arXiv:2303.11226v1 [math.GT] 20 Mar 2023

计数三角形的组合ζ函数

LEO BENARD、YANN CHAUBET、NGUYEN VIET DANG 和 THOMAS SCHICK

摘要。本文计算了某些组合 ζ 函数的特殊值，这些函数用于计数流形三角剖分的 $n-1$ 骨架上的测地路径，其中该流形的维数为 n。我们证明，这些特殊值具有拓扑意义。由此，我们得到紧流形的第一贝蒂数和 L^2-贝蒂数，以及 3 维流形中成对零同调结的链环数。

联系两方面（测地线计数与拓扑不变量）的工具，是三角剖分高维骨架上的随机游走。

给定一个双曲曲面 Σ，Fried [5] 开创了对所谓 Ruelle ζ 函数在原点处行为的研究 [10]

$$\zeta_\Sigma(s) = \prod_\gamma \left(1 - e^{-s\ell(\gamma)}\right),$$

其中，乘积遍历 Σ 的所有本原闭测地线。只要 $\operatorname{Re} s > 1$，这个无穷乘积就收敛；当 s 位于整个复平面内时，它可作亚纯延拓。在 [5], , Fried 证明 $\zeta_\Sigma(s)$ 在 $s = 0$ 处的零点阶数为 $-\chi(\Sigma)$，Dyatlov–Zworski [3] 将这一结果推广到了任意负曲率曲面。一个重要推论是，负曲率曲面的拓扑完全由其长度谱决定，而长度谱是本原闭测地线长度的集合。

本文旨在证明组合情形下的类似结论。设 M 是一个维数为 $n \geqslant 1$ 的紧流形，并配备光滑三角剖分 $\mathscr{T}$。我们将在更一般的正则多面体分解情形下证明这些结果，但为简便起见，此处仅陈述三角剖分的情形。$\mathscr{T}$ 中的测地路径是相邻的（$n-1$）-单形组成的有限序列 $c = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$，其中 σ_q 与 σ_1 相邻，并且任意一对连续单形（σ_k，σ_{k+1}）都不与（σ_q，σ_1）共同界定同一个 n-单形。闭测地线是闭测地路径的一个等价类；若两个闭测地路径互为循环置换，则视为相同。我们用 $\mathcal{P}$ 表示本原闭测地线的集合；如果一条测地线不是较短环路的幂，则称其为本原闭测地线。闭测地线 $\gamma = [(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)]$ 的长度记为 $|\gamma| = q$，而 $\varepsilon_\gamma \in \{-1, 1\}$ 表示其反向指标，定义见 §2。

2010 数学主题分类。57Q70.1

我们将证明以下结论。

定理 1。 组合 ζ 函数

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) = \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} \left(1 - \varepsilon_\gamma z^{|\gamma|}\right),$$

当 $|z|$ 足够小时收敛。它是一个次数为 $|\mathscr{T}^{(n-1)}|$ 、关于 z 的多项式函数，并在 $z = (n+2)^{-1}$处以 $b_1(M)$ 阶消失。

在上述陈述中， $|\mathscr{T}^{(n-1)}|$ 表示 $(n-1)$–骨架的基数。定理 1 的一个推论是以下结果。

推论 2。 所有长度为 $k \leq |\mathscr{T}^{(n-1)}|$的闭测地路径的数量 n_k 决定了紧流形 M的第一贝蒂数。

证明。 根据 定理 1，展开 $\zeta_{\mathscr{T}}(z)$ 得到一个形式级数，它等于一个次数为 $|\mathscr{T}^{(n-1)}|$的多项式。因此，所有更高次项都会相互抵消。只取乘积至 $|\gamma| = |\mathscr{T}^{(n-1)}|$，模 $z^{|\mathscr{T}^{(n-1)}|}$ 约化并在 $z = (n+2)^{-1}$ 附近求值，即可恢复第一贝蒂数。□

另一个直接的推论如下：

推论 3. 连通曲面的欧拉示性数完全由其组合长度谱决定，该谱由下列数对的集合给出 $(\varepsilon_\gamma, |\gamma|)$ ，其中 $\gamma \in \mathcal{P}$满足 $|\gamma| \leqslant |\mathscr{T}_1|$。

更一般地，三角剖分的组合数据（单形和测地环路的数量）足以确定维数不超过 *4* 的三角剖分紧流形的所有贝蒂数。

事实上，定理 1 可推广到多面体分解以及非紧情形，下面将对此加以说明。我们取紧致 n 维流形 M 的一个多面体分解 $\mathscr{T}$。我们假设 $(n-1)$ 维多面体边界有固定数目 N 个 $(n-2)$ 维面，并将其称为 N-正则多面体分解。注意，三角剖分是 n-正则的。给定基本群 $\pi_1(M)$ 的一个商 π，它作用在相应的 M 覆盖空间 M 上，并带有一个多面体分解 $\hat{\mathscr{T}}$。这定义了一个由自由希尔伯特 $\mathcal{N}(\pi)$-模组成的复形 $C_*^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$。作为向量空间，它们是（通常为无限维的）希尔伯特空间；而 π 的作用赋予它们由有限多个 L^2-完备化 $\ell^{(2)}(\pi)$ 的副本直和构成的结构，冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}(\pi)$ 在其上自然作用。该冯·诺伊曼代数是从 $\ell^{(2)}(\pi)$ 到其自身的 π-等变有界算子代数。

进而，我们可以定义组合拉普拉斯算子 $\Delta_k^{(2)}$ ，它作为有界算子作用于 $C_k^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$；其核的冯·诺依曼维数就是第 $k$$L^2$ 贝蒂数 $b_k^{(2)}(M, \pi)$。注意，当 π 平凡时，这一切便还原为经典贝蒂数。若 $\pi = \pi_1(M)$，通常会在记号中省略群，并将 $b_k^{(2)}(M)$称为 M的第 k 个 L^2 贝蒂数。

我们为群 π在 $\mathscr{T}$上的作用选取一个基本域 $\mathcal{F}$，并将 $\mathscr{T}$中始于并终于$\mathcal{F}$的本原闭测地线集合记为 $\mathcal{P}$。我们证明以下定理：

定理 4。 组合 ζ 函数

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) := \prod_{\gamma \in \widehat{\mathcal{P}}} \left(1 - \varepsilon_\gamma z^{|\gamma|}\right)$$

当 $|z|$ 足够小时收敛，并且可延拓为定义在直径为 $(0, \frac{1}{N+2})$的圆盘上的实解析函数。此外，若 $\Delta_{n-1}^{(2)}$属于 $\mathcal{N}(\pi)$-行列式类（参见*定义10*），那么当 z 趋于 $\frac{1}{N+2}$时，函数 $\zeta_{\mathscr{T}}$ 的表现为

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) \sim_{z \to \frac{1}{N+2}} \left(\frac{1}{z} - (N+2)\right)^{b_1^{(2)}(M,\pi)} \frac{\det_{\mathrm{FK}}(\Delta_{n-1}^{(2)})}{N+2},$$

其中$\det_{\mathrm{FK}}$ 是 *Fuglede–Kadison* 行列式，参见*定义10*。

注意，在行列式类假设下（该假设意味着 Fuglede–Kadison 行列式 $\det_{\mathrm{FK}}(\Delta_{n-1}^{(2)})$ 是一个正数），该定理表明，函数 $\zeta_{\mathscr{T}}$在 $\frac{1}{N+2}$ 附近的取值可得出第一个 L^2- 贝蒂数 $b_1^{(2)}$，这与有限情形相同（表述为定理 1）。还要注意，L^2- 贝蒂数不一定是整数，而是非负实数（Atiyah 曾提出它们是否总是有理数的问题，如今已有若干反例推翻了这一猜想）。

关于行列式类条件，行列式猜想 [9,猜想 13。2] 意味着上述任意算子 $\Delta_k^{(2)}$ 都属于行列式类。对于 $\mathcal{G}$ 第 13.1 节 [9, 中所述的一大类群，这一猜想已得到证实。3]并且 [11]。特别是，$\mathcal{G}$ 包括矩阵李群中的任意格（更一般地说，包括任意剩余有限群）和任意可均群，并且在可均商群的扩张、余极限、逆极限、取子群以及对有限核取商等运算下封闭。

在不假设行列式类猜想成立的情况下，我们在命题 16 中证明，$(n-1)$ 阶 L^2 贝蒂数的数据包含在函数$\zeta_{\mathscr{T}}$中，同时还需知道数目 $|\mathscr{T}^{(n-1)}|$ 个 $(n-1)$ 维多面体，即使我们不假设 $\Delta_{n-1}^{(2)}$ 属于行列式类。

定理4的一个显而易见却引人注目的解读如下：

推论5. 对 $\mathscr{T}^{(n-1)}$ 中表示 $\ker(\pi_1(M) \to \pi)$ 中一个共轭类的测地环路进行计数，可以得到第一贝蒂数 $L^2\, b_1^{(2)}(M, \pi)$。

特别是，也许更引人注目的是，对曲面上的同伦平凡组合测地环路进行计数 Σ 可以得到 $b_1^{(2)}(\Sigma)$。

最后补充一点，我们只需要多面体分解是 N-正则的，并且每个 $(n-1)$ 维多面体都位于

恰好两个 n 维多面体的边界上。这比要求 M 是流形要弱，只要求其在余维一处非奇异。

本文的最后一个结果涉及纽结的链环数。最近，第三作者和 Rivière 在 [2] 中证明，两个同调平凡曲线 $\mathrm{lk}(\kappa_1, \kappa_2)$ 在负曲率曲面的单位切丛中的链环数，κ_1, κ_2 可以由庞加莱级数在 $s = 0$ 处的正则化值恢复

$$\eta(s) = \sum_c e^{-s\ell(c)},$$

其中求和遍历所有测地路径 c，这些路径正交地连接曲面 Σ 上 κ_1 和 κ_2 的投影（关于带边界曲面的类似结果，另见 [1] ）。

我们的最后一个结果是这一结果的组合类比。我们任取一个紧致三维流形 M，并再次赋予它一个正则多面体分解 $\mathscr{T}$。

令 $\mathscr{T}^\vee$ 为 $\mathscr{T}$ 的对偶多面体分解（见 §1.1 和图 2）。设 κ_1 和 κ_2 是 M 中的两个有理零调定向纽结，分别为 $\mathscr{T}$ 或 $\mathscr{T}^\vee$中的一链。注意，每一对零同调结都与这样一对 (κ_1, κ_2) 同调。我们用 $\mathcal{G}^\perp(\kappa_1, \kappa_2)$ 表示从 κ_1 到 κ_2的正交测地路径集合，即 $\mathscr{T}$ 的二维骨架中的测地路径 $c = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$，其中第一个多面体 τ_1 构成 κ_1的一部分边界，而 κ_2与最后一个多面体 τ_q 相交，见图 1。

对于 $c \in \mathcal{G}^\perp(\kappa_1, \kappa_2)$，我们用 $\varepsilon_c \in \{-1, 1\}$ 表示其反向指标，用 $m_c \in \mathbb{Z}$ 表示其在 关联数 上(κ_1, κ_2)；这些量的严格定义见 §3 。不过，我们提及：若纽结 κ_j 是简单的，即 $\mathscr{T}$和 $\mathscr{T}^\vee$ 中的每个 1-单形至多在 κ_1 和κ_2中各出现一次，那么 $m_c \in \{-1, 1\}$.

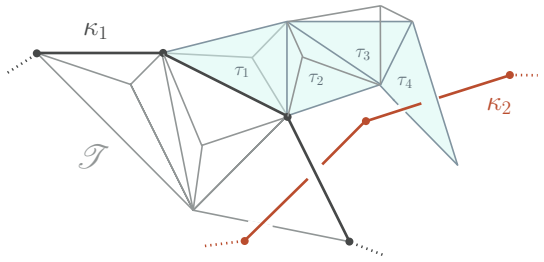


图 1. 正交测地线 $c = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ 链接 κ_1 和κ_2。纽结 κ_1 是 $\mathscr{T}$中的一维链，而 κ_2 是 $\mathscr{T}^\vee$中的一维链。

我们证明以下结果：

定理6。 组合庞加莱级数

$$\eta(z) = \sum_{c \in \mathcal{G}^\perp(\kappa_1, \kappa_2)} \varepsilon_c m_c z^{|c|}$$

当 $|z|$ 足够大时收敛。此外，对于 N，它是一个有理函数，并且在 $z = 1/(N+2)$处正则，其中 N 是 $\mathscr{T}$中任意一个2维多面体的超面数，并且

$$\eta\left(\frac{1}{N+2}\right) = \mathrm{lk}(\kappa_1, \kappa_2).$$

所有这些结果都依赖于以下简单却基本的事实（见命题 9）：引入于 §1.1 的组合拉普拉斯算子作用于任意$(n-1)$-骨架上，该骨架属于一个 N-正则多面体复形 $\mathscr{T}$，且其作用为

$$\Delta = (N+2)\,\mathrm{Id} - T \tag{1}$$

其中 T 是带符号测地随机游走的转移矩阵。上述事实是著名的 Brydges–Fröhlich–Sokal 随机游走表示的一个拓扑版本，该表示广泛应用于量子场论 [4, 6]。

我们所考虑的随机游走并非发生在 M 或M的三角剖分的顶点集上，而是发生在 $n-1$ 单形集上。前者曾被广泛用于获取另一种拓扑 L^2-不变量的信息，即最低 Novikov-Shubin 不变量。这里，Varopoulos 的基础性工作 [12]表明，最低 Novikov-Shubin 不变量由序列 $p(n)$编码，其中 $p(n)$表示经过恰好 n 步后返回起点的概率。请注意，这与 1-骨架中长度为 n 的闭测地线数量有关。

在 Tim Höpfner 的哥廷根博士论文 [8] 中，将 Varopoulos 的结果推广到高次 Novikov-Shubin不变量 k 。Höpfner 证明，这些不变量可以通过在$\tilde{M}$的 k-胞腔上进行适当的带符号随机游走来获得。我们的文章沿着这一思路更进一步，通过在（$n-1$）骨架上的随机游走来表示第一（根据庞加莱对偶等于 $n-1$） L^2-贝蒂数。

论文结构。关于组合拉普拉斯算子和 L^2-不变量的预备知识汇集于第 §1节，其中尤其证明了（1）。随后，我们在 §2 节证明定理 1 和定理 4，并在 §3 节证明定理6。

致谢。感谢 Jean Raimbault 对我们结果的初稿提出了若干有益的意见。L.B. 获得研究生培训组2491“傅里叶分析与谱理论”（哥廷根大学）的部分资助。Y. C. 获得 Herchel Smith博士后奖学金基金的支持。N.V.D 获得法国大学研究院的支持。

1. 预备知识

在第1.1 节中，我们将构建本文通篇使用的组合框架；在第1.2 节中，我们将汇集有关 L^2不变量的必要概念。

1.1. **组合拉普拉斯算子**。 我们从一个给定的光滑三角剖分$\mathscr{T}$开始，它属于一个 n维流形 M；更一般地， $\mathscr{T}$可以是 M的一个多面体分解，其中要求每个($n-1$)维多面体的边界上都具有数目恒定的 N 个$(n-2)$维面。我们称之为N正则多面体分解。请注意，当 $\mathscr{T}$是三角剖分时，这一条件在 $N=n$下成立。关于多面体复形与同调的参考资料见 [7]。请注意，根据定义，多面体复形的每个胞腔都配有一个定向。

我们约定，多面体 σ 的定向为其边界上的每个多面体赋予定向，该定向对应于第一个指向外侧的向量所确定的定向。

多面体 σ 的边界定义为

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ hyperface of } \sigma} \varepsilon(\tau)\tau,$$

w此处，根据 τ 的定向是否与
其
由 σ诱导的定向一致。

我们用 $C_k(\mathscr{T})$ 表示由 $\mathscr{T}$ 的 k 维多面体生成的 $\mathbb{Z}$-模。由此得到一个复形

$$0 \xrightarrow{\partial} C_n(\mathscr{T}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(\mathscr{T}) \xrightarrow{\partial} 0$$

其同调显然就是流形 M 的同调。

定义 7。若两个 k-多面体共享一个 $(k-1)$-维面，且不同时作为同一个 $(k+1)$-维多面体的边界，则称它们构成可容许对。构成可容许对的两个k-多面体具有相容定向，是指它们的公共 $(k-1)$-维超面在各自边界中的符号相反。

复形 $\mathscr{T}^\vee$ 的对偶复形 $\mathscr{T}$是 M的一个多面体分解，构造如下（另见 图 2）。 $\mathscr{T}^\vee$ 的 0-胞腔是 $\mathscr{T}$的顶维单形的内部点； $\mathscr{T}^\vee$ 的 1-胞腔是连接两个 0-胞腔的边，当且仅当 $\mathscr{T}$的两个对应顶维单形之间存在一个面，且该边与此面横截相交一次；依此类推。这定义了一个霍奇星映射

$$\star\colon C_i(\mathscr{T}) \to C_{n-i}(\mathscr{T}^\vee),$$

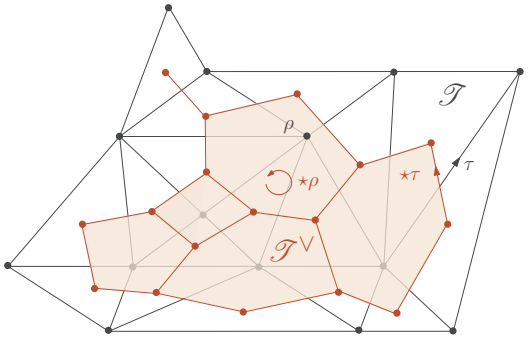
其中， $\star\sigma$ 的定向选取为：在 σ 与 $\star\sigma$的交点处，由 σ 后接 $\star\sigma$ 诱导的 M 的定向为正。由于 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{T}^\vee$的对偶复形，因此我们有映射 $\star$： $C_\bullet(\mathscr{T}^\vee) \to C_\bullet(\mathscr{T})$，而我们对定向的选择给出

$$\star^2 = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{Id} \quad \text{on} \quad C_k(\mathscr{T}) \tag{2}$$

对每个 $k=0$、.....、 n。

k维有向多面体族 $\mathscr{T}$ 构成复形 $C_k(\mathscr{T})$ 的一组基 β_k ，适用于所有 k；我们在 $C_k(\mathscr{T})$ 上定义标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：

图2. 二维三角剖分 $\mathscr{T}$（黑色），以及对偶多面体分解 $\mathscr{T}^\vee$（红色）。



声明这一族为标准正交基。我们令 $\partial^\star\colon C_\bullet(\mathscr{T}) \to C_{\bullet+1}(\mathscr{T})$ 为 ∂ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的伴随算子，其定义为

$$\langle \partial\sigma, \tau\rangle = \langle \sigma, \partial^\star\tau\rangle$$

对每个 $\sigma \in C_k(\mathscr{T})$ 以及 $\tau \in C_{k-1}(\mathscr{T})$。于是，我们关于 $\star$的定向约定以及公式（2）推出

$$\partial^\star = (-1)^{n(k+1)} \star \partial \star \quad \text{on} \quad C_k(\mathscr{T}). \tag{3}$$

定义 8。 组合拉普拉斯算子 是如下算子

$$\Delta = \partial\partial^\star + \partial^\star\partial\colon C_\bullet(\mathscr{T}) \to C_\bullet(\mathscr{T}).$$

本文将证明的结果都依赖于以下命题：

命题9。 组合拉普拉斯算子满足

$$\Delta_{n-1} = (N+2)\,\mathrm{Id} - T$$

其中 T 是根据基β_{n-1} 定义的转移带符号随机游走算子，其定义为

$$T(\tau) = \sum_{\substack{\sigma\in\beta_{n-1}\\ (\sigma,\tau)\ admissible}} \varepsilon_{\tau,\sigma}\sigma, \qquad \tau \in \beta_{n-1},$$

当 σ 和 τ 具有相容定向时，$\varepsilon_{\tau,\,\sigma} = 1$；否则，$\varepsilon_{\tau,\,\sigma} = -1$。

证明。 给定基 β_{n-1}中的两个多面体 σ_1， σ_2，我们计算

$$\langle \Delta\sigma_1, \sigma_2\rangle = \langle \partial^\star\sigma_1, \partial^\star\sigma_2\rangle + \langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2\rangle.$$

注意，对于 $j = 1$，2，恰有两个 n维多面体 τ_j^+， τ_j^- 使得

$$\partial^\star\sigma_j = \tau_j^+ + \tau_j^-.$$

它们的定向方式使得 $\langle \partial\tau_j^\pm, \sigma_j\rangle = \pm 1$。我们区分四种情况：

(1) 若 $\sigma_1 = \sigma_2$，则 $\tau_1^{\pm} = \tau_2^{\pm}$，因此 $\langle \partial^\star \sigma_1, \partial^\star \sigma_2 \rangle = \langle \tau_1^+ + \tau_1^-, \tau_1^+ + \tau_1^- \rangle = 2$。另一方面，$\partial\sigma_1$ 由 N 个维数为 $(n-2)$ 的多面体组成，因此 $\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle = N$，由此得出结论

$$\langle \Delta\sigma, \sigma \rangle = N + 2.$$

(2) 如果 σ_1 和 σ_2 位于某个共同的 n 维多面体 τ 的边界上，那么通过翻转 σ_1 和/或 σ_2 的定向，可以假设 $\tau_1^+ = \tau_2^+ = \tau$。特别地，$\sigma_1$ 和 σ_2 在 $\partial\tau$ 中都以正向出现，因此

$$\langle \partial^\star \sigma_1, \partial^\star \sigma_2 \rangle = +1.$$

当然，在这种情况下，恰好有一个 $(n-2)$ 维多面体 ν 同时出现在 $\partial\sigma_1$ 和 $\partial\sigma_2$ 中；于是我们断言

$$\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle = -1.$$

为证明这一点，考虑链 $\partial^2\tau$。$(n-2)$ 维多面体 ν 恰好出现两次：一次在 $\partial\sigma_1$ 中，一次在 $\partial\sigma_2$ 中。由于 $\partial^2\tau = 0$，可知 ν 一次以正向出现、一次以负向出现，由此得到所需结果，因此我们得到 $\langle \Delta\sigma_1, \sigma_2 \rangle = 0$.

(3) 如果 σ_1 和 σ_2 共享一个公共的 $(n-2)$-面，但不在某个公共的 n 维多面体的边界上，那么 $\langle \partial^\star \sigma_1, \partial^\star \sigma_2 \rangle = 0$，且 $\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle = \pm 1$。此外，如果 σ_1 和 σ_2 具有相容定向，那么 $\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle = -1$；否则 $\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle = +1$。

(4) 最后，如果 σ_1 和 σ_2 不共享公共面，那么 $\langle \partial^\star \sigma_1, \partial^\star \sigma_2 \rangle$ 和 $\langle \partial\sigma_1, \partial\sigma_2 \rangle$ 均为零。

证明完成。 □

1.2. L^2-不变量。在本小节中，我们专门讨论这样一种情形：上一小节定义的多面体复形具有一个群 π 的自由余紧作用，且该作用保持多面体结构。在这种情况下，我们用 $\mathscr{T}$ 表示该复形，用 $\mathscr{T} = \mathscr{T}/\pi$ 表示其商；我们假设该商是一个维数为 n的紧流形 M 的多面体分解。换言之，π 是 $\pi_1(M)$的商，而 $\mathscr{T}$是 M 对应覆盖空间 M （通常并非紧致）的多面体分解。

$\hat{}$ $\hat{}$ 在上的作用使空间 $C_k(\mathscr{T})$ 具有自由 $\mathbb{Z}[\pi]$-模的结构，其秩为 $c_k =$ 维数 $C_k(\mathscr{T})$。在 Δ_k 中描述的组合拉普拉斯算子$\hat{}$ 第 1.1 节在 $C_k(\mathscr{T})$ 上作为一个 π-等变算子作用，其含义是

$$\Delta_k(\alpha \cdot \hat{\sigma}) = \alpha \cdot \Delta_k \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} \in C_k(\hat{\mathscr{T}}), \quad \alpha \in \pi,$$

转移算子也是如此 T 定义于命题9。注意，有限基$\{\hat{\sigma}_i^k\}$ 的任意一组提升$\{\sigma_i^k\}$ 都 $C_k(\mathscr{T})$ 构成 $C_k(\hat{}\ \mathscr{T})$的有限基，作为自由 $\mathbb{Z}[\pi]$-模。

ˆ 将系数复化后，我们可以把 $C_k(\mathscr{T})$ 看作一个 $\mathbb{C}[\pi]$-模，从而得到一个由如下形式的元素生成的复向量空间：

$$\alpha \cdot \hat{\sigma}_k^i, \quad \alpha \in \pi, \quad i = 1, \dots, c_k(\mathscr{T}).$$

我们在此空间上赋予标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$，定义如下：

$$\left\langle \sum_{\alpha\in\pi} \lambda_\alpha \, \alpha \cdot \widehat{\sigma}_i^k, \sum_{\beta\in\pi} \mu_\beta \, \beta \cdot \hat{\sigma}_j^k \right\rangle_{L^2} = \delta_{i,j} \sum_{\alpha\in\pi} \lambda_\alpha \mu_\alpha. \tag{4}$$

我们将由 $C_k(\widehat{\mathscr{T}})$ 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ 的完备化所得的希尔伯特空间记为 $C_k^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$。

ˆˆ 给定一个有界的 π-等变算子 $P\colon C_k(\mathscr{T}) \to C_k(\mathscr{T})$，我们定义其冯·诺依曼迹$\operatorname{tr}_{\mathrm{vN}} P$ 如下：

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{vN}} P = \sum_{i=1}^{c_k} \langle P\widehat{\sigma}_i^k, \widehat{\sigma}_i^k \rangle_{L^2}. \tag{5}$$

给定任意 π-不变闭子空间 $F \subset C_k^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$，我们将其冯·诺依曼维数定义如下：

$$\dim_{\mathrm{vN}} F = \operatorname{tr}_{\mathrm{vN}} \Pi_F,$$

其中 Π_F 是 F 上的正交投影。

算子 Δ_k 诱导出一个有界自伴算子 $\Delta_k^{(2)}$ 作用于$C_k^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$。它的谱为实数、非负且有界。我们将 $(E_k(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$记为谱族 $\Delta_k^{(2)}$ ([9, 定义1。68])。那么， L^2-谱密度函数 $\Delta_k^{(2)}$ 是映射

$$\begin{aligned} D_k &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ &\lambda \mapsto \dim_{\mathrm{vN}} \operatorname{im} E_k(\lambda) \end{aligned}$$

根据定义， k阶 L^2贝蒂数 $b_k^{(2)}(M, \pi)$ 是 $\ker \Delta_k^{(2)}$ 的冯·诺依曼维数，因此 $b_k^{(2)}(M, \pi) = D_k(0)$。

定义10。 拉普拉斯算子 $\Delta_k^{(2)}$ 称为行列式类，如果斯蒂尔切斯积分

$$\int_{0^+}^{\infty} \log \lambda \, \mathrm{d}D_k(\lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \log \lambda \, \mathrm{d}D_k(\lambda) \in \mathbb{R}$$

作为实数存在，在这种情况下， $\Delta_k^{(2)}$ 的*Fuglede–Kadison* 行列式 由下式给出

$$\det\nolimits_{\mathrm{FK}}(\Delta_k^{(2)}) = \exp \int_{0^+}^{\infty} \log \lambda \, \mathrm{d}D_k(\lambda) \in (0, \infty).$$

根据 Fuglede–Kadison 行列式的定义，不难看出，若自伴算子 $P\colon C_k^{(2)}(\mathscr{T},\pi) \to C_k^{(2)}(\mathscr{T},\pi)$ 属于行列式类，则对任意 $\nu>0$，νP 也属于行列式类，并且

$$\det_{\mathrm{FK}}(\nu P) = \nu^{c_k}\det_{\mathrm{FK}} P. \tag{6}$$

2. 第一贝蒂数与组合 Ruelle ζ 函数

2.1. 紧情形。

本节旨在证明 定理 1。

设紧致定向流形 M 的维数为 n，并具有多面体分解 $\mathscr{T}$。我们假设 $\mathscr{T}$ 是正则的：$\mathscr{T}$ 中任意一个（$n-1$）维多面体的边界恰有 N 个超面。

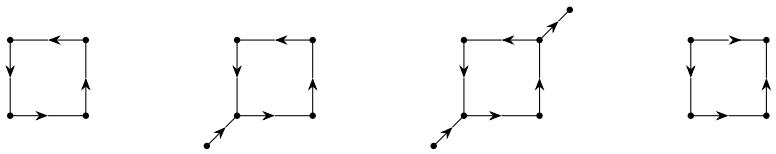
定义 11。 对于任意闭测地线 γ，记 n_γ 为 反转数，即 γ中出现的不相容对的数量，参见 γ，见 图 3；其符号

$$\varepsilon_\gamma = (-1)^{n_\gamma}$$

称为 γ 的反向指标 。

对于任意闭测地线 γ，我们用 $\gamma^\sharp$ 表示唯一的本原闭测地线，使得 γ 是 $\gamma^\sharp$的幂。回想一下，$|\gamma^\sharp|$ 表示 $\gamma^\sharp$的长度。

图 3. 从左到右的若干无标记闭素测地线 γ_i，$i=1\dots4$，。额外的边会被经过两次（往返）。对于左侧的第一个，$n_{\gamma_1}=0$，然后$n_{\gamma_2}=1$ 和$n_{\gamma_3}=n_{\gamma_4}=2$。



引理 12. 对于每个 $k=1$，2，……，都有

$$\operatorname{tr} T^k = \sum_{|\gamma|=k} \varepsilon_\gamma |\gamma^\sharp|, \tag{7}$$

其中求和遍历所有闭测地线（不一定是本原的）。

证明. 对于 $\sigma\in\beta_{n-1}$，对角系数

$$(T^k)_{\sigma,\sigma} = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_{k-1}} T_{\sigma,\sigma_1}T_{\sigma_1,\sigma_2}\dots T_{\sigma_{k-1},\sigma}$$

计算从单形σ出发、长度为 k 的闭路径的带符号数量，因为根据定义，我们有

$$T_{\sigma,\sigma_1}T_{\sigma_1,\sigma_2}\dots T_{\sigma_{k-1},\sigma} = \varepsilon_\gamma$$

只要 γ 由路径（σ，σ_1，……，σ_{k-1}）表示，就有上述结论。此外，每条闭测地线 γ 在 tr T^k 中恰好出现 $|\gamma^\sharp|$ 次，由此证明得证。□

有了这个迹公式，我们来证明定理 1，这里重述如下。转移矩阵 T 定义见命题9。

定理 13. 设 $\rho(T)$ 为转移矩阵 T 的谱半径。那么对于$|z| < \rho(T)^{-1}$，有

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) = \prod_{\gamma\in\mathcal{P}} \left(1 - \varepsilon_\gamma z^{|\gamma|}\right) = \det\left(\mathrm{Id} - zT\right). \tag{8}$$

特别地，$\zeta_{\mathscr{T}}(z)$ 可延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的多项式函数。此外，它在 $z = (N+2)^{-1}$ 处以 $b_1(M)$ 阶消失。

证明。利用 log(det(A)) =tr(log(A)) 以及 log 的幂级数，我们得到

$$\det(\mathrm{Id} - zT) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \operatorname{tr} T^k\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \sum_{|\gamma|=k} \varepsilon_\gamma |\gamma^\sharp|\right).$$

现在我们有 $\sum_{|\gamma|=k} \varepsilon_\gamma|\gamma^\sharp| = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}} |\gamma| \sum_{p:\ p|\gamma|=k} \varepsilon_\gamma^p$，因此可得

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{Id} - zT) &= \exp\left(-\sum_{\gamma\in\mathcal{P}} |\gamma| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p|\gamma|}}{p|\gamma|} \varepsilon_\gamma^p\right) \\ &= \prod_{\gamma\in\mathcal{P}} \exp\left(-\sum_{p} \frac{\left(\varepsilon_\gamma z^{|\gamma|}\right)^p}{p}\right),\end{aligned}$$

这证明了公式（8）。最后，根据命题9，可得

$$\det(\mathrm{Id} - zT) = z^{\dim C_{n-1}(\mathscr{T})} \det\left(\frac{1 - z(N+2)}{z}\mathrm{Id} - \Delta_{n-1}\right)$$

其中 $\Delta_{n-1} = \Delta|_{C_{n-1}(\mathscr{T})}$。然而，有限维霍奇理论给出

$$\dim\ker \Delta_{n-1} = b_{n-1}(M),$$

因此，庞加莱对偶表明，det(Id $- zT$) 在 z =$(N+2)^{-1}$ 处的零点阶数为 $b_1(M)$。证明完毕。□

2.2. **非紧情形：** L^2**-贝蒂数**。本节考虑第1.2节中的情形：带有多面体分解 $\mathscr{T}$ 的紧流形 M 配有一个覆盖空间M，该覆盖空间对应于基本群 $\pi_1(M)$ 的商 π。分解 $\mathscr{T}$提升为 $\mathscr{T}$，对此我们为作为 $\mathbb{Z}[\pi]$-模的空间 C_{n-1}(ˆ$\mathscr{T}$) 固定一个基{ˆ σ_i^{n-1}}$_{i=1,\ \ldots c_{n-1}}$。

ˆ ˆ 我们用 $\mathcal{P}$ 表示从 $\mathscr{T}$中某个 ˆσ_i^{n-1} 出发的本原闭测地线集合。回顾一下，T 是与 ˆ 上描述的测地线随机游走相关联的转移算子 $\mathscr{T}$，该随机游走见 命题9。

那么引理 12 在此情形下成立，即：

引理 14. 对于每个 $k = 1, 2, \ldots\ldots$，均有

$$\operatorname{tr}_{\mathrm{vN}} T^k = \sum_{|\gamma|=k} \varepsilon_\gamma |\gamma^\sharp|, \tag{9}$$

其中求和遍及所有以某个$\hat{}\sigma_i^{n-1}$ 为起点的闭测地线（不一定是本原的）。

证明。 根据公式 (5)中给出的冯·诺依曼迹定义，证明与引理 12的证明完全相同。 □

现在我们证明定理 4，并在此重述如下：

定理 15. 函数

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) = \prod_{\gamma \in \overline{\mathcal{P}}} (1 - \varepsilon_\gamma z^{|\gamma|}) \tag{10}$$

在 $|z| \ll 1$ 收敛，并且可解析延拓至直径为$(0, \frac{1}{N+2})$的圆盘。此外，若 $\Delta_{n-1}^{(2)}$ 属于行列式类，则

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) \sim_{z \to (N+2)^{-1}} \left(\frac{1}{z} - (N+2)\right)^{b_1^{(2)}(M,\pi)} \frac{\det_{\mathrm{FK}}(\Delta_{n-1}^{(2)})}{(N+2)^{c_{n-1}}}.$$

$\hat{}$ 证明。由于三角剖分 $\mathscr{T}$是紧流形的一个三角剖分的提升，因此任意 $n-1$单形的邻居数量存在一个全局上界 K，特别是，长度为 k的本原闭测地线少于 K^k 条。由此可知，无穷乘积（10）在 $|z| < K^{-1}$收敛。

现在利用引理 14 以及以下事实

$$\det_{\mathrm{FK}}(\mathrm{Id} - zT) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \operatorname{tr}_{\mathrm{vN}} T^k\right)$$

在实区间 $\left]\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right[$，可以像定理 13 的证明中那样推得

$$\zeta_{\mathscr{T}}(z) = \det_{\mathrm{FK}}(\mathrm{Id} - zT).$$

注意，由命题9可得 $\Delta_{n-1}^{(2)} = (N+2)\,\mathrm{Id} - T$，因此我们得到

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathscr{T}}(z) &= \det_{\mathrm{FK}}\left((1 - z(N+2))\,\mathrm{Id} + z\Delta_{n-1}^{(2)}\right) \\ &= z^{c_{n-1}} \det_{\mathrm{FK}}\left(\left(\frac{1}{z} - (N+2)\right)\mathrm{Id} + \Delta_{n-1}^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

其中我们使用了（6）。在证明的其余部分，我们令 $s = z^{-1} - (N+2)$。

首先注意，对于 $s \in]0, +\infty[$，算子 $P(s) = s\,\mathrm{Id} + \Delta_{n-1}^{(2)}$是自伴的，且具有正谱。我们关注其行为

$$\det_{\mathrm{FK}}\left(s\ \mathrm{Id} + \Delta_{n-1}^{(2)}\right)$$

当 s 在 $]0$中变化时$+\infty[$，尤其是当 s 趋于 0时。仿照 [9, 引理 3.15 (5)]，，我们首先观察到算子 $P(s)$ 的密度函数恰好是

$$D_{P(s)}(\lambda) = D_{n-1}(\lambda - s)$$

其中 D_{n-1} 表示拉普拉斯算子 $\Delta_{n-1}^{(2)}$的谱密度函数 $D_{\Delta_{n-1}^{(2)}}$。我们推得

$$\begin{aligned}\det_{\mathrm{FK}} P(s) &= \exp \int_{0^+}^{\infty} \log\lambda \,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda - s) \\ &= \exp \int_{-s^+}^{\infty} \log(\lambda + s)\,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda) \\ &= \exp\left(\int_{-s^+}^{0} \log(\lambda + s)\,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda) + \int_{0^+}^{\infty} \log(\lambda + s)\,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda)\right)\end{aligned}$$

由于只要 $\lambda < 0$， $D_{n-1}(\lambda) = 0$，因此我们得到

$$\det_{\mathrm{FK}} P(s) = s^{D_{n-1}(0)} \exp \int_{0^+}^{\infty} \log(\lambda + s)\,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda).$$

该公式在区域 $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$内定义了一个关于 s 的解析函数，这证明了定理的第二个断言。

此外，由于 $\Delta_{n-1}^{(2)}$ 属于行列式类，且 $D_{n-1}(0) = b_{n-1}^{(2)}(\mathscr{T}, \pi)$，我们得到

$$\det_{\mathrm{FK}} P(s) \sim_{s\to 0} s^{b_{n-1}^{(2)}(\mathscr{T},\pi)} \det_{\mathrm{FK}} \Delta_{n-1}^{(2)}.$$

将其代入（11），证明即告完成。 □

如果不假设属于行列式类，我们就无法理解当 s 趋于零时 $\det_{\mathrm{FK}} P(s)$ 的极限。尽管如此，由下式定义的函数 χ

$$\chi(s) = \det_{\mathrm{FK}}(s\ \mathrm{Id} + \Delta_{n-1}^{(2)})$$

在 $]0, +\infty[$, 上仍然是实解析的，而且我们可以证明，它在无穷远处的行为包含了 $b_{n-1}^{(2)}(M, \pi)$ 的信息，不过这种联系相当间接。

事实上，考虑由下式定义的函数 Ψ

$$\Psi(s) = \chi(s^{-1}) - c_{n-1}(\mathscr{T}) \log(s^{-1}).$$

那么，利用 $D_{n-1}(\lambda) = c_{n-1}(\mathscr{T})$ 对于 $\lambda > \|\Delta_{n-1}^{(2)}\|$，经过简单计算可得

$$\Psi(s) = \int_0^{\|\Delta_{n-1}^{(2)}\|} \log(1 + s\lambda)\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda),$$

这里我们强调，积分是在 $\left[0, \|\Delta_{n-1}^{(2)}\|\right]$ 上进行的，而不是在 $\left]0, \|\Delta_{n-1}^{(2)}\|\right]$上进行的。因此， $\Psi(s)$ 在 $s = 0$ 处可延拓为实解析函数，并可展开

当 s 较小时，可展开为

$$\Psi(s)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{s^k}{k}\int_0^{\|\Delta_{n-1}^{(2)}\|}\lambda^k\,\mathrm{d}D_{n-1}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{s^k}{k}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{vN}}\left((\Delta_{n-1}^{(2)})^k\right).$$

因此，函数 $\Psi(s)$ 与族 $\left\{\mathrm{tr}_{\mathrm{vN}}\left((\Delta_{n-1}^{(2)})^k\right)\right\}_k$ 在 $s=0$ 附近相互确定。反过来，这个族又确定函数

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{vN}}\exp(-t\Delta_{n-1}^{(2)})=\sum_k\frac{(-t)^k}{k!}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{vN}}\left((\Delta_{n-1}^{(2)})^k\right),$$

而当 T 趋于 ∞ 时，后者趋于 $b_{n-1}^{(2)}(M,\pi)$。综上，我们得到以下结果。

命题 16. 函数 $\zeta_{\mathscr{T}}$ 和数据 $c_{n-1}(\mathscr{T})$ 确定 $b_{n-1}^{(2)}(M,\pi)$。

3. 组合链接数

本节证明定理6。取一个紧致定向三维流形 M，其上带有一个 N-正则多面体分解 $\mathscr{T}$，并令 $\mathscr{T}^\vee$ 为 $\mathscr{T}$ 的一个对偶多面体分解。取两个定向纽结 $\kappa_1\in C_1(\mathscr{T})$ 和 $\kappa_2\in C_1(\mathscr{T}^\vee)$，我们假设它们在 M 中有理同调平凡，即存在整数 p_1、p_2 以及二维链 $\sigma_1\in C_2(\mathscr{T})$ 和 $\sigma_2\in C_2(\mathscr{T}^\vee)$，使得

$$\partial\sigma_j=p_j\kappa_j,\quad j=1,2.$$

回想一下，κ_1 与 κ_2 的链接数定义为 σ_1 与 κ_2 的代数交数除以 p_1，可写作

$$\mathrm{lk}(\kappa_1,\kappa_2)=\frac{1}{p_1}\langle\sigma_1,\star\kappa_2\rangle. \tag{12}$$

我们的目标是用组合方法计算这个量。我们将$\mathcal{G}^\perp(\kappa_1,\ \kappa_2)$定义为从 κ_1 到 κ_2的正交测地路径 集合，即$c=(\tau_1,\ \ldots\ldots,\ \tau_k)$（按引言中的定义），它们位于 $\mathscr{T}$的二维骨架中，并满足

$$|\langle\partial\tau_1,\kappa_1\rangle|>0\quad\text{and}\quad|\langle\tau_k,\star\kappa_2\rangle|>0;$$

另见 图 1。

同样，我们用 $|c|$ 表示 c的长度；对于每条正交测地路径$c=(\tau_1,\ \ldots\ldots,\ \tau_k)\in\mathcal{G}^\perp(\kappa_1,\ \kappa_2)$，我们将 c 在$(\kappa_1,\ \kappa_2)$上的关联数 定义为

$$m_c=\langle\partial\tau_1,\kappa_1\rangle\,\langle\tau_k,\star\kappa_2\rangle.$$

如果每个结 κ_j 都是简单的，也就是说，$\mathscr{T}$（分别为 $\mathscr{T}^\vee$）中的每个一单形至多出现在 κ_1（分别为 κ_2）中一次，那么 $m_c\in\{-1,1\}$。还要注意，总能找到一个多面体分解 $\mathscr{T}$，使得 κ_1（分别为 κ_2）与 C_1（$\mathscr{T}$）（分别为 C_1（$\mathscr{T}^\vee$））中的一个简单结同调等价。

与上一节一样，我们用 $\varepsilon_c = (-1)^{n_c}$ 表示 c 的反向指标，其中 n_c 是 c 中出现的不相容对的数量。

我们有如下迹公式，类似于 引理 12，它描述了转移矩阵 T 中的元素如何计数正交测地路径。

引理17。 对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，有

$$\langle T^{k-1}\partial^\star \kappa_1, \star\kappa_2\rangle = \sum_{\substack{c\in\mathcal{G}^\perp(\kappa_1,\kappa_2)\\ |c|=k}} \varepsilon_c m_c.$$

证明。 对于 σ， $\tau \in \beta_2$，有

$$(T^{k-1})_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1}} T_{\sigma,\sigma_1}T_{\sigma_1,\sigma_2}\ldots T_{\sigma_{k-1},\tau}.$$

根据定义，若 $c = (\sigma,\ \sigma_1,\ \ldots\ldots,\ \sigma_{k-1},\ \tau)$ 是一条从 $\sigma \in \partial^\star\kappa_1$ 到 $\tau \in \star\kappa_2$ 的正交测地路径，则

$$T_{\sigma,\sigma_1}T_{\sigma_1,\sigma_2}\ldots T_{\sigma_{k-1},\tau} = \varepsilon_c.$$

此外，这样一条路径 c 出现的次数恰好为 m_c，由此便证明了该引理。 □

现在我们可以证明定理6，回顾如下：

定理18。设 $\rho(T)$ 为转移矩阵 T 的谱半径。级数

$$\eta(z) = \sum_{c\in\mathcal{G}^\perp(\kappa_1,\kappa_2)} \varepsilon_c m_c z^{|c|},$$

在 $|z| < \rho^{-1}(T)$ 处收敛。它定义了关于 z 的有理函数，并且在 $z = 1/(N+2)$ 处正则，满足

$$\eta\left(\frac{1}{N+2}\right) = \mathrm{lk}(\kappa_1,\kappa_2).$$

证明。有限维霍奇理论给出

$$C_1(\mathscr{T}) = \operatorname{im}\partial \oplus \operatorname{im}\partial^\star \oplus \ker\Delta.$$

此外， Δ 保持这一分解，因此它分别将 $\operatorname{im}\partial$ （及 $\operatorname{im}\partial^\star$）同构地映到自身。我们将 $K\colon C_1(\mathscr{T}) \to C_1(\mathscr{T})$ 记为在 $\operatorname{im}\partial \oplus \operatorname{im}\partial^\star$ 上 Δ 的逆算子，并将 $\ker\Delta$ 映到 $\{0\}$。于是，由于 $p_1\kappa_1 \in \operatorname{im}\partial$，可得

$$\partial\partial^\star K p_1\kappa_1 = p_1\kappa_1,$$

因此根据 式 (12)，可得

$$\mathrm{lk}(\kappa_1,\kappa_2) = \frac{1}{p_1}\langle \partial^\star K p_1\kappa_1, \kappa_2\rangle. \tag{13}$$

现在，如果 $\frac{1}{z}$ 不在 T的谱中，则有

$$\frac{1}{p_1}\langle\partial^\star(\Delta+(\frac{1}{z}-(N+2))\,\mathrm{Id})^{-1}p_1\kappa_1,\kappa_2\rangle=\frac{1}{p_1}\langle\partial^\star\,(\frac{1}{z}\,\mathrm{Id}-T)^{-1}p_1\kappa_1,\kappa_2\rangle \tag{14}$$

由 命题9可知。对于 $|z|<{}_\rho\frac{1}{T()}$ 我们可以展开 式（14），得到

$$\frac{1}{p_1}\langle\partial^\star(\Delta+(\frac{1}{z}-(N+2))\,\mathrm{Id})^{-1}p_1\kappa_1,\kappa_2\rangle=\frac{1}{p_1}\sum_{k=1}^{\infty}z^k\langle T^{k-1}\partial^\star p_1\kappa_1,\kappa_2\rangle=\eta(z)$$

最后一个等式由 引理17得出。这表明 $\eta(z)$ 是关于 z的有理函数。最后，注意到 $\Delta+\omega$ 在 $(\ker\Delta)^\perp$ 上可逆， $|\omega|$ 当其足够小时，并且

$$(\Delta+\omega)^{-1}=K-\omega(\Delta+\omega)^{-1}K.$$

因此，对于 $\omega=\frac{1}{z}-(N+2)=0$，我们得到

$$\eta\left(\frac{1}{N+2}\right)=\langle\partial^\star K\kappa_1,\kappa_2\rangle=\mathrm{lk}(\kappa_1,\kappa_2\rangle,$$

由此完成证明。 □

参考文献

[1] Yann Chaubet。带边界曲面的庞加莱级数。Nonlinearity，35(12):5993，2022。[2] Nguyen Viet Dang 和 Gabriel Rivière。勒让德结的庞加莱级数与链接。arXiv 预印本 2005.13235，2020。[3] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。曲面上的 Ruelle ζ 函数在零点处的取值。Invent. Math.，210(1):211–229，2017。[4] Roberto Fernández、Jürg Fröhlich 和 Alan D Sokal。量子场论中的随机游走、临界现象与平凡性。Springer Science & Business Media，2013。[5] David Fried。富克斯群与赖德迈斯特挠率。《塞尔伯格迹公式及相关主题》，美国数学学会、美国数学研究所及美国工业与应用数学学会联合暑期研究会议论文集，缅因州布伦瑞克，1984，Contemp. Math. 53，141–163（1986），1986。[6] James Glimm 和 Arthur Jaffe。量子物理学：泛函积分的一个观点。Springer Science & Business Media，2012。[7] Henri Paul de Saint Gervais。Analysis Situs。https://analysis-situs.math.cnrs.fr/ index.html。[8] Tim Höpfner。幂零李群上的Novikov-Shubin不变量。博士论文，哥廷根格奥尔格-奥古斯特大学，2023。[9] Wolfgang Lück。 L^2-不变量：理论及其在几何学和 K-理论中的应用，数学及其应用成果第3辑第44卷。施普林格出版社，柏林，2002。[10] David Ruelle。扩张映射和阿诺索夫流的ζ函数。Inventiones mathematicae，34(3):231–242，1976。[11]Thomas Schick。 L^2-行列式类与 L^2-贝蒂数的逼近。Trans. Amer. Math. Soc.，353(8):3247–3265，2001。[12] Nicolas Th. Varopoulos。流形上的布朗运动与随机游走。Ann. Inst. Fourier (Grenoble)，34(2):243–269，1984。

数学研究所，哥廷根格奥尔格-奥古斯特大学电子邮箱地址：
leo.benard@mathematik.uni-goettingen.de

剑桥大学纯数学与数学统计系，剑桥电子邮箱：y.chaubet@dpmms.cam.ac.uk

索邦大学与巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，雅克·阿达马数学研究所—巴黎左岸，法国巴黎 F-75005，法国大学研究院，法国巴黎。电子邮箱：dang@imj-prg.fr

哥廷根格奥尔格-奥古斯特大学数学研究所电子邮箱：
thomas.schick@math.uni-goettingen.de