arXiv:2303.11248v1 [math.FA] 20 Mar 2023

# 有理内函数的克拉克测度 II：一般双次数与高维

JOHN T. ANDERSON、LINUS BERGQVIST、KELLY BICKEL、JOSEPH A. CIMA 和 ALAN A. SOLA

Abstract. 我们研究双圆盘上一般的二变量有理内函数（RIF）的克拉克测度，包括具有奇点的情形；也研究没有奇点的一般 $d$变量有理内函数。我们根据相关有理内函数的水平集和偏导数，精确描述这类克拉克测度的支撑集和权重。在二变量情形下，我们刻画相关克拉克嵌入何时为酉映射；对于一般参数取值，我们还将二变量权重的消失与相关有理内函数在奇点处的接触阶联系起来。

## 1. Introduction

对于 $d \in \mathbb{N}$，我们令

$$\mathbb{D}^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \colon |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, d\}$$

表示单位多圆盘，并且

$$\mathbb{T}^d = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d \colon |\zeta_j| = 1,\ j = 1, \dots, d\}$$

是其特征边界。若 $\phi \colon \mathbb{D}^d \to \mathbb{D}$ 是一个全纯函数，则对于 $\alpha \in \mathbb{T}$，表达式

$$\Re\left(\frac{\alpha + \phi(z)}{\alpha - \phi(z)}\right) = \frac{1 - |\phi(z)|^2}{|\alpha - \phi(z)|^2}$$

是正的且多调和的，因此存在唯一的正博雷尔测度 $\sigma_\alpha$，定义在 $\mathbb{T}^d$ 上，使得

$$\frac{1 - |\phi(z)|^2}{|\alpha - \phi(z)|^2} = \int_{\mathbb{T}^d} P_z(\zeta) d\sigma_\alpha(\zeta),$$

其中 $P_z(\zeta)$表示多圆盘的泊松核

$$P_z(\zeta) = \prod_{j=1}^{d} P_{z_j}(\zeta_j), \quad \text{and} \quad P_{z_j}(\zeta_j) = \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}.$$

这类测度，即其泊松积分是多圆盘上某个全纯函数实部的测度 $\mathbb{D}^d$，称为多调和测度，参见[16, 第2节。2]。注意 $P_z(\zeta) = C_z(\zeta)C_\zeta(z)/C_z(z)$，其中 $C_\zeta(z)$ 表示 $\mathbb{D}^d$的柯西核，定义如下：

$$C_\zeta(z) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1 - z_j\overline{\zeta}_j}, \quad z \in \mathbb{D}^d, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}^d.$$

日期：2023年3月21日。2010年数学主题分类。28A25、28A35（主要）；32A08、47A55（次要）。关键词与短语。克拉克测度、有理内函数、酉嵌入。

测度 $\{\sigma_\alpha\}$ 称为与 $\phi$ 相关联的亚历山德罗夫–克拉克测度；如果 $\phi$是内函数（定义见下文），则这些测度称为克拉克测度。本文旨在介绍关于有理内函数这一类函数的此类测度的若干结果。

首先假设 $\phi\colon\ \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$ 是一个有界全纯函数。于是，根据多圆盘上的法图定理（参见 [18]），$\phi$ 几乎处处存在非切向极限

$$\phi^*(\zeta) = \angle \lim_{\mathbb{D}^d \ni z \to \zeta} \phi(z)$$

对于勒贝格几乎处处的 $\zeta \in \mathbb{T}^d$；在此语境下，非切向意味着对某个常数 $c > 1$，$|z_j - \zeta_j| < c(1 - |z_j|^2)$，且 $j = 1$、……、$d$。在本文中，只要上下文清楚表明我们指的是边界值，就将 $\phi^*(\zeta)$ 写作 $\phi(\zeta)$。有界全纯函数 $\phi\colon\ \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$若其非切向边界值几乎处处满足 $|\phi^*(\zeta)| = 1$，则称为内函数。于是，有理内函数是形如 $\phi = q/p$ 的内函数，其中 $q$、$p$ 属于多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$。

有理内函数（RIF）在多圆盘中的函数论和算子论领域得到了广泛研究，尤其是在二变量情形下。有理内函数比一般的内函数更易处理，并具有一些额外的正则性性质；例如，Knese 的一条定理指出，任意有理内函数 $\phi\colon\ \mathbb{D}^d \to \mathbb{D}$ 都有非切向边界值$\phi^*(\zeta) \in \mathbb{T}$ 在 每个 $\zeta \in \mathbb{T}^d$处，见 [15]。有理内函数也易于构造（见下文第 2 节），并可用于以具体方式探究一些对于一般内函数而言似乎难以回答的问题。另一方面，有理内函数在高维中确实表现出一定的复杂性和一些令人意外的特征：例如，$\phi = q/p$ 在边界上的某些点处可能存在奇点 $\tau \in \mathbb{T}^d$，其中 $p(\tau) = 0 = q(\tau)$，而这类边界奇点的解析和几何性质可能相当复杂，见 [6, 7]。

在最近发表的论文 [10], 中，E. Doubtsov 开始系统地研究多圆盘中与内函数相关的克拉克测度。在将亚历山德罗夫分解定理等一些经典单变量结果推广到高维后，他出人意料地发现，对于单变量内函数而言总是满射的某些映射到 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中的等距映射，在 $d$ 变量情形下可能并非满射；甚至对于与有理内函数相关的克拉克测度，也会出现这种情况。受 Doubtsov 的工作启发，本论文的部分作者对一类特殊的二变量有理内函数所关联的克拉克测度进行了深入研究 [4] 。这类二变量有理内函数 $\phi = q/p$ 的 $q, p$-多项式在第一个变量中的次数为 $n$，在第二个变量中的次数为 1。具体而言，[4] 给出了双次数为 $(n, 1)$ 的有理内函数所对应的克拉克测度族 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{T}}$ 的显式描述，并给出了一项判据：通过考察 $\phi$奇点处的非切向值，判断映射到 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中的克拉克等距映射何时为满射。本文旨在将这些结果推广到完整的二变量有理内函数类，不对次数作任何限制。此外，我们还将讨论高维中出现的障碍，并在附加假设下证明有关 $d$变量有理内函数及其相关克拉克测度的一些部分结果。

1.1. 概述。 首先，在第 2 节中，我们讨论多圆盘情形下关于克拉克测度的一些基本事实；这些结果很可能为专家所熟知。接着，我们回顾并拓展近期论文中关于 $d$ 变量有理内函数的一些结果 [6, 7, 8]。具体而言，我们说明，即使存在奇点，双圆盘上的有理内函数的水平集也可以由解析函数在 $\mathbb{T}^2$ 上作全局参数化，甚至在

的情况下。为避免琐碎的复杂情形，本文始终假设 $\phi = q/p$ 对于多项式 $q$, $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 在每个变量中均为非定常函数 $z_j$。

在第 3 节中，我们给出双圆盘中与双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数相关的克拉克测度的结构公式，从而推广了 [4] 中的工作，该文研究的是双次数为 $(m,1)$ 的有理内函数。简而言之，除有限多个 $\alpha \in \mathbb{T}$（称为一般情形）外，测度 $\sigma_\alpha$ 与连续函数 $f$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的配对可表示为若干如下形式项之和

$$\int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) \frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|},$$

其中， $m$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 上的归一化勒贝格测度，而 $g_1^\alpha$，……， $g_m^\alpha$ 是解析函数，用来参数化所考虑的有理内函数 $\phi$ 的 $\alpha$-水平集。对于与 $d$变量有理内函数相关的克拉克测度，在额外假设该有理内函数在 $\overline{\mathbb{D}}^d$上没有奇点时，也可证明存在类似的表示。当变量数为二且 $\phi$ 确实存在奇点时，可能存在一些取值 $\alpha \in \mathbb{T}$ （例外情形），此时需要加上有限多个如下形式的项：$c_\alpha \int_{\mathbb{T}} f(\tau, \zeta) dm(\zeta)$，其中 $\tau \in \mathbb{T}$和$c_\alpha > 0$ 是常数。

在第 4 节中，我们分析从模型空间 $K_\phi = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}^2)$ 到 $L^2(\sigma_\alpha)$ 的克拉克嵌入算子，其中 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 是双圆盘上的经典哈代空间。我们证明，对于一般的 $\alpha$，这些克拉克等距映射都是满射，因而是酉的。另一方面，我们证明，若 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是一个例外参数值，则相应的克拉克等距映射不是满射。这表明，对于一般双次数的情形，我们找到了正确的“例外值”概念，并解决了 [4]中遗留的问题。

在第 5 节中，我们利用 [5] 中的近期研究成果，进一步了解双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数的克拉克测度结构。我们证明，对于除有限多个参数值 $\alpha \in \mathbb{T}$之外的所有参数，结构公式中出现的权重 $|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|^{-1}$都是有界的，并且在奇点处呈现的消失阶由相应奇点处有理内函数的接触阶决定。接触阶是一个几何量，最早在 [6] 中引入，后来被用于研究有理内函数导数的可积性以及有理内函数在奇点处的非切向多项式逼近。第 5 节的主要结果基本上是[4]中提出的猜想。

最后，我们在第6 节考察一个奇异三变量例子，并以此作为结尾。这个例子不在我们关于高维有理内函数的克拉克测度的一般结果所涵盖的范围内。我们得到的克拉克测度公式表明，高维情形更具挑战性，而且我们关于双次数为（$m$， $n$）的有理内函数的一些结果可能无法推广到 $d$变量情形。

## 2. Preliminaries

近年来，关于将单变量经典克拉克理论推广到多变量情形，有若干有趣的研究，参见例如 [2, 3, 13]。由于我们关注与有理内函数相关的克拉克测度，因此将讨论范围限定在多圆盘情形。

2.1. 多圆盘中的克拉克理论。设 $\phi$ 是 $\mathbb{D}^d$ 上的一个内函数。我们用 $K_\phi$ 表示与函数 $\phi$ 相关的模型空间，其定义为

$$K_\phi := H^2(\mathbb{D}^d) \ominus \phi H^2(\mathbb{D}^d).$$

由于乘以 $\phi$ 在 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上是一个部分等距算子， $K_\phi$ 的再生核由下式给出

$$K(z,w) = K_w(z) := (1 - \overline{\phi(w)}\phi(z))C_w(z), \quad \text{for } z, w \in \mathbb{D}^d.$$

与单变量情形一样，在论文[10], 中，Doubtsov 首先在再生核上定义嵌入映射 $J_\alpha$： $K_\phi \mapsto L^2(\sigma_\alpha)$，其定义如下：

$$J_\alpha[K_w](\zeta) := (1 - \alpha\overline{\phi(w)})C_w(\zeta), \quad \text{for } w \in \mathbb{D}^d, \zeta \in \mathbb{T}^d, \tag{1}$$

随后证明该映射在再生核上保持内积，最后利用再生核的稠密性，将其扩展为从 $K_\phi$ 到 $L^2(\sigma_\alpha)$ 的等距嵌入。然而，与单变量情形不同，该映射并非自动满射。[10] 的定理 3.2 指出，上述构造的等距嵌入 $J_\alpha$ 是酉的，当且仅当多圆盘代数 $A(\mathbb{D}^d)$ 在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中稠密。

现在，设 $\phi$: $\mathbb{D}^d \to \mathbb{D}$ 是一个有理内函数，对于固定的 $\alpha \in \mathbb{T}$，其对应的克拉克测度为 $\sigma_\alpha$。正如 [10], 中所述，每个 $\sigma_\alpha$ 都支撑在模为一的水平集上

$$\mathcal{C}_\alpha(\phi) = \operatorname{clos}\left\{\zeta \in \mathbb{T}^d : \lim_{r\to 1^-} \phi(r\zeta) = \alpha\right\}, \tag{2}$$

其中，“clos”表示该集合的闭包。当函数 $\phi$ 的含义由上下文明确时，我们有时将此集合简称为 $\mathcal{C}_\alpha$。虽然对于专家而言，关于测度支撑的结论应是众所周知的，但为求完整起见，我们仍给出证明。

**Le引理 2.1.** 设 $\phi$ 是 $\mathbb{D}^d$ 上的一个有理内函数，且 $\alpha \in \mathbb{T}$。则 $\operatorname{supp}(\sigma_\alpha) \subset \mathcal{C}_\alpha(\phi)$ .

证明. 设 $B \subset \mathbb{T}^d$ 是一个开球，使得对所有 $\zeta \in B$，均有 $\lim_{r\to 1^-} \phi(r\zeta) \neq \alpha$。我们需要证明 $\sigma_\alpha(B) = 0$。由于泊松核非负，因此

$$\int_B P(r\zeta,\eta)d\sigma_\alpha(\eta) \le \int_{\mathbb{T}^d} P(r\zeta,\eta)d\sigma_\alpha(\eta) = \frac{1-|\phi(r\zeta)|^2}{|\alpha-\phi(r\zeta)|^2}$$

对所有 $\zeta \in B$ 及每个 $0 \le r < 1$ 均成立。根据 [15, 推论 14.6], 当 $r$ 趋于 1 时，右侧为零，因此

$$\lim_{r\to 1^-} \int_B P(r\zeta,\eta)d\sigma_\alpha(\eta) = 0.$$

现在考虑集合

$$D_r(\zeta) := \{\eta \in \mathbb{T}^d : |r\zeta_j - \eta_j| \le 2(1-r), \quad j = 1, \dots, d\}.$$

对于该集合中的每个 $\eta$，均有

$$|r\zeta_j - \eta_j|^2 \le 4(1-r)^2 \to \frac{1-r^2}{4(1-r)^2} = \frac{1+r}{4(1-r)} \le \frac{1-r^2}{|r\zeta_j-\eta_j|^2},$$

因此

$$\left(\frac{1+r}{4(1-r)}\right)^d \le P(r\zeta,\eta).$$

显然

$$\left(\frac{1+r}{4(1-r)}\right)^d \sigma_\alpha(B\cap D_r(\zeta)) \le \int_{B\cap D_r(\zeta)} P(r\zeta,\eta)d\sigma_\alpha(\eta) \le \int_B P(r\zeta,\eta)d\sigma_\alpha(\eta),$$

so

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\sigma_\alpha(B\cap D_r(\zeta))}{(1-r)^d} = 0. \tag{3}$$

注意，由于 $\zeta_j, \eta_j \in \mathbb{T}$，不等式

$$|r\zeta_j - \eta_j| = |r - \eta_j\overline{\zeta}_j| < 2(1-r),$$

可用极坐标（其中 $e^{i\theta_j} = \eta_j\overline{\zeta}_j$）写为

$$\begin{aligned} 2(1-r) > |r-e^{i\theta_j}| &\iff 4(1-2r+r^2) > 1+r^2-2r\cos\theta_j \\ &\iff 3r^2-6r+3 = 3(1-r)^2 > 2r-2r\cos(\theta_j) \\ &\iff \cos(\theta_j) > 1-\frac{3(1-r)^2}{2r}, \end{aligned}$$

因此

$$D_r(\zeta) = \left\{\zeta e^{i\theta}\in\mathbb{T}^d : |\theta_j| < \cos^{-1}\left(1-\frac{3(1-r)^2}{2r}\right), j=1,\dots,d\right\}.$$

特别地，作为 $\mathbb{T}^d$ 的子集，它是由 $d$ 个相同区间的副本构成的乘积，因此（当 $r$ 接近 1 时）$D_r(\zeta)$ 的勒贝格测度可以独立于 $\zeta$ 估计为

$$|D_r(\zeta)| = 2^d\cos^{-1}\left(1-\frac{3(1-r)^2}{2r}\right)^d \ge c(d)\sqrt{\frac{3(1-r)^2}{2r}}^d \ge c'(d)(1-r)^d.$$

结合（3），这意味着

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{\sigma_\alpha(B\cap D_r(\zeta))}{|D_r(\zeta)|} = 0$$

对每个 $\zeta\in B$。

由于 $D_r(\zeta)$ 是 $\mathbb{T}^d$ 中的一个立方体，且其体积趋于零，这意味着由 $(\sigma_\alpha)_{|B}$ 限制得到的测度的 $d$-维上密度（定义为 $(\sigma_\alpha)_{|B}(A) := \sigma_\alpha(B\cap A)$）在 $\mathbb{T}^d$ 中每一点处都为零，参见例如 [17] 中命题 2.2.2 附近的论述。这进而意味着 $(\sigma_\alpha)_{|B}$ 等于零，特别是意味着 $\sigma_\alpha(B) = 0$。□

注意，引理 2.1 表明，与有理内函数相关联的每个克拉克测度都是相对于 $\mathbb{T}^d$上的勒贝格测度的奇异测度。还值得注意的是，当 $\phi = \tilde{p}/p$ 是二变量有理内函数时，实际上有 $\mathrm{supp}(\sigma_\alpha) = \mathcal{C}_\alpha(\phi$。这将由我们后面的结果定理 3.3 和定理 3.8推出。因此，可以合理地猜想，对于多圆盘 $\mathbb{D}^d$ 上的一般有理内函数，同样有 $\mathrm{supp}(\sigma_\alpha) = \mathcal{C}_\alpha(\phi)$。

为求完备起见，我们也陈述并证明以下逆命题；它在单变量情形下早已广为人知。

引理 2.2. 设 $\mu$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上质量为 1 的正多调和测度。则存在一个全纯函数 $\phi_\mu\colon \mathbb{D}^d\to\mathbb{D}$，使得 $\mu$ 是对应于全纯函数 $\phi_\mu$ 和参数值 $\alpha = 1$ 的亚历山德罗夫-克拉克测度。

如果 $\mu$ 关于勒贝格测度是奇异的，那么 $\phi_\mu$ 是一个内函数，而 $\mu$ 是其在 $\alpha = 1$ 下的克拉克测度。

证明。设 $H_\mu(z)$ 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上的全纯函数，其实部为 $\mu$ 的泊松积分，并满足 $H_\mu(0) = 1$。这样的函数存在，因为 $\mu$ 是概率测度，所以泊松积分的实部在原点处为 1；我们可以选取一个在原点处为零的调和共轭。

现在考虑函数

$$\phi_\mu(z) := \frac{H_\mu(z) - 1}{H_\mu(z) + 1}.$$

我们有

$$H_\mu(z) = \frac{1 + \phi_\mu(z)}{1 - \phi_\mu(z)},$$

因此

$$\frac{1 - |\phi_\mu(z)|^2}{|1 - \phi_\mu(z)|^2} = \Re\left(\frac{1 + \phi_\mu(z)}{1 - \phi_\mu(z)}\right) = \Re(H_\mu(z)) = \int_{\mathbb{T}^d} P(z, \zeta) d\mu(\zeta). \tag{4}$$

由于 $H_\mu$ 将 $\mathbb{D}^d$ 映射到右半平面，并且由于 $z \mapsto (z-1)/(z+1)$ 将右半平面映射到单位圆盘，我们看到 $\phi_\mu$: $\mathbb{D}^d \to \mathbb{D}$. 因此，(4) 表明 $\mu$ 是与全纯函数 $\phi_\mu(z)$ 对应的亚历山德罗夫-克拉克测度，且 $\alpha = 1$。若 $\mu$ 相对于勒贝格测度是奇异的

，定理 2 .3. 1 in[18] 表明

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}^d} P(rz, \zeta) d\mu(\zeta) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1 - |\phi_\mu(rz)|^2}{|1 - \phi_\mu(rz)|^2} = 0$$

对几乎所有 每个 $z \in \mathbb{T}^d$，这表明 $|\phi_\mu(z)| = 1$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上几乎处处成立 . □

2.2. 有理内函数的背景。我们需要一些关于二元有理内函数的详细结果，但先回顾一般理论中的一些基本事实。若 $p$ 在$\mathbb{D}^d$中没有零点，则称 $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 为稳定多项式。$d$ 元多项式的多次数为 $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$，若将 $p$ 视为变量 $z_j$的多项式时，其次数为 $n_j$。Rudin 和 Stout [19, 18] 的一个结果指出， $\mathbb{D}^d$ 中的任意有理内函数都可以写成如下形式

$$\phi(z) = e^{ia} z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d} \frac{\tilde{p}(z)}{p(z)}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$、 $k_1$、 …、 $k_d$是自然数， $p$是多次数为 $d$的稳定多项式，而 $\tilde{p}$是其反射

$$\tilde{p}(z) = z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d} \overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}_1}, \ldots, \frac{1}{\bar{z}_d}\right)}.$$

我们通常假设所考虑的有理内函数具有 $\phi = \tilde{p}/p$ 的形式，其中 $p$ 是无环面的稳定多项式。[1, 5]，对无环面多项式的概念作了详细讨论；但在本文中，我们只需指出，无环面意味着 $p$ 和 $\tilde{p}$ 没有公因子，并且 $p$ 的零点集（记作 $\mathcal{Z}(p)$）满足 $\dim(\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{T}^d) \leq d-2$。

我们总结有理内函数的一些重要定义和性质。首先，若一个有理内函数 $\phi = q/p$ 的多次数为 $(n_1, \ldots, n_d)$，则称其具有该多次数，当且仅当 $p$和 $q$没有公因子，并且对每个 $j$， $n_j$ 都是将 $p$ 和 $q$ 视为变量 $z_j$的多项式时其次数的最大值。考虑 $\phi = \tilde{p}/p$时，$\phi$ 的多次数总是与其分母 $p$ 和分子 $\tilde{p}$的多次数一致。

若 $\phi$ 是多次数为 $(n_1, \dots, n_d)$ 的有理内函数，则对任意指标 $j$ 以及任意固定的一组点 $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_d\} \subset \mathbb{T}$，我们可以考虑单变量函数 $z_j \mapsto \phi(\zeta_1, \dots, z_j, \dots, \zeta_d)$。若 $z_j \mapsto p(\zeta_1, \dots, z_j, \dots, \zeta_d)$不恒为零，则它在 $\mathbb{D}$上至多有 $n_j$ 个零点。由于 $\phi$ 在 $\mathbb{D}^d$上有界，这些零点必定是 $z_j \mapsto \phi(\zeta_1, \dots, z_j, \dots, \zeta_d)$的分子和分母的公共零点。因此它们相消后，剩下一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的有理函数，且在 $\mathbb{T}$上至多有有限个奇点。由于 $\phi$ 是有理内函数，该单变量函数在 $\mathbb{T}$上几乎处处都必须取得模为一的边界值。因此，它是一个次数至多为 $n_j$的有限布拉施克乘积。如下方引理所示，一般情况下，其次数恰为 $n_j$；但对于 $\zeta$的某些取值，其次数可以严格小于 $n_j$。

此外，如果我们将范围限制在一个 $\phi$ 上的有理内函数 $\mathbb{D}^2$，那么[15, 引理 10。1] 指出，$\phi$ 在 $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$ 或 $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$上都没有任何奇点。因此，在这种情况下，对于任意 $\zeta_1 \in \mathbb{T}$，映射 $z_2 \mapsto p(\zeta_1, z_2)$ 都不可能恒等于零，所以这种切片操作总会得到一个有限布拉施克乘积。

为了证明下面的引理，我们需要一些简写记号。给定一点 $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{d-1}, \zeta_d) \in \mathbb{T}^d$，记作 $\zeta' = (\zeta_1, \dots, \zeta_{d-1}) \in \mathbb{T}^{d-1}$；对于点 $z \in \mathbb{C}^d$，我们也使用类似的记号。

引理 2.3。设 $\phi = \frac{\tilde{p}}{p}$是 $\mathbb{D}^d$ 上的一个有理内函数，其多次数为 $(n_1, \dots, n_d)$。固定一个 $\zeta' \in \mathbb{T}^{d-1}$，令 $\phi_{\zeta'}(z_d) = \phi(\zeta_1, \dots, \zeta_{d-1}, z_d)$。若 $\phi$ 没有坐标形如 $(\zeta', \tau) \in \mathbb{T}^d$的奇点（其中 $\tau \in \mathbb{T}$），则 $\phi_{\zeta'}$是一个次数为 $n_d$的有限布拉施克乘积。

证明。 首先注意，如果 $\phi$ 没有形如 $(\zeta', \omega) \in \mathbb{T}^d$的奇点，那么函数 $p_{\zeta'}(z_d) := p(\zeta', z_d)$ 并非恒等于零。因此，断言 $\phi_{\zeta'}$是一个次数至多为 $n_d$ 的有限布拉施克乘积，可直接由引理 2.3 的陈述之前的讨论得出。

还需证明 $\phi_{\zeta'}$ 的次数恰为 $n_d$。我们先证明其初始分子 $\tilde{p}(\zeta', z_d)$ 的次数为 $n_d$，然后说明分子和分母中的项相消不会导致次数下降。为此，我们写作

$$p(z) = p_1(z') + z_d p_2(z', z_d) = p_1(z') + Q(z)$$

对于多项式 $p_1$、 $p_2$ 和 $Q$。于是

$$\tilde{p}(z) = z_d^{n_d} \tilde{p}_1(z') + \tilde{Q}(z),$$

其中， $p_1$ 的反射仅针对变量 $z_1$、.....、 $z_{d-1}$。由此可以˜看出，$\deg_{z_d}(Q) < n_d$；这是利用“∼”运算的定义，并结合 $Q$ 中的每一项关于变量 $z_d$的次数至少为 1 得出的。

接下来注意到，如果对于某个 $\zeta' \in \mathbb{T}^{d-1}$， $\tilde{p}_1(\zeta') = 0$，那么我们也有 $p_1(\zeta') = 0$。这又意味着 $p_{\zeta'}(0) = 0$。如 [8,第 1123] 页所述，应用赫尔维茨定理可知， $p_{\zeta'}$ 在 $\mathbb{D}$ 上要么处处非零，要么恒为零。我们已经证明 $p_{\zeta'}$ 不恒为零，因此 $p_{\zeta'}(0) = 0$ 将导致矛盾。所以， $\tilde{p}_1(\zeta') \neq 0$。

因此，对于 $\zeta' \in \mathbb{T}^{d-1}$，我们有 $\deg \tilde{p}(\zeta', z_d) = n_d$。这意味着， $\phi_{\zeta'}$ 中的任何次数下降都必然源于约去 $\tilde{p}(\zeta', z_d)$ 与 $p(\zeta', z_d)$ 的一个公共零点。由于 $p_{\zeta'}$ 在 $\mathbb{D}$ 上无零点，该零点必然位于 $\mathbb{T}$ 上，而这又意味着 $\phi$ 在某个 $(\zeta', \tau) \in \mathbb{T}^d$ 处有一个奇点，这与我们的假设相矛盾。因此， $\phi_{\zeta'}$ 的次数必定恰好为 $n_d$。 □

研究有理内函数的一种实用方法是考察其水平集 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$，其定义见（2）。例如，引理2.1 阐明了这些水平集在分析与有理内函数相关的克拉克测度时的作用。在[8], 中，作者给出了对模为一的水平集的一种实用的替代描述。

定理 2.4。设 $\phi = \frac{\tilde{p}}{p}$ 是 $\mathbb{D}^d$ 上的有理内函数，固定 $\alpha \in \mathbb{T}$，并令

$$\mathcal{L}_\alpha(\phi) = \{\zeta \in \mathbb{T}^d \colon \tilde{p}(\zeta) - \alpha p(\zeta) = 0\}.$$

则 $\mathcal{C}_\alpha(\phi) = \mathcal{L}_\alpha(\phi)$。

证明。参见 [8,定理 2.6]。 □

本文余下的大部分内容将讨论双圆盘 $\mathbb{D}^2$ 上有理内函数的克拉克测度。我们聚焦于这一情形的原因之一，是二元有理内函数的水平集比其 $d$ 变量对应函数的水平集具有好得多的性质。具体而言，当 $d \geq 3$ 时， $d$ 维有理内函数的水平集可能出现不连续性。关于 $d$ 变量有理内函数在维数 $d \geq 3$ 中的水平集有时具有病态性质的更详细讨论，请参见 [8] 。相比之下，当 $d = 2$ 时，我们有下面这个引理，它隐含于 [6, 7] 中。如前所述，本文中一概假设双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数同时具有 $m > 0$ 和 $n > 0$。

引理 2.5. 设 $\phi$ 是双次数为（$m$， $n$）的有理内函数。对每个 $\alpha \in \mathbb{T}$ 以及 $\tau_0 \in \mathbb{T}$ 的任意取值，存在定义在 $\mathbb{T}$ 上且在 $\mathbb{T} \setminus \{\tau_0\}$ 上解析的函数 $g_1^\alpha$、……、 $g_n^\alpha$，使得 $\mathcal{C}_\alpha$（$\phi$）可以写成以下形式的图形之并

$$\{(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) \colon \zeta \in \mathbb{T}\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

也可能还包括有限条垂直线 $\zeta_1 = \tau_1$、……、 $\zeta_1 = \tau_k$，其中每个 $\tau_j \in \mathbb{T}$。

证明。我们首先固定 $\tau \in \mathbb{T}$，并获得 $\mathcal{C}_\alpha \cap$（$I_\tau \times \mathbb{T}$）的参数化，其中 $I_\tau$ 是 $\mathbb{T}$ 中包含 $\tau$ 的一个小区间。我们需要考虑两种情况： $\tau$ 不是 $z_1$ 坐标上的 $\phi$ 奇点（步骤 1），以及 $\tau$ 是 $\phi$ 奇点的 $z_1$ 坐标（步骤 2）。对于后一种情况，我们参考已有结果来获得参数化。最后，我们将这些局部参数化拼接起来，从而得到整体参数化（步骤 3）。

步骤 1。首先，假设 $\tau$ 不是 $\phi$ 在$\mathbb{T}^2$上的奇点的 $z_1$坐标。那么，引理 2.3 表明， $\phi_\tau(z_2) := \phi(\tau, z_2)$ 是一个次数为 $\deg \phi_\tau = n$ 的非恒定有限布拉施克乘积。根据非恒定有限布拉施克乘积的性质，恰有 $n$ 个不同的点 $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{T}$，使得对于 $j = 1, \ldots, n$， $\phi_\tau(\eta_j) = \alpha$。由于$\phi_\tau$是一个非恒定布拉施克乘积，对于所有 $\zeta \in \mathbb{T}$， $\phi_\tau'(\zeta) \neq 0$，于是

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\tau, \eta_j) = \phi_\tau'(\eta_j) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

由于二元函数 $\phi$ 在每个 $(\tau, \eta_j)$ 的邻域内都是解析的，隐函数定理适用，并在局部给出解析函数 $g_{1,\,\tau}^\alpha, \ldots, g_{n,\,\tau}^\alpha$以及一个包含 $\tau$ 的开区间 $I_\tau$，使得 $\mathcal{C}_\alpha$ 可参数化为

$$\zeta_2 = g_{1,\tau}^\alpha(\zeta_1), \quad \ldots, \quad \zeta_2 = g_{n,\tau}^\alpha(\zeta_1) \tag{5}$$

在 $I_\tau \times U$中，其中 $U$最初是包含这些点的开弧之并 $\eta_1$，……， $\eta_n$。进一步缩小区间 $I_\tau$，我们可以确保（5）参数化了 $\mathcal{C}_\alpha$ 的所有部分

都包含在条带 $I_\tau \times \mathbb{T}$ 中，因为对于每个接近 $\tau$ 的 $\zeta_1$，我们都可以确保方程 $\phi(\zeta_1,\zeta_2) = \alpha$ 恰好有 $n$ 个互异解。

步骤 2。现在假设 $\tau$ 是 $\phi$ 的一个奇点的 $z_1$ 坐标。那么，或者 (a) 直线 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 包含于 $\mathcal{C}_\alpha$ 中，或者 (b) 直线 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 与 $\mathcal{C}_\alpha$ 的交点至多包含 $n$ 个来自 $\phi$ 的奇点的点，这些奇点的 $z_1$ 坐标也为 $\tau$，此外还有满足 $\phi_\tau(\eta) = \alpha$ 的点 $\eta \in \mathbb{T}$。

我们先讨论情况 (a)。基本上，我们需要对与直线 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 相交的 $\mathcal{C}_\alpha$ 的各部分进行参数化。为此，假设 $(\tau,\gamma) \in \mathbb{T}^2$ 是一列点 $(\tau_m,\gamma_m) \subset \mathcal{C}_\alpha$（满足 $\tau_m \neq \tau$）的极限。我们断言，$(\tau,\gamma)$ 必定是 $\phi$ 的一个奇点，这样我们便可应用已知结果。为此，对每个 $m$，定义单变量函数 $\phi_m(z_1) = \phi(z_1,\gamma_m\bar{\tau}_m z_1)$。由于假设垂直线 $\{\zeta_1 = \tau\}$ 属于 $\mathcal{C}_\alpha$，因此有 $\phi_m(\tau) = \alpha$；此外，根据假设，$\phi_m(\tau_m) = \phi(\tau_m,\gamma_m) = \alpha$。由于 $\phi_m$ 是一个非常数的有限布拉施克乘积，对于任意给定的 $\lambda \in \mathbb{T}\setminus\{\alpha\}$，我们都能找到一个序列 $(\rho_m) \subseteq \mathbb{T}$，其中每个 $\rho_m$ 都位于 $\mathbb{T}$ 上连接 $\tau$ 与 $\tau_m$ 的两段圆弧中较短的一段上，并满足 $\phi_m(\rho_m) = \lambda$。由于 $\tau_m \to \tau$，我们还必须有 $\rho_m \to \tau$。于是，对每个 $m$，都有 $\phi(\rho_m,\gamma_m\bar{\tau}_m\rho_m) = \lambda$。由于当 $m \to \infty$ 时，$(\rho_m,\gamma_m\bar{\tau}_m\rho_m) \to (\tau,\gamma)$，这意味着 $\phi$ 在 $(\tau,\gamma)$ 处不连续。因此，$\phi$ 在 $(\tau,\gamma)$ 处有一个奇点。这意味着我们可以在 $(\tau,\gamma)$ 处应用 [7, 定理 2.9]，该定理指出，$\mathcal{C}_\alpha$ 在 $\phi$ 的每个奇点附近都可以由解析函数局部参数化。

如果我们处于情形 (b)，则可以再次利用 [7, 定理 29], 在奇点处对 $\mathcal{C}_\alpha$ 进行参数化，并在其他点应用隐函数定理，因为 $\phi_\tau$ 仍然是非常数。

因此，在情形 (a) 和情形 (b) 中，我们都得到一组解析函数；它们可能与一条垂直线 $\{\zeta_1 = \tau\}$ 一起，在某个条带 $I_\tau \times \mathbb{T}$ 上对 $\mathcal{C}_\alpha$ 进行参数化，前提是 $I_\tau$ 被选为包含 $\tau$的足够小的区间。此外，除有限个 $\tau$外，恰好存在 $n$ 个不同的点 $\eta_1$、……、$\eta_n \in \mathbb{T}$，使得$\phi(\tau,\eta_j) = \alpha$。这意味着在每种情形下，我们必须恰好得到 $n$ 个函数。

步骤 3。现在，我们可以用形如 $I_\tau \times \mathbb{T}$ 的条带并集覆盖 $\mathbb{T}^2$，其中每个$I_\tau$ 都来自步骤 1 或步骤 2。由于奇点有限个，且 $\mathbb{T}^2$ 是紧的，我们可以将其细化为有限个条带，使得 $\phi$ 的每个奇点都位于其中一个条带内。在每个条带上，我们都有一个解析参数化，而在它们的重叠部分，这些参数化必须一致。唯一的困难是，当我们绕着 $\mathbb{T}$走完一整圈时，一个分支可能在另一个分支开始的点结束，因此，对每个 $j$，未必都有 $g_j^\alpha(e^{i\theta}) = g_j^\alpha(e^{i\theta+2\pi i})$。相反，我们可能得到$g_j^\alpha(e^{i\theta}) = g_k^\alpha(e^{i\theta+2\pi i})$，其中 $j \neq k$。因此，我们需要允许存在一个 $\tau_0 \in \mathbb{T}$，使分支可以在此跳变。有了这个技术处理，我们便可以得到函数 $g_1^\alpha$、……、$g_n^\alpha$，它们在 $\mathbb{T}$ 上全局定义，对 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 中非直线的分支进行参数化，并且除一个点外处处解析。□

注 2.6. 如果 $\phi$ 是一个没有奇点的二变量有理内函数，那么步骤 2 就是多余的，结论可由步骤 1 和步骤 3 得出。但与步骤 2 不同，这些步骤不要求我们将维数限制为 $d = 2$。

˜因此，若 $\phi = \frac{p}{p}$ 是一个 $d$ 变量有理内函数（RIF），$d \geq 2$，其次数为 $_{z_d}p = n_d$，且在 $\overline{\mathbb{D}}^d$ 上没有奇点，则存在解析函数 $g_1^\alpha$、$\ldots g_{n_d}^\alpha$，使得 $\mathcal{C}_\alpha$ 可参数化为

$$\zeta_d = g_1^\alpha(\zeta_1,\ldots,\zeta_{d-1}),\ldots,\zeta_d = g_{n_d}^\alpha(\zeta_1,\ldots,\zeta_{d-1}).$$

我们将使用 t 我们在后续对 $d$ 变量情形的研究中所用的参数化 .

最后，我们对二变量有理内函数的克拉克测度所做的细致分析，需要用到接触阶这一概念，用来描述有理内函数在奇点处的接触阶。该概念由[6], 提出，并由 [7], 进一步发展，用于研究有理内函数偏导数的可积性。设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T}$ 其中 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 并设 $\{g_j^{\alpha_1}\}_j$ 和 $\{g_k^{\alpha_2}\}_k$ 分别是引理2.5中与 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 相对应的函数。那么 [7, 定理 3。1] 推出以下结论。

引理 2.7。除至多一个 $\alpha_0 \in \mathbb{T}$ 外，有理内函数在奇点 $(\tau, \gamma)$ 处的接触阶，等于任意一对 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T} \setminus \{\alpha_0\}$ 对应的两两差 $g_j^{\alpha_1}(\zeta) - g_k^{\alpha_2}(\zeta)$ 在 $\zeta = \tau$ 处消失阶的最大值；这里我们只考虑满足$g_j^{\alpha_i}(\tau) = \gamma$的 $g_j^{\alpha_i}$。

我们注意到，根据[7] 中的研究，有理内函数在奇点处的接触阶总是正偶整数。此外，尽管引理 2.7中的计算可能让人觉得接触阶在某种程度上取决于常数$\alpha_1$、 $\alpha_2 \in \mathbb{T}$的选择，但实际上它与该选择无关。

## 3. Structure of Clark measures for RIFs

本节中，我们确定一般有理内函数在 $\mathbb{D}^2$上的克拉克测度 $\sigma_\alpha$ 的结构。需要考虑两种情形：参数 $\alpha$ 为一般值的情形，以及参数 $\alpha$ 为例外值的情形。这两类参数定义如下。

定义 3.1. 若点 $\alpha \in \mathbb{T}$ 满足 $\phi(\tau, z_2) \equiv \alpha$ ，或对某个 $\tau \in \mathbb{T}$满足 $\phi(z_1, \tau) \equiv \alpha$，则称其为例外值。这等价于说，两条直线$\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 或 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_2 = \tau\}$ 中有一条属于某个 $\tau \in \mathbb{T}$的 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$。如果 $\alpha \in \mathbb{T}$ 不是例外值，则称 $\alpha$ 为一般值。

注 3.2. 对于双次数为 $(n, 1)$ 的有理内函数，[4, 第 3] 节证明了：当且仅当 $\alpha$ 是 $\phi$ 在 $\phi$ 的某个奇点处的非切向值时， $\alpha \in \mathbb{T}$ 才是例外值。不过，这种刻画无法推广到高次数有理内函数。

尽管如此，仍存在双次数至少为 (2, 2) 且具有例外值的有理内函数。具体而言，考虑

$$\phi(z) = \frac{2z_1^2 z_2^2 - z_1^2 - z_2^2}{2 - z_1^2 - z_2^2}.$$

若设 $\alpha = -1$，则 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 包含四条直线 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \pm 1\}$ 以及 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_2 = \pm 1\}$，因此 $\alpha = -1$ 是 $\phi$ 的一个例外值。

在考察二变量一般情形之后，我们还将说明如何将其中一些论证推广到 $d$ 变量的情形。

3.1. 二变量一般情形下的克拉克测度。我们的首要目标是证明，对于一般参数值 $\alpha \in \mathbb{T}$，克拉克测度 $\sigma_\alpha$ 具有如下描述。

˜定理 3.3. 设 $\phi = \frac{p}{p}$ 是一个双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数，且 $\alpha \in \mathbb{T}$ 对 $\phi$而言是一般的。那么，对于 $f \in C(\mathbb{T}^2)$，相应的克拉克测度 $\sigma_\alpha$ 满足

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta) d\sigma_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) \frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|},$$

$w$此处 $g_1^\alpha, \ldots, g_n^\alpha$是 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 由引理 2 给出的参数化函数。 5.

证明。 设 $\alpha \in \mathbb{T}$ 对 $\phi$是一般的。由引理 2.5，存在函数 $g_1^\alpha, \ldots, g_n^\alpha$，它们在 $\mathbb{T}$ (除去某个任意基点 $\tau_0$) 上解析，且满足

$$\mathcal{C}_\alpha(\phi) = \bigcup_{j=1}^{n} \{(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) : \zeta \in \mathbb{T}\}.$$

我们首先在 $f$ 是单变量泊松核的乘积这一特殊情形下，建立所需的公式。固定 $z_2 \in \mathbb{D}$，并考虑单变量函数

$$\varphi_{z_2}(z_1) = \frac{1 - |\phi(z_1, z_2)|^2}{|\alpha - \phi(z_1, z_2)|^2} = \int_{\mathbb{T}^2} P_{z_1}(\zeta_1) P_{z_2}(\zeta_2) d\sigma_\alpha(\zeta), \quad z_1 \in \mathbb{D}. \tag{6}$$

由于 $\phi$ 是二变量有理内函数，因此它在 $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$ 上没有奇点，所以 $\phi(\cdot, z_2)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$上连续。此外，根据引理 2.3前面的讨论，对于每个 $\zeta \in \mathbb{T}$，函数 $\Phi_\zeta := \phi(\zeta, \cdot)$ 都是有限布拉施克乘积。若对某个 $\zeta$有

$$\Phi_\zeta(z_2) = \phi(\zeta, z_2) = \alpha,$$

那么 $\Phi_\zeta$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上将为常数，这就意味着 $\alpha$ 是一个例外值，与假设矛盾。因此，$\phi(\cdot, z_2)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 中无法取到 $\alpha$。于是，函数 $\varphi_{z_2}$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续，因此 $\varphi_{z_2}$ 是其边界值的泊松积分。换言之，对于每个 $z_1 \in \mathbb{D}$,

$$\varphi_{z_2}(z_1) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\phi(\zeta, z_2)|^2}{|\alpha - \phi(\zeta, z_2)|^2} P_{z_1}(\zeta) dm(\zeta). \tag{7}$$

除有限多个 $\zeta$以外，引理 2.3 表明有限布拉施克乘积 $\Phi_\zeta$ 的次数为 $n$。根据单变量函数的标准结论，参见 [9, 12]，的克拉克测度为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\Phi_\zeta'(\eta_j)|} \delta_{\eta_j},$$

其中 $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \subset \mathbb{T}$ 是 $\mathbb{T}$ 上满足 $\Phi_\zeta(\eta_j) = \alpha$ 的不同点。注意，$\Phi_\zeta'(z_2) = \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, z_2)$。那么，上述给出的 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 参数化意味着

$$\frac{1 - |\phi(\zeta, z_2)|^2}{|\alpha - \phi(\zeta, z_2)|^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|} P_{z_2}(g_j^\alpha(\zeta)). \tag{8}$$

结合（6）、（7）和（8），我们得到 $f = P_{z_1} P_{z_2}$ 的所需公式。

定理的结论现在可由以下事实得出：泊松核的线性组合在 $C(\mathbb{T}^2)$ 中稠密。□

注 3.4。 可以互换变量 $z_1$ 和 $z_2$ 的作用，从而得到定理 3.3 的类似版本，其中 $\mathcal{C}_\alpha$ 使用变量 $\zeta_2$进行参数化。关于变量互换的深入讨论，请参见 [5] 。

**3.2.** 多于两个变量的有理内函数的克拉克测度。让我们稍作停顿，考察上一节中的辐角如何推广到多于两个变量的有理内函数。事实证明，奇点会带来显著的复杂性（下文将进一步讨论），因此我们先假设有一个在闭多圆盘上没有奇点的 $d$ 变量有理内函数。于是得到以下结果。

定理 3.5。设 $\phi = \frac{\tilde{p}}{p}$ 是一个多次数为 $(n_1, \ldots, n_d)$、在 $\overline{\mathbb{D}}^d$ 上没有奇点的有理内函数，并且令 $\alpha \in \mathbb{T}$。那么，对于 $f \in C(\mathbb{T}^d)$，相应的克拉克测度 $\sigma_\alpha$ 满足

$$\int_{\mathbb{T}} f(\zeta) d\sigma_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^{n_d} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} f(\zeta', g_j^\alpha(\zeta')) \frac{dm(\zeta')}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_d}(\zeta', g_j^\alpha(\zeta'))|},$$

其中 $g_1^\alpha, \ldots, g_{n_d}^\alpha$ 是用于参数化 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 的解析函数，见备注 2.6。

证明。 证明基本上与定理 3.3的证明相同。固定 $z_d \in \mathbb{D}$ 并定义

$$\varphi_{z_d}(z') = \frac{1 - |\phi(z', z_d)|^2}{|\alpha - \phi(z', z_d)|^2}, \quad z' \in \mathbb{D}^{d-1}.$$

于是，对于 $\zeta' \in \mathbb{T}^{d-1}$，引理 2.3推出 $\Phi_{\zeta'} := \phi(\zeta', \cdot)$ 是一个次数为 $n_d$ 的非常数有限布拉施克乘积，利用这一点，我们可以得出 $\phi(\cdot, z_d)$ 在 $\alpha$ 中不取值 $\overline{\mathbb{D}}^{d-1}$。于是 $\varphi_{z_d}$ 在闭多圆盘上连续，因此可以将其写成其边界值的泊松积分

$$\frac{1 - |\phi(z', z_d)|^2}{|\alpha - \phi(z', z_d)|^2} = \varphi_{z_d}(z') = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \frac{1 - |\phi(\zeta', z_d)|^2}{|\alpha - \phi(\zeta', z_d)|^2} P_{z'}(\zeta') dm(\zeta') \tag{9}$$

对于 $z' \in \mathbb{D}^{d-1}$。此外， $\Phi_{\zeta'}$ 具有相应的克拉克测度

$$\sum_{j=1}^{n_d} \frac{1}{|\Phi'_{\zeta'}(\eta_j)|} \delta_{\eta_j} = \sum_{j=1}^{n_d} \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_d}(\zeta', \eta_j)|} \delta_{\eta_j},$$

其中 $\{\eta_1, \ldots, \eta_{n_d}\} \subset \mathbb{T}$ 是满足 $\Phi_{\zeta'}(\eta_j) = \alpha$的互异点。与定理 3.3的证明类似，我们可以利用单变量克拉克测度和备注9中的参数化函数重写（2.6 ），从而在 $f$ 是单变量泊松核的乘积时得到所需的等式。由泊松核的线性组合在 $C(\mathbb{T}^d)$ 中稠密这一事实，可得定理结论。 □

然而，如果 $\phi$ 是一个多次数为（$n_1, \ldots, n_d$）、且在 $\mathbb{D}^d$的边界上有奇点的有理内函数，那么这些论证在多处都会失效。例如，即使 $\alpha$ 在自然意义下是一般的，奇点的存在仍意味着我们未必能保证 $\varphi_{z_d}(\cdot)$在$\overline{\mathbb{D}}^{d-1}$上连续。这意味着我们不能总是使用这样一种技巧：将那个关键函数改写为其边界值的泊松积分。

类似地，在两个变量的情形下，我们可以调用引理 2.5 来推导出$\eta_j$ 点可以用解析函数来描述，而无论 $\phi$ 是否存在奇点。在三个或更多变量的情形下，类似的陈述一般并不成立，参见 [8]；在那篇论文中，作者证明了当 $d = 3$ 和 $\phi$存在奇点时，用于参数化 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$的分支的函数未必连续。因此，要在一般的 3.3 定理的 $d$变量情形下得到一个版本，似乎还需要进一步工作。

3.3. 例外二变量情形下的克拉克测度。现在我们回到二变量有理内函数，并考察与例外参数值相关的克拉克测度。在这种情形下，需要格外谨慎地处理 $\phi$ 在 $\mathcal{C}_\alpha$ 的垂直线部分上存在的消去现象，并控制 $\phi$ 在该垂直线上的 $z_1$偏导数。以下引理讨论的正是这种情形。

引理 3.6。设 $\phi = \frac{\tilde{p}}{p}$是双次数为（$m$， $n$）的有理内函数，并假设直线 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$位于 $\mathcal{C}_\alpha$（$\phi$）中。那么，对于某个常数 $c_1 \neq 0$，$\frac{\partial \phi}{\partial z_1}$（$\tau$， $z_2$） $\equiv c_1$。

证明。在此证明中，我们将仔细分析 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 在 $\mathcal{C}_\alpha$ 中的存在如何影响三个多项式 $p$、 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{p} - \alpha p$ 的结构。计算 $\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2)$ 时会出现这些多项式，我们将利用所得结论推断该偏导数必为非零常数。

首先，假设 $\{\zeta \in \mathbb{T}^2 : \zeta_1 = \tau\}$ 属于 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$，这意味着

$$\alpha p(\tau, \zeta_2) = \tilde{p}(\tau, \zeta_2) \tag{10}$$

对所有 $\zeta_2 \in \mathbb{T}$。回想一下， $p$ 在 $\mathbb{D}^2 \cup (\mathbb{T} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{D} \times \mathbb{T})$ 中没有零点，参见 [15, 引理 10。1]。那么， 10 式结合最大模原理可推出 $\phi_\tau(z_2) := \phi(\tau, z_2) \equiv \alpha$ 在 $\mathbb{D}$上也成立。因此，

$$\alpha p(\tau, z_2) = \tilde{p}(\tau, z_2),$$

对所有 $z_2$ 以及与引理 2.3 中非常相似的辐角论证表明， $z_2$ 中的这些多项式的次数 $n$必定为。根据上述关于 $p$的零点位置的事实，必定存在 $\lambda_1$，……， $\lambda_J \in \mathbb{T}$、整数 $m_1$，……， $m_J$满足 $m_1 + \cdots + m_J = n$，以及双次数至多为（$m - 1$， $n$）的多项式 $q_1$， $q_2$ 使得

$$p(z) = (z_1 - \tau) q_1(z) + \prod_{j=1}^{J} (z_2 - \lambda_j)^{m_j} \tag{11}$$

and

$$\tilde{p}(z) = (z_1 - \tau) q_2(z) + \alpha \prod_{j=1}^{J} (z_2 - \lambda_j)^{m_j}.$$

在分析 $\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2)$ 之前，我们需要证明 $p$ 在 $(\tau, \lambda_j)$ 处的消失阶等于 $m_j$。为此，将 $p(x_1 + \tau, x_2 + \lambda_j)$ 写成其齐次展开

$$p(x_1 + \tau, x_2 + \lambda_j) = P_M(x_1, x_2) + \sum_{k \geq M+1} P_k(x_1, x_2),$$

其中每个 $P_k$ 都是次数为 $k$ 的齐次多项式，而 $M$ 是 $p$ 在 $(\tau, \lambda_j)$ 处的消失阶。现在，正如 [5， 第 2]， 节中所解释的，我们必须有

$$P_M(x_1, x_2) = c \prod_{j=1}^{M} (x_2 - a_j x_1)$$

对某些 $c \neq 0$ 和 $a_1$，……， $a_M > 0$。然后利用（11），可得

$$p(\tau + x_1, \lambda_j + x_2) = c \prod_{j=1}^{M} (x_2 - a_j x_1) + \sum_{k \geq M+1} P_k(x_1, x_2) = x_2^{m_j} r(x_2) + x_1 q_1(\tau + x_1, \lambda_j + x_2),$$

对于某个满足 $r(0) \neq 0$ 的多项式 $r$。然后，代入 $x_1 = 0$，得到

$$c x_2^M + \sum_{k \geq M+1} P_k(0, x_2) = x_2^{m_j} r(0).$$

对于每个 $k \geq M+1$，要么 $P_k(0, x_2) = 0$，要么它的零点阶严格高于 $M$。因此，上述方程给出 $M = m_j$，如所声称的那样。以类似方式展开 $\tilde{p}$，得到

$$\tilde{p}(\tau + x_1, \lambda_j + x_2) = \sum_{k \geq N} Q_k(x_1, x_2),$$

其中 $N$ 是 $\tilde{p}$ 在 $(\tau, \lambda_j)$ 处的消失阶。利用命题 14.5 以及 [15], 中的相关结果，我们可以得出 $N = M = m_j$ 和 $Q_{m_j} = \alpha P_{m_j}$。

这意味着 $\tilde{p} - \alpha p$ 在 $(\tau, \lambda_j)$ 处的零点阶至少为 $m_j + 1$。利用关于 $p$和 $\tilde{p}$的前述方程，我们得到

$$\tilde{p}(z) - \alpha p(z) = (z_1 - \tau) R(z),$$

其中 $R$ 在每个 $(\tau, \lambda_j)$ 处的零点阶至少为 $m_j$，且 $\deg R \leq (m-1, n)$。后一个条件意味着 $\deg_{z_1} R \leq m-1$ 且 $\deg_{z_2} R \leq n$，其中它们分别是 $R$ 关于 $z_1$和 $z_2$ 的次数。因此，一元多项式 $R(\tau, z_2)$ 在每个 $\lambda_j$处的零点阶至少为$m_j$。由于 $\deg R(\tau, z_2) \leq n$，这意味着 $R(\tau, z_2)$ 恒等于零，或者$\prod_{j=1}^{J}(z_2 - \lambda_j)^{m_j}$ 整除 $R(\tau, z_2)$。第二种情况实际上将意味着

$$R(\tau, z_2) = c_1 \prod_{j=1}^{J} (z_2 - \lambda_j)^{m_j}, \tag{12}$$

对于某个 $c_1 \neq 0$。

现在我们掌握了足够的信息来研究 $\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2)$。具体而言，消去各项后可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2) = \frac{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z_1} p - \tilde{p} \frac{\partial p}{\partial z_1}}{p^2}(\tau, z_2) = \frac{\frac{\partial}{\partial z_1}(\tilde{p} - \alpha p)}{p}(\tau, z_2).$$

因此，将我们先前的观察应用于此，可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2) = \frac{R(\tau, z_2)}{\prod_{j=1}^{J}(z_2 - \lambda_j)^{m_j}}.$$

由于对于几乎处处的 $\zeta \in \mathbb{T}$，$\phi(\cdot, \zeta)$ 是有限布拉施克乘积，其导数在 $\mathbb{T}$上不可能为零。因此，$R(\tau, z_2)$ 并非恒等于零。因此，必有 $R(\tau, z_2)$ 满足（12），因此，$\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau, z_2) \equiv c_1 \neq 0$，如所述。□

我们将利用极限论证，借助关于一般参数取值的已知结果，研究与例外值相关联的克拉克测度。以下引理是其中的关键。

˜引理 3.7。设 $\phi = \frac{p}{p}$ 是一个双次数为（$m$, $n$）的有理内函数，并设 $\tau_1, \ldots, \tau_K$ 表示 $\phi$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上奇点的 $z_1$ 坐标。令 ˆ$\epsilon < \frac{1}{2}\min\{|\tau_k - \tau_j| : j \neq k\}$，并定义

$$S_{\hat{\epsilon}} := \left\{ \zeta \in \mathbb{T} : \min_{1 \leq k \leq K} |\zeta - \tau_k| < \hat{\epsilon} \right\}. \tag{13}$$

那么，如果 $f \in C(\mathbb{T}^2)$，我们有

$$F(\zeta, \alpha) := \sum_{j=1}^{n} f(\zeta, g_j^{\alpha}(\zeta)) \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^{\alpha}(\zeta))|} \tag{14}$$

在 $(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})\times\mathbb{T}$ 上一致连续，其中 $g_1^\alpha,\dots,g_n^\alpha$ 是 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$的参数化函数，见引理 2.5。

证明。首先注意，根据内函数的标准性质，$\frac{\partial\phi}{\partial z_2}$ 在（$\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}}$）$\times\mathbb{T}$上连续且非零。因此，只需证明在适当重排这些函数后，集合 $\{g_1^\alpha(\zeta)\dots,g_n^\alpha(\zeta)\}$在（$\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}}$）$\times\mathbb{T}$ 上连续。具体而言，我们需要证明，对于每个 $\epsilon_0>0$，都存在一个 $\delta>0$，使得若 $|\zeta-z|+|\alpha-\gamma|<\delta$ 对于 $\zeta,z\in(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})$ 且$\alpha,\gamma\in\mathbb{T}$，那么经过可能的重排后，我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\left|g_j^\alpha(\zeta)-g_j^\gamma(z)\right|<\epsilon_0. \tag{15}$$

为此，我们将使用隐函数定理。定义函数 $\Phi(\zeta,w,\alpha)=\phi(\zeta,w)-\alpha$。根据有限布拉施克乘积的性质，对于每个固定的（$\zeta_0,\alpha_0$）$\in(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})\times\mathbb{T}$，存在互不相同的 $w_1,\dots,w_n\in\mathbb{T}$，使得 $\Phi(\zeta_0,w_j,\alpha_0)=0$。于是对于 $j=1,\dots,n$，隐函数定理推出，在 $\mathbb{T}$中存在开弧，记为$U_1^j:=U_1^j(\zeta_0,\alpha_0)$ $U_2^j:=U_2^j(\zeta_0,\alpha_0)$ $U_3^j:=U_3^j(\zeta_0,\alpha_0)$，分别以 $\zeta_0,w_j,\alpha_0$为中心；此外还存在连续函数 $G^{(\alpha_0,\zeta_0)}{}_j$，使得

$$\left\{(\zeta,w,\alpha)\in U_1^j\times U_2^j\times U_3^j:\Phi(\zeta,w,\alpha)=0\right\}=\left\{(\zeta,G_j^{(\alpha_0,\zeta_0)}(\zeta,\alpha),\alpha):(\zeta,\alpha)\in U_1^j\times U_3^j\right\}.$$

如有必要，可缩小这些弧，从而假设 $U_1^j,U_3^j$ 不依赖于 $j$，$U_2^1,\dots,U_2^n$ 两两不相交，并且 $G$ 函数在 $U_1\times U_3$ 上一致连续。于是，集合族

$$\{U_1(\zeta_0,\alpha_0)\times U_3(\zeta_0,\alpha_0):(\zeta_0,\alpha_0)\in(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})\times\mathbb{T}\}$$

构成 $(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})\times\mathbb{T}.$ 的一个开覆盖。由于 $(\mathbb{T}\setminus S_{\hat{\epsilon}})\times\mathbb{T}$ 是紧的，我们可以取一个有限子覆盖

$$\left\{U_1(\zeta_\ell,\alpha_\ell)\times U_3(\zeta_\ell,\alpha_\ell)\right\}_{\ell=1}^{L}.$$

现在选取 $\delta>0$，使得若 $|\zeta-z|+|\alpha-\gamma|<\delta$，则点 $(\zeta,\alpha)$、$(z,\gamma)$ 必须至少同时属于这个有限子覆盖中的一个集合。如有必要，缩小 $\delta$，我们还可以假设，对于所有 $G^{(\alpha_\ell,\zeta_\ell)}{}_j$，若 $(\zeta,\alpha)$、$(z,\gamma)$ 属于 $U_1(\zeta_\ell,\alpha_\ell)\times U_3(\zeta_\ell,\alpha_\ell)$，则

$$|z-\zeta|+|\alpha-\gamma|<\delta\quad\text{implies that}\quad|G_j^{(\alpha_\ell,\zeta_\ell)}(\zeta,\alpha)-G_j^{(\alpha_\ell,\zeta_\ell)}(z,\gamma)|<\tfrac{\epsilon_0}{n}. \tag{16}$$

此外，$U_2^j(\alpha_\ell,\zeta_\ell)$ 的互不相交性意味着（按照 $j$ 指标重新排序后）我们必有

$$g_j^\alpha(\zeta)=G_j^{(\alpha_\ell,\zeta_\ell)}(\zeta,\alpha)\ \text{ and }\ g_j^\gamma(z)=G_j^{(\alpha_\ell,\zeta_\ell)}(z,\gamma),$$

对于 $j=1$，……，$n$。于是，所需的不等式（15）可由（16）立即推出。 □

现在我们可以证明与二元有理内函数的例外值相关联的克拉克测度的一般公式。

˜定理 3.8。设 $\phi=\frac{p}{p}$ 是双次数为 $(m,n)$ 的有理内函数，且 $\alpha\in\mathbb{T}$ 对 $\phi$ 是例外的。那么对于 $f\in C(\mathbb{T}^2)$，相应的克拉克测度 $\sigma_\alpha$ 满足

$$\int_{\mathbb{T}^2}f(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}}f(\zeta,g_j^\alpha(\zeta))\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial\phi}{\partial z_2}(\zeta,g_j^\alpha(\zeta))|}+\sum_{k=1}^{\ell}c_k^\alpha\int_{\mathbb{T}}f(\tau_k,\zeta)dm(\zeta),$$

其中 $g_1^\alpha$、……、$g_n^\alpha$是引理 2.5中的参数化函数，$\zeta_1 = \tau_1$、……、$\zeta_1 = \tau_\ell$ 是 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 中引理 2.5中的垂直线，而 $c_k^\alpha = |\frac{\partial\phi}{\partial z_1}(\tau_k,\ z_2)|^{-1} > 0$ 是常数。

证明。此证明使用了许多与 [4],中命题 3.9 的证明相同的辐角，不过还需要引理 3.6和引理 3.7 中的额外工具。为方便读者，我们仍在下文给出详细证明。

首先，将 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 写成 $E_\alpha \cup (\cup_{k=1}^{\ell} L_k)$，其中 $E_\alpha$ 是由 $g_j^\alpha$参数化的集合，且每个$L_k$ 表示 $\mathbb{T}^2$中的垂直线 $\{\zeta_1 = \tau_k\}$。由于克拉克测度没有点质量[4, 定理 2.1]，$\sigma_\alpha(E_\alpha \cap L_k) = 0$ 对每个 $k$都成立。因此，只需证明

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\chi_{E_\alpha}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial\phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|} \tag{17}$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\chi_{L_k}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = c_k^\alpha \int_{\mathbb{T}} f(\tau_k, \zeta)dm(\zeta) \tag{18}$$

对所有 $f \in C(\mathbb{T}^2)$ 和 $k = 1, \ldots, \ell$均成立，其中我们用 $\chi_E$表示集合 $E$的示性函数。

第 1 部分。我们先证明（17）。设 $f \in C(\mathbb{T}^2)$。固定 $\epsilon > 0$ 充分小，并定义 $S_\epsilon$ 以及 $S_{\epsilon/2}$，如（13）中对 $\hat{}\epsilon = \epsilon$ 和 $\hat{}\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$ 分别所作的定义。值得注意的是，当前证明中的$\tau_1$、……、$\tau_\ell$（直线 $L_k$的常数取值）构成了（$\tau_1$、……、$\tau_K$（13）中的 $z_1$（$\phi$在 $\mathbb{T}^2$上的奇点的坐标） $\tau_k$ 的子集。因此，可以假设直线取值出现在奇点取值列表的开头，并用 $\tau_k$ 表示两个列表中的元素。

现在，设 $(\alpha_i) \subseteq \mathbb{T}$ 是一个收敛到 $\alpha$ 的序列，其中每个 $\alpha_i$ 都是一般的。根据 [10], 中的推论 2.2，我们知道序列 $(\sigma_{\alpha_i})$ 弱-$\star$ 收敛到 $\sigma_\alpha$。为此，设 $\Psi_\epsilon$是 $C(\mathbb{T})$ 中满足以下条件的函数

$$\Psi_\epsilon \equiv 1 \text{ on } \mathbb{T}\setminus S_\epsilon,\quad \Psi_\epsilon \equiv 0 \text{ on } S_{\epsilon/2},\quad 0 \le \Psi_\epsilon \le 1 \text{ on } S_\epsilon \setminus S_{\epsilon/2}.$$

根据这些假设和定理3.3，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\Psi_\epsilon(\zeta_1)d\sigma_\alpha(\zeta) &= \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\Psi_\epsilon(\zeta_1)d\sigma_{\alpha_i}(\zeta)\\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^{\alpha_i}(\zeta))\Psi_\epsilon(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial\phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^{\alpha_i}(\zeta))|}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^{\alpha}(\zeta))\Psi_\epsilon(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial\phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^{\alpha}(\zeta))|},\end{aligned} \tag{19}$$

其中最后一个等号由引理 3.7推出，它表明 $F(\zeta,\alpha)$（定义见（14））在（$\mathbb{T}\setminus S_{\epsilon/2}$）$\times\mathbb{T}$上一致连续。因此，$F(\zeta,\alpha)\Psi_\epsilon(\zeta)$ 在 $\mathbb{T}^2$上一致连续。由于 $\Psi_\epsilon(\zeta_1) \equiv 0$ 在每条直线 $L_k$上，因此我们可以得出结论：

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\chi_{E_\alpha}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) - \int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\Psi_\epsilon(\zeta_1)d\sigma_\alpha(\zeta)\right| &\le \int_{\mathbb{T}^2}|f(\zeta)|(1-\Psi_\epsilon(\zeta_1))\chi_{E_\alpha}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta)\\ &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\sigma_\alpha((S_\epsilon\times\mathbb{T})\cap E_\alpha).\end{aligned}$$

由于 $\epsilon \searrow 0$，集合 $(S_\epsilon \times \mathbb{T}) \cap E_\alpha$ 收缩为有限个点，因此，

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \sigma_\alpha((S_\epsilon \times \mathbb{T}) \cap E_\alpha) = 0.$$

由此，我们可以得出

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\chi_{E_\alpha}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{T}^2} f(\zeta)\Psi_\epsilon(\zeta_1)d\sigma_\alpha(\zeta).$$

同时，将 $f$ 分解为实部和虚部，再分别分解为正部和负部，我们可以利用单调收敛定理得出

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))\Psi_\epsilon(\zeta)\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))\frac{dm(\zeta)}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))|}.$$

结合最后这两个等式与 (19)，可得 (17)。

第 2 部分。为证明 (18)，我们沿用 [4] 中的证明，并证明对于所有泊松核 $P_z$，$z \in \mathbb{D}^2$，(18) 都成立。由于这些函数的线性组合在 $C(\mathbb{T}^2)$ 中稠密，因此结论立即成立。

首先，固定 $r \in (0, 1)$。$\sigma_\alpha$ 的定义意味着

$$\int_{\mathbb{T}^2} P_{(r\tau_k, z_2)}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = \Re\left(\frac{\alpha + \phi(r\tau_k, z_2)}{\alpha - \phi(r\tau_k, z_2)}\right). \tag{20}$$

在证明的其余部分，我们基本上只需将等式 (20) 两边乘以 $(1 - r)$，然后取极限。首先，对于 $\zeta \in \mathbb{T}^2$，可以验证

$$\lim_{r \to 1^-} (1 - r)P_{(r\tau_k, z_2)}(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \zeta_1 \neq \tau_k, \\ 2P_{z_2}(\zeta_2) & \text{if } \zeta_1 = \tau_k. \end{cases}$$

于是，由控制收敛定理可得

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}^2} (1 - r)P_{(r\tau_k, z_2)}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^2} 2P_{z_2}(\zeta_2)\chi_{L_k}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta).$$

由于 $L_k \subseteq \mathcal{C}_\alpha$，最大模原理推出，对所有 $z_2 \in \mathbb{D}$，$\phi(\tau_k, z_2) = \alpha$。此外，由于 $\phi$ 在每个 $(\tau_k, z_2)$ 处（其中 $z_2 \in \mathbb{D}$）都是解析的，我们有

$$\lim_{z_1 \to \tau_k} \phi(z_1, z_2) = \alpha \text{ and } \lim_{z_1 \to \tau_k} \frac{\phi(z_1, z_2) - \alpha}{z_1 - \tau_k} = \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau_k, z_2) := d_k^\alpha \neq 0,$$

根据引理 3。6. 然后，Carath´eodory 定理（例如，参见 [20]中的 (VI-3)）给出

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1 - |\phi(r\tau_k, z_2)|}{1 - r} = d_k^\alpha \tau_k \bar{\alpha} = |d_k^\alpha|$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 1^-} \Re\left(\frac{(1 - r)(\alpha + \phi(r\tau_k, z_2))}{\alpha - \phi(r\tau_k, z_2)}\right) &= \lim_{r \to 1^-} (1 - r)\frac{1 - |\phi(r\tau_k, z_2)|^2}{|\alpha - \phi(r\tau_k, z_2)|^2} \\ &= \lim_{r \to 1^-} 2\left|\frac{\tau_k - r\tau_k}{\alpha - \phi(r\tau_k, z_2)}\right|^2 \frac{1 - |\phi(r\tau_k, z_2)|}{1 - r} = \frac{2}{|d_k^\alpha|}. \end{aligned}$$

为完成证明，令

$$c_k^\alpha = \frac{1}{|d_k^\alpha|} = \frac{1}{|\frac{\partial \phi}{\partial z_1}(\tau_k, z_2)|} > 0. \tag{21}$$

那么（20）结合此前的计算可推出

$$\int_{\mathbb{T}^2} P_{z_2}(\zeta_2)\chi_{L_k}(\zeta)d\sigma_\alpha(\zeta) = c_k^\alpha = c_k^\alpha \int_{\mathbb{T}} P_{z_2}(\zeta)dm(\zeta).$$

如果我们将等式两边同时乘以 $P_{z_1}(\tau_k)$，便得到 (18) 式，其中 $f = P_{z_1}P_{z_2}$，这正是我们要证明的结论。□

## 4. Analysis of Clark embeddings

设 $\phi$ 为一个二变量有理内函数，并回忆一下， $K_\phi$ 表示与 $\phi$相关联的二变量模型空间。正如前文所述，Doubtsov 在 [10] 中研究了典范等距映射$J_\alpha$： $K_\phi \mapsto L^2(\sigma_\alpha)$，该映射最初定义在再生核上，定义方式如下：

$$J_\alpha[K_w](\zeta) := (1 - \alpha\overline{\phi(w)})C_w(\zeta), \quad \text{for } w \in \mathbb{D}^d, \zeta \in \mathbb{T}^d$$

然后将其扩展到 $K_\phi$中的所有函数。本节中，我们刻画 $J_\alpha$ 何时为酉映射。与上一节一样，我们必须分别考察一般 $\alpha$ 和例外$\alpha$ 的情形。

**4.1.** 与一般值相关联的克拉克嵌入。关于一般 $\alpha \in \mathbb{T}$ 所对应克拉克测度的结构定理，使我们能够证明相应的克拉克嵌入算子是满射。为此，我们证明：对于一般的 $\alpha \in \mathbb{T}$，双圆盘代数 $A(\mathbb{D}^2)$在 $L^2(\sigma_\alpha)$中稠密。这样便可应用 Doubtsov 的结果[10, 定理 3.2]。注意，我们排除了退化情形，即 $\phi$ 仅为一个变量的函数；在这种情况下，对于所有 $\alpha \in \mathbb{T}$， $J_\alpha$ 都不是酉映射，参见[10]。

我们首先需要以下辅助引理。

˜引理 4.1. 设 $\phi = \frac{p}{\tilde{p}}$ 是一个双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数，并设 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是 $\phi$ 的一般值。那么存在有理函数 $R_1, R_2 \in A(\mathbb{D}^2)$，使得 $\bar{z}_1 = R_1$ 且 $\bar{z}_2 = R_2$ 在 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 上成立。

证明。由于 $\tilde{p}$ 和 $p$ 都不是仅关于一个变量的多项式，我们可以写成

$$\phi(z) = \frac{q_1(z_2) + z_1 q_2(z_1, z_2)}{p_1(z_2) + z_1 p_2(z_1, z_2)}$$

其中 $p_1, q_1 \in \mathbb{C}[z_2]$ 和 $p_2, q_2 \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 是多项式。类似地，我们有

$$\phi(z) = \frac{r_1(z_1) + z_2 r_2(z_1, z_2)}{s_1(z_1) + z_2 s_2(z_1, z_2)}$$

同样， $r_1, s_1$ 是关于一个变量的多项式，而 $r_2, s_2$ 是关于 $z_1, z_2$ 的多项式。利用第一种表示，我们可以将表达式 $\tilde{p}(z) - \alpha p(z)$ 改写为

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z) - \alpha p(z) &= q_1(z_2) + z_1 q_2(z_1, z_2) - \alpha(p_1(z_2) + z_1 p_2(z_1, z_2)) \\ &= q_1(z_2) - \alpha p_1(z_2) + z_1(q_2(z_1, z_2) - \alpha p_2(z_1, z_2)). \end{aligned} \tag{22}$$

现在假设 $q_1(z_2) - \alpha p_1(z_2)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上不为零。那么（22）意味着 $\tilde{p}(z) - \alpha p(z) = 0$ 当且仅当

$$1 = \frac{z_1(\alpha p_2(z_1, z_2) - q_2(z_1, z_2))}{q_1(z_2) - \alpha p_1(z_2)}$$

并且如果 $\zeta \in \mathcal{C}_\alpha$，我们可以将其改写为

$$\bar{\zeta_1} = \frac{\alpha p_2(\zeta_1, \zeta_2) - q_2(\zeta_1, \zeta_2)}{q_1(\zeta_2) - \alpha p_1(\zeta_2)}.$$

由于其分母在闭单位圆盘内不为零，右侧的有理函数属于双圆盘代数 $A(\mathbb{D}^2)$。类似地，若 $r_1(z_1) - \alpha s_1(z_2) \neq 0$ 对于 $z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$成立，则可看出 $\bar{z}_2$ 在 $\mathcal{C}_\alpha$上等于 $A(\mathbb{D}^2)$中的一个有理函数。若 $q_1 - \alpha p_1$和 $r_1 - \alpha s_1$ 在闭单位圆盘内均不为零，则引理的断言成立。

还需证明，$\alpha$ 为一般情形这一假设排除了$\overline{\mathbb{D}}$中存在零点的可能。首先注意，$q_1(z_2) - \alpha p_1(z_2)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 中的任何零点实际上都必须属于 $\mathbb{T}$；否则，$\phi$ 在 $(0, z_2)$ 处将是模为 1 的，这不可能，因为 $\phi$ 是一个非恒定的有理内函数。为导出矛盾，我们假设对某个 $\tau \in \mathbb{T}$，有 $q_1(\tau) = \alpha p_1(\tau)$。考虑函数

$$\phi_\tau(z_1) = \phi(z_1, \tau) = \frac{q_1(\tau) + z_1 q_2(z_1, \tau)}{p_1(\tau) + z_1 p_2(z_1, \tau)},$$

并注意到 $\phi_\tau$ 是一个有限布拉施克乘积。在 $z_1 = 0$处取值，可得

$$\phi_\tau(0) = \frac{q_1(\tau)}{p_1(\tau)} = \alpha \frac{p_1(\tau)}{p_1(\tau)} = \alpha.$$

因此，对于 $z_1 \in \overline{\mathbb{D}}$，$\phi_\tau(z_1) \equiv \alpha$。但这就是说 $\mathbb{T} \times \{\tau\} \subset \mathcal{C}_\alpha$，这与 $\alpha$ 是一般值的假设矛盾。对 $r_1 - \alpha s_1$也可作类似论证，证明完成。□

现在，我们可以证明，与一般值对应的克拉克嵌入算子是满射。

˜定理 4.2. 设 $\phi = \frac{p}{p}$ 是一个双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数，并设 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是 $\phi$的一般值。那么，克拉克嵌入 $J_\alpha \colon K_\phi \to L^2(\sigma_\alpha)$ 是酉的。

证明. 利用 [10], 中的定理 3.2，只需证明 $A(\mathbb{D}^2)$ 在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中稠密。由于 $\sigma_\alpha$ 是紧集 $\mathbb{T}^2$ 上的有限博雷尔测度（因此也是有限拉东测度），$C(\mathbb{T}^2)$ 在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中稠密。此外，根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，二元三角多项式集在 $C(\mathbb{T}^2)$ 中稠密。由此不难证明，二元三角多项式集在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中也稠密。具体而言，固定 $f \in L^2(\sigma_\alpha)$ 和 $\epsilon > 0$。那么，存在函数 $g \in C(\mathbb{T}^2)$ 以及三角多项式 $p$，使得

$$\|f - g\|_{L^2(\sigma_\alpha)} < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{and} \quad \max_{z \in \mathbb{T}^2} |g(z) - p(z)| < \frac{\epsilon}{2\sigma_\alpha(\mathbb{T}^2)}.$$

Then

$$\|f - p\|_{L^2(\sigma_\alpha)} \leq \|f - g\|_{L^2(\sigma_\alpha)} + \|g - p\|_{L^2(\sigma_\alpha)} < \epsilon,$$

根据需要。由引理 4.1，我们知道，每个三角多项式都与某个函数在 $A(\mathbb{D}^2)$ 上一致 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 中一致，而后者包含 $\sigma_\alpha$ 的支撑。因此，$A(\mathbb{D}^2)$ 在$L^2(\sigma_\alpha)$ 中稠密。□

4.2. 与例外值相关的克拉克嵌入。现在我们来考虑例外值的情形。在这种情况下，克拉克嵌入算子从不满射。

˜定理 4.3。设 $\phi = \frac{p}{p}$ 是双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数，且 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是 $\phi$的一个例外值。那么，克拉克嵌入 $J_\alpha\colon K_\phi \to L^2(\sigma_\alpha)$ 不是酉的。

证明。证明过程与 [4,命题 310]证明的后半部分采用相同的思路。具体而言，由定理 3.8可知，对于 $f \in C(\mathbb{T}^2)$，构成

$$\int_{\mathbb{T}^2} |f(\zeta)|^2 d\sigma_\alpha(\zeta)$$

的非负项中，有一项属于以下两种形式之一：

$$c_1 \int_{\mathbb{T}} |f(\tau, \zeta)|^2 dm(\zeta) \text{ or } c_1 \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta, \tau)|^2 dm(\zeta),$$

对某个 $c_1 \neq 0$成立。不失一般性，我们假设是前一种情形。由 [10],中的定理 3.2，$J_\alpha$ 是酉的，当且仅当 $A(\mathbb{D}^2)$ 在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中稠密。现在，对于任意选取的 $f \in A(\mathbb{D}^2)$，函数 $f(\tau, \zeta_2)$ 属于 $H^2(\mathbb{T})$。但是， $H^2(\mathbb{T})$ 与函数 $g(\zeta) = \bar{\zeta}_2$ 所张成的 $L^2(\mathbb{T})$-空间之间具有正距离；该函数属于 $L^2(\sigma_\alpha)$，因为 $g$ 连续且 $\sigma_\alpha$ 是拉东测度。因此， $A(\mathbb{D}^2)$ 在 $L^2(\sigma_\alpha)$ 中不稠密，断言得证。□

## 5. Fine structure of Clark measures for two-variable RIFs

本节继续研究双圆盘中与有理内函数相关的克拉克测度，主要目标是利用[5] 中的结果，探讨 [4, 注 5.5]提出的一个问题。具体而言，对于双次数为（$n$, 1）的有理内函数 $\phi$，人们观察到，与一般 $\alpha$ 取值对应的克拉克测度在$\phi$ 的奇点处呈现某种消失现象，而且这种消失似乎与[6]中的接触阶概念有关。下文将使这些想法具体化，并在本文更一般的双次数为（$m$, $n$）的情形下证明一个关于消失阶的结果。

˜5.1. 精细结构预备知识。 首先，设 $\phi = \frac{p}{p}$ 为双次数为（$m, n$）的有理内函数，并设 $\alpha \in \mathbb{T}$ 为一般取值。采用定理 3.3 中的记号，对于 $j = 1, \ldots, n$，令 $W_j^\alpha$表示权函数

$$W_j^\alpha(\zeta) = \left| \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \left(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)\right) \right|^{-1} \tag{23}$$

出现在克拉克测度公式中。接下来，以下引理中编码的关于 $W_j^\alpha$ 的补充信息将会很有用。

˜引理 5.1. 设 $\phi = \frac{p}{p}$ 是一个双次数为（$m$, $n$）的有理内函数，且 $\alpha \in \mathbb{T}$ 是一般的。那么对于每个$j$，函数 $W_j^\alpha \in L^1(\mathbb{T})$ 满足公式

$$W_j^\alpha(\zeta) = \frac{|p(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)|}{\left| \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) - \alpha \frac{\partial p}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) \right|}. \tag{24}$$

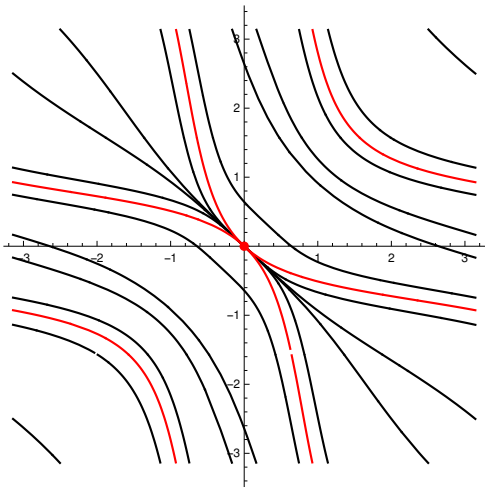


FIGURE 1. 有理内函数 $\phi$ 的等值曲线，其分支为（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））， 且不经过奇点 **(1, 1)**；通过在 $[-\pi,\pi$ 上绘制辐角图来呈现）[2].

证明. 固定一个一般的 $\alpha \in \mathbb{T}$。注意，由于

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{T}} W_j^\alpha(\zeta) dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^2} d\sigma_\alpha(\zeta) = \frac{1-|\phi(0)|^2}{|\alpha-\phi(0)|^2} < \infty,$$

每个 $W_j^\alpha$都必须属于 $L^1$（$\mathbb{T}$）。接下来，注意到

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(z_1,z_2) = \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)(z_1,z_2) = \frac{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z_2}(z_1,z_2)\cdot p(z_1,z_2) - \frac{\partial p}{\partial z_2}(z_1,z_2)\cdot \tilde{p}(z_1,z_2)}{p(z_1,z_2)^2}.$$

现在，根据 $\mathcal{C}_\alpha$（$\phi$）的定义，我们有 $\tilde{p}$（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））$= \alpha p$（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））， 这意味着我们可以约去公因子 $p$（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））， 从而得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) = \frac{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)) - \alpha \frac{\partial p}{\partial z_2}(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))}{p(\zeta, g_j^\alpha(\zeta))}.$$

取倒数并求模，得到所需公式。 □

现在设（$\tau$，$\gamma$）$\in \mathbb{T}^2$ 是 $\phi$的一个奇点。这意味着 $\alpha p$（$\tau$，$\gamma$）$= 0 = \tilde{p}$（$\tau$，$\gamma$），因此，对每个 $\alpha$，都有（$\tau$，$\gamma$）$\in \mathcal{C}_\alpha$（$\phi$）。接着，引理 5.1 表明，只要（$\tau$，$g_j^\alpha$（$\tau$））$=$（$\tau$，$\gamma$），每个 $W_j^\alpha$（$\zeta$）都可能在 $\zeta = \tau$处消失。不过请注意，并非 $\mathcal{C}_\alpha$ 的每个分支都必定经过每个奇点，即满足 $g_j^\alpha$（$\tau$）$= \gamma$。图 1 展示了这一点；该图转载自 [7, 示例 7。2] ，其中显示了一些不经过奇点 **(1, 1)** 的等值曲线分支。因此，对于某些指标 $j$，$|p$（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））$|$可能严格为正。

本节余下部分的目标是证明以下结论：

*F*对于 $\alpha$的大多数取值，如果 $\mathcal{C}_\alpha$的一条分支（$\zeta$，$g_j^\alpha$（$\zeta$））经过奇点（$\tau$，$\gamma$），那么相应的权函数 $W_j^\alpha$在 $\tau$ 处的消失阶，与 $\mathcal{Z}$（$\tilde{p}$）的相应分支在点（$\tau$，$\gamma$）处的“接触阶”相对应。

5.2. 变量替换与关键定义。 为了精确定义接触阶的概念，并将其与水平集行为联系起来，我们转而采用上半平面的框架，并使用 [5] 中发展出的工具。这将把特征边界 $\mathbb{T}^2$ 压平为 $\mathbb{R}^2$ ，并使我们能够将奇点移至原点 (0，0)。本文将在此介绍变量替换的主要细节；感兴趣的读者可在 [5] 的第2节中找到更多细节和结果。

首先，不失一般性，假设所关注的奇点为 $(\tau,\gamma) = (1, 1)$。令 $\mathbb{H}$ 表示上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$，并令 $\beta\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ 和 $\beta^{-1}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ 为保角映射

$$\beta(z) = i\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \quad \text{and} \quad \beta^{-1}(z) = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

回忆一下，$\phi = \frac{p}{p}$ 是一个双次数为 $(m, n)$ 的有理内函数。为了将 $\phi$ 转换为 $\mathbb{H}$，先定义一个新的多项式 $q$ ：

$$q(z) = (1 - iz_1)^m(1 - iz_2)^n p\left(\beta^{-1}(z_1), \beta^{-1}(z_2)\right).$$

于是， $q$ 是一个在 $\mathbb{H}^2$ 上没有零点、但在 (0, 0) 处有一个零点的多项式。同样，定义

$$\tilde{q}(z) := (1 - iz_1)^m(1 - iz_2)^n \tilde{p}\left(\beta^{-1}(z_1), \beta^{-1}(z_2)\right).$$

可以验证，

$$\tilde{q}(z) = \overline{q(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}$$

以及有理函数

$$\Psi(z) := \frac{\tilde{q}(z)}{q(z)}$$

在单位圆盘上满足 $|\Psi(z_1, z_2)| \le 1$，并且几乎处处在单位圆上满足 $|\Psi(z_1, z_2)| = 1$，且在 (0, 0) 处有一个奇点。因此，我们将单位圆盘上在 (1,1) 处有奇点的 $\phi$ 转换为单位圆盘上在 (0,0) 处有奇点的 $\Psi$ 。

现在我们需要引入记号，以便在此背景下标识水平集。具体而言，对于 $\alpha \in \mathbb{T}$，定义集合

$$\mathcal{V}_\alpha(\Psi) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \tilde{q}(x) - \alpha q(x) = 0\right\}.$$

设 $\zeta_2 = g_j^\alpha(\zeta_1)$ 是 $\mathcal{C}_\alpha(\phi)$ 的一个分支。那么，若定义 $h_j^\alpha := \beta \circ g_j^\alpha \circ \beta^{-1}$，曲线 $x_2 = h_j^\alpha(x_1)$ 必定是 $\mathcal{V}_\alpha(\Psi)$ 的一个分支；显然，反过来这一结论也成立。这一点很有用，因为 [5] 中的定理2.16和2.20通过各自的普伊苏展开，给出了零点集 $\mathcal{Z}(q)$ 的分支与水平集 $\mathcal{V}_\alpha(\Psi)$ 的分支之间的联系。（关于如何利用普伊苏级数参数化代数曲线分支的详细概述，请参见 [11, 第 7] 章；关于这些分支在当前背景下所呈现的具体形式的进一步讨论，请参见 [5, 第 2] 节。）

我们通过以下两个定理来编码来自[5] 的重要信息：

定理5.2. 存在正整数 $J$ 及相关的正整数 $M_1$、……、$M_J$，使得在(0, 0)附近， $q$ 可分解为

$$q(z) = u(z)\prod_{j=1}^{J}\prod_{m=1}^{M_j}\left(z_2 + q_j(z_1) + z_1^{2L_j}\psi_j(\mu_j^m z_1^{\frac{1}{M_j}})\right), \tag{25}$$

其中 $u$ 在 (0,0) 处是单位（即 $u$ 是解析的，且 $u(0,0) \neq 0$），每个 $q_j \in \mathbb{R}[z]$ （即是实系数多项式）的次数为 $q_j < 2L_j$， $q_j(0) = 0$，且 $q_j'(0) > 0$，每个

$\mu_j$ =exp($2i\pi/M_j$) 是单位根，且每个 $\psi_j$ 在原点附近解析，且 Im($\psi_j$(0)) $> 0$。

定理 5.3. 除有限多个 $\alpha \in \mathbb{T}$ 外，我们还可以将其分解为

$$\bar{q}(z) - \alpha q(z) = (1-\alpha)u^{\alpha}(z) \prod_{j=1}^{J} \prod_{m=1}^{M_j} \left( z_2 + q_j(z_1) + z_1^{2L_j} \psi_{j,m}^{\alpha}(z_1) \right), \tag{26}$$

其中 $u^{\alpha}$ 在 (0,0)处是单位，每个 $q_j$ 与 (25) 中的相同，而每个 $\psi_{j,\,m}^{\alpha}$ 都是原点邻域内的实解析函数。

注 5.4. 基本上，定理 5.2 和5.3 描述了零点集 $\mathcal{Z}(q)$ 的分支以及水平集 $\mathcal{V}_{\alpha}(\Psi)$ 在 (0,0) 附近的情形。为表示我们现在专门考察 $\mathbb{R}^2$，我们使用变量 $x = (x_1, x_2)$。于是定理 5.2 指出，在 (0, 0) 附近，$\mathcal{Z}(q)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的每个分支都具有如下形式

$$x_2 = -q_j(x_1) - x_1^{2L_j} \psi_j \left( \mu_j^m x_1^{\frac{1}{M_j}} \right),$$

其中 $q_j$ 和 $\psi_j$ 满足某些性质。类似地，定理 5.3 指出，在 (0,0) 附近，$\mathcal{V}_{\alpha}(\Psi)$ 的每个分支都具有如下形式

$$x_2 = -q_j(x_1) - x_1^{2L_j} \psi_{j,m}^{\alpha}(x_1),$$

其中 $q_j$ 和 $\psi_{j,\,m}^{\alpha}$ 满足某些性质。需要特别注意的是，两个定理中的多项式 $q_j$ 是相同的。然而，$\psi_j$ 和 $\psi_{j,\,m}^{\alpha}$ 并不相同。事实上，它们立即显现出不一致，因为 Im($\psi_j$(0)) $\neq 0$ 和 $\psi_{j,\,m}^{\alpha}$(0) $\in \mathbb{R}$。

我们记 $\mathbb{T}_q$ 为满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{T}$ 集合：定理 5.3 适用于其中的元素。该集合是 $\mathbb{T}$ 去掉一个有限集后得到的集合，并对应于满足 $\alpha$ 且 $\bar{q} - \alpha q$ 具有与 $q$相仿的因式分解的 $\alpha \in \mathbb{T}_q$。因此，对于 $\mathcal{C}_{\alpha}$ ，可以如下定义其每个分支的接触阶。

定义 5.5。 设 $\zeta_2 = g_j^{\alpha}(\zeta_1)$ 是 $\mathcal{C}_{\alpha}$的一个分支，且经过 (1，1)；设 $x_2 = h_j^{\alpha}(x_1)$是 $\mathcal{V}_{\alpha}$ 的相应分支，且经过 (0，0)。那么（参见定理 5.3），

$$h_j^{\alpha}(x_1) = -q_k(x_1) - x_1^{2L_k} \psi_{k,m}^{\alpha}(x_1), \ \textit{for some pair } (k,m).$$

于是，我们称 $K_j := 2L_k$ 既是 $\mathcal{C}_{\alpha}$的分支$\zeta_2 = g_j^{\alpha}(\zeta_1)$在 (1, 1) 处与 $\phi$ 的接触阶，也是 $\mathcal{V}_{\alpha}$的分支 $x_2 = h_j^{\alpha}(x_1)$在 (0, 0) 处与 $\Psi$ 的接触阶。

现在我们已具备足够的工具来陈述主要结果，它精确描述了权函数 $W_j^{\alpha}$在 $\phi$的奇点 $(\tau, \gamma)$ 附近的表现。

定理 5.6。 假设定理 3.3 中的设定，且给定 $W_j^{\alpha}$如 (23)所示。对于除有限多个 $\alpha \in \mathbb{T}$之外的所有情形，以下结论成立。若 $(\tau, \gamma) \in \mathbb{T}^2$ 是 $\phi$ 的一个奇点，且$\zeta_2 = g_j^{\alpha}(\zeta_1)$ 是 $\mathcal{C}_{\alpha}$的一条经过 $(\tau, \gamma)$的分支，则存在常数 $c, C$使得

$$0 < c \leq \frac{W_j^{\alpha}(\zeta)}{|\zeta - \tau|^{K_j}} \leq C \tag{27}$$

对所有 $\zeta$在 $\tau$的某个邻域内，其中 $K_j$是 $\phi$在 $(\tau, \gamma)$ 处与分支 $\zeta_2 = g_j^{\alpha}(\zeta_1)$ 相关的接触阶，如定义 5.5所述。

证明需要一个额外的技术性引理，因此我们将证明推迟到下一节。不过，我们确实可以立即得到一个推论。

推论 5.7。假设满足定理 3.3 的设定，并令 $W_j^\alpha$按 (23)所示给定。若 $\alpha$ 是一个使定理 5.6 适用的参数值，则 $W_j^\alpha$是 $\mathbb{T}$上的有界函数。

证明。令 $\tau_1, \ldots, \tau_k$表示 $z_1$奇点的 $\phi$ 坐标，这些奇点位于分支$\zeta_2 = g_j^\alpha(\zeta_1)$经过的路径上。根据定理 5.6，每个 $I_\ell$ 周围都存在开区间 $\tau_\ell$，使得 $W_j^\alpha$在 $I_{\tau_\ell}$上有界。现在，考虑 $W_j^\alpha$在 $\mathbb{T} \setminus \left(\cup_{\ell=1}^k I_\ell\right)$上的情形。根据假设，

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}\left(\zeta, g_j^\alpha(\zeta)\right)\right|$$

在 $\mathbb{T} \setminus \left(\cup_{\ell=1}^k I_\ell\right)$上连续。因此，若 $W_j^\alpha$在 $\mathbb{T} \setminus \left(\cup_{\ell=1}^k I_\ell\right)$上无界，则必定存在一点 $\tau_0$，使得

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial z_2}\left(\tau_0, g_j^\alpha(\tau_0)\right)\right| = 0.$$

但是，这将意味着有限布拉施克乘积 $\phi_{\tau_0}(z) := \phi(\tau_0, z)$ 是常数，因此，直线 $\{\zeta^2 \in \mathbb{T} : \zeta_1 = \tau_0\}$ 属于某个 $\mathcal{C}_\lambda$。注意，$\alpha$ 是一般的，因此不等于这个 $\lambda$。但这意味着点 $(\tau_0, g_j^\alpha(\tau_0))$ 位于 $\phi$的两个不同水平集上，因此必定是 $\phi$的一个奇点。这就产生了矛盾，因此 $W_j^\alpha$终究必须有界。□

5.3. 定理**5.6**的证明。定理5.6 的证明基本上是将$W_j^\alpha$转到 $q$的情形，$\bar{q}$ 并利用因式分解结果，确定转化后的 $W_j^\alpha$在奇点附近分子和分母的自然消失阶数。不过，分母仍可能出现额外的、意料之外的消失。

为说明这一点，我们需要一个基于[5]中的思想的稍具技术性的引理。具体而言，我们称 $q$ （如因式分解（25）所示）中指标为（$j, m$的分支具有 $r \in \mathbb{R}[z]$ 阶的初始段 $n$，如果

$$r(z_1) - \left(q_j(z_1) + z_1^{2L_j}\psi_j(\mu_j^m z_1^{\frac{1}{M_j}})\right) = O\left(|z_1|^n\right),$$

并且对于 $\alpha \in \mathbb{T}_q$，我们称 $\bar{q} - \alpha q$（如因式分解（26）所示）中指标为（$j, m$的分支具有 $r \in \mathbb{R}[z]$ 阶的初始段 $n$，如果

$$r(z_1) - \left(q_j(z_1) + z_1^{2L_j}\psi_{j,m}^\alpha(z_1)\right) = O\left(|z_1|^n\right).$$

于是我们得到以下引理。

引理 5.8。给定上述因式分解和定义，至多存在有限多个 $\alpha \in \mathbb{T}$，使得对于某一对 $(j, m)$，

$$r(z_1) := q_j(z_1) + z_1^{2L_j}\psi_{j,m}^\alpha(0), \tag{28}$$

是 $q$ 的某个 $2L_j + 1$ 阶分支的初始段。

证明。固定一个满足 $1 \le j_0 \le J$ 的指标 $j_0$，并注意到至多存在有限多个 $b \in \mathbb{R}$ 使得

$$r_b(z_1) := q_{j_0}(z_1) + bz_1^{2L_{j_0}} \tag{29}$$

是 $q$ 的一个 $2L_{j_0} + 1$次分支的初始段。特别是，如果这种情况发生，那么（29）就必须是因式分解中出现的另一个 $q_j$ 的初始部分 $q_0$。

由于这样的 $q_j$只有有限多个，这样的 $b$也只有有限多个。在这种情况下，给定的 $q$ 分支（例如，其指标为（$j$， $m$），如（25）所示）必须满足$2L_j > 2L_{j_0}$，因为 $\mathrm{Im}(\psi_j(0)) \neq 0$，因此该分支中的 $z_1^{2L_j}$ 次项不可能与 $z_1^{2L_j}$ 中的 $r_b$次项一致。

固定一个 $(b, j_0)$ 组合，使得 $r_b$ 是 $q$ 的一个分支的 $2L_{j_0}+1$ 阶初始段。要证明该引理，只需证明至多存在一个 $\alpha \in \mathbb{T}_q$ 满足 $\psi^{\alpha}_{j_0,m}(0) = b$，其中某个 $m$。根据假设，存在某个正数 $N$，使得 $r_b$ 是 $q$ 中恰好 $N$ 个分支的 $2L_{j_0}+1$ 阶初始段，如式 (25) 所示。由于这种一致性必然发生在 $r_b$ 中的项与各分支中的实多项式 $q_j$ 的项之间，因此我们可以将这一信息推广到所有满足 $\alpha \in \mathbb{T}_q$ 的 $\bar{q} - \alpha q$。

具体而言，对于 $\alpha \in \mathbb{T}_q$， $q_j$ 在两个分支因式分解（25）和（26）中相同。因此，$r_b$ 与 $N$ 中的 $q_j$ （按重数计）也至少在 $2L_{j_0}+1$ 阶上相同；这些项出现在（26）中，因此是至少 $2L_{j_0}+1$ 阶的初始段，涉及$N$ 个 $\bar{q} - \alpha q$分支。

为导出矛盾，假设这些 $\alpha$ 中有两个，记为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$，满足 $\psi^{\alpha_i}_{j_0,m_i}(0) = b$，其中 $m_1$ 和 $m_2$ 是某些指标。于是， $r_b$ 分别是 $\bar{q} - \alpha_1 q$和 $\bar{q} - \alpha_2 q$的 $(j_0, m_1)$ 分支与 $(j_0, m_2)$ 分支中阶数为$2L_{j_0}+1$的初始段。这些新分支是此前已识别的 $N$ 个分支之外的分支，因为那些分支必须满足 $2L_j > 2L_{j_0}$。这意味着， $r_b$ 是 $\bar{q} - \alpha_1 q$ 和 $\bar{q} - \alpha_2 q$中至少 $N+1$ 个分支的阶数为 $2L_{j_0}+1$ 的初始段。然而，根据 [5], 中定理 2.21 的证明中的讨论，除至多一个 $\alpha \in \mathbb{T}_q$ 之外， $r_b$ 必须是 $q$ 和 $\bar{q} - \alpha q$中相同数量分支的阶数为 $2L_{j_0}+1$ 的初始段。这意味着， $r_b$ 必须是 $q$中至少 $N+1$ 个分支的阶数为 $2L_{j_0}+1$的初始段，由此得到矛盾。因此，对于某个 $m$，至多有一个 $\alpha \in \mathbb{T}_q$ 满足 $\psi^{\alpha}_{j_0,m}(0) = b$，证明完毕。□

有了这个关键技术引理，我们现在可以证明定理 5.6。

证明。 不失一般性，假设 $(\tau, \gamma) = (1, 1)$。固定 $\alpha \in \mathbb{T}$ 并至多略去有限个 $\alpha$，即可假设 $\alpha \in \mathbb{T}_q$，因此定理5.3 中的因式分解适用，且 $\alpha$ 不具有引理 5.8陈述中详述的行为。

令 $\zeta_2 = g_j^{\alpha}(\zeta_1)$ 为经过 (1, 1) 且与 $W_j^{\alpha}$ 相关联的分支 $\mathcal{C}_{\alpha}$，并令$x_2 = h_j^{\alpha}(x_1)$ 为经过 (0, 0) 的 $\mathcal{V}_{\alpha}$ 的相应分支。定义相关函数

$$V_j^{\alpha}(x) = \frac{|q(x, h_j^{\alpha}(x))|}{|\frac{\partial \bar{q}}{\partial z_2}(x, h_j^{\alpha}(x)) - \alpha \frac{\partial q}{\partial z_2}(x, h_j^{\alpha}(x))|}.$$

由于 $(\beta^{-1})'(x)$ 在原点邻域内有上下界，因此可以利用 ( $W_j^{\alpha}$（24）中的公式证明存在常数 $d, D$ 使得

$$0 < d \leq \frac{V_j^{\alpha}(x)}{|x|^{K_j}} \leq D \tag{30}$$

当且仅当（27）成立。本证明的其余部分通过确定 $x = 0$ 处 $V_j^{\alpha}$的分子和分母的消失阶，并证明这两个消失阶之差恰为 $K_j$，来建立（30）。

我们首先研究 $V_j^\alpha$的分母。对（26）中的因式分解关于 $z_2$ 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\big[\bar{q}(z)-\alpha q(z)\big]=(1-\alpha)\frac{\partial u^\alpha}{\partial z_2}(z)\prod_{k=1}^{J}\prod_{m=1}^{M_k}\Big(z_2+q_k(z_1)+z_1^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(z_1)\Big)$$
$$+(1-\alpha)u^\alpha(z)\sum_{\#\text{ of factors in (26)}}\left(\prod_{\text{one factor deleted}}\Big(z_2+q_k(z_1)+z_1^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(z_1)\Big)\right).$$

回顾

$$h_j^\alpha(z_1)=-q_{j_0}(z_1)-z_1^{2L_{j_0}}\psi_{j_0,m_0}^\alpha(z_1),$$

对于某一对 $(j_0,m_0)$。然后将 $(x,h_j^\alpha(x))$ 代入上述 $z_2$ 阶导数，得到 $V_j^\alpha$ 分母的以下公式

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\big[\bar{q}-\alpha q\big](x,h_j^\alpha(x))=(1-\alpha)u^\alpha(x,h_j^\alpha(x))\prod_{(k,m)\neq(j_0,m_0)}\Big(h_j^\alpha(x)+q_k(x)+x^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(x)\Big),$$

其中，代入 $z_1=x$ 和 $z_2=h_j^\alpha(x)$ 后，除一项外，其余各项均消失。令$N_\alpha(h_j^\alpha,k,m)$ 为该项的消失阶

$$h_j^\alpha(x)+q_k(x)+x^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(x)$$

at $x=0$，因此 $V_j^\alpha$ 的分母在 $x=0$ 处的消失阶为

$$\sum_{(k,m)\neq(j_0,m_0)}N_\alpha(h_j^\alpha,k,m).$$

我们也可以类似地研究 $V_j^\alpha$ 的分子。具体而言，将 $(x,h_j^\alpha(x))$ 代入 ( $q$ 中的因式分解（25）可得

$$q(x,h_j^\alpha(x))=u(x,h_j^\alpha(x))\prod_{k=1}^{J}\prod_{m=1}^{M_k}\Big(h_j^\alpha(x)+q_k(x)+x^{2L_k}\psi_k(\mu_k^m x^{\frac{1}{M_k}})\Big).$$

令 $N(h_j^\alpha,k,m)$ 为该项的消失阶

$$h_j^\alpha(x)+q_k(x)+x^{2L_k}\psi_k(\mu_k^m x^{\frac{1}{M_k}})$$

at $x=0$，使得 $V_j^\alpha$ 的分子在 $x=0$ i 处的消失阶 s

$$\sum_{(k,m)}N(h_j^\alpha,k,m).$$

由于 $\mathrm{Im}(\psi_{j_0}(0))\neq 0$，可以验证 $N(h_j^\alpha,j_0,m_0)=K_j$。此外，我们声称，对于每个 $(k,m)\neq(j_0,m_0)$，都有

$$N_\alpha(h_j^\alpha,k,m)=N(h_j^\alpha,k,m). \tag{31}$$

一旦得到 (31)，比较 $V_j^\alpha$在 $x=0$ 附近的分子和分母即可推出 (30)。

我们用反证法证明 (31)：假设存在某个 $(k,m)\neq(j_0,m_0)$，使得$N_\alpha(h_j^\alpha,k,m)\neq N(h_j^\alpha,k,m)$。如果 $N_\alpha(h_j^\alpha,k,m)$ 或 $N(h_j^\alpha,k,m)$ 小于 $2L_k$，那么它们必定相等，因为底层分支在该阶相等。因此，

其中必有一个大于 $2L_k$。由于 $\mathrm{Im}(\psi_{j_0}(0)) \neq 0$，我们必有$N(h_j^\alpha, k, m) \leq 2L_k$，因此可以得出 $N_\alpha(h_j^\alpha, k, m) > 2L_k$。

这意味着 $\mathcal{V}_\alpha$ 的 $(m_0, j_0)$ 分支和 $(k, m)$ 分支都具有以下形式

$$x_2 = -q_k(x) - x^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(0) + O\big(|x|^{2L_k+1}\big). \tag{32}$$

固定一个接近零的 $x$，并定义 $\Psi_x(x_2) := \Psi(x, x_2)$。于是

$$\Psi_x(x_2) = \phi(\beta^{-1}(x), \beta^{-1}(x_2)).$$

回顾一下，$\phi(\zeta, \cdot$对于除有限多个 $\zeta \in \mathbb{T}$之外的所有取值，都是非恒定有限布拉施克乘积。因此，根据有限布拉施克乘积的性质，对于几乎每个 $x$，当作为输入的 $\Psi_x$ 遍历 $x_2$ 之间的取值（即 $\mathcal{V}_\alpha$ 具有形式 (32) 的两个分支之间的取值）时，它必定至少输出一次每个 $\lambda \in \mathbb{T}$。这意味着对于每个 $\lambda \in \mathbb{T}_q$，实际上存在一个 $\mathcal{V}_\lambda$ 具有形式 (32) 的分支。于是，[5] 中定理 2.21 的证明里的讨论表明

$$q_k(x) + x^{2L_k}\psi_{k,m}^\alpha(0)$$

是 $q$ 的一个阶数为 $2L_k + 1$的分支的初始段。由于这正是引理 5.8中讨论的确切条件，这与我们已经排除这类 $\alpha$ 取值这一事实矛盾。这就证明了 (31)，并完成了证明。□

注记 5.9。请注意，对于某些 $\alpha$，确实可能出现较低的消失阶，因此定理5.6的陈述中有必要允许排除有限多个值。例如，参见 [4, 例 5。2]，其中所有权重 $W^\alpha$在该有理内函数的唯一奇点处均呈现 4 阶消失，除了 $W^{-1}$ 其消失阶为 2。

## 6. A TRIDISK EXAMPLE

对于 $s \geq 3$，考虑三变量有理内函数

$$\phi_s(z) = \frac{\tilde{p}_s(z)}{p_s(z)} = \frac{sz_1z_2z_3 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3}{s - z_1 - z_2 - z_3}, \quad z \in \mathbb{D}^3. \tag{33}$$

该函数及其近亲常作为三圆盘的基本例子出现，参见例如 [14, 5]。当 $s > 3$时，多项式 $p_s$ 在闭三圆盘中没有零点。因此 $\phi_s$ 在 $\overline{\mathbb{D}^3}$上没有奇点，且定理 3.5 适用。经计算可得

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial z_3}(z) = \frac{s^2z_1z_2 - s(z_1^2z_2 + z_1z_2^2 + z_1 + z_2) + z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2}{(s - z_1 - z_2 - z_3)^2}.$$

固定 $\alpha \in \mathbb{T}$，集合 $\{\zeta \in \mathbb{T}^3 : \tilde{p}_s(\zeta) - \alpha p_s(\zeta) = 0\}$ 可参数化为

$$\zeta_3 = \psi_s^\alpha(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\alpha s - \alpha\zeta_1 - \alpha\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2}{s\zeta_1\zeta_2 - \zeta_1 - \zeta_2 + \alpha}, \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{T}^2.$$

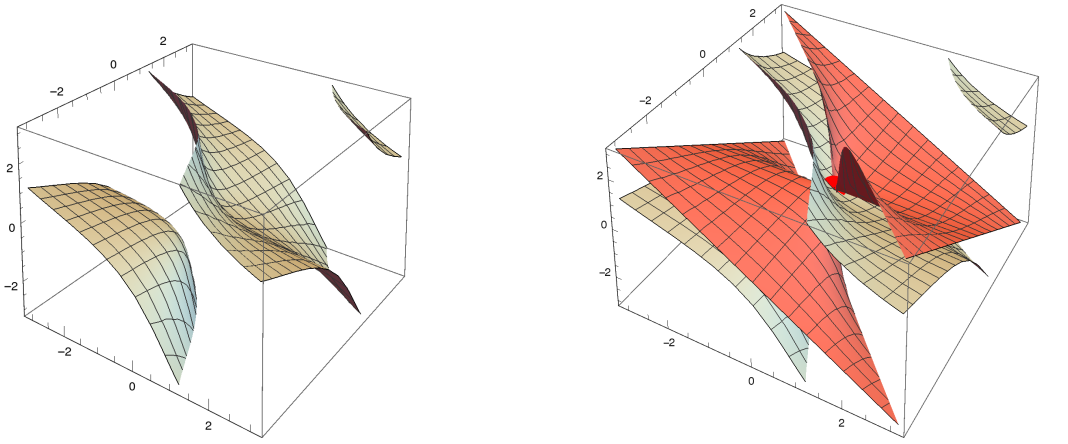
正如 [8, 定理 4.8], 所保证的，每个 $\psi_s^\alpha$ 都是定义在 $\mathbb{D}^2$ 上的有理内函数 RIF 的倒数；由于 $\phi_s$ 没有奇点，因此当 $s > 3$ 时，每个 $\psi_s^\alpha$ 在 $\overline{\mathbb{D}^2}$ 上连续。这个简单情形也可以直接验证。将 $\zeta_3 = \psi_s^\alpha$ 代入 $\frac{\partial \phi_s}{\partial z_3}$ 并化简，可得：对于固定的 $\alpha \in \mathbb{T}$，以及 $f \in C$（$\mathbb{T}^3$），克拉克测度 $\sigma_{s,\,\alpha}$ 满足

$$\int_{\mathbb{T}^3} f(\zeta) d\sigma_{s,\alpha}(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^2} f\left(\zeta_1, \zeta_2, \psi_s^\alpha(\zeta_1, \zeta_2)\right) W_{s,\alpha}(\zeta_1, \zeta_2) dm(\zeta_1, \zeta_2),$$

其中

$$W_{s,\alpha}(\zeta_1,\zeta_2)=\left|\frac{s^2\zeta_1\zeta_2-s(\zeta_1^2\zeta_2+\zeta_1\zeta_2^2+\zeta_1+\zeta_2)+\zeta_1^2+\zeta_1\zeta_2+\zeta_2^2}{(s\zeta_1\zeta_2-\zeta_1-\zeta_2+\alpha)^2}\right|.$$

因此，当 $s>3$ 时，每个权重 $W_{s,\ \alpha}$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上都有连续且有上下界的性质，但即使对于这个简单的有理内函数选择，$\sigma_{s,\ \alpha}$ 的显式表示也涉及一些相当复杂的表达式。



(a) $\phi=(3z_1z_2z_3-z_1z_2-z_1z_3-z_2z_3)/(3-z_1-z_2-z_3)$，其中 $\alpha=i$。

(b) $\phi=(3z_1z_2z_3-z_1z_2-z_1z_3-z_2z_3)/(3-z_1-z_2-z_3)$，其中 $\alpha=1$ 和 $\alpha=-1$ （鲑鱼色）。

FIGURE 2. *Supports of the Clark measures* $\sigma_{3,\ \alpha}$ *for* $\phi_3$.

现在我们转向临界情形 $s=3$。此时，$\phi_3$ 在 $(1,1,1)\in\mathbb{T}^3$ 处有一个奇点，且 $\phi_3^*(1,1,1)=\angle\lim_{z\to(1,1,1)}\phi_3(z)=-1$；我们还验证了 $\phi_3(1,1,z_3)\equiv-1$，这反映出相应的Blaschke因子发生了次数下降。对于所有 $\alpha\neq-1$，二变量有理内函数 $1/\psi_3^\alpha$ 在 $\overline{\mathbb{D}^2}$ 上连续，权重 $W_{3,\alpha}$ 也保持连续。然而，对于每个 $\alpha\in\mathbb{T}\setminus\{-1\}$，都有 $W_{3,\alpha}(1,1)=0$。最后，考察 $\alpha=-1$ 的情形，即 $\phi_3$ 在其奇点处的非切向值，可以揭示高维中可能出现的一些困难。首先，

$$\zeta_3=\psi_3^{-1}(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{-3+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_1\zeta_2}{-1-\zeta_1-\zeta_1+3\zeta_1\zeta_2}$$

是一个在 $(1,\ 1)$ 处有奇点的有理内函数的倒数，这说明水平集 $\mathcal{C}_{-1}$ 不能被视为三维环面上的光滑曲面。图 2 展示了 $\mathcal{C}_i$，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_{-1}$ 在 $\mathbb{T}^3$上的图像，其中各点与其在$[-\pi,\pi)^3$处的辐角相关联。

此外，我们看到

$$W^*(\zeta_1,\zeta_2)=\lim_{\alpha\to-1}W_{3,\alpha}(\zeta_1,\zeta_2)=\left|\frac{-3(\zeta_1^2\zeta_2+\zeta_1\zeta_2^2+\zeta_1+\zeta_2)+\zeta_1^2+10\zeta_1\zeta_2+\zeta_2^2}{(3\zeta_1\zeta_2-\zeta_1-\zeta_2-1)^2}\right|$$

是 $\mathbb{T}^2$ 上的不连续函数，而且在 $(1,1)\in\mathbb{T}^2$ 附近无界；沿曲线 $\{(e^{i\theta},e^{-i\theta})\}\subset\mathbb{T}^2$ 求值即可验证这一点，得到表达式$W^*(e^{i\theta},e^{-i\theta})=1+{}^{1}_{1-\text{余弦}\ \theta}$。

由此例可见，要处理具有奇点的高维有理内函数的克拉克测度，似乎需要采用更精细的方法。

## Acknowledgements

Bickel 的部分研究经费由美国国家科学基金会 DMS 项目拨款 #2000088 提供。Sola 在 2022 年春季学期参加数学科学研究所（加利福尼亚州伯克利）举办的一项项目期间，部分经费由美国国家科学基金会 DMS 项目拨款 #1928930 提供。

## References

[1] J. Agler、J.E. Mc Carthy 和 M. Stankus，《多圆盘上的环面代数集与函数论》，J. Geom. Anal. 16 (2006)，第 4 期，551–562。6[2] A.B. Aleksandrov 和 E. Doubtsov，《复球面上的克拉克测度》，J. Funct. Anal. 278 (2020)，108314。3[3] A. B. Aleksandrov 和 E. Doubtsov，《多复变数中克拉克测度的比较》，Extended abstracts fall 2019 —解析函数空间：逼近、插值、采样，9–16，Trends Math. Res. Perspect. CRM Barc., 12，Birkh¨auser/Springer，Cham，2021。3[4] K. Bickel、J.A. Cima 和 A. A. Sola，《有理内函数的克拉克测度》，Michigan Math. J.，即将发表。https://doi.org/10.1307/mmj/20216046。2, 3, 10, 16, 17, 20, 27[5] K. Bickel、G. Knese、J. E. Pascoe 和 A. Sola，《多变量稳定多项式与有界有理函数的局部理论》，预印本见 https://arxiv.org/2109.07507 3, 6, 11, 13, 20, 22, 24, 25, 27[6] K. Bickel、J.E. Pascoe 和 A. Sola，《有理内函数的导数：奇点的几何与边界处的可积性》，Proc. London Math. Soc. 116 (2018)，281-329。2, 3, 8, 10, 20[7] K. Bickel、J.E. Pascoe 和 A. Sola，《有理内函数的等值曲线图》，Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sc. XXI (2020)，451-494。2, 8, 9, 10, 21[8] K. Bickel、J.E. Pascoe 和 A. Sola，《高维有理内函数的奇点》，Amer. J. Math. 144 (2022)，1115-1157。2, 7, 8, 12, 27[9] J.A. Cima、A.L. Matheson 和 W.T. Ross，《柯西变换》，Math. Surveys and Monographs 125，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2006。11[10] E. Doubtsov，《环面上的克拉克测度》，Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020)，第 5 期，2009–2017。2, 4, 16, 18, 19, 20[11] G. Fisher，《平面代数曲线》，Student Math. Library 15（由 Leslie Kay 从 1994 年德文原版译出；Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2001）。22[12] S.R. Garcia、J. Mashreghi 和 W.T. Ross，《模型空间及其算子导论》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics 148，剑桥大学出版社，2016。11[13] M.T. Jury，《Drury-Arveson空间中的克拉克理论》，J. Funct. Anal. 266 (2014)，3855-3893。3[14] G. Knese，《多圆盘的 Schur-Agler 类中的有理内函数》，Publ. Mat. 55 (2011)，343-357。27[15] G. Knese，《有理函数的可积性与正则性》，Proc. London. Math. Soc. 111 (2015)，1261-1306。2, 4, 7, 13, 14[16] S.G. Krantz，《多复变数函数论》。1992 年版重印。AMS Chelsea Publishing，罗得岛州普罗维登斯，2001。1[17] S.G. Krantz 和 H.R. Parks，《几何积分理论》。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2008。5[18] W. Rudin，《多圆盘上的函数论》，W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1969。2, 6[19] W. Rudin 和 E. L. Stout，《多复变数函数的边界性质》，J. Math. Mech. 14 (1965)，991–1005。6[20] D. Sarason，《单位圆盘中的子哈代希尔伯特空间》。阿肯色大学数学科学讲义，10。Wiley-Interscience 出版物。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1994。17

Department of Mathematics and Computer Science, College of the Holy Cross, Worces-ter, MA 01610, USA.
电子邮箱地址：janderso@holycross.edu

Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden.电子邮箱地址：linus@math.su.se

Department of Mathematics, Bucknell University, Lewisburg, PA 17837, USA.电子邮箱地址：kelly.bickel@bucknell.edu

Department of Mathematics, University of North Carolina at Chapel Hill, ChapelHill, NC 27599, USA.
电子邮箱地址：cima@email.unc.edu

Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden.电子邮件地址：sola@math.su.se