathcal{DgMfd}_{\leq 0} \to \mathsf{DMfd}$ 是 ∞-范畴之间的等价。

证明。根据定理 6.4，该函子是全忠实的。只需证明它本质满。为此，只需证明每个同伦有限表示的 dg-C^∞-代数都属于 C^∞. 的本质像。根据命题 3.25，这样的代数是自由 C^∞-代数余极限的一个收缩，即形如 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的代数，其中 n. 不过，

。它们都属于 Qf，因此由命题 6.10 可知，其余极限也属于 Qf。令

$$E : \mathsf{Idem} \to \mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$$

。为属于 Qf 的同伦幂等元。 根据 [29, 命题 A.3.4。12], 我们可以将这样的图表建模为 $\mathbf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}$中的一个实际收缩

$$e : \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

通过拟同构之锯齿链与 $\mathcal{A}$相连，而 $\mathcal{A}$属于 Qf。由于 $\mathcal{B}$ 是余纤维的，且所有对象都是可纤维的，我们可以选取一个合法的拟态射 $f : B \to \mathcal{A}$. 。接着我们可以分裂幂等元 e，再通过 f 将其拉回，从而得到一个诱导收缩图表，进而在 B 上得到一个诱导幂等元 e'。显然，在投射模型结构下的 $\mathrm{Fun}\left(\mathsf{Idem}, \mathsf{dgC^\infty Alg}_{\leq 0}\right)$.中，这两个幂等元之间存在诱导的弱等价。此外，由于 B 是余纤维的，根据引理 6.6， e' 是投射余纤维的。因此，其分裂是一个同伦分裂。然而，由于 $\mathcal{B}$ 等价于某个微分分次流形上的函数代数，它的任何收缩也都如此。这说明有限个自由 C^∞-代数的余极限的收缩拟同构于某个微分分次流形上的函数代数。由于每个同伦有限生成的微分分次 C^∞-代数都具有这种形式，证明得证。□

推论 6.12. 一个微分分次C^∞-代数是同伦有限生成的，当且仅当它与某个微分分次流形 $\mathcal{M}$. 的 $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{M})$ 准同构

参考文献

[1] Marjorie Batchelor. 超流形的结构。《美国数学会汇刊》，253：329–338，1979年。[2] Kai Behrend. 微分分次概形 I：完美消解代数，2002年，arXiv:math/0212225。[3] Kai Behrend. 微分分次概形 II：微分分次概形的 2-范畴，2002年，arXiv:math/0212226。[4]Kai Behrend、Hsuan-Yi Liao 和 Ping Xu. 导出可微流形。可见于arXiv:2006.01376。[5] Julia E. Bergner. 多类型理论上的代数的刚性化。《代数与几何拓扑》，6：1925–1955，2006年。[6] Dennis Borisov. 导出流形与 Kuranishi 模型。可见于 arXiv:1212.1153。

[7] Dennis Borisov 和 Justin Noel. 导出微分流形的单纯形方法。可见于 arXiv:1112.0033。[8] David Carchedi 和 Dmitry Roytenberg. 可微函数超代数的同调代数。可见于 arXiv:1212.3745。[9] David Carchedi 和 Dmitry Roytenberg. 关于可微函数超代数理论。《范畴论及其应用》，28(30)：1022–1098，2013年。[10]David Carchedi 和 Pelle Steffens. 导出流形的泛性质。可见于 arXiv:1905.06195。[11] Alberto S. Cattaneo 和 Florian Sch¨atz. 超几何导论。《数学物理评论》，23(6)：669–690，2011年。[12] Ionu¸t Ciocan-Fontanine 和 Mikhail Kapranov. 导出 Quot 概形。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），34(3)：403–440，2001年。[13] Ionu¸t Ciocan-Fontanine 和 Mikhail Kapranov. 通过微分分次流形构造虚基本类。《几何与拓扑》，13(3)：1779–1804，2009年。[14] Ionu¸t Ciocan-Fontanine 和 Mikhail M. Kapranov. 导出希尔伯特概形。《美国数学会杂志》，15(4)：787–815，2002年。[15] Denis-Charles Cisinski. 导出等价下 K 理论的不变性。《K 理论杂志》，6(3)：505–546，2010年。[16] Eduardo J. Dubuc. CSpec$_{C^\infty}\infty$-概形。《美国数学杂志》，103(4)：683–690，1981年。[17] Daniel Dugger. K 理论的几何导论。可见于 https://pages.uoregon.edu/ddugger/。[18] Maxime Fairon. 分次几何导论。《欧洲数学杂志》，3(2)：208–222，2017年3月。[19] Janusz Grabowski 和 Miko l aj Rotkiewicz. 分次丛与齐次结构。《几何物理学杂志》，62(1)：21–36，2012年。[20]Henning Hohnhold、Matthias Kreck、Stephan Stolz 和 Peter Teichner. 微分形式与 0 维超对称场论。《量子拓扑》，2(1)：1–41，2011年。[21] Dominic Joyce. D-流形、d-轨形与导出微分几何：详细概述。可见于 1208.4948。[22] Dominic Joyce. C^∞-环上的代数几何，2009年。可见于 arXiv:1001.0023。[23] Dominic Joyce. d-流形与导出微分几何导论。载于《模空间》，伦敦数学会讲义丛书第411卷，第230–281页。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[24] Micha lJ´o´zwikowski 和 Miko l aj Rotkiewicz. 关于若干幺半群作用的注记。《微分几何及其应用》，47：212–245，2016年。[25] Maxim Kontsevich. 通过环面作用枚举有理曲线。载于《曲线模空间》（泰瑟尔岛，1994年），《数学进展》第129卷，第335–368页。Birkhäuser Boston，波士顿，MA，1995年。[26] Alexei Kotov、Camille Laurent-Gengoux 和 Vladimir Salnikov. Γ-分次 q-流形的标准形，2022年，2212.05579。[27] Alexei Kotov 和 Vladimir Salnikov. $\mathbb{Z}$-分次流形的范畴：不局限于正次数时会发生什么。可见于 arXiv:2108.13496，2021年。[28] Jacob Lurie. 《高阶代数》。可见于 http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/higheralgeb

ra.pdf。

[29] Jacob Lurie。高阶拓扑斯理论，数学年刊研究丛书第170卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年。[30] Ieke Moerdijk 和 Gonzalo E. Reyes。光滑无穷小分析模型。施普林格出版社，纽约，1991年。[31] Joost Nuiten。导出微分拓扑中的李锚丛。博士学位论文，乌得勒支大学，2018年。[32] Jian Qiu 和 Maxim Zabzine。分次几何、Batalin-Vilkovisky 形式体系及其应用简介。布尔诺数学档案，47(5):415–471，2011年。[33] Dmitry Roytenberg。私人通信。

[34] Dmitry Roytenberg。AKSZ-BV 形式体系与 Courant 代数丛诱导的拓扑场论。数学物理通讯，79(2):143–159，2007年。[35] G. Sardanashvily 和 W. Wachowski。在 $\mathbb{N}$-分次流形上的微分演算。数学杂志，第19页，文章编号8271562，2017年。[36] A. Schwarz。Batalin-Vilkovisky 量子化的几何。数学物理通讯，155(2):249–260，1993年，hep-th/9205088。[37] Pavol ˇSevera。微分 gorm，微分 worm。可访问 arXiv:/math/0307303，2004年。[38] David I. Spivak。导出光滑流形。杜克数学杂志，153(1):55–128，2010年。[39] Pelle Steffens。导出微分几何。博士学位论文，蒙彼利埃大学，2022年。[40] BertrandTo¨en 和 Gabriele Vezzosi。同伦代数几何。II. 几何堆栈及其应用。美国数学学会回忆录，193(902):x+224，2008年。[41] A. Vaintrob。同调向量场的标准形。第82卷，第3865–3868页。1996年。代数，3。