arXiv:2303.11386v1 [math.QA] 20 Mar 2023

作用李群胚的局部凸双代数胚

J. KALIˇSNIK

Abstract. 作用李群胚用于刻画李群在流形上的作用所产生的轨道空间。对于每个这样的作用群胚 $M \rtimes H$，我们构造一个带有对极的局部凸双代数胚 Dirac $(M \rtimes H)$，其基代数为 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$; 由此可以将该群胚 $M \rtimes H$ 重构为其谱作用李群胚 $\mathcal{AG}_{sp}(\text{Dirac}(M \rtimes H))$。

1. Introduction

本文的研究动机源于 Gelfand-Naimark 定理。对于任意局部紧豪斯多夫拓扑空间 X，都可以赋予其一个 C*-代数$C_0(X)$，该代数由 X 上所有在无穷远处消失的连续函数构成。 $C_0(X)$ 上的所有特征所组成的集合 Spec$(C_0(X))$可赋予弱-* 拓扑，从而成为一个局部紧豪斯多夫空间。Gelfand-Naimark 定理指出，映射 Φ_X^{lc}：$X \to \text{Spec}(C_0(X))$ 是一个同胚；该映射将点 $x \in X$ 映为在 x 处的求值 δ_x。

我们希望对可由李群胚 [4, 17, 20, 21]表示的几何空间类获得类似的结果。这些空间包括轨形、叶状结构的叶空间以及李群作用的轨道空间。在 [22] 中，针对 ´étale 李群胚构造了一个具有 Gelfand-Naimark 定理风格的结果，这类群胚可用于建模轨形和叶状结构的叶空间。对任意 ´étale 李群胚 $\mathscr{G}$，都可以赋予 Hopf 代数胚 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$：定义在 $\mathscr{G}$ 上的光滑紧支撑函数所构成的代数（若 $\mathscr{G}$ 不是豪斯多夫的，则其定义需要格外谨慎）。作为代数， $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 在豪斯多夫情形下与 Connes 卷积代数一致 [5], ; 而其余代数结构基本上由与 $\mathscr{G}$的目标映射 t : $\mathscr{G} \to M$ 相对应的层 [23], 诱导。最后， $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 上的对极由 $\mathscr{G}$的逆映射诱导。对于每个这样的 Hopf 代数胚 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$，都可以构造谱 ´étale 李群胚 $\mathcal{G}_{sp}(\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G}))$，使得存在李群胚的自然同构 $\Phi_{\mathscr{G}}^{\text{egr}}$: $\mathscr{G} \to \mathcal{G}_{sp}(\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G}))$。 [10] 中也运用了类似的思想，将这些结果推广到 ´étale 李群胚与李群丛的半直积。

´态李群胚 $\mathscr{G}$ 的结构映射都是局部微分同胚，因此，特别地，目标映射的纤维是离散的。因此，只需将此类群胚的纤维重构为集合，这可以利用 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$上的余代数结构来完成。然而，对于一般群胚，我们还需要一些额外信息，以便恢复纤维上的拓扑。让我们通过一个简单的例子来说明主要思路。若 Γ 是离散群，那么 $\mathcal{C}_c^\infty(\Gamma)$ 就是 Γ的群霍普夫代数。 Γ 的元素对应于 $\mathcal{C}_c^\infty(\Gamma)$的类群元，而 Γ 的乘法和逆元则编码于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16T05,16T10,22A22,46A04,46F05,46H25.
Key words and phrases. 作用李群胚、余代数、狄拉克分布、Hopf 代数胚、横截分布。本研究得到了斯洛文尼亚研究局 ARRS 的 J1-1690、N1-0137、N1-0237 项目以及分析与几何研究计划 P1-0291 的资助。

$\mathcal{C}_c^\infty(\Gamma)$的乘法和对极中。现在，若将 Γ 换成非离散李群 H，仍然可以定义它的群霍普夫代数，并重构 H，但只能将其重构为一个群。若要恢复 H 的拓扑和光滑结构，我们还需要一些额外结构。解决这一问题的一种方法，是将 H 的群霍普夫代数与空间 $\mathrm{Dirac}(H)$ 等同起来；$\mathrm{Dirac}(H)$ 是由 H 上的狄拉克分布张成的分布空间。空间 $\mathrm{Dirac}(H)$ 是 H上紧支撑分布空间 $\mathcal{E}'(H)$ 的子空间。若在 $\mathrm{Dirac}(H)$ 上赋予从 $\mathcal{E}'(H)$诱导的强拓扑，就会有以下两种结果。群 H 自然同胚于狄拉克分布构成的空间，而这些分布恰好是霍普夫代数 $\mathrm{Dirac}(H)$的类群元。另一方面，由于 $\mathrm{Dirac}(H)$ 在 $\mathcal{E}'(H)$中稠密，强对偶 $\mathrm{Dirac}(H)'$ 与 $\mathcal{C}^\infty(H)$同构。现在注意到，空间 $\mathcal{C}^\infty(H)$ 是一个弗雷歇代数，由此可以将 H 重构为一个流形。

根据上述例子，我们可以考虑将 Hopf 代数胚视为不仅是纯粹的代数对象，还具有某种附加的拓扑结构。其核心思想包含两部分。首先，我们为李群胚 $\mathcal{G}$ 赋予某个 Hopf 代数胚，并由此重构 $\mathcal{G}$ 的代数结构。随后，我们为这个 Hopf 代数胚赋予适当的局部凸结构，从而恢复 $\mathcal{G}$的拓扑和光滑结构。

本文将这一思想应用于作用李群胚这一类对象，它们用于描述李群在流形上的作用所产生的轨道空间。每个这样的作用李群胚 $M \rtimes H$ 作为群胚都同构于一个 ´étale 李群胚 $M \rtimes H^\#$，其中 $H^\#$ 是带有离散拓扑的群 H 。我们利用这一对应关系，将 $M \rtimes H$ 的狄拉克双代数胚 $\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)$ 定义为 $M \rtimes H$上 t-横截分布空间 $\mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$ 的某个子空间。 [1, 2, 6, 11, 15] 研究了李群胚上的横截分布；与我们的问题尤为相关的是， [15] 证明了若赋予空间 $\mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$ 有界子集上一致收敛的强拓扑，则它是一个局部凸代数。赋予诱导拓扑后，$\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)$ 便成为带有对极的局部凸双代数胚。

本文结构如下。第 2 节回顾本文后续部分所用的基本定义和已知结果。第 3 节为每个平凡丛 $\pi\colon M \times N \to M$构造空间 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$，其中包含常值狄拉克型的横截分布。这些分布是支集位于 π常值截面上的狄拉克分布族。若纤维 N是离散的，则 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$ 与 LF-空间 $\mathcal{C}_c^\infty(M \times N)$相同；一般情况下，我们证明它是 π-横截分布空间 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$的稠密子空间。第 4 节在 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$上定义了一个关于 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$的局部凸余代数结构，并证明其强 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-对偶自然同构于 Fr´echet 代数 $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$。余代数结构与局部凸拓扑相结合，使我们能够从 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$ 重构丛 $\pi\colon M \times N \to M$，将其作为谱丛 $\mathcal{B}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N))$。最后，第 5 节利用这些结果，为每个作用李群胚 $M \rtimes H$ 赋予其狄拉克双代数胚 $\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)$。空间 $\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)$ 是带有对极的局部凸双代数胚；当 M 是一个点时，它与局部凸 Hopf 代数 $\mathrm{Dirac}(H)$ 相同。随后我们证明，群胚 $M \rtimes H$ 可以从 $\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)$ 重构为其谱作用李群胚 $\mathcal{AG}_{sp}(\mathrm{Dirac}(M \rtimes H))$

2. Preliminaries

本小节将回顾本文其余部分所需的基本定义和结果。关于局部凸向量空间和李群胚的更多细节，可分别参见 [7, 14, 26] 和 [17, 20, 21]。

我们假设所有流形都是光滑、豪斯多夫且仿紧的，但不一定是第二可数的。对于任何这样的流形 M，我们将 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 记为定义在 M 上、取值于 $\mathbb{C}$ 的光滑函数的向量空间。定义在 M 上的紧支撑函数子空间和取值于 $\mathbb{R}$ 的函数子空间分别记为 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 和 $\mathcal{C}^\infty(M、\ \mathbb{R})$。

2.1. 局部凸空间。我们所有的局部凸向量空间都是复的且为豪斯多夫空间。局部凸空间 E 的子集 B 有界，当且仅当对于 E 上的任意连续半范数 p，集合 $p(B)$ 都是 $\mathbb{R}$ 的有界子集。对于局部凸向量空间 E 和 F，我们用 $\mathrm{Hom}(E, F)$ 表示从 E 到 F 的所有连续线性映射所构成的空间，并赋予其在有界子集上一致收敛的强拓扑。$\mathrm{Hom}(E,F)$ 中零邻域的基由以下形式的集合构成

$$K(B,V) = \{T \in \mathrm{Hom}(E,F) \,|\, T(B) \subset V\},$$

其中 B 是 E 的有界子集， V 是 F 中的零邻域。如果 E 和 F 是 $\mathbb{C}$-代数 A 上的模，我们用 $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ 表示相应的连续 A- 模同态空间，并赋予其从 $\mathrm{Hom}(E,F)$ 诱导的拓扑。

对于任意 $l \in \mathbb{N}$，空间 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l)$ 都具有 Fr´echet 代数结构。$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l)$ 上的拓扑由一族半范数 $\{p_{L,\ m}\}$ 生成，这些半范数以 $\mathbb{R}^l$ 的紧子集 L 和 $m \in \mathbb{N}_0$ 为指标，定义如下

$$p_{L,m}(F) = \sup_{x \in L, |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha(F)(x)|$$

对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l)$。这里记 $D^\alpha(F) = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_l^{\alpha_l}}$，其中 $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots, \alpha_l) \in \mathbb{N}_0^l$是一个多重指标，且 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l$。如果 M是第二可数流形，则可以选取相对于 M 的某个由局部坐标图构成的开覆盖的类似半范数，从而在 $\mathcal{C}^\infty(M)$上定义 Fr´echet 拓扑。该拓扑与在M的紧子集上一致收敛所有导数的拓扑一致。空间 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 的强对偶是 M上的紧支撑分布空间 $\mathcal{E}'(M) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{C})$。

如果 M 不是紧的，那么 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 的子空间 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 在 Fr´echet 拓扑下并不完备，因此我们考虑 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$上的更细 LF拓扑。对于 M 的任意紧子集 L，记 $\mathcal{C}_c^\infty(L)$ 为支集包含于 L的函数构成的子空间。空间 $\mathcal{C}_c^\infty(L)$ 是 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 的闭子空间，因此其自身也是 Fr´echet 空间。现在， $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上的 LF拓扑定义为关于所有形如 $\mathcal{C}_c^\infty(L)$ 的子空间族（其中 $L \subset M$ 为紧集）的归纳极限拓扑。带有 LF拓扑的空间 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 是一个完备局部凸空间；若 M 不是紧的，则该空间不可度量化。

若 M 是光滑流形，且 E 是局部凸向量空间，则向量值函数 $u:\ M \to E$ 是光滑的，当且仅当其在局部坐标下的所有偏导数都存在且连续。我们将用 $\mathcal{C}^\infty(M,E)$ 表示以 M 为定义域、取值于 E 的光滑函数空间，并用 $\mathcal{C}_c^\infty(M,E)$ 表示它的子空间，即由紧支撑函数组成的子空间。为了区分标量函数与向量值函数，我们将函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 在x 处的值记为 $f(x) \in \mathbb{C}$，将函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$ 在 x处的值记为 $u_x \in E$。

2.2. 李群胚。李群胚由一个对象流形 M 和一个箭头流形 $\mathscr{G}$ 组成，并配有光滑结构映射：目标映射 $\mathsf{t}:\ \mathscr{G} \to M$，源映射 $\mathsf{s}:\ \mathscr{G} \to M$，乘法 $\mathsf{mlt}:\ \mathscr{G} \times^{\mathsf{s},}_{M}{}^{\mathsf{t}} \mathscr{G} \to \mathscr{G}$，逆元映射 $\mathsf{inv}:\ \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 以及单位元映射 $\mathsf{uni}:\ M \to \mathscr{G}$。我们假设源映射和目标映射都是淹没映射，以确保 $\mathscr{G} \times^{\mathsf{s},}_{M}{}^{\mathsf{t}} \mathscr{G}$ 是光滑流形。若李群胚的所有结构

映射都是局部微分同胚，则称其为 étale。请注意，李群胚还有更一般的定义，但我们不需要用到这些定义。

例 2.1. 我们主要关注作用李群胚。设 H 是一个从右侧作用于流形 M 上的李群。相应的作用李群胚 $\mathscr{G} = M \rtimes H$ 是一个以 M 为底空间的李群胚，其箭头流形为 $M \times H$，结构映射如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{t}(x,h) &= x, \\ \mathrm{s}(x,h) &= xh, \\ \mathrm{mlt}((x,h),(xh,h')) &= (x,h)(xh,h') = (x,hh'), \\ \mathrm{inv}(x,h) &= (x,h)^{-1} = (xh,h^{-1}), \\ \mathrm{uni}(x) &= (x,e). \end{aligned}$$

这里 $x \in M$ 和 h、$h' \in H$ 是任意的，而 e 是李群 H 的单位元。作用群胚 $\mathscr{G}$ 是 étale 的，当且仅当群 H 是离散的。

2.3. 实交换代数。设 A 是一个 $\mathbb{R}$-代数。A 上的实特征是从 A 到 $\mathbb{R}$ 的非平凡乘法同态。我们将记

$$\mathrm{Spec}(A)$$

全体 A 上实特征构成的空间，并赋予盖尔范德拓扑（即相对弱-* 拓扑）。如果代数 A 满足 [19], 中定理的条件，那么空间 $\mathsf{Spec}(A)$ 也具有自然的光滑结构。

若 Q 是一个光滑流形，则有

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{C}^\infty(Q)) = \{\delta_q \,|\, q \in Q\},$$

其中 δ_q 是狄拉克泛函，集中于点 q。在这种情况下，我们可以在集合 $\mathsf{Spec}(\mathcal{C}^\infty(Q))$ 上赋予一个拓扑和光滑结构，使得映射 $\Phi_Q^{\mathrm{man}}\colon Q \to \mathsf{Spec}(\mathcal{C}^\infty(Q))$（定义为 $\Phi_Q^{\mathrm{man}}(q) = \delta_q$）是一个微分同胚。

2.4. 余代数。设 R 是一个交换环。若对于任意 $r_1, \dots, r_n \in R$，都存在 $r \in R$，使得对于 $i = 1, \dots, n$，有 $rr_i = r_i$，则称 R 具有局部单位元。类似地，若对于任意 $c_1, \dots, c_n \in C$，都存在$r \in R$，使得对于 $i = 1, \dots, n$，有 $rc_i = c_i$，则称左 R-模 C是局部幺的。

现在设 R 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个具有局部单位元的结合交换代数，且设 C 是一个局部幺左 R-模。C 上的 R 余代数结构由两个 R-线性映射组成：

$$\begin{aligned} \Delta &: C \to C \otimes_R C, \\ \epsilon &: C \to R, \end{aligned}$$

称为余乘法和余单位，它们满足条件 $(\mathsf{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathsf{id}$ 和$(\epsilon \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = \mathsf{id}$。注意，这些条件是有意义的，因为我们可以将$C$ 与 $R \otimes_R C$ 以及 $C \otimes_R R$ 等同，这是因为 C 是局部幺的。R 上的余代数是一个局部幺的左 R-模 C，配备余代数结构 (Δ, ϵ)，并且满足余结合律，即 $(\mathsf{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta$。若余代数 C在 R上满足 $\sigma \circ \Delta = \Delta$，则称其为余交换余代数，其中翻转同构 $\sigma\colon C \otimes_R C \to C \otimes_R C$由 $\sigma(c \otimes c') = c' \otimes c$给出。

我们的主要余代数例子是与层相关联的余代数，这些余代数在 [23] 中引入。

例2.2. 设 P 和 M 是流形，并设 $\pi : P \to M$ 是一个局部微分同胚（即 P 是 M上的一个层）。环 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 总是有局部单位元，但当且仅当 M 是紧的时，它才是含幺的。对于任意

$f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$，用 $1_f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$表示一个满足 $1_f f = f$的函数。如果 $\mathrm{supp}(f) \neq M$，函数 1_f 并非唯一定义。

空间 $\mathcal{C}_c^\infty(P)$ 具有自然的局部幺左 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-模结构，其乘法定义为

$$(f \cdot F)(p) = f(\pi(p))F(p)$$

其中 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$、 $F \in \mathcal{C}_c^\infty(P)$和 $p \in P$。余单位 $\epsilon\colon \mathcal{C}_c^\infty(P) \to \mathcal{C}_c^\infty(M)$定义为

$$\epsilon(F)(x) = \sum_{p \in \pi^{-1}(x)} F(p)$$

对于任意 $F \in \mathcal{C}_c^\infty(P)$和任意 $x \in M$。注意，上述和是有限和，因为 F具有紧支集，且 π 的纤维是离散的。

为描述余乘法，我们先回顾，开子集 $W \subset P$ 是π-初等的，当且仅当 $\pi|_W\colon W \to \pi(W)$是一个微分同胚。对于任意 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\pi(W))$，若将函数 $f \circ \pi|_W \in \mathcal{C}_c^\infty(W)$ 在 W之外延拓为零，则可将其视为 $\mathcal{C}_c^\infty(P)$的一个元素。由于任意 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(P)$都具有紧支集，因此它可以写成有限和（且表示不唯一） $a = \sum_{i=1}^n f_i \circ \pi|_{W_i}$，其中 W_1、.....、W_n是 P的 π-初等子集，并且对于 $i = 1$、.....、 n， $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\pi(W_i))$。现在可以将余乘法$\Delta : \mathcal{C}_c^\infty(P) \to \mathcal{C}_c^\infty(P) \otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)} \mathcal{C}_c^\infty(P)$ 定义为

$$\Delta(\sum_{i=1}^n f_i \circ \pi|_{W_i}) = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \pi|_{W_i}) \otimes (1_{f_i} \circ \pi|_{W_i}).$$

可以证明， Δ 的定义与我们所作的各种选择无关，并且由此得到一个在 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上的余交换余代数 $\mathcal{C}_c^\infty(P)$。

就我们的目的而言，我们主要关注平凡层。若 Γ 是离散拓扑空间，则投影 $\pi\colon M \times \Gamma \to M$ 是局部微分同胚。我们可以将向量空间 $\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$ 分解为直和

$$\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma) = \bigoplus_{y \in \Gamma} \mathcal{C}_c^\infty(M \times \{y\}).$$

利用这一分解，我们可以将每个元素 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$ 唯一地写成如下形式

$$a = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \delta_{y_i}$$

其中 f_1，.....， $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 以及 y_1，.....， $y_n \in \Gamma$。这里，对于任意 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 和任意 $y \in \Gamma$，我们用 $f \cdot \delta_y \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$ 表示由下式给出的函数

$$(f \cdot \delta_y)(x, y') = \begin{cases} f(x) & ;\ y' = y, \\ 0 & ;\ y' \neq y \end{cases}$$

对于 $(x, y') \in M \times \Gamma$。余乘法和余单位由 $\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$ 的生成元上的公式给出：

$$\Delta(f \cdot \delta_y) = (f \cdot \delta_y) \otimes (1_f \cdot \delta_y),$$
$$\epsilon(f \cdot \delta_y) = f.$$

在本小节的其余部分，我们将重点讨论代数 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上、定义在某个流形 M 上的余代数，并回顾 [23] 中的主要结果。对于任意 $x \in M$，我们记为

$$I_x = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty(M) \mid f|_U = 0 \text{ for some neighbourhood } U \text{ of } x\}$$

$\mathcal{C}_c^\infty(M)$的理想，由所有在 x处具有平凡芽的函数构成。 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 关于此理想的商代数记作

$$\mathcal{C}_c^\infty(M)_x = \mathcal{C}_c^\infty(M)/I_x.$$

现在设 C 是 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$上的余代数。商

$$C_x = C/I_xC$$

于是继承了一个结构 (Δ_x, ϵ_x)，成为 $\mathcal{C}^\infty_c(M)_x$ 上的余代数，称为 C 在 x 处的局部余代数。$c \in C$ 在商 C_x 中的像记为 $c|_x \in C_x$。

若对于某个 $c' \in C$，有 $\Delta(c) = c \otimes c'$，则称元素 $c \in C$ 为弱类群样元。若对于所有 $x \in U$，都有 $\epsilon_x(c|_x) = 1$，则称弱类群样元 $c \in C$ 在开子集 $U \subset M$ 上归一化。层余代数 $\mathcal{C}^\infty_c(P)$ 的弱类群样元恰好是形如 $f \circ \pi|_W$ 的元素，其中 W 是 P 的某个 π-初等开子集，且 $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\pi(W))$ 是某个元素。若 $f|_U \equiv 1$，则称这样的元素 $f \circ \pi|_W$ 在 $U \subset \pi(W)$ 上归一化。

由于对于任意 $x \in M$，局部环 $\mathcal{C}^\infty_c(M)_x$ 都是含幺的，我们也可以将 C_x 的类群元集合定义为

$$G(C_x) = \{\xi \in C_x \mid \Delta_x(\xi) = \xi \otimes \xi,\, \epsilon_x(\xi) = 1\}.$$

元素 $\xi \in C_x$ 是类群元，当且仅当对于某个弱类群样元 $c \in C$，有 $\xi = c|_x$，且该元在 x 的某个开邻域上经过归一化。

$\mathcal{C}^\infty_c(M)$-余代数 C 的谱层 $\mathcal{E}_{sp}(C)$ 是层

$$\pi_{sp}(C) : \mathcal{E}_{sp}(C) \to M$$

其茎为

$$\mathcal{E}_{sp}(C)_x = G(C_x).$$

$\mathcal{E}_{sp}(C)$ 上的拓扑由以下基定义，该基由 $\mathcal{E}_{sp}(C)$ 的 $\pi_{sp}(C)$-初等子集构成，形式如下

$$c|_U = \{c|_x \in \mathcal{E}_{sp}(C) \mid x \in U\} \subset \mathcal{E}_{sp}(C),$$

其中 $c \in C$ 是一个弱类群样元，且在 M 的开子集 U 上经过归一化。

现在设 $\pi\colon\ P \to M$ 是 M 上的一个层。由 [23] 中的定理 2.4 可知，存在一个层的自然同构

$$\Phi^{\mathrm{shv}}_P : P \to \mathcal{E}_{sp}(\mathcal{C}^\infty_c(P))$$

定义如下:

$$\Phi^{\mathrm{shv}}_P(p) = (f \circ \pi|_W)|_{\pi(p)},$$

其中 $p \in P$，W 是 P 中 p 的一个 π-初等邻域，且 $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\pi(W))$ 满足 $f|_{\pi(p)} = 1 \in \mathcal{C}^\infty_c(M)_{\pi(p)}$。此外，由 [23], 中的定理 2.10 可知，余代数 C 同构于某个层余代数 $\mathcal{C}^\infty_c(P)$，当且仅当 C 是局部类群样的；根据定义，这意味着对每个 $x \in M$，$\mathcal{C}^\infty_c(M)_x$-模 C_x 都是以 $G(C_x)$ 为基的自由模。

2.5. 双代数胚与 Hopf 代数胚。双代数胚与 Hopf 代数胚是任意环上的双代数与霍普夫代数的推广。文献 [3, 12, 13, 16, 18, 24, 25, 27] 中可以找到几种类似的定义，它们一般并不等价。我们的定义沿用 [22] 中的定义。

设 R 是一个具有局部单位元的交换 $\mathbb{C}$-代数。若 R 是 A 的子代数，且 A 在 R 中具有局部单位元，则称 $\mathbb{C}$- 代数 A 扩张了 R。我们不假设 R 是 A 的中心子代数。任何扩张 R 的 $\mathbb{C}$-代数 A，自然都是一个 R-R-双模。我们用 $A \otimes_R A = A \otimes^{ll}_R A$ 表示左 R-模的张量积，它具有两种自然的右 R-模结构。

定义在 R 上的双代数胚，是一个扩张了 R 的 $\mathbb{C}$-代数 A，并配备结构映射 $\Delta\colon\ A \to A \otimes_R A$ 和 $\epsilon\colon\ A \to R$，使得 (A, Δ, ϵ) 构成一个余交换余代数，并满足:

(i) $\Delta(A) \subset A \overline{\otimes}_R A$，其中 $A \overline{\otimes}_R A$ 是由 $A \otimes_R A$ 中同时满足两个右 R-作用相同的元素构成的代数；(ii) $\epsilon|_R = \mathrm{id}$，且 $\Delta|_R$ 是典范嵌入 $R \subset A \otimes_R A$，

(iii) $\epsilon(ab) = \epsilon(a\epsilon(b))$ and $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$ for any $a, b \in A$.
双代数胚 A 上的对极是一个 $\mathbb{C}$-线性对合 $S\colon A \to A$，满足以下条件:

(i) $S|_R = \mathrm{id}$ 和任意 $a, b \in A$, (ii) $\mu_A \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \epsilon \circ S$，其中 μ_A 表示 A中的乘法。
在 R 上的 Hopf 代数胚是一个带有对极的 A 上的双代数胚。注意，当 R 是 A 的中心子代数时，双代数胚和 Hopf 代数胚的概念分别与更熟悉的双代数和 Hopf 代数概念一致。

在下一个例子中，我们将回顾 [22] 中与´étale 李群胚相关联的 Hopf 代数胚。

例 2.3。设 $\mathscr{G}$是一个以 M为底空间的´étale 李群胚。$\mathscr{G}$上的乘法在 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$上诱导出卷积乘积 [5]，其公式为

$$(a_1 * a_2)(g) = \sum_{g=g_1 g_2} a_1(g_1) a_2(g_2)$$

对于 $a_1, a_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$。注意，由于 a_1和 a_2都是紧支撑的，这个和总是有限的。由于 $\mathrm{t}\colon \mathscr{G} \to M$ 是一个层，我们也可以将空间 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 视为 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$上的局部类群状余代数。最后，对极 $S\colon \mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G}) \to \mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$由公式定义

$$S(a) = a \circ \mathrm{inv}$$

对于 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$。这样， $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 就成为一个以 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 为底代数的 Hopf 代数胚。

现在假设 Γ 是一个从右侧作用于流形 M 上的离散群，并用 $M \rtimes \Gamma$ 表示相应的作用群胚。于是我们有如下分解

$$\mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes \Gamma) = \bigoplus_{g \in \Gamma} \mathcal{C}_c^\infty(M \times \{g\}).$$

对于任意 $g \in \Gamma$ 和 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$，我们用 $gf \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 表示由 $(gf)(x) = f(xg)$ 给出的函数，其中 $x \in M$。若采用例 2.2 中的记号，则 $\mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes \Gamma)$ 上的卷积乘积和对极可在生成元集合上由以下公式描述:

$$(f_1 \cdot \delta_{g_1}) * (f_2 \cdot \delta_{g_2}) = (f_1(g_1 f_2)) \cdot \delta_{g_1 g_2},$$
$$S(f \cdot \delta_g) = (g^{-1} f) \cdot \delta_{g^{-1}}.$$

现在令 A 为以 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 为底代数的 Hopf 代数胚。接下来我们将回顾 [22] 中的构造: 与 A 相关联的谱 ´étale 李群胚 $\mathcal{G}_{sp}(A)$。注意，A 是以 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 为底代数的余代数，因此我们可以定义弱类群样元。若存在 $a' \in A$，使得 $\Delta(a) = a \otimes a'$ 且 $\Delta(S(a)) = S(a') \otimes S(a)$，则称弱类群样元 $a \in A$ 是 S-不变的。对于 étale 李群胚 $\mathscr{G}$ 的 Hopf 代数胚 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$，元素 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 是 S-不变的弱类群样元，当且仅当它具有形式 $f \circ \mathrm{t}|_W$，其中 W 是 $\mathscr{G}$ 的某个双截面，且 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{t}(W))$ （étale 李群胚 $\mathscr{G}$ 的双截面是 $\mathscr{G}$ 的一个开子集 W，它既是 t- 初等的，也是 s- 初等的）。

A 中目标映射为 $y \in M$ 的箭头，是指满足以下条件的元素 $g \in G(A_y)$: 存在一个 S-不变的弱类群样元 $a \in A$，使得 $g = a|_y$。A 中目标映射为 y 的所有箭头组成的集合记为 $\mathcal{G}_{sp}(A)_y$。A 的所有箭头构成 $\mathcal{E}_{sp}(A)$ 的一个子层 $\mathcal{G}_{sp}(A)$，其投影记为

$$\mathrm{t} = \pi_{sp}(A)|_{\mathcal{G}_{sp}(A)} : \mathcal{G}_{sp}(A) \to M.$$

为了描述 $\mathcal{G}_{sp}(A)$ 的源映射，我们首先回顾，每个 S-不变弱类群样元 $a \in A$ 都会诱导一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $T_a : \mathcal{C}_c^\infty(M) \to \mathcal{C}_c^\infty(M)$，其定义为$T_a(f) = \epsilon(S(fa))$。若 a在 M的开子集 U上归一化，则可以找到 M的一个开子集 U'以及唯一的微分同胚 $\tau_{U,\,a}\colon U' \to U$，使得

$T_a(\mathcal{C}_c^\infty(U)) \subset \mathcal{C}_c^\infty(U')$且$T_a(f) = f \circ \tau_{U,\ a}$对任意 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$都成立。此外，元素 $S(a)$ 是 S-不变的弱类群样元，在 U' 上归一化，并且有$\tau_{U',\ S(a)} = \tau_{U\,a}^{-1}$，。现将源映射 $\mathrm{s}\colon \mathcal{G}_{sp}(A) \to M$ 定义为

$$\mathrm{s}(a|_y) = \tau_{U,a}^{-1}(y),$$

其中， $a \in A$ 是一个 S不变的弱类群样元，在 U上归一化。现在选取元素 a、$b \in A$，它们分别表示一个箭头 $a|_y \in \mathcal{G}_{sp}(A)_y$和一个箭头$b|_x \in \mathcal{G}_{sp}(A)_x$，使得 $\mathrm{s}(a|_y) = x$。于是， $a|_y$ 与 $b|_x$ 的乘积定义为

$$a|_y b|_x = (ab)|_y.$$

点 $x \in M$ 处的单位元 $\mathrm{uni}(x) \in \mathcal{G}_{sp}(A)$ 定义为

$$\mathrm{uni}(x) = f|_x,$$

其中， $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M) \subset A$是芽为 $f|_x = 1 \in \mathcal{C}_c^\infty(M)_x$的任意函数。最后，源为 $\mathrm{s}(a|_y) = x$ 的箭头 $a|_y \in \mathcal{G}_{sp}(A)_y$ 的逆元定义为

$$a|_y^{-1} = S(a)|_x.$$

群胚 $\mathcal{G}_{sp}(A)$ 是一个以 M为底空间的 ′可分李群胚，称为 Hopf 代数胚 A的谱 ′可分李群胚。对于任意以 M 为底空间的 ′可分李群胚 $\mathscr{G}$，我们有一个李群胚的自然同构

$$\Phi_{\mathscr{G}}^{\mathrm{egr}} : \mathscr{G} \to \mathcal{G}_{sp}(\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})),$$

由.....定义

$$\Phi_{\mathscr{G}}^{\mathrm{egr}}(g) = (f \circ \mathrm{t}|_W)|_{t(g)},$$

其中， W 是 $\mathscr{G}$的任意一个包含 g 的双截面，而 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{t}(W))$ 是满足 $f|_{\mathrm{t}(g)} = 1 \in \mathcal{C}_c^\infty(M)_{\mathrm{t}(g)}$的任意函数。

Hopf 代数胚 A 同构于某个形如 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathscr{G})$ 的 Hopf 代数胚，当且仅当它是局部类群样的。所谓局部类群样，是指对每个 $y \in M$， $\mathcal{C}_c^\infty(M)_y$余代数 A_y都是一个自由的 $\mathcal{C}_c^\infty(M)_y$模，其基由点 y处 A 的箭头组成。

3. Transversal distributions of constant Dirac type

设 $\pi\colon M \times N \to M$是 M上的一个纤维为 N的平凡丛。秉承 Gelfand-Naimark 定理的思想，我们将为它赋予一个局部凸 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$模 Dirac $_\pi(M \times N)$，其由 $M \times N$上的常值狄拉克型分布构成，并证明其强$\mathcal{C}_c^\infty(M)$对偶同构于空间 $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$。一般而言，空间 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$是紧支撑横截分布空间 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的稠密子空间。然而，当 $N = \Gamma$ 是离散的时，空间 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times \Gamma)$ 是完备的，并且同构于 LF 空间 $\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$。

我们先给出平凡丛上横截分布的定义。

定义 3.1. 设 M 和 N 是第二可数流形，且 $M \times N$ 是以 M 为底空间、纤维为 N、投影为 $\pi\colon M \times N \to M$ 的平凡丛。紧支集 π-横截分布所成的空间为

$$\mathcal{E}'_\pi(M \times N) = Hom_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}(\mathcal{C}^\infty(M \times N), \mathcal{C}_c^\infty(M)).$$

换言之， $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 是从 $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$ 到 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 的连续 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-线性映射所成的空间，其中 $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$ 上的 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-模结构由下式给出:

$$(f \cdot F)(x, y) = f(x)F(x, y)$$

对于 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$、 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$ 和 $(x、\ y) \in M \times N$。空间 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 也是一个 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-模，其模结构由下式给出

$$(f \cdot T)(F) = T(f \cdot F)$$

对于 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$、 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$ 和 $T \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$。若在空间 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 上赋予有界子集上一致收敛的强拓扑，它便成为一个完备局部凸空间。

注 3.2. (1) 在 [15] 中已证明存在一个同构

$$\mathcal{E}'_\pi(M \times N) \cong \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(N)),$$

它使我们能够将 π-横截分布 $T \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 与光滑紧支撑族 $u = u(T) \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(N))$等同起来。我们将 u 在 $x \in M$ 处的值记为 $u_x \in \mathcal{E}'(N)$。若将 $\pi_N \colon M \times N \to N$ 记为到 N的投影，则分布 u_x 由公式给出

$$u_x(F) = T(F \circ \pi_N)(x)$$

对任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(N)$均成立。我们也可以将任意 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(N))$ 视为一个 π-横截分布 $T = T(u)$，只需定义

$$T(F)(x) = u_x(F \circ \iota_x)$$

对 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$成立。这里 $\iota_x \colon N \to \{x\} \times N$由 $\iota_x(y) = (x, y)$给出，其中 $x \in M$。特意使用不同的字母 T和 u，以稍作区分横截分布与纤维上的分布光滑族。

(2) 我们可以将一族 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(N))$ 的支集定义为 M 的子空间，也可以定义为 $M \times N$ 的子空间。u 的支集是 M 的子集 $\operatorname{supp}(u)$，定义为 $\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in M \mid u_x \neq 0\}}$。另一方面，$u$ 的总支集是 $M \times N$ 的子集 $\operatorname{supp}_{M\times N}(u)$，由所有满足以下条件的点 $(x, y) \in M \times N$ 组成：对于 $(x$ 的每个开邻域 $U, y)$，都存在 $F \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ 使得 $u(F) \neq 0$。对于 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(N))$，这两个支集都是紧的，并且有 $\pi(\operatorname{supp}_{M\times N}(u)) = \operatorname{supp}(u)$。我们也可以将 π-横截分布 $T \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的支集定义为 $M \times N$ 的子集 $\operatorname{supp}(T) = \operatorname{supp}_{M\times N}(u(T))$。关于支集的更多细节，请参阅 [9]。

(3) 若 $\dim(M) > 0$，则空间 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}(\mathcal{C}^\infty(M \times N), \mathcal{C}_c^\infty(M))$ 实际上与由 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-线性映射组成的空间 $\operatorname{Lin}_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}(\mathcal{C}^\infty(M \times N), \mathcal{C}_c^\infty(M))$ 相同，无需对连续性作任何假设（参见 [8]）。

我们来看一些重要的横截分布例子，这些例子将在全文中用到。

例 3.3. (1) 设 $\pi \colon M \times N \to M$ 是一个平凡丛，并对任意 $y \in N$，记 $M \times N$ 的水平子空间为 $E_y = M \times \{y\}$。对于任意 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$，我们定义一个 π-横截分布 $[\![E_y, f]\!] \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$：

$$[\![E_y, f]\!](F)(x) = f(x)F(x, y),$$

其中 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$。我们将 $[\![E_y, f]\!]$ 视为一个光滑的狄拉克分布族，其支集位于常值截面 E_y 上，并由函数 f 加权。特别地，我们有

$$[\![E_y, f]\!]_x = f(x)\delta_y.$$

(2) 令 $M = \mathbb{R}^l$、 $N = \mathbb{R}^k$，并令 $\pi \colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ 为到 $\mathbb{R}^l$ 的投影。对于 $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$，我们定义一个 π- 横截分布 $T_\phi \in \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$，如下所示

$$T_\phi(F)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \phi(x, y)F(x, y)\, dy$$

对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$。分布 T_ϕ 对应于 $\mathbb{R}^k$ 上由 $\mathbb{R}^l$ 参数化的光滑密度族，其明确表达式为

$$(T_\phi)_x = \phi(x, -)dV,$$

其中 dV 是 $\mathbb{R}^k$ 上的勒贝格测度。

映射 $\phi \mapsto T_\phi$ 定义了一个连续、单射的 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l)$-线性映射

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k).$$

注意， $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 上的 LF拓扑严格强于通过上述映射从 $\mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 诱导的子空间拓扑。特别地，若$M = \mathbb{R}^0$ 是一个点，上述构造使我们能够将空间 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ 视为空间 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$的子空间。

现在，对于流形 N，我们用 $N^\#$ 表示赋予离散拓扑的集合 N。于是投影 $\pi^\#$：$M \times N^\# \to M$ 是一个局部微分同胚。注意，流形 $M \times N^\#$ 是仿紧的，但当 $\dim(N) > 0$ 时不是第二可数的。

采用例2.2中的记号，我们有如下分解

$$\mathcal{C}_c^\infty(M \times N^\#) = \bigoplus_{y \in N^\#} \mathcal{C}_c^\infty(M \times \{y\}),$$

这使我们能够将每个元素 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times N^\#)$ 唯一地写成如下形式

$$a = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta_{y_i}$$

对于某些 f_1、……、 $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 以及某些 y_1、……、 $y_n \in N$。现在定义一个单射 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-线性映射 $\Psi_{M\times N}\colon \mathcal{C}_c^\infty(M \times N^\#) \to \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$，其定义如下

$$\Psi_{M\times N}\big(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta_{y_i}\big) = \sum_{i=1}^{n} [\![E_{y_i}, f_i]\!].$$

定义 3.4. 设 $M \times N$ 是一个平凡丛，其投影为 $\pi\colon M \times N \to M$。常狄拉克型 π-横截分布的空间为

$$\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N) = \Psi_{M\times N}(\mathcal{C}_c^\infty(M \times N^\#)) \subset \mathcal{E}'_\pi(M \times N).$$

空间 $\mathbf{Dirac}_\pi(M \times N)$ 配备了来自 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的诱导拓扑。

若 M 是一个点，我们用 $\mathbf{Dirac}(N)$ 表示由狄拉克分布张成的 $\mathcal{E}'(N)$ 子空间。

我们将在后文证明，若 $\dim(N) > 0$，$\mathbf{Dirac}_\pi(M \times N)$ 是 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的一个真稠密子空间。然而，当 $N = \Gamma$ 是离散的时，空间 $\mathbf{Dirac}_\pi(M \times \Gamma)$ 有如下描述。

命题3.5. 设 $M \times \Gamma$ 是第二可数流形M上的平凡丛，其纤维 Γ 可数且离散，丛投影为 $\pi\colon M \times \Gamma \to M$。

(a) 映射 $\Psi_{M\times\Gamma}\colon \mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma) \to \mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$ 是 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-模的同构，因此我们有狄拉克$_\pi(M \times \Gamma) = \mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$。(b) 映射 $\Psi_{M\times\Gamma}$ 是局部凸空间的同构，其中 $\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$ 上取 LF拓扑， $\mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$上取强拓扑。

证明. (a) 首先回顾一下，我们有一个$\mathcal{C}_c^\infty(M)$-模的同构 $\mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma) \cong \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(\Gamma))$。因此，只需证明每个 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M, \mathcal{E}'(\Gamma))$ 都可写成某个 $a \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$的形式 $u = \Psi_{M\times\Gamma}(a)$。

由于 Γ 是离散的，空间 $\mathcal{E}'(\Gamma)$ 同构于由狄拉克分布张成的一维子空间的局部凸直和 $\bigoplus_{y\in\Gamma}\mathbf{Span}(\delta_y)$。任意 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M$、 $\mathcal{E}'(\Gamma))$ 都具有紧支集，因此其像 $u(M) \subset \mathcal{E}'(\Gamma)$ 是紧的，进而有界。这意味着 $u(M)$ 属于某个有限维子空间 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Span}(\delta_{y_i}) \subset \mathcal{E}'(\Gamma)$，其中 y_1、……、 $y_n \in \Gamma$。因此，我们可以找到函数 f_1、……、 f_n： $M \to \mathbb{C}$，使得

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\delta_{y_i}$$

对于每个 $x \in M$。若用 $1_{y_i} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma)$ 表示在 $M \times \{y_i\}$ 上等于 1、在其他地方等于 0 的函数，则有 $f_i = u(1_{y_i}) \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$，因此

$$u = \Psi_{M\times\Gamma}\big(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta_{y_i}\big).$$

(b) 为了证明 $\Psi_{M\times\Gamma}$ 连续，首先在 $\mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$ 中选取零点的一个基本邻域 $K(B,V)$，其中 B 是 $\mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma)$ 的有界子集，而 V 是 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 中的零邻域。根据 $\mathcal{C}_c^\infty(M\times\Gamma)$ 上 LF-拓扑的定义，只需证明对于所有 $y \in \Gamma$ 以及 M 的所有紧子集 L， $\Psi_{M\times\Gamma}$ 在形如 $\mathcal{C}_c^\infty(L \times \{y\})$ 的子空间上的限制都是连续的。定义乘法映射 $\mu\colon \mathcal{C}_c^\infty(L \times \{y\}) \times \mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma) \to \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 为

$$\mu(f \cdot \delta_y, F)(x) = f(x)F(x,y)$$

对于 $f \cdot \delta_y \in \mathcal{C}_c^\infty(L \times \{y\})$ 和 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma)$。注意到 μ 连续，因此我们可以分别在 $\mathcal{C}_c^\infty(L \times \{y\})$ 和 $\mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma)$ 中找到零点的邻域 V_1 和 V_2，使得 $\mu(V_1,V_2) \subset V$。由于 $B \subset \mathcal{C}^\infty(M \times \Gamma)$ 有界，我们可以假设 $B \subset V_2$（如有必要，可用适当的逆因子对 V_1 和 V_2 重新缩放）。现在注意到

$$\mu(f \cdot \delta_y, F) = \Psi_{M\times\Gamma}(f \cdot \delta_y)(F).$$

对于 $f \cdot \delta_y \in V_1$和 $F \in B$，我们因此有 $\Psi_{M\times\Gamma}(f \cdot \delta_y)(F) = \mu(f \cdot \delta_y, F) \in V$，这表明 $\Psi_{M\times\Gamma}(V_1) \subset K(B,V)$。

最后，我们需要证明映射 $\Psi^{-1}_{M\times\Gamma}$ 是连续的。取一个在 $\mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$中收敛到零的网 $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$。于是，集合 $\{u_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ 是 $\mathcal{E}'_\pi(M \times \Gamma)$的有界子集，因此存在 $M \times \Gamma$ 的一个紧子集，包含所有 $\alpha \in A$对应的支集 $\operatorname{supp}(u_\alpha)$。特别地，我们可以找到 M 的一个紧子集 L 以及元素 $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \Gamma$，使得对每个 $\alpha \in A$，我们都可以写成

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^{n} [\![E_{y_i}, f_{\alpha,i}]\!]$$

对于某些 $f_{\alpha,\,1}, \ldots, f_{\alpha,\,n} \in \mathcal{C}_c^\infty(L)$。如果我们在 1_{y_i} 处计算 u_α（ 1_{y_i}的定义见证明的 (a) 部分），便可得出 $u_\alpha(1_{y_i}) = f_{\alpha,\,i}$ 在 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$中对 $1 \leqslant i \leqslant n$收敛到零，这意味着 $\Psi^{-1}_{M\times\Gamma}(u_\alpha) = \sum_{i=1}^n f_{\alpha,\,i} \cdot \delta_{y_i}$ 在$\mathcal{C}_c^\infty(M \times \Gamma)$中收敛到零。□

现在我们将转而研究纤维非离散情形下的空间 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$，并证明它是空间 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的稠密子空间。

为此，我们先回顾一些关于欧几里得空间上分布的卷积的事实。我们将使用 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 上的卷积乘积定义，该定义很容易推广到任意李群胚（见第 5 节）。对于任意$F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$，我们可以定义一个光滑映射 $\mathbb{R}^k \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$，其定义为 $y \to F\circ L_y$，其中左平移 $L_y\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 由 $L_y(y') = y+y'$ 对于 $y \in \mathbb{R}^k$ 定义。将此映射与任意分布 $w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$复合，便得到一个光滑映射 $\mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$，其定义为 $y \to w(F \circ L_y)$。卷积乘积 $*\colon \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$随后可由以下公式描述

$$(v * w)(F) = v(y \to w(F \circ L_y))$$

对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ 和 $v, w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$。卷积乘积是一个双线性、联合连续映射，并使 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 成为一个交换局部凸代数。

如例 3.3 所示，我们可以将 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ 视为$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$的子空间。我们可以明确地描述任意分布与光滑函数的卷积，如下所示。任取 $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ 并将其视为 $T_\rho \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$中的一个元素，为简便起见，我们将其记作 ρ。令 $\tilde\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ 定义为

$\tilde{\rho}(z) = \rho(-z)$。对于任意 $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$，我们都有 $v * \rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 是一个光滑函数，其定义为

$$(v * \rho)(y) = v(\tilde{\rho} \circ L_{-y})$$

对于 $y \in \mathbb{R}^k$。这表明 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ 实际上是 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 的一个理想。

现在我们将在横截分布的框架中运用这些结果。对于任意 $u = (u_x)_{x\in\mathbb{R}^l} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l、\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 和任意 $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$，我们逐点定义 $u * \rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l、\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$:

$$(u * \rho)_x = u_x * \rho.$$

$u * \rho$ 的光滑性由卷积乘积的双线性和连续性得出。此外还可以证明，$u * \rho$ 实际上具有 $u * \rho = T_\phi$ 的形式，其中光滑函数 $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 定义如下:

$$\phi(x, y) = u_x(\tilde{\rho} \circ L_{-y}).$$

接下来我们将证明，映射 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l、\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的像（由 $\phi \mapsto T_\phi$ 给出）是 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l、\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的一个稠密子空间。

为此，我们首先回顾 [9] 中对空间 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$的零邻域基的显式描述。记 $K_0 = \varnothing$，并令 $K_n = \{x \in \mathbb{R}^l \,|\, |x| \leqslant n\}$为以零为中心、半径为 $n \in \mathbb{N}$的球。取一个递增的自然数序列 $\mathsf{m} = (m_1, m_2, \ldots)$，一个递减的正实数序列 $\mathsf{e} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$，并令 $\mathsf{B} = (B_1, B_2, \ldots)$ 为 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$的一个递增有界子集序列。现在定义子集 $V_{\mathbf{B},\,\mathbf{m},\,\mathbf{e}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 如下:

$$V_{\mathbf{B},\mathbf{m},\mathbf{e}} = \{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)) \,|\, p_{B_n}((D^\alpha u)_x) < \epsilon_n \text{ for } x \in K_{n-1}^c \text{ and } |\alpha| \leqslant m_n\},$$

其中，$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 上的半范数 p_{B_n} 定义为

$$p_{B_n}(v) = \sup_{F \in B_n} |v(F)|$$

对 $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$成立。所有此类集合 $V_{\mathbf{B},\,\mathbf{m},\,\mathbf{e}}$构成的族，其中 B、m 和 e 如上所定义，构成 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$上的一个拓扑的零邻域基。对于该拓扑，自然的恒等映射 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)) \cong \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 成为局部凸向量空间的一个同构（见 [9]）。

命题 3.6。映射 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的像（由 $\phi \mapsto T_\phi$ 给出）是 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的稠密子空间。

证明。取一族单参数族 $(\rho_t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$，其中 $t \in (0,1)$，当 $t \to 0$ 时，该族收敛到狄拉克分布 $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$。

现在任取 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$，并定义 $u_t = u * \rho_t \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$，其中 $t \in (0,1)$。我们将证明当 $t \to 0$ 时，$u_t \to u$。为此，取 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 中任意一个形如 $V_{\mathbf{B},\,\mathbf{m},\,\mathbf{e}}$ 的零邻域基。由于 u 是紧支撑的，对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $t \in (0,1)$，我们有 $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{supp}(u_t) \subset K_n$。我们需要证明，当 t 足够小时，有 $u - u_t \in V_{\mathbf{B},\,\mathbf{m},\,\mathbf{e}}$；根据上述观察，这意味着对于所有 $x \in K_n$ 以及所有满足 $|\alpha| \leqslant m_n$ 的 α，都有 $p_{B_n}(D^\alpha(u - u_t)_x) < \epsilon_n$。等价地，若记 $\mathbb{D}(\epsilon_n) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \epsilon_n\}$，则对于所有这样的 x 和 α，我们有

$$D^\alpha(u - u_t)_x \in K(B_n, \mathbb{D}(\epsilon_n)) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k).$$

现在注意到集合 $A = \{(D^\alpha u)_x \,|\, x \in K_n, |\alpha| \leqslant m_n\}$ 是紧集，因此是 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 的有界子集。由于卷积 $*\colon \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 是双线性且连续的，我们可以在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 中找到零点的一个邻域 V，使得 $V * A \subset K(B_n, \mathbb{D}(\epsilon_n))$。由于 $\rho_t \to \delta_0$ 当 $t \to 0$ 时，我们有 $\delta_0 - \rho_t \in V$ 对于足够小的 t 成立，因此

$$D^\alpha(u - u_t)_x = (D^\alpha u)_x - (D^\alpha u * \rho_t)_x = (\delta_0 - \rho_t) * (D^\alpha u)_x \in K(B_n, \mathbb{D}(\epsilon_n)).$$

□

接下来，我们将借助黎曼积分的思想证明，任意形如 $T_\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的横截分布都可以由狄拉克 $_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 的元素逼近。

任取 $L > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，并将 $t_j = -\frac{L}{2} + \frac{jL}{n}$ 记为 $0 \leqslant j \leqslant n-1$。集合 $I = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}^k$ 因而是立方体 $D = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^k$ 的有限子集。若将体积为 vol $(D_t) = \left(\frac{L}{n}\right)^k$ 的立方体 $D_t = t + [0, \frac{L}{n}]^k$ 记作 $t \in I$，则可将 $D = \bigcup_{t\in I} D_t$ 表示为 n^k 个这样的小立方体的并。现在定义分布 $\Delta_n \in$ 狄拉克$(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 如下：

$$\Delta_n = \left(\frac{L}{n}\right)^k \sum_{t\in I} \delta_t.$$

利用微积分基本定理，可以证明对任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$，都有以下界

$$\left| \int_D F(y)\, dy - \Delta_n(F) \right| \leqslant \frac{kL^{k+1}}{n} p_{D,1}(F),$$

其中 $p_{D,\ 1}$ 衡量 F 梯度的大小，其定义与第 2.1 小节中的定义相同。这个界基本上说明，序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 中收敛到 $\int_D$。

命题 3.7。空间 Dirac$_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 是 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$的稠密子空间。

证明。根据命题 3.6，只需证明，对于每个$\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$，分布 $T_\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 都可以用 Dirac$_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$中的元素任意逼近。

任取 $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$，并假设对于某个如上所述的 $L > 0$，有 $\pi_{\mathbb{R}^k}$(supp $(\phi)) \subset D \subset \mathbb{R}^k$。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们通过公式定义一个 π-横截分布$\Delta_{\phi,n} \in$ Dirac$_\pi(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$

$$\Delta_{\phi,n}(F)(x) = \left(\frac{L}{n}\right)^k \sum_{t\in I} \phi(x,t)F(x,t).$$

我们将证明，当 $n \to \infty$时，$\Delta_{\phi,n} \to T_\phi$ 在 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 中成立。这意味着，对于形如$V_{\mathbf{B},\mathbf{m},\mathbf{e}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 的任意集合，当 $n \in \mathbb{N}$足够大时，都有$T_\phi - \Delta_{\phi,n} \in V_{\mathbf{B},\mathbf{m},\mathbf{e}}$。$T_\phi$ 和$\Delta_{\phi,n}$ 的支集都包含在某个 $j \in \mathbb{N}$的 π(supp$(\phi)) \subset K_j$ 中，因此我们需要证明

$$|D_x^\alpha(T_\phi(F) - \Delta_{\phi,n}(F))(x)| < \epsilon_j$$

对于 $x \in K_j$、$F \in B_j$ 和 $|\alpha| \leqslant m_j$。由于 B_j 是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$的有界子集，集合 $\tilde{B}_j = \phi B_j = \{\tilde{F} = \phi F \,|\, F \in B_j\}$ 在 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k)$ 中也是有界的，因此存在常数 $C < \infty$，使得 sup$\{p_{K_j\times D,\ m_j+1}(F) \,|\, F \in B_j\} < C$。对于 $F \in B_j$、$x \in K_j$ 和 $|\alpha| \leqslant m_j$，我们现在计算：

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha(T_\phi(F) - \Delta_{\phi,n}(F))(x)| &= \left| \int_D D_x^\alpha(\phi(x,y)F(x,y))\, dy - \left(\frac{L}{n}\right)^k \sum_{t\in I} D_x^\alpha(\phi(x,t)F(x,t)) \right|, \\
&= \left| \int_D (D_x^\alpha \tilde{F})(x,y)\, dy - \left(\frac{L}{n}\right)^k \sum_{t\in I} (D_x^\alpha \tilde{F})(x,t) \right|, \\
&\leqslant \frac{kL^{k+1}}{n} p_{K_j\times D, m_j+1}(\tilde{F}) < \frac{CkL^{k+1}}{n}.
\end{aligned}$$

我们得出结论：$\Delta_{\phi,\ n} \to T_\phi$ 在 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^l$ 中，$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k))$ 如 $n \to \infty$。 □

由此得到以下推论。

命题 3.8. 设 $M \times N$ 是 M 上以 N 为纤维、投影为 π 的平凡丛：$M \times N \to M$。空间 Dirac$_\pi(M \times N)$ 是 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 的稠密子空间。

证明. 每个横截分布 $T \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$ 都有紧支集，因此我们可以将其写成一个和

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n,$$

其中每个 $T_i \in \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$的支集都包含于形如 $U_i \times U'_i$的集合中，其中 $U_i \approx \mathbb{R}^l$是 M上的坐标图的某些定义域， $U'_i \approx \mathbb{R}^k$是 N上的坐标图的某些定义域。根据命题 3.7，对于每个零邻域 $V \subset \mathcal{E}'_\pi(M \times N)$，我们可以找到元素$u_i \in$狄拉克$_{\pi_i}(U_i \times U'_i) \subset$狄拉克$_\pi(M \times N)$，使得 $T_i - u_i \in \frac{1}{n}V$对 $1 \leqslant i \leqslant n$成立。若定义 $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \in$狄拉克$_\pi(M \times N)$，则有 $T - u \in V$。□

现在，为简便起见，我们记为:

$$\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)' = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty_c(M)}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N), \mathcal{C}^\infty_c(M)),$$
$$\mathcal{E}'_\pi(M \times N)' = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty_c(M)}(\mathcal{E}'_\pi(M \times N), \mathcal{C}^\infty_c(M))$$

$\mathcal{C}^\infty_c(M)$-模 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$和 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$的 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$-对偶。定义一个 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$-线性映射

$$\hat{}\colon \mathcal{C}^\infty(M \times N) \to \mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)',$$

by

$$\hat{F}(u) = u(F)$$

对于 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$和 $u \in$狄拉克$_\pi(M \times N)$.

定理 3.9. 设 $M \times N$ 是 M 上的一个平凡丛，其纤维为 N，丛投影为 $\pi\colon M \times N \to M$。映射 $\hat{}\colon \mathcal{C}^\infty(M \times N) \to$狄拉克$_\pi(M \times N)'$是局部凸 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$-模的同构。

证明. 我们首先证明映射$\hat{}\colon \mathcal{C}^\infty(M \times N) \to$狄拉克$_\pi(M \times N)'$是一个 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$-线性同构。由于狄拉克$_\pi(M \times N)$ 能够分离$\mathcal{C}^\infty(M \times N)$的点，因此它是单射。为证明其满射性，任取 $\phi \in$狄拉克$_\pi(M \times N)'$。由于狄拉克$_\pi(M \times N)$是 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$的稠密子空间，且 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$是完备的，因此存在唯一的连续延拓 $\overline{\phi}\colon \mathcal{E}'_\pi(M \times N) \to \mathcal{C}^\infty_c(M)$，将 ϕ延拓至 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$。由 [9] 中的定理 4.5 可知，存在某个 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$使得 $\overline{\phi} = \hat{F}$。

还需证明映射 $\hat{}\colon \mathcal{C}^\infty(M \times N) \to$狄拉克$_\pi(M \times N)'$是一个同胚。它是连续的，因为可以写成如下复合映射

$$\mathcal{C}^\infty(M \times N) \xrightarrow{\hat{}} \mathcal{E}'_\pi(M \times N)' \longrightarrow \mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)',$$

其中，左侧映射根据 [9] 中的定理 4.5 是连续的，而右侧映射是将泛函限制到 $\mathcal{E}'_\pi(M \times N)$到狄拉克$_\pi(M \times N)$所得的连续映射。

在证明的剩余部分，我们将证明上述映射是开映射。任取 $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$ 中的一个如下形式的零子基邻域

$$V_{L \times K, m, \epsilon} = \{F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N) \,|\, |D^\alpha_x D^\beta_y F(x, y)| < \epsilon \text{ for } (x, y) \in L \times K,\ |\alpha| + |\beta| \leqslant m\},$$

其中， $m \in \mathbb{N}$、 $\epsilon > 0$、 L 是 M 的一个紧子集，包含于某个坐标图 $U_M \approx \mathbb{R}^l$中； K 是 N 的一个紧子集，包含于某个坐标图 $U_N \approx \mathbb{R}^k$中。我们的目标是找出一个有界子集 $B \subset$狄拉克$_\pi(M \times N)$ 以及 V中的一个零邻域$\mathcal{C}^\infty_c(M)$，使得 $K(B、 V) \subset V_{L \times K,\ m,\ \epsilon}$。

对于 $n \in \mathbb{N}$、 $t \in (0、 \infty)$ 和 $y \in \mathbb{R}$，我们定义一个分布 $\Delta^n_t(y) \in$狄拉克$(\mathbb{R})$，如下:

$$\Delta^n_t(y) = \frac{1}{(2t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \delta_{y + (n-2k)t}.$$

利用泰勒定理可以证明，当 $t \to 0$时， $\Delta^n_t(y)$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ 中收敛到 $D^n_y|_y$，其中 $D^n_y|_y$ 是计算该点处 n 阶导数的分布

点 y。更一般地，记 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k)\in\mathbb{N}_0^k$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k$，并定义

$$\Delta_t^\beta(y)=\Delta_t^{\beta_1}(y_1)\otimes\Delta_t^{\beta_2}(y_2)\otimes\cdots\otimes\Delta_t^{\beta_k}(y_k)\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k).$$

再一次，我们有 $\Delta_t^\beta(y)\in$ 狄拉克$(\mathbb{R}^k)$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 中收敛到 $D_y^\beta|_y$，当 $t\to 0$时。利用 $V_{L\times K}$ 的定义中的 K 和 m $V_{L\times K,\ m,\ \epsilon}$，我们现在定义子集

$$B_{K,m}=\{\Delta_t^\beta(y)\,|\,y\in K,t\in(0,1),|\beta|\leqslant m\}\subset\mathrm{Dirac}(\mathbb{R}^k)\subset\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k).$$

利用泰勒定理的估计可以证明，$B_{K,\ m}$ 是 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$的有界子集。现在注意，双线性映射 $\mathcal{C}_c^\infty(M)\times\mathcal{E}'(N)\to\mathcal{C}_c^\infty(M,\mathcal{E}'(N))$ 由 $(f,v)\mapsto fv$ 给出，其中 $(fv)_x=f(x)v$, 是连续的。如果我们选取一个函数$\eta\in\mathcal{C}_c^\infty(U_M)\subset\mathcal{C}_c^\infty(M)$, 使得 $\eta\equiv 1$ 在 L 的某个邻域上成立，那么由上述观察可知

$$B=\eta B_{K,m}=\{\eta v\,|\,v\in B_{K,m}\}$$

是狄拉克$_\pi(M\times N)$的有界子集。最后，我们将零点在 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 中的一个开邻域V定义为

$$V=\{f\in\mathcal{C}_c^\infty(M)\,|\,|D_x^\alpha f(x)|<\tfrac{\epsilon}{2}\text{ for }x\in L,\,|\alpha|\leqslant m\}.$$

现在任取 $\phi=\hat{}F\in K(B,V)$，使得 $\phi(u)=u(F)\in V$ 对于 $u\in B$ 成立。若将 $u=\eta v=\eta\sum_{i=1}^n a_i\delta_{y_i}$ 写为某个 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ 以及某个 $y_1,\dots,y_n\in U_N$, 则对于 $x\in L$ 和 $|\alpha|\leqslant m$，有如下估计

$$|u(D_x^\alpha F)(x)|=|\eta(x)\sum_{i=1}^n a_i(D_x^\alpha F)(x,y_i)|=|D_x^\alpha(u(F))(x)|<\tfrac{\epsilon}{2}.$$

这里我们用到了这样一个事实：在 L 的某个邻域上 $\eta\equiv 1$，并用 $D_x^\alpha F$ 表示 F 关于水平方向的 α 阶偏导数。对于任意 $y\in K$ 以及任意满足 $|\beta|\leqslant m$ 的 β，网 $\Delta_t^\beta(y)\in B_{K,m}$ 在 $t\to 0$ 时于 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ 中收敛到 $D_y^\beta|_y$。若定义 $u_t=\eta\Delta_t^\beta(y)\in B$, 则对于 $x\in L$ 有如下估计

$$|D_y^\beta D_x^\alpha F(x,y)|=\lim_{t\to 0}|u_t(D_x^\alpha F)(x)|\leqslant\tfrac{\epsilon}{2}<\epsilon.$$

总而言之，对于 $(x,y)\in L\times K$ 和 $|\alpha|,|\beta|\leqslant m$，有 $|D_y^\beta D_x^\alpha F(x,y)|<\epsilon$，这 $\hat{}$ 意味着 $F\in V_{L\times K,m,\epsilon}$，进而 $\phi=F\in V_{L\times K,m,\epsilon_0}$。□

4. Spectral bundle of the coalgebra of transversal distributions of constant Dirac type

由定理 3.9 可知，$\mathcal{C}^\infty(M\times N)$ 同构于狄拉克$_\pi(M\times N)$的强$\mathcal{C}_c^\infty(M)$-对偶。现在我们将赋予狄拉克$_\pi(M\times N)$一个关于 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 的局部凸余代数结构，使得其强$\mathcal{C}_c^\infty(M)$-对偶狄拉克$_\pi(M\times N)'$是一个弗雷歇代数，并且同构于 $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$。

我们将使用同构 $\Psi_{M\times N}\colon\mathcal{C}_c^\infty(M\times N^\#)\to$狄拉克$_\pi(M\times N)$，将余代数结构从$\mathcal{C}_c^\infty(M\times N^\#)$传递到狄拉克$_\pi(M\times N)$。具体而言，采用例2.2中的记号，我们在狄拉克$_\pi(M\times N)$ 上定义一个关于 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 的余代数结构，其结构映射为：

$$\begin{aligned}&\Delta:\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\to\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N),\\&\epsilon:\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\to\mathcal{C}_c^\infty(M),\end{aligned}$$

具体表示为:

$$\Delta(\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!])=\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!]\otimes[\![E_{y_i},1_{f_i}]\!],$$
$$\epsilon(\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!])=\sum_{i=1}^{n}f_i.$$

由于 $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$ 同构于 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$ 的强对偶，我们可以用它在 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$ 上定义 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-内射拓扑。对于任意一对函数 F、$G\in\mathcal{C}^\infty(M\times N)$，我们定义一个 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-线性映射

$$F\otimes G:\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\to\mathcal{C}_c^\infty(M)$$

by

$$(F\otimes G)(\sum_{i=1}^{n}u_i'\otimes u_i'')=\sum_{i=1}^{n}u_i'(F)u_i''(G).$$

现在通过指定以下形式的零邻域基，来定义 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$ 上的 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-内射拓扑

$$K(A,B,V)=\{\tilde{u}\in\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)^{\otimes 2}\,|\,(F\otimes G)(\tilde{u})\in V,\ \text{for}\,F\in A,\,G\in B\},$$

其中 A、$B\subset\mathcal{C}^\infty(M\times N)\cong\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)'$ 是有界子集，且 V 是 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 中的一个零邻域。

命题 4.1. 三元组 $(\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$、$\Delta$、$\epsilon)$ 是 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上的余交换局部凸余代数，其含义是 Δ 和 ϵ 都是连续映射。

证明。将代数 $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$ 的单位元记为 1。于是有 $\epsilon=\hat{}1$，这表明 ϵ 是连续映射。

为说明 Δ 是连续的，我们任取 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)\otimes_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$ 中一个形如 $K(A,B,V)$ 的基本零邻域，如上所述。集合

$$A\cdot B=\{FG\,|\,F\in A,\,G\in B\}$$

于是是 $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$ 的有界子集。现在，对于任意 $u=\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!]\in K(A\cdot B,V)$、任意 $F\in A$ 以及任意 $G\in B$，我们有

$$\begin{aligned}(F\otimes G)(\Delta(u))(x)&=(F\otimes G)(\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!]\otimes[\![E_{y_i},1_{f_i}]\!])(x),\\&=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)1_{f_i}(x)F(x,y_i)G(x,y_i),\\&=u(FG)(x).\end{aligned}$$

这意味着 $\Delta(K(A\cdot B,V))\subset K(A,B,V)$，因此 Δ 是连续的。 □

由于 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)$ 是 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上的余交换有余单位余代数，其对偶 $\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)'$ 自然成为 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上以 ϵ 为单位元的交换代数，若我们定义

$$(\phi\cdot\psi)(u)=(\phi\otimes\psi)(\Delta(u))$$

对于 ϕ、$\psi\in$狄拉克$_\pi(M\times N)'$和 $u\in$狄拉克$_\pi(M\times N)$。$\phi\cdot\psi$的连续性由 $\phi\otimes\psi$ 和 Δ的连续性推出。

在狄拉克$_\pi(M\times N)$和狄拉克$_\pi(M\times N)'$上，我们可以自然地定义共轭如下。对于任意 $u\in$狄拉克$_\pi(M\times N)$，我们将共轭定义为

$$u=\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},f_i]\!]\Longrightarrow\overline{u}=\sum_{i=1}^{n}[\![E_{y_i},\overline{f_i}]\!].$$

利用上述公式以及 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 上的复共轭，我们现在对任意$\phi \in$狄拉克$_\pi(M \times N)'$定义元素 $\overline{\phi} \in$狄拉克$_\pi(M \times N)'$如下

$$\overline{\phi}(u) = \overline{\phi(\overline{u})}$$

对于 $u \in$ 狄拉克$_\pi(M \times N)$。现在，通过直接计算即可将定理 3.9 推广如下。

命题 4.2. 设 $M \times N$ 是定义在 M 上、纤维为 N 且丛投影为 π: $M \times N \to M$的平凡丛。映射 $\hat{}$: $\mathcal{C}^\infty(M \times N) \to$狄拉克$_\pi(M \times N)'$是局部凸代数的一个对合同构。

利用小节 2.4 中的定义和记号，现在我们为任意 $x \in M$ 定义局部 $\mathcal{C}_c^\infty(M)_x$-余代数

$$\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)_x = \mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)/I_x\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N).$$

由 [23]可知，空间 狄拉克$_\pi(M \times N)_x$是一个自由 $\mathcal{C}_c^\infty(M)_x$-模，由类群元集合 $G($狄拉克$_\pi(M \times N)_x)$ 生成。 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-余代数 狄拉克$_\pi(M \times N)$的谱层是层

$$\pi_{sp} : \mathcal{E}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)) \to M$$

以点 $x \in M$ 处的茎为

$$\mathcal{E}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N))_x = G(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)_x).$$

注意，层 $M \times N_\#$与 $\mathcal{E}_{sp}($狄拉克$_\pi(M \times N))$在 M上的层同构，同构映射为

$$(x, y) \mapsto [\![E_y, f]\!]|_x,$$

其中 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$是任意满足 $f|_x = 1 \in \mathcal{C}_c^\infty(M)_x$的函数。

现在定义狄拉克$_\pi(M \times N)'$的实部如下:

$$\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}} = \{\phi \in \mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)' \,|\, \overline{\phi} = \phi\}$$

并注意到，通过命题 4.2 中的同构，它对应于代数 $\mathcal{C}^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ 。这意味着狄拉克$_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}}$ 满足 [19], 中主定理的条件，因此可用于在空间 Spec(狄拉克$_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}}$)上定义光滑结构。此外，我们有一个自然双射

$$\Theta_{M\times N} : \mathcal{E}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}}),$$

定义为

$$\Theta_{M\times N}([\![E_y, f]\!]|_x)(\phi) = \phi([\![E_y, f]\!])(x)$$

对于 $\phi \in$ 狄拉克$_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}}$。现在我们将利用这个双射，把 Spec(狄拉克$_\pi(M \times N)'_{\mathbb{R}}$) 上的光滑结构传递到 $\mathcal{E}_{sp}($狄拉克$_\pi(M \times N))$上。

定义 4.3。设 π: $M \times N \to M$ 是 M 上的一个纤维为 N的平凡丛。谱丛

$$\mathcal{B}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N))$$

余代数 $\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)$的谱丛是集合 $\mathcal{E}_{sp}($狄拉克$_\pi(M \times N))$，赋予丛投影 π_{sp}: $\mathcal{B}_{sp}($狄拉克$_\pi(M \times N)) \to M$ 以及拓扑和光滑结构，使得 $\Theta_{M\times N}$ 是一个微分同胚。

我们将在下一个定理中证明， $\mathcal{B}_{sp}($狄拉克$_\pi(M \times N))$ 是 M 上的平凡丛，并且自然地同构于丛 $M \times N$。定义映射

$$\Phi^{\mathrm{bun}}_{M\times N} : M \times N \to \mathcal{B}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M \times N)),$$

by

$$\Phi^{\mathrm{bun}}_{M\times N}(x, y) = [\![E_y, f]\!]|_x.$$

定理 4.4. 设 $\pi\colon\ M\times N\to M$ 是 M 上、纤维为 N 的平凡丛。映射 $\Phi^{bun}_{M\times N}\colon M\times N\to\mathcal{B}_{sp}$(狄拉克$_\pi(M\times N)$) 是 M 上平凡丛的一个同构。

证明。记 $\mathsf{Sp}:\mathsf{Spec}(\mathcal{C}^\infty(M\times N,\mathbb{R}))\to\mathsf{Spec}$(狄拉克$_\pi(M\times N)'_{\mathbb{R}}$) 为由 $\hat{}\colon\ \mathcal{C}^\infty(M\times N,\mathbb{R})\to$狄拉克$_\pi(M\times N)'_{\mathbb{R}}$的逆元诱导的微分同胚。于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} M\times N & \xrightarrow{\Phi^{\mathrm{bun}}_{M\times N}} & \mathcal{B}_{sp}(\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)) \\ {\scriptstyle\Phi^{\mathrm{man}}_{M\times N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Theta_{M\times N}} \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{C}^\infty(M\times N,\mathbb{R})) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}} & \mathrm{Spec}(\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)'_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

由于 $\Phi^{\mathrm{man}}_{M\times N}$, $\Theta_{M\times N}$ 和 Sp 都是微分同胚，因此 $\Phi^{\mathrm{bun}}_{M\times N}$ 也是微分同胚。等式 $\pi_{sp}\circ\Phi^{\mathrm{bun}}_{M\times N}=\pi$ 由等式 $\pi_{sp}\circ\Phi^{\mathrm{shv}}_{M\times N\#}=\pi$ 得出。□

现在我们来看看在单个流形的情形下这一构造。

例 4.5。令 M 为单个点，并将流形 N 视为点上的平凡丛。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Dirac}_\pi(M\times N)=\mathrm{Dirac}(N)=\mathrm{Span}\{\delta_y\,|\,y\in N\}.$$

每个元素 $u\in$狄拉克(N) 都可以表示为有限和 $u=\sum_{i=1}^n\lambda_i\delta_{y_i}$，其中 λ_1、.....、 $\lambda_n\in\mathbb{C}$及 y_1、.....、 $y_n\in N$唯一确定。空间 狄拉克(N) 是$\mathbb{C}$ 上的余代数，其结构映射为:

$$\Delta(\sum_{i=1}^n\lambda_i\delta_{y_i})=\sum_{i=1}^n\lambda_i\delta_{y_i}\otimes\delta_{y_i},$$
$$\epsilon(\sum_{i=1}^n\lambda_i\delta_{y_i})=\sum_{i=1}^n\lambda_i.$$

狄拉克(N) 的类群元恰好是狄拉克分布，因此我们有

$$G(\mathrm{Dirac}(N))=\{\delta_y\,|\,y\in N\}.$$

谱层 $\mathcal{E}_{sp}$(狄拉克(N)) 是集合 G(狄拉克(N))，赋予离散拓扑，并投影到该点。映射 $\Theta_N\colon\ \mathcal{E}_{sp}$(狄拉克$(N)$) $\to\mathsf{Spec}$(狄拉克$(N)'_{\mathbb{R}})\hat{}$ 定义为 $\Theta_N(\delta_y)(\phi)=\phi(\delta_y)$，这意味着 $\Theta_N(\delta_y)=\delta_y$。$\mathcal{B}_{sp}$(狄拉克$(N)$) $=G$(狄拉克(N))上的拓扑由 Θ_N诱导，与 G(狄拉克(N))上由 $\mathcal{E}'(N)$诱导的子空间拓扑一致。最后，这个微分同胚

$$\Phi^{\mathrm{bun}}_N:N\to\mathcal{B}_{sp}(\mathrm{Dirac}(N))$$

由 $\Phi^{\mathrm{bun}}_N(y)=\delta_y$ 给出。

5. Locally convex bialgebroid of an action Lie groupoid

本节将为每个作用群胚 $M\rtimes H$ 指定一个带对极狄拉克 $(M\rtimes H)$ 的局部凸双代数胚，其基于 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$，并可由此重构李群胚 $M\rtimes H$ 。

设 M 是第二可数流形， H 是一个第二可数李群，它从右侧作用于 M 。若用 $H^\#$ 表示带离散拓扑的群 H ，则群 $H^\#$ 也从右侧作用于 M ，从而得到两个作用群胚 $M\rtimes H$ 和 $M\rtimes H^\#$。这两个群胚作为群胚是同构的，但若 dim $(H)>0$，则它们作为李群胚并不同构。

群胚 $M\rtimes H^\#$ 是 ´étale 的，因此我们可以构造它的 Hopf 代数胚

$$\mathcal{C}^\infty_c(M\rtimes H^\#)=\bigoplus_{h\in H^\#}\mathcal{C}^\infty_c(M\times\{h\}).$$

此外，由于 $M \rtimes H$ 是李群胚，我们还可以在空间上定义卷积乘积，如 [15], 中所定义

$$\mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_c^\infty(M)}(\mathcal{C}^\infty(M \times H), \mathcal{C}_c^\infty(M))$$

$M \rtimes H$上的 t-横截分布。它可以明确地描述如下。由 $g \in M \rtimes H$ 给出的左平移是微分同胚 $\mathrm{L}_g : \mathsf{t}^{-1}(\mathsf{s}(g)) \to \mathsf{t}^{-1}(\mathsf{t}(g))$，定义为 $\mathrm{L}_g(h) = gh$。对于任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times H)$ 和任意 $g \in M \rtimes H$，可得 $F \circ \mathrm{L}_g \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{t}^{-1}(\mathsf{s}(g)))$，并且可以证明，对于任意 $T \in \mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$，函数 $M \times H \to \mathbb{R}, g \mapsto T_{\mathsf{s}(g)}(F \circ \mathrm{L}_g)$ 是光滑的。对于任意 $T', T'' \in \mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$，卷积 $T' * T'' \in \mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$ 定义为

$$(T' * T'')(F)(x) = T' \left(g \mapsto T''_{\mathsf{s}(g)}(F \circ \mathrm{L}_g) \right)(x),$$

对于任意 $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times H)$ 和任意 $x \in M$。

使用例2.2中的记号，我们定义一个单射的 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$-线性映射 $\Psi_{M \rtimes H}$：$\mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes H^\#) \to \mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$，如下：

$$\Psi_{M \rtimes H}\Big(\sum_{i=1}^n f_i \cdot \delta_{h_i} \Big) = \sum_{i=1}^n [\![E_{h_i}, f_i]\!].$$

命题5.1. 映射 $\Psi_{M \rtimes H} : \mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes H^\#) \to \mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$ 是乘法的。

证明. 我们先证明 $\Psi_{M \rtimes H}$ 在基元素集合上是乘法的。取 f_1、$f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$、$h_1$、$h_2 \in H$，并分别记 $a_1 = f_1 \cdot \delta_{h_1}$为 $a_2 = f_2 \cdot \delta_{h_2}$。于是有：

$$\begin{aligned}
(\Psi_{M \rtimes H}(a_1) * \Psi_{M \rtimes H}(a_2))(F)(x) &= \Psi_{M \rtimes H}(a_1) \left((x,h) \mapsto [\![E_{h_2}, f_2]\!]_{xh}(F \circ \mathrm{L}_{(x,h)}) \right)(x), \\
&= [\![E_{h_1}, f_1]\!] \left((x,h) \mapsto f_2(xh) F(x, hh_2) \right)(x), \\
&= f_1(x) f_2(xh_1) F(x, h_1 h_2).
\end{aligned}$$

另一方面（见例 2.3），我们有 $a_1 * a_2 = (f_1(h_1 f_2)) \cdot \delta_{h_1 h_2}$，因此

$$\Psi_{M \rtimes H}(a_1 * a_2)(F)(x) = [\![E_{h_1 h_2}, f_1(h_1 f_2)]\!](F)(x) = f_1(x) f_2(xh_1) F(x, h_1 h_2).$$

映射 $\Psi_{M \rtimes H}$ 的乘法性现在可由 $\Psi_{M \rtimes H}$ 的线性以及两个卷积乘积的双线性推出。□

定义5.2. 设 $M \rtimes H$ 是第二可数李群 H 作用于第二可数流形 M 所产生的作用群胚，并设 $M \rtimes H^\#$ 是相应的étale 群胚。$M \rtimes H$ 的狄拉克双代数胚是空间

$$\mathrm{Dirac}(M \rtimes H) = \Psi_{M \rtimes H}(\mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes H^\#)).$$

狄拉克双代数胚 $\mathsf{Dirac}(M \rtimes H)$ 继承了 $\mathcal{C}_c^\infty(M \rtimes H^\#)$ 上的局部类群状霍普夫代数胚结构，其底代数为 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$。此外，根据命题 4.1，我们在 $\mathsf{Dirac}(M \rtimes H)$ 上得到局部凸余代数结构。最后，如 [15], 所示，$\mathcal{E}'_{\mathrm{t}}(M \rtimes H)$ 上的乘法，因而 $\mathsf{Dirac}(M \rtimes H)$ 上的乘法，分别连续。我们将这些观察总结为以下命题。

命题5.3. 任意作用李群胚$M \rtimes H$ 的狄拉克双代数胚 $\mathsf{Dirac}(M \rtimes H)$ 都是以 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$为底的局部凸双代数胚，并带有一个对极。

注记5.4。局部凸双代数胚是一种双代数胚 $(A, \Delta, \epsilon, \mu)$，它配备了局部凸结构，使得 Δ 和 ϵ 是连续映射，而 μ 分别连续。一般而言，我们不知道狄拉克 $(M \rtimes H)$ 上的对极 S 是否连续；若连续，它便是一个局部凸霍普夫代数胚。

例5.5。我们来看群 H 平凡作用于 M的情形。此时，相应的作用群胚 $M \rtimes H$ 就是 M 上的李群平凡丛，其纤维为 H，记作 $M \times H$。乘法和对极可在生成元上用以下公式表示：

$$[\![E_{h_1}, f_1]\!] * [\![E_{h_2}, f_2]\!] = [\![E_{h_1 h_2}, f_1 f_2]\!],$$
$$S([\![E_h, f]\!]) = [\![E_{h^{-1}}, f]\!].$$

在此情形下，$\mathcal{C}_c^\infty(M)$ 是 Dirac$(M \times H)$的中心子代数。此外，由等式 $\mathsf{t} \circ \mathsf{inv} = t$ 可知，S 是连续的。因此，我们看到 Dirac$(M \times H)$ 是定义在 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$上的局部凸 Hopf 代数。

现在任取一个作用李群胚 $M \rtimes H$。Dirac$(M \rtimes H)$ 的谱 ´etale 李群胚$\mathcal{G}_{sp}$(Dirac $(M \rtimes H)$) 同构于 ´etale 群胚$M \rtimes H^{\#}$。此外，由于 Dirac$(M \rtimes H)$ 是定义在 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$上的局部凸余代数，我们还有双射 $\Theta_{M \rtimes H}\colon \mathcal{G}_{sp}(\text{Dirac}(M \rtimes H)) \to \text{Spec}(\text{Dirac}(M \rtimes H))'_{\mathbb{R}})$。

De定义5.6. 狄拉克双代数胚 Dirac 的谱作用李群胚 ***poid***

$$\mathcal{AG}_{sp}(\mathrm{Dirac}(M \rtimes H))$$

是群胚 $\mathcal{G}_{sp}(\text{Dirac}(M \rtimes H))$，赋予使映射 $\Theta_{M \rtimes H}$ 成为微分同胚的光滑结构。

定义映射

$$\Phi^{\mathrm{agr}}_{M \rtimes H} : M \rtimes H \to \mathcal{AG}_{sp}(\mathrm{Dirac}(M \rtimes H)),$$

by

$$\Phi^{\mathrm{agr}}_{M \rtimes H}(x, h) = [\![E_h, f]\!]|_x,$$

其中 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 满足 $f|_x = 1 \in \mathcal{C}_c^\infty(M)_x$。

定理5.7. 设 $M \rtimes H$ 是第二可数李群 H 作用于第二可数流形 M所得到的作用群胚。映射

$$\Phi^{agr}_{M \rtimes H} : M \rtimes H \to \mathcal{AG}_{sp}(\mathrm{Dirac}(M \rtimes H))$$

是李群胚同构。

证明。由于 $M \rtimes H$ 与 $M \rtimes H^{\#}$ 同构，且 $\mathcal{AG}_{sp}$(狄拉克$(M \rtimes H)$) 与 $\mathcal{G}_{sp}$(狄拉克$(M \rtimes H)$)同构，因此映射 $\Phi^{\mathrm{agr}}_{M \rtimes H}$ 是群胚同构。根据定理 4.4，它也是一个微分同胚，这意味着它是李群胚同构。□

例 5.8。设 H 是一个李群，使得狄拉克(H) 是 $\mathbb{C}$上的局部凸 Hopf 代数。例 4.5 表明，$\mathcal{AG}_{sp}$(狄拉克$(H)) = \{\delta_h \mid h \in H\}$ 与 H自然微分同胚。$\mathcal{AG}_{sp}$(狄拉克(H))上的乘法映射和逆映射由狄拉克(H)上的乘法和对极诱导。具体而言，对于任意h、$h' \in H$，有：

$$\delta_h \delta_{h'} = \delta_h * \delta_{h'} = \delta_{hh'},$$
$$\delta_h^{-1} = S(\delta_h) = \delta_{h^{-1}}.$$

致谢：
谨向 O. Dragi˘cevi´c、F. Forstneri˘c、A. Kostenko 和 J. Mr˘cun 致谢，感谢他们在研究期间给予的支持。

References

[1] I. Androulidakis、O. Mohsen、R. Yuncken, 《奇异叶状结构上的施瓦茨核卷积代数》。 *J. Operator Theory* 85(2) (2021) 475–503. [2] I. Androulidakis、G. Skandalis, 《奇异叶状结构上的伪微分演算》。

J. Non- ( ) – . [3] *commut. Geom.* 5 2011 125 152
G. B¨ohm, *Hopf algebroids*。《代数手册》第 6 卷，爱思唯尔 (2009) 173–236. [4] A. Cannas da Silva、A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*。《伯克利数学讲义》10，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛 (1999)。[5] A. Connes, 《叶状结构与算子代数综述》。 *Proc. Sympos. Pure Math.* 38 (1982) 521–628.[6] E. van Erp、R. Yuncken, 《伪微分算子的群胚方法》。

J. Reine ( ) – . [7] *Angew. Math.* 756 2019 151 182
J. Horv´ath, *Topological Vector Spaces, Vol. I*，艾迪生-韦斯利数学丛书，艾迪生-韦斯利出版公司 XII，(1966)。[8] J. Kaliˇsnik, 《横截分布的自动连续性》。

Proc. Amer. Math. Soc. ( ) ( ) – . 150 12 2022 5243 5251
[9] J. Kaliˇsnik, 《横截分布空间的自反性》。https://arxiv.org/abs/2211.07257. [10] J. Kaliˇsnik、J. Mrˇcun, 《Hopf 代数胚的 Cartier-Gabriel-Kostant 结构定理》。

Adv. ( ) – . [11] *Math.* 232 2013 295 310
J. Kaliˇsnik、J. Mrˇcun, 《李群胚与横截分布的卷积双代数》。*J. Geom. Phys.* 180(104642) (2022). [12] L. El Kaoutit、P. Saracco, 《双模、完备霍普夫拟群胚与卷积代数的拓扑张量积》。 *Commun. Contemp. Math.* 21 6 (2019). [13] N. Kowalzig、H. Posthuma, 《Hopf 代数胚的循环理论》。 *J. Noncommut. Geom.* 5 (2011) 423–476. [14] A. Kriegl、P. W. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis*。《数学调查专著》53，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛 (1997)。[15] J.-M. Lescure、D. Manchon、S. Vassout, 《关于群胚上分布的卷积》。 *J. Noncommut. Geom.* 11 (2017) 757–789. [16] J.-H. Lu, 《Hopf 代数胚与量子群胚》。 *Internat. J. Math.* 7 (1996) 47–70. [17] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*。《伦敦数学会讲义丛书》213，剑桥大学出版社，剑桥 (2005)。[18] G. Maltsiniotis, 《非交换底空间上的量子群胚》。 *Comm. Algebra* 28 (2000) 3441–3501.[19] P. W. Michor、J. Vanˇzura, 《流形上光滑函数代数的刻画》。

Comment. Math. Univ. Carolin. 37 3 1996 519 521 ( ) – . [20] I. Moerdijk、J. Mrˇcun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*。《剑桥高等数学研究》91，剑桥大学出版社，剑桥 (2003)。[21] I. Moerdijk、J. Mrˇcun, 《李群胚、层与上同调》。

Poisson Geometry Defor- , , 伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，剑桥 (2005) 145–272. [22] J. Mrˇcun, 关于 323, *mation Quantisation and Group Representations*
´

J. Pure Appl. Algebra étale 群胚与 Hopf 代数胚之间的对偶。( ) – . [23] J. Mrˇcun, 《层余代数与对偶》。 *Topology Appl.* 154 (2007) 2795–2812.[24] M. E. Sweedler, 《单代数群》。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 44 (1974) 79–189.[25] M. Takeuchi, 《代数群的基底》。 *J. Math. Soc. Japan*, 29 (1977) 459–492. [26] F. Tr´eves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*。学术出版社，纽约-伦敦 (1967)。[27] P. Xu, 《量子群胚与变形量子化》。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 326 (1998)。

Department of Mathematics, University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia; Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia*Email address*: jure.kalisnik@fmf.uni-lj.si