arXiv:2303.11208v1 [math.CO] 20 Mar 2023

相交多边形

Kada K Williams

2023年3月6日

摘要

考虑平面中两个区域，分别由一个 n 边形和一个 m 边形围成。它们的交集最多可以有多少个连通分支？Croft 提出了这个问题。我们通过证明以下界，给出了渐近答案

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq f(n,m) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \frac{n}{2} + \frac{m}{2}$$

其中 $f(n,m)$ 表示分支数的最大值，且 $m \leq n$。此外，对于一个相关问题，我们给出了精确答案：如果要求 m边形为凸，分支数的最大值是多少：$\left\lfloor \frac{m+n-2}{2} \right\rfloor$ 当 $n \geq m+2$ 时，以及在其他情况下为 $n-2$。

1 引言

Croft [1] 提出了以下问题。

问题 1. 由一个 n 边形和一个 m 边形确定的多边形区域的交集最多有多少个连通分支?

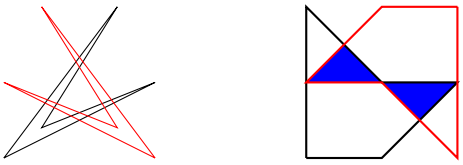

图 1：相交的多边形

照例，多边形是平面上的分段线性简单闭曲线。由于所有多边形都可以进行三角剖分，n边形区域可以划分为$n-2$ 个三角形，而 m边形区域可以划分为 $m-2$。现在，凸区域的交集是凸的，每个三角形都是凸的，并且每个凸区域要么路径连通，要么为空。因此，答案至多为 $(m-2)(n-2)$，故为有限值。此外，假设 m边形是凸的，则连通分支至多有 $n-2$ 个。

问题 2. 由一个 n 边形界定的区域与一个凸 m 边形的交集中，连通分支的最大数量是多少?

在图 3 中，如果将多边形视为开集，黄色区域位于不同的连通分支中；而如果将多边形视为闭集，则只有一个连通分支。然而，正如我们将要看到的，问题 1 和问题 2 中连通分支的最大数量并不取决于多边形区域是开还是闭。基本上，如果这些开重叠区域有一个共同的边界点，我们就会稍微改变多边形的形状。我们称开 n边形与开m边形的交集中的一个重叠区域为一个连通分支。

我们声称，每个重叠区域都是一个多边形，且重叠区域的边界由包含在 n 边形或 m 边形周长上的线段组成。为此，我们先考虑在各自的三角剖分中，将 $n-2$ 个三角形与 $m-2$ 个三角形相交所形成的凸多边形。沿着内部对角线拼接这些多边形时，就会产生重叠区域，因此重叠区域也是多边形。它们的边界线段不包含在内部对角线上，而是包含在 n 边形或 m 边形的边上。

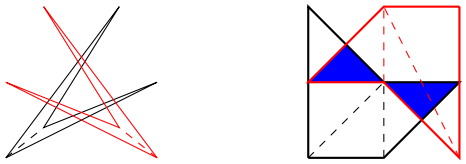

图 2：重叠区域

当一个闭 n 边形与一个闭 m 边形相交时，两个重叠区域的边界可能相交；也可能由于一个多边形的顶点或边与另一个多边形的边相切，而产生一维连通分支。注意，只有当 n 边形和 m 边形的三条边所在直线交于一点时，才会出现这种情况。我们按如下方式处理。

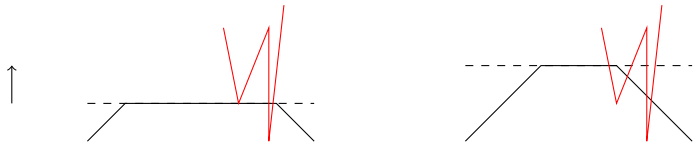

图 3：变形前后

给定一条边，我们将其所在直线沿垂直向量平移，使其所包含的任一连通分支的宽度增加，同时不让该直线越过边所在直线相交的有限多个点，并且该向量的长度小于正宽度重叠区域的宽度。重复这一过程，可以将三条边所在直线共点的次数降至零，同时连通分支的数量不会减少。因此，在我们的研究中，可以假设没有三条边所在直线经过同一点，并且多边形是开集。

令 $f(n,m)$ 表示一个 n 边形区域与一个 m 边形区域之间重叠区域的最大数量（等价地，连通分支的最大数量）。我们的主要结果如下。

定理 3. $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq f(n,m) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \frac{n}{2} + \frac{m}{2}$

此外，我们还给出了该问题凸情形的精确答案。

定理 4. 令一个 n 边形区域与一个凸 m 边形区域相交。重叠区域的最大数量为 $\lfloor \frac{m+n-2}{2} \rfloor$（若 $n \geq m+2$），否则为 $n-2$。

定理3的证明，下界。按照图4所示，将 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 个“齿”与 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个“齿”相交，可得到 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个重叠区域。显然，端线段的方向使它们能够相交。可能还需增加一条边（当 m 为奇数或 n 为奇数时），从而形成一个 n 边形和一个 m 边形。

□

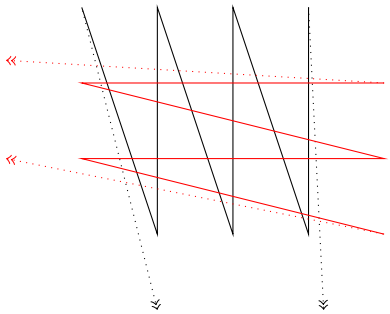

图4：双假牙

证明定理 3 中的上界需要用到以下引理。我们将使用标准记号——例如参见 [2]。

引理 5. 如果重叠区域不包含 m 边形或 n 边形的顶点，那么它的边数为偶数。

2 三种特殊情况

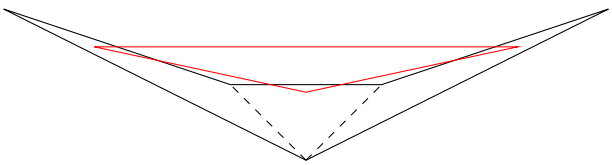

图5： $f(5,3) = 3$

对于 $m = 3$ 和 $n = 5$ 这种情况，将五边形进行三角剖分后，显然最多会出现 3 个重叠区域。此外，确实可以达到 3 个重叠区域。

对于 $m = 4$ 和 $n = 4$ 这种情况，重叠区域的数量为 $\leq 2 \cdot 2 = 4$，因为每个四边形都由两个三角形组成。确实可以达到这么多重叠区域，见图6。

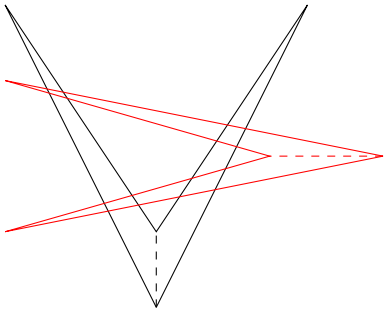

图6： $f(4, 4) = 4$

在 $m = 5$ 和 $n = 5$的情况下，通过调整 $n = 3$的构造，我们可以实现5个重叠区域。另一方面，我们证明无法实现超过5个重叠区域的论证则更为微妙。首先，我们注意到，只有当五边形能够被划分为不少于3个凸区域时，三角形才能与五边形形成3个重叠区域。只有当五边形有三条边沿着一段凹弧延伸，并像图5那样与三角形相交时，才有可能做到这一点。

如果两个五边形都没有这种形状，那么重叠区域最多有 $2 \cdot 2 = 4$ 个。如果其中一个五边形具有这种形状，那么它的三个三角形部分中，外侧的两个与另一个五边形至多相交两次，否则另一个五边形的形状便已确定。特别是，如果一个外侧三角形与另一个五边形相交形成三个区域，那么其中两个区域与一条内对角线相邻，因此构成的重叠区域不超过 $1\ 2$ （但存在一种情况例外：这三个区域全都是重叠区域）。至于中央三角形$\overline{}$，其中至多包含 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 个重叠区域（但存在一种情况例外：另一个五边形不与任何内对角线相交，此时中央三角形产生两个重叠区域，两个外侧三角形各至多产生一个）。无论是哪种情况，重叠区域总数肯定少于 6。因此， $f(5, 5) = 5$。

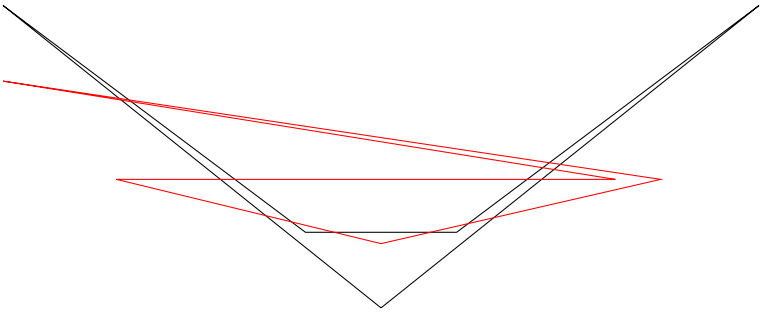

图7： f的构造$(5, 5) = 5$

3 证明

我们来证明：如果一个重叠区域不包含 m 边形或n边形的顶点，那么它的边数为偶数。

引理 5 的证明。关键在于考察重叠区域中两条连续的边。回想一下，重叠区域的任意一条边都包含在 m边形或n边形的边界上。如果两条连续的边属于 m边形，那么它们相交处的顶点必定是 m边形的顶点；对于 n边形，情况也类似。因此，只要重叠区域不包含这样的顶点，其中连续的边就只能交替地全部属于 m边形或全部属于 n边形。由此，重叠区域的边界上有偶数条边。

□

定理 3 的证明，上界。设有一个 m边形和一个 n边形，它们有 F 个重叠区域。其中，设有 F_k 个重叠区域恰好有 k 条边仅属于 n边形。如果某个重叠区域在 m 边形上有两条连续的边，那么它们相交处是 m边形的一个顶点。我们可以假设各个重叠区域互不相交，因此 m边形的每个顶点以这种方式至多出现一次。由此可得$3F_0 + F_1 \leq m$，因为如果所有边都属于 m边形，那么显然所有顶点都是如此；如果只有一条例外，那么显然至少有一个顶点如此。

核心思路是对 n 边形上的重叠边线段进行双重计数。考察 n 边形的一条边，它与 m 边形至多有 m 个交点，因此至多包含 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 条界定某个重叠区域的线段。总计为 $n \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 条线段。另一方面， F_k 个重叠区域上有 k 条线段。因此，

$$\sum_k kF_k \leq n \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor .$$

再加上不等式 $3F_0 + F_1 \leq m$，左侧每个 F_k 的系数至少为 2。因此，

$$2F \leq n \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + m.$$

除以 2 可得上界 $f(n, m) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \frac{n}{2} + \frac{m}{2}$。

□

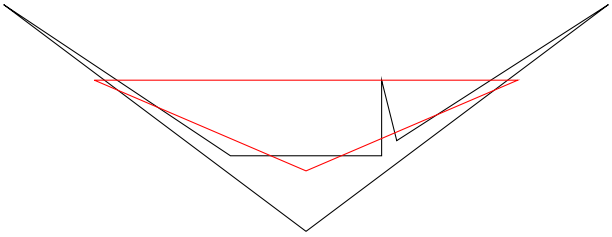

图 8：添加一个齿

接下来，让我们看看如何使与一个凸 m边形的重叠区域数量最大化。

定理 4 的证明。关于图5，如果在一个 V形状上构造一个由 m 条边组成的凹弧，那么所得的（$m+2$）边形会被一个顶点靠近这些边的中点的凸 m边形相交，形成 m 个重叠区域。因此，如果$n=m+2$，就可以有 $n-2=m$ 个重叠区域。如果增加 m，仍然可以有 $n-2$ 个重叠区域。如果增加 n，那么只需付出两条边的代价，就可以像图 8 中那样添加一个“齿”，从而增加 $\left\lfloor \frac{n-(m+2)}{2} \right\rfloor$ 个重叠区域。

由于 n 边形可以划分为 $n-2$ 个三角形，而每个三角形与凸 m 边形至多重叠一次，因此在情形 $n < m+2$ 下，重叠区域不超过 $n-2$ 个。下面进一步证明，在情形 $n \geq m+2$ 下，重叠区域不超过$m+\left\lfloor n-\binom{m+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m+n-2}{2} \right\rfloor$ 个。

沿用前一个证明中的记号，n 边形上的重叠边线段数为 $\sum kF_k$，其中 $3F_0+F_1 \leq m$。然而，在这个问题中，n 边形的每条边至多形成一条界定某个重叠区域的线段，因此 $\sum kF_k \leq n$。将这些相加得

$$2F \leq m+n.$$

我们的策略是将这个上界缩小 2。考虑属于 n 边形凸包的边，这样的边至少有 2 条。如果这些边都不与 m 边形相交，显然 $\sum kF_k \leq n-2$。如果 m 边形有两个顶点位于 n 边形之外，则 $3F_0+F_1 \leq m-2$。最后，如果 m 边形只有一个顶点位于 n 边形之外，那么 n 边形的凸包只与 m 边形中相邻的两条边相交，因此凸包只界定一个重叠区域。在这种情况下，$3F_0+F_1 \leq m-1$，但也有 $\sum kF_k \leq n-1$。因此，

$$2F \leq m+n-2.$$

因此，最多只能实现 $\left\lfloor \frac{m+n-2}{2} \right\rfloor$ 个重叠区域。

□

4 结论

尽管我们努力估算 $f(n,m)$，问题 1 仍然是开放的。正如我们在证明 $f(5,5)=5$ 时所看到的，如果重叠区域必然涉及一个 m 边形的顶点，那么它就会占据相当大的空间。一般来说，我们的上界似乎不够紧。因此，我们可以提出以下猜想。

猜想 6. 问题 1 的答案是 $f(n,m)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \epsilon$，其中当 n 和 m 为奇数时，$\epsilon=1$；否则为 $\epsilon=0$。

需要额外项 ϵ，因为如图5所示，在图4中，用一条延伸至新边的三角形替换最低边时，会产生一个新的重叠区域。

致谢。作者谨向 Imre Leader 致谢，感谢他在讨论和撰写本文过程中给予的帮助与指导。

参考资料

[1] H T Croft。个人通信，2021年。

[2] V Boltyanski、H Martini、P S Soltan。《组合几何探索》。施普林格出版社·柏林·海德堡，1997年。

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WB.

电子邮箱：kkw25@cam.ac.uk