arXiv:2303.11431v1 [math.LO] 20 Mar 2023

融入时间维度的效应代数逻辑

Ivan Chajda[1] 和 Helmut L¨anger[2]

摘要

效应代数是为描述效应的结构而引入的，即量子力学中的事件。它们是描述相应事件背后逻辑的偏代数。一个自然的问题是，如何在效应代数中引入逻辑联结词蕴涵。对于格序效应代数，已有多位作者解决了这一问题，其中也包括本文作者。我们重点研究不必是格序的效应代数，因为这类代数能够更好地描述量子物理系统中发生的事件。尽管效应代数只是偏代数，我们仍尝试寻找一种处处有定义的逻辑联结词蕴涵。不过，这种联结词可能是“非锐”或“不精确”的，因为对于给定的输入对，其输出未必是底层效应代数的元素，而可能是（彼此不可比较的）极大元的子集。我们引入这种蕴涵，并同时引入表示合取的伴随函子。随后，我们考察效应代数上所谓的时态算子。当然，这些算子在上述意义下也会是“非锐”的，但它们与蕴涵算子和合取算子之间存在某种关系。最后，对于给定的时态算子和给定的时间集 T，我们介绍两种构造时间偏好关系 R 于 T 之上的方法，使得给定的时态算子与时间框架(T, R)所诱导的算子要么可比较，要么等价。

美国数学学会学科分类：03B44, 03G12, 03G25, 06A11, 08A55

关键词：效应代数、蕴涵、伴随算子、伴随对、时态算子、时态逻辑、时间框架

1 引言

正如 D. J. Foulis 和 M. K. Bennett [14] 以及 R. Giuntini 和 H. Greuling[15], 所解释的，效应代数的引入是为了形式化量子力学中的效应。

[1]理学院，代数与几何系，帕拉茨基大学奥洛穆茨分校，17. listopadu 12, 771 46 Olomouc，捷克共和国 ´数学与地理信息学院，离散数学与几何研究所，维也纳工业大学，Wiedner Hauptstraße 8-10, 1040 维也纳，奥地利；以及理学院，代数与几何系，帕拉茨基大学奥洛穆茨分校，17. listopadu 12, 771 46 Olomouc，捷克共和国[2]谨此感谢奥地利科学基金（FWF）通过项目 I 4579-N（题为“正交模性的诸多方面”）对两位作者研究工作的资助；此外，第一作者还获得了 IGA 项目 PˇrF 2023 010 的资助。´Helmut L[3]anger（通讯作者），helmut.laenger@tuwien.ac.at[4]Ivan Chajda, ivan.chajda@upol.cz

这一形式化过程在这些论文中都有论述，A. Dvure˘censkij 和 S. Pulmannov´a 的专著 [13] 也对此作了详细介绍，因此这里无需重复。不过，仍有两个方面未在这些文献中得到探讨。

也就是说，如果将效应代数视为量子力学逻辑的一种形式化，那么自然会产生这样一个问题：由此可以导出哪些逻辑联结词？本文的目标之一是分析三种定义蕴涵和合取这两种逻辑联结词的可能方式，使它们构成伴随对。这一要求的重要性在于，建立伴随对后，相应的逻辑便具有推导规则肯定前件式。

第二个方面是，每个物理系统都是动态的，也就是说，系统中逻辑命题的真值会随时间变化。因此，这一点对于我们从效应代数导出的逻辑同样成立。由此，可以引入一个时间尺度（在相应的时态逻辑中通常称为时间框架），即一个时间集及其上的某种时间偏好关系，并在给定的时间坐标处对命题进行求值。正如 [10], 中所提到的，所谓时态算子可以成为进行此类时间分析的合适工具。我们将展示如何在基于效应代数的逻辑中构造这些时态算子，并描述其性质。不过，反过来，如果在所考虑的逻辑中给定了时间集和时态算子，我们也将展示如何构造时间偏好关系，使得给定的时态算子由该关系诱导。

2 预备知识

设偏序集 $\mathbf{P} = (P, \leq)$，并设 $A, B \subseteq P$。若它有底元，则记为 0。若 P 有顶元，则记为 1。若偏序集 P 同时具有 0 和 1，则称其为有界偏序集，此时记为 $\mathbf{P} = (P, \leq, 0, 1)$。

我们将 P 上的二元运算符理解为从 P^2 到 2^P 的映射，即它为 P 中的每一对元素 (x, y) 指派 P 的一个子集。为简洁起见，下文不区分单元素集 $\{a\}$ 及其唯一元素 a。

称偏序集 P 满足

- 升链条件（简称 ACC），即 P 中不存在无限升链，
- 降链条件（简称 DCC），即 P 中不存在无限降链。

注意，每个有限偏序集都满足升链条件和降链条件。此外，令 $\mathrm{Max}\, A$ 和 $\mathrm{Min}\, A$ 分别表示 A 中所有极大元和极小元组成的集合。若 P 满足升链条件，则对每个 $a \in A$，都存在某个 $b \in \mathrm{Max}\, A$，使得 $a \leq b$。这意味着，如果 A 非空，那么 $\mathrm{Max}\, A$ 也非空。降链条件和 $\mathrm{Min}\, A$ 也有相应的结论。

我们定义

$$A \leq_1 B \text{ if for every } a \in A \text{ there exists some } b \in B \text{ with } a \leq b,$$
$$A \leq_2 B \text{ if for every } b \in B \text{ there exists some } a \in A \text{ with } a \leq b,$$
$$A \sqsubseteq B \text{ if there exists some } a \in A \text{ and some } b \in B \text{ with } a \leq b,$$
$$A \approx_1 B \text{ if both } A \leq_1 B \text{ and } B \leq_1 A,$$
$$A \approx_2 B \text{ if both } A \leq_2 B \text{ and } B \leq_2 A.$$

对于每个集合 A，我们用 $\mathcal{P}_+A$ 表示其所有非空子集组成的集合。

3 效应代数

效应代数这一概念由 R. Giuntini 和 H. Greuling 于 1989 年以另一名称提出。D. J. Foulis 和 M. K. Bennett 首次使用“效应代数”这一名称 [14], ，例如另见 [13]。

回顾 [13]，效应代数是一个类型为 (2, 0, 0) 的偏代数 $(E, +, 0, 1)$，满足以下条件：

(E1) 若 $a, b \in E$ 和 $a + b$ 有定义，则 $b + a$ 也有定义，且二者相等，

(E2) 若 $a, b, c \in E$ 和 $a + b$ 以及 $(a + b) + c$ 有定义，则 $b + c$ 和 $a + (b + c)$ 以及 $(a + b) + c = a + (b + c)$ 也有定义，

(E3) 对每个 $a \in E$，存在唯一的 $b \in E$，使得 $a + b = 1$；下文中，这个元素 b 记作 a'，并称为 a 的补元，

(E4) 仅当 $a = 0$ 时，$a + 1$ 才有定义。

由 (E3) 可知，$'$ 是 E 上的一元运算，因此我们将效应代数写成 $(E, +, ', 0, 1)$ 的形式。

以下设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，$a, b \in E$ 且 $A, B \subseteq E$。
在 E 上，我们引入二元关系 $\leq$ 如下：

$$a \leq b \text{ if there exists some } c \in E \text{ with } a + c = b.$$

例如，由 [13], 可知，$(E, \leq, 0, 1)$ 是一个有界偏序集。若 $(E, \leq)$ 甚至是一个格，则称 E 为格效应代数。

例3.1. 若在 E 上定义了 $E := \{0, a, b, c, d, a', b', c', 1\}$、偏二元运算 $+$ 和一元运算 $'$：

$+$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
a	a	$-$	c'	b'	$-$	$-$	$-$	1	$-$
b	b	c'	d	a'	b'	$-$	1	$-$	$-$
c	c	b'	a'	$-$	$-$	1	$-$	$-$	$-$
d	d	$-$	b'	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$
c'	c'	$-$	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
b'	b'	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
a'	a'	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
1	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

x	x'
0	1
a	a'
b	b'
c	c'
d	d
c'	c
b'	b
a'	a
$1'$	0

则 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个非格效应代数，其诱导偏序集如图 1 所示:

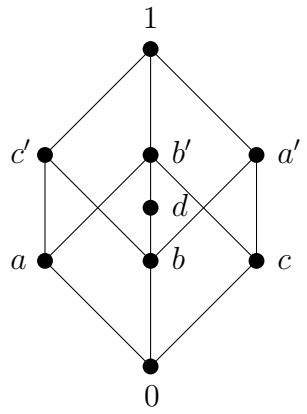

图 1

一个非格效应代数

若 $a \leq b'$，则称元素 a 和 b 彼此正交（简记为 $a \perp b$）。可以证明，当且仅当 $a \perp b$时， $a + b$ 有定义。我们在 E 上定义偏二元运算$\odot$，规定为 $a \odot b := (a' + b')'$。显然，当且仅当 $a' \perp b'$时，$a \odot b$ 有定义。

例 3.2. 与例 3.1 中的效应代数对应的 $\odot$ 的运算表如下:

$\odot$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	a
b	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	b
c	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	c
d	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	b	$-$	d
c'	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	a	b	c'
b'	$-$	$-$	0	$-$	b	a	d	c	b'
a'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	b	c	$-$	a'
1	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1

我们称

若对所有 $a \in A$ 和所有 $b \in B$，只要 $a + b$ 有定义，• $A + B$ 就有定义，

当且仅当对所有 $a \in A$ 和所有 $b \in B$， $a \odot b$ 有定义时，• $A \odot B$ 也有定义，

如果对所有 $a \in A$ 和所有 $b \in B$， $a \leq b$，则• $A \leq B$。

若 $A + B$ 有定义，则令 $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$。若 $A \odot B$ 有定义，则令 $A \odot B := \{a \odot b \mid a \in A, b \in B\}$。

以下结果众所周知，参见例如 [13] 或 [14]。

引理 3.3. 若 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，且 $a, b, c \in E$，则

(i) $(E, \leq, ', 0, 1)$ 是具有反单调对合的有界偏序集，(ii) $a + 0 = a \odot 1 = a$，(iii) $a + a' = 1$ 和 $a \odot a' = 0$，(iv) $a, b \leq a + b$ 和 $a \odot b \leq a, b$，(v) 若 $a \leq b$，则 $a = b \odot (a + b') = \big(b' + (a + b')'\big)'$，(vi) 若 $a \leq b$，则 $b = a + (a' \odot b) = a + (a + b')'$，(vii) 若 $a \leq b$ 且 $b + c$ 有定义，则 $a + c$ 也有定义，并且有 $a + c \leq b + c$，(viii) 若 $a \leq b$ 且 $a \odot c$ 有定义，则 $b \odot c$ 也有定义，并且有 $a \odot c \leq b \odot c$，(ix) 若 $a + b$ 和 $a + c$ 有定义且 $a + b = a + c$，则 $b = c$，(x) 若 $a \odot b$ 和 $a \odot c$ 有定义且 $a \odot b = a \odot c$，则 $b = c$。

4 效应代数中的逻辑联结词

如 [14], 所述，效应代数是非锐量子逻辑的一种模型。因此，问题是：这种逻辑中的逻辑联结词是什么？通常，部分运算 $+$ 和 $\odot$ 分别被视为析取和合取。然而，在任何逻辑中，最具效力的联结词都是蕴涵。借助这一联结词，可以通过某些推导规则（例如肯定前件式或替换规则）从给定命题推导出新命题。由此产生的问题是，如何在基于效应代数的量子逻辑中引入联结词蕴涵。对于格序效应代数，作者已在 [6]中解决了这一问题。现在我们将研究不一定是格序的效应代数。值得注意的是，本文作者与 R. Hala˘s 一起，为格效应代数中的联结词蕴涵以及非格情形推导出了 Gentzen系统，但其中讨论的蕴涵与我们现在要研究的蕴涵有本质区别。主要区别在于，我们现在将通过某种伴随性把蕴涵与合取联系起来。

设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数。在 E 上定义如下二元运算符：

$$b \to c := \mathrm{Max}\{x \in E \mid x \odot b \text{ is defined and } x \odot b \leq c\}$$

$(b, c \in E)$。这是基于 E 的逻辑中的“非锐”蕴涵。“非锐”这一称谓表明，$b \to c$ 的结果不必是 E 的一个元素（这与 [2] 和 [6] 中引入的蕴涵不同），而可以是 E的一个子集。$b \to c$ 的元素构成一个反链，这意味着我们无法根据它们的序关系偏好其中一个。此外，$b \to c$ 对所有 b、$c \in E$都有定义。

例 4.1。与例 3.1 中的效应代数相对应的 $\to$ “运算表”如下所示:

$\to$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	a'	1	a'	a'	a'	1	1	a'	1
b	b'	b'	1	b'	1	1	1	1	1
c	c'	c'	c'	1	c'	c'	1	1	1
d	d	d	b'	d	1	b'	1	b'	1
c'	c	b'	a'	c	a'	1	$\{a', b'\}$	a'	1
b'	b	c'	d	a'	b'	$\{d, c'\}$	1	$\{d, a'\}$	1
a'	a	a	c'	b'	c'	c'	$\{b', c'\}$	1	1
1	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1

下一个结果表明，我们的非锐蕴涵仍具有非经典逻辑中通常要求的一些重要性质。

引理 4.2. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是满足升链条件以及 $a, b, c \in E$ 的效应代数。则有:

(i) $a' \leq_1 a \to b$ 和 $a \to b \neq \emptyset$,
(ii) $a \to 0 = a'$ 和 $1 \to a = a$,
(iii) $a \to b = 1$ 当且仅当 $a \leq b$,
(iv) 若 $a \leq b$ 则 $c \to a \leq_1 c \to b$。

证明. 令 $A := \{x \in E \mid x \odot a$ 有定义且 $x \odot a \leq b\}$。

(i) $a' \leq_1 a \to b$ 由 $a' \in A$ 以及升链条件推出。 $a \to b \neq \emptyset$ 由$a' \leq_1 a \to b$推出。

(ii) 我们有

$$\begin{aligned} a \to 0 &= \mathrm{Max}\{x \in E \mid x \odot a \text{ is defined and } x \odot a \leq 0\} = \\ &= \mathrm{Max}\{x \in E \mid a' \leq x \text{ and } x' + a' = 1\} = \\ &= \mathrm{Max}\{x \in E \mid a' \leq x \text{ and } x = a'\} = a', \\ 1 \to a &= \mathrm{Max}\{x \in E \mid x \odot 1 \text{ is defined and } x \odot 1 \leq a\} = a. \end{aligned}$$

(iii) 以下各项等价:

$$\begin{aligned} &a \to b = 1, \\ &\mathrm{Max}\, A = 1, \\ &1 \in A, \\ &1 \odot a \text{ is defined and } 1 \odot a \leq b, \\ &a \leq b. \end{aligned}$$

(iv) 若 $a \leq b$ 则

$\{x \in E \mid x \odot c$ 有定义，且 $x \odot c \leq a\} \subseteq \{x \in E \mid x \odot c$ 有定义，并且 $x \odot c \leq b\}$

由此 $c \to a \leq_1 c \to b$。

□

首先，我们证明 $\odot$ 与 $\to$之间存在某种伴随性。

定理 4.3. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是满足升链条件的效应代数，且 $a, b, c \in E$，并假设 $a \odot b$ 有定义。那么

$$a \odot b \leq c \text{ if and only if } a \leq_1 b \to c.$$

证明. 若 $a \odot b \leq c$，则 $a \in \{x \in E \mid x \odot b$ 有定义，且 $x \odot b \leq c\}$，因此 $a \leq_1 b \to c$。反过来，若 $a \leq_1 b \to c$，则存在某个 $d \in b \to c$，使得 $a \leq d$，并且我们有 $d \odot b$ 有定义，且 $d \odot b \leq c$，因此根据引理 3.3，$a \odot b \leq d \odot b \leq c$。 □

定理 4.3 中展示的伴随性给出了该逻辑中一个重要的推导规则。具体而言，

$$a \to b \leq_1 a \to b$$

根据伴随性可推出

$$a \odot (a \to b) = (a \to b) \odot a \leq b$$

（前提是 $a \odot (a \to b)$ 有定义），这恰当地说明，b 的值不能小于 a 和 $a \to b$ 的合取值（前提是该合取有定义）；这正是肯定前件式这一推导规则。

引理 4.4。设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是满足升链条件的效应代数，且 $a, b \in E$。则以下结论成立：

(i) $(a \to b) \odot a$ 有定义，且 $(a \to b) \odot a \leq b$。

(ii) 若 $a \odot b$ 有定义，则 $a \leq_1 b \to (a \odot b)$。

证明。

(i) 根据 $a \to b$ 的定义，对于所有 $x \in a \to b$，都有 $x \odot a$ 有定义且 $x \odot a \leq b$。

(ii) 若 $a \odot b$ 有定义，则 $a \in \{x \in E \mid x \odot b$ 有定义，且 $x \odot b \leq a \odot b\}$，因此$a \leq_1 b \to (a \odot b)$。

□

因此，若 $(a \to b)\odot a$ 有定义，显然 $(a \to b)\odot a \leq a$，于是结合引理 4.4，我们得到

$$(a \to b) \odot a \leq_1 \operatorname{Max} L(a, b)$$

也就是可除性。

在效应代数 $(E, +, ', 0, 1)$ 中，还可以用另一种方式定义联结词蕴涵，即将其定义为以下偏二元运算：

$$b \rightsquigarrow c := b' + c$$

$(b, c \in E)$。显然，当且仅当 $c \leq b$ 时，$b \rightsquigarrow c$ 有定义。

例4.5。与例3.1中的效应代数相对应的运算表如下所示：

$\rightsquigarrow$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
a	a'	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
b	b'	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
c	c'	$-$	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
d	d	$-$	b'	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$
c'	c	b'	a'	$-$	$-$	1	$-$	$-$	$-$
b'	b	c'	d	a'	b'	$-$	1	$-$	$-$
a'	a	$-$	c'	b'	$-$	$-$	$-$	1	$-$
1	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1

这种蕴涵也是一种偏运算，它满足非经典逻辑中蕴涵的若干重要性质。

引理4.6。设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，且 $a, b, c \in E$。则以下结论成立：

(i) 若 $a \rightsquigarrow b$ 有定义，则 $a' \leq_1 a \rightsquigarrow b$,

(ii) $a \rightsquigarrow 0 = a'$ 和 $1 \rightsquigarrow a = a'$,

(iii) $a \rightsquigarrow b = 1$ 当且仅当 $a = b$,

(iv) 若 $a \leq b$ 和 $c \rightsquigarrow b$ 有定义，则 $c \rightsquigarrow a$ 有定义且 $c \rightsquigarrow a \leq c \rightsquigarrow b$.

证明。

(i) 若 $a \rightsquigarrow b$ 有定义，则 $a' \leq a' + b = a \rightsquigarrow b$。

(ii) 我们有 $a \rightsquigarrow 0 = a' + 0 = a'$ 和 $1 \rightsquigarrow a = 1' + a = a$。

(iii) 以下各项等价： $a \rightsquigarrow b = 1$； $a' + b = 1$； $a = b$。

(iv) 若 $a \leq b$ 和 $c \rightsquigarrow b$ 有定义，则 $c' + b$，因此根据引理 3.3， $c' + a$，即 $c \rightsquigarrow a$，有定义，并且

$$c \rightsquigarrow a = c' + a \leq c' + b = c \rightsquigarrow b.$$

□

下面的定理说明了 $\rightarrow$ 与 之间的关系。

定理 4.7. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，且 $a, b \in E$，并假设 $a \rightsquigarrow b$ 有定义。则 $a \rightarrow b = a \rightsquigarrow b$。

证明. 根据引理 3.3，我们有 $b \leq a$ 和 $(a \rightsquigarrow b) \odot a = b$。如果 $x \in E$, $x \odot a$ 有定义且 $x \odot a \leq b$，那么

$$x = a' + (x \odot a) \leq a' + b = a \rightsquigarrow b$$

根据引理 3.3。因此 $a \rightsquigarrow b = a \rightarrow b$。 □

此外，对于蕴涵，我们可以证明某种伴随性，不过这种伴随性仅是部分的。

定理 4.8. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，且 $a, b, c \in E$，并假设 $a \odot b$ 和 $b \rightsquigarrow c$ 有定义。则

$$a \odot b \leq c \text{ if and only if } a \leq b \rightsquigarrow c.$$

证明. 若 $a \odot b \leq c$，则根据引理 3.3，$a = b' + (a \odot b) \leq b' + c = b \rightsquigarrow c$。反之，若 $a \leq b \rightsquigarrow c$，则根据引理 3.3，$a \odot b \leq (b \rightsquigarrow c) \odot b = (b' + c) \odot b = c$。 □

在不一定是格序的效应代数 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 中，定义联结词蕴涵还有另一种可能，即

$$b \Rightarrow c := b' + \operatorname{Max} L(b, c)$$

$(b, c \in E$，参见 [2]$)$。若 E 满足升链条件，则 $b \Rightarrow c \neq \emptyset$。当然，这种蕴涵仍然是不精确的，因为 $a \Rightarrow b$ 的结果未必是相应效应代数中的一个元素，而可能是它的一个子集。另一方面，我们看到，$\Rightarrow$ 是定义在 E 上处处有定义的二元运算符。

例 4.9。与例 3.1 中的效应代数对应的 $\Rightarrow$ “运算表”如下所示:

$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	a'	1	a'	a'	a'	1	1	a'	1
b	b'	b'	1	b'	1	1	1	1	1
c	c'	c'	c'	1	c'	c'	1	1	1
d	d	d	b'	d	1	b'	1	b'	1
c'	c	b'	a'	c	a'	1	$\{a', b'\}$	a'	1
b'	b	c'	d	a'	b'	$\{d, c'\}$	1	$\{d, a'\}$	1
a'	a	a	c'	b'	c'	c'	$\{b', c'\}$	1	1
1	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1

Th蕴涵 $\Rightarrow$ 的性质十分自然，见下述结果 t.

引理 4.10. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是满足升链条件和 $a, b, c \in E$ 的效应代数。则有：

(i) $a' \leq a \Rightarrow b \neq \emptyset$, (ii)
$a \Rightarrow 0 = a'$ 和 $1 \Rightarrow a = a$, (iii)
$a \Rightarrow b = 1$ 当且仅当 $a \leq b$, (i
v) 若 $a \leq b$，则 $c \Rightarrow a \leq_1 c \Rightarrow b$。

证明。

(i) 根据引理 3.3, $a' \leq_1 a \Rightarrow b$ 由 $a \Rightarrow b$ 的定义可得。 $a \Rightarrow b \neq \emptyset$由升链条件可得。

(ii) 我们有 $a \Rightarrow 0 = a' +$极大元 $L(a, 0) = a'$且 $1 \Rightarrow a = 1' +$极大元 $L(1, a) = a$。

(iii) 以下各项等价： $a \Rightarrow b = 1$； $a' +$极大元 $L(a, b) = 1$；极大元 $L(a, b) = a$；$a \leq b$。

(iv) 若 $a \leq b$，则 $L(c, a) \subseteq L(c, b)$，因此极大元 $L(c, a) \leq_1$ 极大元 $L(c, b)$，由此

$$c \Rightarrow a = c' + \operatorname{Max} L(c, a) \leq_1 c' + \operatorname{Max} L(c, b) = c \Rightarrow b$$

根据引理 3.3。

□

现在我们可以比较这里讨论的三种蕴涵。

定理 4.11. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，且 $a, b \in E$。则下列结论成立：

(i) $a \Rightarrow b \leq_1 a \to b$。

(ii) 若 $a \rightsquigarrow b$ 有定义，则 $a \to b = a \Rightarrow b = a \rightsquigarrow b$,

证明。

(i) 设 $c \in a \Rightarrow b$。那么存在某个 $d \in$极大元 $L(a, b)$，使得 $a' + d = c$。现在 $c \odot a$有定义，并且根据引理 3.3，我们有 $c \odot a = (a' + d) \odot a = d \leq b$，因此 $c \leq_1 a \to b$。

(ii) 假设 $a \rightsquigarrow b$ 已定义。 $a \to b = a \rightsquigarrow b$ 已在定理 4.7 中证明。由于 $b \leq a$，我们有

$$a \Rightarrow b = a' + \operatorname{Max} L(a, b) = a' + b = a \rightsquigarrow b.$$

□

问题在于，如何在效应代数 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 上定义二元运算符 $\otimes$，使得 $\otimes$ 和 $\Rightarrow$ 构成一个伴随对。为此，我们定义

$$a \otimes b := \operatorname{Min} U(a, b') \odot b$$

$(a, b \in E)$。显然，

$$a \otimes b = (b \Rightarrow a')',$$
$$a \Rightarrow b = (b' \otimes a)'$$

对所有的 $a, b \in E$ 均成立。对于 E 的子集 A, B，我们定义

$$A \otimes B := \{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\},$$
$$A \Rightarrow B := \{a \Rightarrow b \mid a \in A, b \in B\}.$$

例 4.12。与例3.1中的效应代数相对应的 $\otimes$ 的"运算表"如下所示：

$\otimes$	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	b	a	$\{d, a'\}$	0	a
b	0	0	0	0	0	$\{a, b\}$	0	$\{b, c\}$	b
c	0	0	0	c	b	0	$\{c, d\}$	c	c
d	0	a	0	c	0	a	b	c	d
c'	0	a	b	0	d	c'	a	b	c'
b'	0	a	0	c	b	a	d	c	b'
a'	0	0	b	c	d	b	c	a'	a'
1	0	a	b	c	d	c'	b'	a'	1

类似于引理 4.10，我们得到

引理 4.13。设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是满足降链条件的效应代数，且 $a, b, c \in E$。则下述结论成立：

(i) $\emptyset \neq a \otimes b \leq b$, (ii)
$a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$, (iii)
$a \otimes b = 0$ 当且仅当 $a \perp b$,

(iv) 若 $a \leq b$，则 $a \otimes c \leq_2 b \otimes c$。

我们可以证明，算子 $\otimes$ 和 $\Rightarrow$ 也构成一个伴随对。

定理 4.14. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数，且 $a, b, c \in E$。则以下结论成立：

(i) $a \otimes b \sqsubseteq c$ 当且仅当 $a \sqsubseteq b \Rightarrow c$（伴随性），

(ii) $(a \Rightarrow b) \otimes a =$ 极大元 $L(a, b)$（可除性）。

证明。

(i) 升链条件 根据引理 3.3，以下任一陈述均蕴含其后的陈述 :

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &\sqsubseteq c,\\
\operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\sqsubseteq c,\\
\text{there exists some } d \in \operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\text{ with } d \leq c,\\
\text{there exists some } d \in \operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\text{ with } d \in L(b, c),\\
\text{there exists some } d \in \operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\text{ with } d \sqsubseteq \operatorname{Max} L(b, c),\\
\operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\sqsubseteq \operatorname{Max} L(b, c),\\
b' + \big(\operatorname{Min} U(a, b') \wedge b\big) &\sqsubseteq b' + \operatorname{Max} L(b, c),\\
a \leq \operatorname{Min} U(a, b') &\sqsubseteq b \Rightarrow c,\\
a &\sqsubseteq b \Rightarrow c,\\
a &\sqsubseteq b' + \operatorname{Max} L(b, c),\\
\text{there exists some } e \in b' + \operatorname{Max} L(b, c) &\text{ with } a \leq e,\\
\text{there exists some } e \in b' + \operatorname{Max} L(b, c) &\text{ with } e \in U(a, b'),\\
\text{there exists some } e \in b' + \operatorname{Max} L(b, c) &\text{ with } \operatorname{Min} U(a, b') \sqsubseteq e,\\
\operatorname{Min} U(a, b') &\sqsubseteq b' + \operatorname{Max} L(b, c),\\
\operatorname{Min} U(a, b') \odot b &\sqsubseteq \big(b' + \operatorname{Max} L(b, c)\big) \odot b,\\
a \otimes b &\sqsubseteq \operatorname{Max} L(b, c) \leq c,\\
a \otimes b &\sqsubseteq c.
\end{aligned}
$$

(ii) 由于 $\operatorname{Max} L(a, b) \leq a$，我们可以应用引理 3.3 的 (v) 来计算

$$
\begin{aligned}
(a \Rightarrow b) \otimes a &= \bigsqcup \{x \otimes a \mid x \in a \Rightarrow b\} =\\
&= \bigsqcup \{\operatorname{Min} U(x, a') \odot a \mid x \in a' + \operatorname{Max} L(a, b)\} =\\
&= \bigsqcup \{\operatorname{Min} U(a' + y, a') \odot a \mid y \in \operatorname{Max} L(a, b)\} =\\
&= \bigsqcup \{(a' + y) \odot a \mid y \in \operatorname{Max} L(a, b)\} = \bigsqcup \{\{y\} \mid y \in \operatorname{Max} L(a, b)\} =\\
&= \operatorname{Max} L(a, b).
\end{aligned}
$$

□

前面的结果可以推广到 E 的子集。这个更一般的结果将在下一节中使用。

引理 4.15. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是同时满足升链条件和降链条件的效应代数，且 $A, B, C \in \mathcal{P}_+ A$。那么 $A \otimes B \sqsubseteq C$ 等价于 $A \sqsubseteq B \Rightarrow C$（伴随性）

证明。首先假设 $A \otimes B \sqsubseteq C$。那么存在 $a \in A, b \in B, c \in C$ 和 $d \in a \otimes b$，使得 $d \leq c$。因此 $a \otimes b \sqsubseteq c$。由伴随性可知，这意味着 $a \sqsubseteq b \Rightarrow c$，即存在某个 $e \in b \Rightarrow c$，使得 $a \leq e$。由于 $a \in A$ 且 $e \in B \Rightarrow C$，我们得出结论 $A \sqsubseteq B \Rightarrow C$。反之，假设 $A \sqsubseteq B \Rightarrow C$。那么存在 $a \in A$, $b \in B, c \in C$ 和 $e \in b \Rightarrow c$，使得 $a \leq e$。因此 $a \sqsubseteq b \Rightarrow c$。由伴随性可知，这意味着 $a \otimes b \sqsubseteq c$，即存在某个 $f \in a \otimes b$，使得 $f \leq c$。由于 $f \in A \otimes B$ 且 $c \in C$，我们得出结论 $A \otimes B \sqsubseteq C$。

□

以下断言将在后文中发挥作用。

引理 4.16. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数，且 $p, q \in E^T$。则

(i) $p \le q \Rightarrow (p \otimes q)$,
(ii) $(p \Rightarrow q) \otimes p \le q$。

证明。

(i) 由于 $q' \le$极小元 $U(p, q')$，且由于 $r \in$极小元 $U(p, q') \odot q$推出 $r \le q$，进而极大元 $L(q, r) = r$，因此我们有

$$\begin{aligned} p \le \operatorname{Min} U(p, q') &= q' + \big(\operatorname{Min} U(p, q') \odot q\big) = \bigcup\{q' + r \mid r \in \operatorname{Min} U(p, q') \odot q\} = \\ &= \bigcup\{q' + \operatorname{Max} L(q, r) \mid r \in \operatorname{Min} U(p, q') \odot q\} = \\ &= \bigcup\{q \Rightarrow r \mid r \in \operatorname{Min} U(p, q') \odot q\} = q \Rightarrow \big(\operatorname{Min} U(p, q') \odot q\big) = q \Rightarrow (p \otimes q) \end{aligned}$$

根据引理 3.3

(ii) 由于 $r \in p' +$极大元 $L(p, q)$ 推出 $p' \le r$，进而极小元 $U(r, p') = r$，且由于极大元 $L(p, q) \le p$，我们有

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \otimes p &= \big(p' + \operatorname{Max} L(p, q)\big) \otimes p = \bigcup\{r \otimes p \mid r \in p' + \operatorname{Max} L(p, q)\} = \\ &= \bigcup\{\operatorname{Min} U(r, p') \odot p \mid r \in p' + \operatorname{Max} L(p, q)\} = \\ &= \bigcup\{r \odot p \mid r \in p' + \operatorname{Max} L(p, q)\} = \big(p' + \operatorname{Max} L(p, q)\big) \odot p = \\ &= \operatorname{Max} L(p, q) \le q \end{aligned}$$

根据引理 3.3。

□

5 时态算子

关于代数结构中时态算子的理论，请参阅专著 [10]。通常考虑时态算子 P、 F、 H、 G。其含义如下:

P . . .“曾经在某个时候是这样”，F . . .“将来在某个时候会是这样”，H . . .“一直以来都是这样”，G . . .“将来始终都会是这样”。

设有一个效应代数 $(E, +, ', 0, 1)$，以及一个非空时间集 T。我们将 E^T 中的元素 p 视为依赖时间的事件，即对于 $t \in T$，符号$p(t)$ 表示事件 p 在时间 t 的取值。容易看出，算子 P 和F 实际上分别是对 T 的过去线段和未来线段上的存在量词,

类似地， H 和 G 是对相应线段上的全称量词。由此显然可知，对于每个 $t \in T$ 和任意 $p \in E^T$，我们有

$$p(t) \leq P(p)(t) \text{ and } p(t) \leq F(p)(t),$$
$$H(p)(t) \leq p(t) \text{ and } G(p)(t) \leq p(t),$$

不久

$$H(p) \leq p \leq P(p) \text{ and } G(p) \leq p \leq F(p).$$

为了能够区分相对于时间集 T 而言的“过去”和“未来”，我们考虑一种所谓的时间偏好关系，即定义在 T 上的非空二元关系R，并将有序对 (T, R) 称为时间框架。对于 s, $t \in T$，若 $s\, R\, t$，我们称“s 在 t之前”或“t 在 s之后”。

本文中，为达到研究目的，我们只考虑所谓的串行关系（见 [10]），即满足如下条件的关系 R：对每个 $s \in T$，都存在某些 $r, t \in T$，使得 $r\, R\, s$ 且 $s\, R\, t$。
当然，若 R 是自反的，则它是串行的。通常， R 被认为是偏序关系或准序。

以下设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数。我们考虑 $\mathbf{E}$ 上所有依赖于时间的命题构成的集合 E^T。我们定义 $\mathbf{E}$ 上的时态算子 P, F, H 和 G 为以下从 $\mathcal{P}_+(E^T)$ 到 $(\mathcal{P}_+E)^T$ 的映射：

$$P(B)(s) := \operatorname{Min} U\big(\{q(t) \mid q \in B \text{ and } t\, R\, s\}\big),$$
$$F(B)(s) := \operatorname{Min} U\big(\{q(t) \mid q \in B \text{ and } s\, R\, t\}\big),$$
$$H(B)(s) := \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid q \in B \text{ and } t\, R\, s\}\big),$$
$$G(B)(s) := \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid q \in B \text{ and } s\, R\, t\}\big)$$

对于所有的 $B \in \mathcal{P}_+(E^T)$ 和所有的 $s \in T$。以这种方式定义的算子称为由 (T, R) 诱导。

P, F, H 和 G 的定义表明， P 与 H 之间以及 F 与 G 之间存在某种对偶性。因此，接下来我们只表述并证明关于 H 和 G 的一些结果。关于 P 和 F 的相应结果与之对偶；特别地，对于每个 $q \in E^T$，有 $P(q) = H(q')'$ 和 $F(q) = G(q')'$。

我们希望定义两个时态算子的复合。为此，需要以下所谓的变换函数 φ: $(\mathcal{P}_+A)^T \to \mathcal{P}_+(A^T)$，其定义如下

$$\varphi(x) := \{q \in A^T \mid q(t) \in x(t) \text{ for all } t \in T\} \text{ for all } x \in (\mathcal{P}_+A)^T.$$

现在定义

$$X * Y := X \circ \varphi \circ Y$$

对于所有时态算子 $X, Y \in \{P, F, H, G\}$。

例 5.1。考虑例3.1中的效应代数，其时间框架为 $(T, R) := (\{1, 2, 3\}, \leq)$，命题 p 和 q 定义如下：

t	1	2	3
$p(t)$	a'	c'	a'
$q(t)$	b'	b'	c'

于是我们有

t	1	2	3
$p(t)$	a'	c'	a'
$q(t)$	b'	b'	c'
$(p \otimes q)(t)$	c	a	b
$(q \otimes p)(t)$	c	a	b
$(p \Rightarrow q)(t)$	$\{b', c'\}$	$\{a', b'\}$	c'
$(q \Rightarrow p)(t)$	$\{d, a'\}$	$\{d, c'\}$	a'
$G(p)(t)$	b	b	a'
$G(q)(t)$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	c'
$\big(G(p) \otimes G(q)\big)(t)$	0	0	b
$\big(G(q) \otimes G(p)\big)(t)$	0	0	b
$\big(G(p) \Rightarrow G(q)\big)(t)$	$\{b', 1\}$	$\{b, 1\}$	c'
$\big(G(q) \Rightarrow G(p)\big)(t)$	$\{a', 1\}$	$\{a', 1\}$	a'
$G\big(\varphi(p \otimes q)\big)(t)$	0	0	b
$G\big(\varphi(q \otimes p)\big)(t)$	0	0	b
$G\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big)(t)$	b	b	c'
$G\big(\varphi(q \Rightarrow p)\big)(t)$	b	b	a'
$H(p)(t)$	a'	b	b
$H(q)(t)$	b'	b'	$\{a, b\}$
$\big(H(p) \otimes H(q)\big)(t)$	c	0	0
$\big(H(q) \otimes H(p)\big)(t)$	c	0	0
$\big(H(p) \Rightarrow H(q)\big)(t)$	$\{b', c'\}$	1	$\{b', 1\}$
$\big(H(q) \Rightarrow H(p)\big)(t)$	$\{d, a'\}$	d	$\{a', 1\}$
$H\big(\varphi(p \odot q)\big)(t)$	c	0	0
$H\big(\varphi(q \odot p)\big)(t)$	c	0	0
$H\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big)(t)$	$\{a, b\}$	b	b
$H\big(\varphi(q \Rightarrow p)\big)(t)$	b	b	b

引理 5.2。（参见 [7]）若 $(E, +, ', 0, 1)$ 是效应代数， T是时间集， $p \in A^T$和$x, y \in (\mathcal{P}_+A)^T$，则

(i) φ是单射，

(ii) 若对所有 $t \in T$， $z(t) := \{p(t)\}$，则 $\varphi(z) = \{p\}$，

(iii) 当且仅当 $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ 时，我们有 $x \leq y$。

对每个 $q \in E^T$，令 $q' \in E^T$ 由 $q'(t) := \big(q(t)\big)'$ 定义，其中对所有 $t \in T$ 均成立。对每个$B \in \mathcal{P}_+(E^T)$，令 $B' \in \mathcal{P}_+(E^T)$ 由 $B' := \{q' \mid q \in B\}$ 定义。对每个 $x \in (\mathcal{P}_+E)^T$，令 $x' \in (\mathcal{P}_+E)^T$ 由 $x'(t) := \big(x(t)\big)'$ 定义，其中对所有 $t \in T$ 均成立。

命题 5.3。（参见 [7]）若 $(E, +, ', 0, 1)$ 是同时满足升链条件和降链条件的效应代数，(T, R) 是一个时间框架， $x \in (\mathcal{P}_+E)^T$, $A, B \in \mathcal{P}_+(A^T)$ 满足 $A \leq B$和 $s \in T$和 φ 表示变换函数，则

(i)

$$P\big(\varphi(x)\big)(s) = \operatorname{Min} U\big(\bigcup\{x(t) \mid t\ R\ s\}\big),$$
$$F\big(\varphi(x)\big)(s) = \operatorname{Min} U\big(\bigcup\{x(t) \mid s\ R\ t\}\big),$$
$$H\big(\varphi(x)\big)(s) = \operatorname{Max} L\big(\bigcup\{x(t) \mid t\ R\ s\}\big),$$
$$G\big(\varphi(x)\big)(s) = \operatorname{Max} L\big(\bigcup\{x(t) \mid s\ R\ t\}\big),$$

(ii) $H(A) = P(A')'$ 和 $G(A) = F(A')'$,

(iii) $P(A) \leq_2 P(B)$, $F(A) \leq_2 F(B)$, $H(A) \leq_1 H(B)$ 和 $G(A) \leq_1 G(B)$,

(iv) $H(A) \leq P(A)$ 和 $G(A) \leq F(A)$】【。

注 5.4. 根据定理 5.7，可以看出在例 5.1 中我们有

$$G(p) \otimes G(q) = G\big(\varphi(p \otimes q)\big),$$
$$G(q) \otimes G(p) = G\big(\varphi(q \otimes p)\big),$$
$$H(p) \otimes H(q) = H\big(\varphi(p \otimes q)\big),$$
$$H(q) \otimes H(p) = H\big(\varphi(q \otimes p)\big),$$
$$G\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \leq G(p) \Rightarrow G(q),$$
$$G\big(\varphi(q \Rightarrow p)\big) \leq G(q) \Rightarrow G(p),$$
$$H\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \leq H(p) \Rightarrow H(q),$$
$$H\big(\varphi(q \Rightarrow p)\big) \leq H(q) \Rightarrow H(p).$$

以下概　　念在 [10] 中定义。其在效应代数中的具体表述如下。
动态效应代数是一个效应代数 $(E, +, ', 0, 1)$，并配有两个映射 H和 G 从 E^T 到 $(\mathcal{P}_+E)^T$，使得对所有 $p, q \in E^T$，以下条件成立:

（T1） $H(1) = G(1) = 1$,

(T2) 若 $p \leq q$，则 $H(p) \leq_1 H(q)$ 和 $G(p) \leq_1 G(q)$,

(T3) 若 $p + q$ 有定义，则 $H(p) + H(q)$ 和 $G(p) + G(q)$也有定义，并且

$$H(p) + H(q) \leq_1 H(p + q),$$
$$G(p) + G(q) \leq_1 G(p + q),$$

(T4) $p \leq_1 (G * P)(p)$ 和 $p \leq_1 (H * F)(p)$，其中 $P(p) = H(p')'$和 $F(p) = G(p')'$。

注 5.5. 若 $(A, \leq)$ 是同时满足升链条件和降链条件的偏序集，且 B, C是 A的子集，并且 $C \neq \emptyset$，则 $B \subseteq C$意味着 $B \leq_1$极大元 C和极小元$C \leq_2 B$。

接下来我们将证明，按照上述定义配备时态算子的效应代数确实是动态效应代数。

定理 5.6. 设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是同时满足升链条件和降链条件的效应代数，且 R 是 T 上的串行二元关系，并令 P, F, H 和 G 表示由 (T, R) 诱导的时态算子。则 $\mathbf{E}$ 连同 H 和 G 构成一个动态效应代数。

证明。我们只证明这些结论的“一半”，其余部分可类似地得出。由于对偶性，我们有 $P(p) = H(p')'$ 和 $F(p) = G(p')'$。令 $p, q \in E^T$ 和 $s \in T$。

(T1) $H(p)(s) =$ 极大元 $L(\{1 \mid t\ R\ s\}) = 1$。

(T2) 若 $p \le q$，则

$$H(p)(s) = \operatorname{Max} L\big(\{p(t) \mid t\ R\ s\}\big) \subseteq L\big(\{p(t) \mid t\ R\ s\}\big) \subseteq L\big(\{q(t) \mid t\ R\ s\}\big)$$

因此

$$H(p)(s) \le_1 \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid t\ R\ s\}\big) = H(q)(s)$$

根据注 5.5。

(T3) 假设 $p + q$ 有定义，则 $p \le q'$。令

$$\begin{aligned} a \in H(p)(s) &= \operatorname{Max} L\big(\{p(t) \mid t\ R\ s\}\big), \\ b \in H(q)(s) &= \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid t\ R\ s\}\big) \end{aligned}$$

并且 $u \in T$ 与 $u\ R\ s$。于是 $a \le p(u)$ 和 $b \le q(u)$，从而 $a \le p(u) \le q'(u) \le b'$，即 $a + b$ 有定义。这表明 $H(p) + H(q)$ 有定义。由引理 3.3 可知

$$H(p) + H(q) \subseteq L\big(\{p(t) + q(t) \mid t\ R\ s\}\big)$$

根据注 5.5，这意味着 $H(p) + H(q) \le_1 H(p + q)$。

(T4) 由于 $P(p) = H(p')'$，我们有

$$\begin{aligned} P(p)(s) &= \operatorname{Min} U(\{p(t) \mid t\ R\ s\}), \\ \varphi\big(P(p)\big) &= \{r \in A^T \mid r(u) \in P(p)(u) \text{ for all } u \in T\} = \\ &= \{r \in A^T \mid r(u) \in \operatorname{Min} U(\{p(t) \mid t\ R\ u\}) \text{ for all } u \in T\}, \\ (G * P)(p)(s) &= G\Big(\varphi\big(P(p)\big)\Big)(s) = \operatorname{Max} L(\{r(v) \mid r \in \varphi\big(P(p)\big) \text{ and } s\ R\ v\}) = \\ &= \operatorname{Max} L\big(\bigcup\{\operatorname{Min} U(\{p(t) \mid t\ R\ v\}) \mid s\ R\ v\}\big), \\ p(s) \in L\big(\bigcup\{U(\{p(t) \mid t\ R\ v\}) \mid s\ R\ v\}\big) &\subseteq \\ \subseteq L\big(\bigcup\{\operatorname{Min} U(\{p(t) \mid t\ R\ v\}) \mid s\ R\ v\}\big) & \end{aligned}$$

因此，根据注 5.5，$p(s) \le_1 (G * P)(p)(s)$。倒数第二行可以解释如下：如果 $a \in \bigcup\{U(\{p(t) \mid t\ R\ v\}) \mid s\ R\ v\}$，那么存在某个 $v \in T$，使得 $s\ R\ v$ 且 $a \in U(\{p(t) \mid t\ R\ v\})$。但这样一来，$p(s) \le a$。

□

问题在于，上文定义的时态算子是否与上一节定义的逻辑联结词相容。我们将证明，它们与 $\otimes$ 相容，当且仅当它们与 $\Rightarrow$ 相容。

定理 5.7. 设 $(E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数，(T, R) 是一个时间框架。则有以下结论：

(i) 设 $X, Y \in \{P, F, H, G\}$ 和 $Z \in \{H, G\}$，并假设

$$X\big(\varphi(x)\big) \otimes Y(q) \leq_1 Z\big(\varphi(x \otimes q)\big) \text{ for all } x \in (\mathcal{P}_+E)^T \text{ and all } q \in E^T.$$

Then

$$X\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \sqsubseteq Y(p) \Rightarrow Z(q) \text{ for all } p, q \in E^T.$$

(ii) 设 $X \in \{H, G\}$ 和 $Y, Z \in \{P, F, H, G\}$，并假设

$$X\big(\varphi(p \Rightarrow x)\big) \leq_1 Y(p) \Rightarrow Z\big(\varphi(x)\big) \text{ for all } p \in E^T \text{ and all } x \in (\mathcal{P}_+E)^T.$$

Then

$$X(p) \otimes Y(q) \sqsubseteq Z\big(\varphi(p \otimes q)\big) \text{ for all } p, q \in E^T.$$

证明. 设 $p, q \in E^T$ 和 $x \in (\mathcal{P}_+E)^T$。

(i) 由可除性可得

$$X\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \otimes Y(p) \leq_1 Z\Big(\varphi\big((p \Rightarrow q) \otimes p\big)\Big) = Z\Big(\varphi\big(\operatorname{Max} L(p, q)\big)\Big).$$

现在，极大元 $L(p, q) \leq q$ 意味着 $\varphi\big(\text{极大元 } L(p, q)\big) \leq q$，根据引理 5.2，因此

$$X\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \otimes Y(p) \leq_1 Z\Big(\varphi\big(\operatorname{Max} L(p, q)\big)\Big) \leq_1 Z(q)$$

根据命题 5.3 的 (iii)。因此 $X\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \otimes Y(p) \sqsubseteq Z(q)$。由伴随性和引理 4.15 可得

$$X\big(\varphi(p \Rightarrow q)\big) \sqsubseteq Y(p) \Rightarrow Z(q).$$

(ii) 由引理 4.16 的 (i) 和命题 5.3 的 (iii)，我们得到

$$X(p) \leq_1 X\Big(\varphi\big(q \Rightarrow (p \otimes q)\big)\Big) \leq_1 Y(q) \Rightarrow Z\big(\varphi(p \otimes q)\big)$$

因此

$$X(p) \sqsubseteq Y(q) \Rightarrow Z\big(\varphi(p \otimes q)\big).$$

由伴随性和引理 4.15 可得

$$X(p) \otimes Y(q) \sqsubseteq Z\big(\varphi(p \otimes q)\big).$$

□

6 适当偏好关系的构造

如前一节所示，给定一个时间框架 (T, R)，便可以在由效应代数导出的逻辑上定义时态算子 P, F, H和 G，从而得到一个动态效应代数，并且逻辑联结词 $\Rightarrow$ arrow 和 $\otimes$ 满足所需的性质。因此，研究基于效应代数的时态逻辑时，此处导出的时态算子可用于分析。不过，还有一个问题：反过来，给定时间集 T and 以及第4节所导出的逻辑中的时态算子，能否找到一个时间偏好关系，使其诱导的时态算子与给定的算子一致？在下面的定理中，我们将证明这是可行的：由给定的时态算子可以构造出 T 上的二元关系 R^*，使得时间框架 (T, R^*) 所诱导的时态算子分别关于拟序关系 $\leq_1$ 和 $\leq_2$ 与给定的时态算子相比较。此外，如果 P, F, H和 G 由某个时间框架诱导，那么新构造的时态算子甚至通过等价关系 $\approx_1$ 和$\approx_2$ 与给定的算子等价。

下文中，对于给定的效应代数 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$、给定的时间集 T以及 $\mathbf{E}$ 上给定的时态算子 P, F, H和 G，我们称满足以下条件的所有 $(s, t) \in T^2$ 的集合 R^*

$$H(p)(t) \leq p(s) \leq P(p)(t) \text{ and } G(p)(s) \leq p(t) \leq F(p)(s)$$

对于所有 $p \in E^T$，由时态算子 P, F, H和 G所诱导的关系 .

定理 6.1. 设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数， T为时间集， P, F, H和 G为 $\mathbf{E}$ 上的时态算子。此外，令 R^*表示由 P, F, H和 G所诱导的关系，并令 P^*, F^*, H^*和 G^*表示由 (T, R^*) 在 $\mathbf{E}$ 上诱导的时态算子。则

$$P^* \leq_2 P, F^* \leq_2 F, H \leq_1 H^* \text{ and } G \leq_1 G^*.$$

证明。注意到 R^* 是自反的，因而是串行的。设 $q \in E^T$ 和 $s \in T$。那么我们有

$$\begin{aligned}
q(t) &\leq P(q)(s) \text{ for all } t \in T \text{ with } t\ R^*\ s,\\
q(t) &\leq F(q)(s) \text{ for all } t \in T \text{ with } s\ R^*\ t,\\
H(q)(s) &\leq q(t) \text{ for all } t \in T \text{ with } t\ R^*\ s,\\
G(q)(s) &\leq q(t) \text{ for all } t \in T \text{ with } s\ R^*\ t
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
P(q)(s) &\subseteq U\big(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\big),\\
F(q)(s) &\subseteq U\big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}\big),\\
H(q)(s) &\subseteq L\big(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\big),\\
G(q)(s) &\subseteq L\big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}\big)
\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}
P^*(q)(s) &= \operatorname{Min} U\big(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\big) \leq_2 P(q)(s),\\
F^*(q)(s) &= \operatorname{Min} U\big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}\big) \leq_2 F(q)(s),\\
H(q)(s) &\leq_1 \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\big) = H^*(q)(s),\\
G(q)(s) &\leq_1 \operatorname{Max} L\big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}\big) = G^*(q)(s)
\end{aligned}$$

根据注 5.5。 □

之所以只能得到算子 P, F, H, G 与 P^*,F^*, H^*, G^* 之间的不等式，是因为给定的算子可能相当“奇特”，毕竟并未说明它们是如何构造的。因此，我们可以进一步探讨：若给定的算子 P, F, H 与 G 是由共享同一时间集 T 的某个时间框架 (T, R) 所诱导，那么上述算子之间会有怎样的关系。下面的结果表明，在这种情况下，我们确实可以得到等价关系。

定理 6.2. 设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个同时满足升链条件和降链条件的效应代数，(T, R) 是一个时间框架，P, F, H 与 G 是由 (T, R) 诱导的 $\mathbf{E}$ 上的时态算子。此外，设 R^* 表示由 P, F, H 所诱导的关系，而 G 与 P^*, F^*, H^* 和 G^* 是由 (T, R^*) 诱导的 $\mathbf{E}$ 上的时态算子。那么 $R \subseteq R^*$ 与

$$P^* \approx_2 P, F^* \approx_2 F, H^* \approx_1 H \ \textit{and}\ G^* \approx_2 G.$$

证明。设 $q \in E^T$ 和 $s \in T$。若 $t \in T$ 和 $s\ R\ t$，则

$$\begin{aligned}
P(q)(t) &= \operatorname{Min} U(\{q(u) \mid u\ R\ t\}) \geq q(s),\\
F(q)(s) &= \operatorname{Min} U(\{q(u) \mid s\ R\ u\}) \geq q(t),\\
H(q)(t) &= \operatorname{Max} L(\{q(u) \mid u\ R\ t\}) \leq q(s),\\
G(q)(s) &= \operatorname{Max} L(\{q(u) \mid s\ R\ u\}) \leq q(t).
\end{aligned}$$

这表明 $R \subseteq R^*$。现在

$$\begin{aligned}
P^*(q)(s) &= \operatorname{Min} U(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}) \subseteq U(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}) \subseteq U(\{q(t) \mid t\ R\ s\}),\\
F^*(q)(s) &= \operatorname{Min} U(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}) \subseteq U(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}) \subseteq U(\{q(t) \mid s\ R\ t\}),\\
H^*(q)(s) &= \operatorname{Max} L(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}) \subseteq L(\{q(t) \mid t\ R^*\ s\}) \subseteq L(\{q(t) \mid t\ R\ s\}),\\
G^*(q)(s) &= \operatorname{Max} L(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}) \subseteq L(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\}) \subseteq L(\{q(t) \mid s\ R\ t\})
\end{aligned}$$

并因此

$$\begin{aligned}
P(q)(s) &= \operatorname{Min} U(\{q(t) \mid t\ R\ s\}) \leq_2 P^*(q)(s),\\
F(q)(s) &= \operatorname{Min} U(\{q(t) \mid s\ R\ t\}) \leq_2 F^*(q)(s),\\
H^*(q)(s) &\leq_1 \operatorname{Max} L(\{q(t) \mid t\ R\ s\}) = H(q)(s),\\
G^*(q)(s) &\leq_1 \operatorname{Max} L(\{q(t) \mid s\ R\ t\}) = G(q)(s)
\end{aligned}$$

根据注 5.5。这表明

$$\begin{aligned}
P &\leq_2 P^*,\\
F &\leq_2 F^*,\\
H^* &\leq_1 H,\\
G^* &\leq_1 G.
\end{aligned}$$

其余部分由定理 6.1 得出。 □

我们可以探讨，是否存在时间集 T 上时间偏好关系 R 的另一种构造，使得给定的时态算子与

由 (T, R) 诱导的时态算子之间也能像定理 6.2 中那样建立等价关系。我们将证明，只要时间集 T 同时向过去和未来方向扩展，并相应地扩展事件，这便是可能的。我们的构造如下。

首先，我们引入一些记号。

设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，T 是一个时间集，且 P, F, H 和 G 是 $\mathbf{E}$ 上的时态算子。令

$$\bar{T} := (T \times \{1\}) \cup T \cup (T \times \{2\}),$$

令 R^* 表示由 P, F, H 和 G 诱导的关系，并令

$$\bar{R} := \{\big((t,1),t\big) \mid t \in T\} \cup R^* \cup \{\big(t,(t,2)\big) \mid t \in T\}.$$

此外，令 $\bar{P}$, $\bar{F}$, $\bar{H}$ 和 $\bar{G}$ 表示由 (T, R) 诱导的时态算子。最后，对每个 $p \in E^T$，令 $\bar{p}, \hat{p} \in E^{\bar{T}}$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{p}\big((t,1)\big) &\in P(p)(t), \\ \bar{p}(t) &:= p(t), \\ \bar{p}\big((t,2)\big) &\in F(p)(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}\big((t,1)\big) &\in H(p)(t), \\ \hat{p}(t) &:= p(t), \\ \hat{p}\big((t,2)\big) &\in G(p)(t) \end{aligned}$$

对所有 $t \in T$。

定理 6.3. 设 $\mathbf{E} = (E, +, ', 0, 1)$ 是一个效应代数，T 是一个时间集，P, F, H 和 G 是时态算子，且 T, R^*, $\bar{R}$, $\bar{P}$, $\bar{F}$, $\bar{H}$, $\bar{G}$, $\bar{p}$ 和 $\hat{p}$ 如前所定义。则

$$\bar{P}(\bar{p})|T \subseteq P(p), \bar{F}(\bar{p})|T \subseteq F(p), \bar{H}(\hat{p})|T \subseteq H(p) \text{ and } \bar{G}(\hat{p})|T \subseteq G(p)$$

对所有 $p \in E^T$。如果对所有 $p \in E^T$ 和所有 $t \in T$，$P(p)(t)$、$F(p)(t)$、$H(p)(t)$ 和 $G(p)(t)$ 都是单元素集，那么

$$\bar{P}(\bar{p})|T = P(p), \bar{F}(\bar{p})|T = F(p), \bar{H}(\hat{p})|T = H(p) \text{ and } \bar{G}(\hat{p})|T = G(p)$$

对所有 $p \in E^T$。

证明。令 $q \in E^T$ $s \in T$ $H\ q\ s \leq q\ t \leq P\ q\ s$ $q(\ s\ 1\ ) \leq$ 和。
$q\ t \leq \bar{q}(\ s\ 1\ )$ $t \in T$ $t\ R^*\ s$ $G\ q\ s \leq q\ t \leq F\ q\ s$
则 ( )( ) ( ) ( )( ), 因此对于所有满足 的 , ˆ (,) ( ) (,), 且 ( )( ) ( ) ( )( ), 因此

$\hat{q}((s,2)) \le q(t) \le \bar{q}((s,2))$，对于所有满足 $s\ R^*\ t$ 的 $t \in T$，因此

$$\begin{aligned}
\bar{P}(\bar{q})(s) &= \operatorname{Min} U\big(\{\bar{q}(\bar{t} \mid \bar{t}\ \bar{R}\ s\} = \operatorname{Min} U\Big(\{\bar{q}\big((s,1)\big)\} \cup \{\bar{q}(t) \mid t\ R^*\ s\}\Big) = \\
&= \operatorname{Min} U\Big(\{\bar{q}\big((s,1)\big)\} \cup \{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\Big) = \{\bar{q}\big((s,1)\big)\} \subseteq P(q)(s), \\
\bar{F}(\bar{q})(s) &= \operatorname{Min} U\big(\{\bar{q}(\bar{t}) \mid s\ \bar{R}\ \bar{t}\} = \operatorname{Min} U\Big(\{\bar{q}(t) \mid s\ R^*\ t\} \cup \{\bar{q}\big((s,2)\big)\}\Big) = \\
&= \operatorname{Min} U\Big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\} \cup \{\bar{q}\big((s,2)\big)\}\Big) = \{\bar{q}\big((s,2)\big)\} \subseteq F(q)(s), \\
\bar{H}(\hat{q})(s) &= \operatorname{Max} L\big(\{\hat{q}(\bar{t}) \mid \bar{t}\ \bar{R}\ s\} = \operatorname{Max} L\Big(\{\hat{q}\big((s,1)\big)\} \cup \{\hat{q}(t) \mid t\ R^*\ s\}\Big) = \\
&= \operatorname{Max} L\Big(\{\hat{q}\big((s,1)\big)\} \cup \{q(t) \mid t\ R^*\ s\}\Big) = \{\hat{q}\big((s,1)\big)\} \subseteq H(q)(s), \\
\bar{G}(\hat{q})(s) &= \operatorname{Max} L\big(\{\hat{q}(\bar{t}) \mid s\ \bar{R}\ \bar{t}\} = \operatorname{Max} L\Big(\{\hat{q}(t) \mid s\ R^*\ t\} \cup \{\hat{q}\big((s,2)\big)\}\Big) = \\
&= \operatorname{Max} L\Big(\{q(t) \mid s\ R^*\ t\} \cup \{\hat{q}\big((s,2)\big)\}\Big) = \{\hat{q}\big((s,2)\big)\} \subseteq G(q)(s).
\end{aligned}$$

如果 $P(q)(s)$ 是单元素集，那么根据 $\bar{q}\big((s,1)\big) \in P(q)(s)$，我们有

$$\bar{P}(\bar{q})(s) = \{\bar{q}\big((s,1)\big)\} = P(q)(s),$$

即 $P(\bar{q})|T = P(q)$。对于 F、H 和 G，也有类似的等式。 □

参考文献

[1] Botur M., Chajda I., Halaš R., Kolařík M.: 《基本代数上的时态算子》。国际理论物理学杂志 50，3737–3749（2011）[2] Chajda I., Halaš R., Länger H.: 《效应代数诱导的逻辑》。Soft Comput. 24，14275–14286（2020）[3] Chajda I., Kolařík M.: 《动态效应代数》。Math. Slovaca 62，379–388（2012）[4] Chajda I., Länger H.: 《数值事件空间上的时态算子》。国际理论物理学杂志 53，3456–3464（2014）[5] Chajda I., Länger H.: 《效应代数中蕴涵的性质》。Math. Slovaca 71，523–534（2021）[6] Chajda I., Länger H.: 《效应代数中的非精确剩余》。J. Mult.-Val. Log. Soft Comput. 38，57–79（2022）[7] Chajda I., Länger H.: 《基于有限正交模偏序集的时态逻辑》。国际理论物理学杂志（即将发表）。http://arxiv.org/abs/2208.09946[8] Chajda I., Länger H.: 《有限高度正交模偏序集中的算子剩余》。Fuzzy Sets Systems（已投稿）。http://arxiv.org/abs/2204.10794[9] Chajda I., Paseka J.: 《动态效应代数及其表示》。Soft Comput. 16，1733–1741（2012）

[10] Chajda I., Paseka J.：《时态算子的代数方法》。Heldermann，莱姆戈（2015）。ISBN 978-3-88538-235-5。[11] Chajda I., Paseka J.：《作为模态逻辑和时态逻辑公理化的动态序代数》。国际理论物理学杂志 54，4327–4340（2015）[12] Chajda I., Paseka J.：《赋予自动机的动态逻辑》。国际理论物理学杂志 56，3794–3806（2017）[13] Dvurečenskij A., Pulmannová S.：《量子结构新趋势》。Kluwer，Dordrecht（2000）。ISBN 0-7923-6471-6[14] Foulis D.J., Bennett M.K.：《效应代数与非锐量子逻辑》。《基础物理学》24，1331–1352（1994）[15] Giuntini R., Greuling H.：《迈向非锐性质的形式语言》。《基础物理学》19，931–945（1989）