arXiv:2303.11464v1 [math.CO] 20 Mar 2023

第0卷，第0期，1–43，2023

应用组合学中的七个开放问题

Sinan G. Aksoy, Ryan Bennink, Yuzhou Chen, José Frías, YuliaR. Gel,
Bill Kay, Uwe Naumann, Carlos Ortiz Marrero,Anthony V. Petyuk,
Sandip Roy, Ignacio Segovia-Dominguez,Nate Veldt, and Stephen J. Young

我们介绍并讨论应用组合学中的七个不同开放问题。本汇编涉及的应用领域包括量子计算、算法微分、拓扑数据分析、迭代方法、超图割算法和电力系统。

AMS 2000 subject classifications: 主要分类号05C90；次要分类号65Y04, 65D25, 05C65, 81P68, 62R40, 55N31, 65F10。
Keywords and phrases: 开放问题、应用组合学、量子计算、量子电路、超图、算法微分、有向无环图、零强制、拓扑数据分析、Dowker复形、异步更新、迭代方法。

虽然组合数学的发展一直受到应用问题的推动，但近年来，应用组合学的范围和具体性都大幅提升。组合方法正以具体而多样的方式解决各个科学领域的问题：例如，利用图聚类为复杂流体流动设计降阶模型和控制器 [3, 4]，将 Ramanujan 图用作超级计算机各组件之间连接链路的互连拓扑 [2, 7]，利用图神经网络（GNNs）预测药物相互作用 [6]，以及利用图和超图中心性度量检测网络安全数据中的异常 [1, 5]。

为彰显并弘扬这种多元性，我们汇编了七个由学术界和政府研究人员提出的应用组合学开放问题。这些问题按自成一体的章节编排，由提出问题的投稿者撰写。每个问题都包括问题陈述、相关应用领域的讨论，以及已有的部分进展或前期工作。问题如下：

1. **度量图中的Dowker复形**：Fr´ıas、Segovia-Dominguez、Chen 和 Gel 提出了与 Dowker 复形相关的拓扑数据分析（TDA）问题。

*信息发布 PNNL-SA-182814。

2. **概率组合学在量子电路表达能力中的应用**：Kay 和 Bennink 提出了一个与量子电路相关的概率组合学问题。3. **4-均匀超图最小 s-t 割问题的计算复杂性**：Veldt 概述了一个关于超图最小 s-t 割的计算复杂性问题。4-5. **有向无环图中的边消去和顶点消除问题**以及**数据流反转问题**：Naumann 提出了若干涉及有向无环图的问题，其动机源于数值程序的算法微分。6. **异步性的代价**：Ortiz Marrero 和 Young 提出了相关问题，以研究异步更新如何影响科学计算中大规模系统迭代方法的收敛速度。7.（$n-k$）**-电网的条件零强迫**：Aksoy、Petyuk、Roy 和 Young 提出了有关图零强迫变体的问题，该变体与电网中的结构稳定性相关。

我们根据几项标准精选了这组开放问题。首先，我们选择的问题都切合时势且较新，也就是说，它们受到近期研究的启发，而且不太可能已为广大社群所熟知。其次，尽管这份选集远非全面，我们仍希望借此展示应用组合学所涉及领域的多样性。第三，尽管组合学的许多内容或许都“有应用”，我们仍致力于寻找那些对纯数学以外领域具有明确、具体影响的问题，包括计算、工业、数据科学以及科学软件。感谢读者的关注。

参考文献

[1] Sinan G Aksoy、Emilie Purvine 和 Stephen J Young。“用于网络态势感知的方向拉普拉斯中心性”。载于：*Digital Threats:Research and Practice (DTRAP)* 2.4（2021年），第 1–28 页。[2] Sinan G Aksoy 等。“Ramanujan图与超级计算拓扑的谱隙”。载于：*The Journal of Supercomputing* 77（2021年），第 1177–1213 页。[3] Muralikrishnan Gopalakrishnan Meena、Aditya G Nair 和 Kunihiko Taira。“面向涡流的基于网络社区的模型降阶”。载于：*Physical Review E* 97.6（2018年），第 063103 页。[4] Muralikrishnan Gopalakrishnan Meena 和 Kunihiko Taira。“识别用于湍流改性的涡旋网络连接器”。载于：*Journal of Fluid Mechanics* 915（2021年），A10。

[5] Cliff A Joslyn 等。“域名系统关系的超图分析”。载于：*Algorithms and Models for the Web Graph: 第 17 届国际网络图研讨会，WAW2020，波兰华沙，2020年9月21日至22日，论文集 17*。施普林格。2020年，第 1–15 页。[6] Carter Knutson 等。“使用并行图神经网络解码蛋白质–配体相互作用”。载于：*Scientific Reports* 12.1（2022年），第 7624 页。[7] Stephen Young 等。“Spectralfly：将Ramanujan图用作灵活高效的互连网络”。载于：*2022 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS)*。IEEE。2022年，第 1040–1050 页。

1. 度量图中的Dowker复形

Jos´e Fr´ıas、*Ignacio Segovia-Dominguez*、*Yuzhou Chen*、*Yulia R. Gel*

背景。拓扑数据分析（TDA）是计算拓扑学中的一组方法，在数据科学领域持续受到越来越多的关注。TDA 中最重要的工具之一是持久同调（PH） [5, 9, 13]。PH 的目标是借助一个以数据集中的点为顶点的滤过单纯复形 $\mathcal{K}$ ，获取有限度量空间的拓扑信息；也就是说，存在一个单纯复形序列$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_{n-1} \subset \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$。一个非平凡元素 $\gamma \in H_p（\mathcal{K}_i）$属于 $\mathcal{K}_i$的p维同调群，通常称为 p维拓扑特征，并与一个点$（i_b，\ j_d）\ \in \mathbb{R}^2$相关，其中 i_b 和j_d 分别表示 γ的出生和消亡时刻（即该特征首次出现和最后一次出现时对应的单纯复形索引；也就是说，此时它在同调中变为平凡，或与一个更早出现的拓扑特征合并）。该拓扑特征的寿命为 $j_d - i_b$。滤过单纯复形 $\mathcal{K}$ 的持久图 PD 是多重集$PD（\mathcal{K}）\ = \{（i_b，\ j_d）\ \in \mathbb{R}^2 \mid i_b < j_d\}$，其中$（i_b，\ j_d）$的重数等于滤过单纯复形 $\mathcal{K}$ 中分别在i_b 和 j_d出生和消亡的拓扑特征数量。持久图概括了 $\mathcal{K}$ 的同调群沿滤过的演变。两个持久图可以使用瓶颈距离或Wasserstein距离等度量进行比较（关于持久图以及PH中的距离，详见 [3, 5, 9, 13] ）。

由加权图诱导的度量空间尤其有趣，因为它们具有组合学基础，并且可应用于数据分析 [1, 12]。一个加权图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}，\ \mathcal{E}，\ \omega)$包含一个顶点集合 $\mathcal{V}$，以及

一个边集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$，和一个权重函数 $\omega: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$。如果一个图$\mathcal{G}$ 是简单图，则其不含自环或重边。给定加权图 $\mathcal{G}$中的一条路径γ， γ 的长度 是 γ 中各边权重之和。因此，连通加权图 $\mathcal{G}$ 配备了测地距离 $d_{\mathcal{G}}$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，该距离定义在一对顶点 u， $v \in \mathcal{V}$ 上，取连接 u 和 v的所有路径中的最小长度。集合 $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{G}})$ 是一个有限度量空间。

TDA中应用最广泛的单纯复形之一是 Vietoris-Rips 单纯复形 [3, 13]。该复形的一个重要性质是，它完全由其1-骨架确定，因此适用于计算。

定义 1.1（Vietoris-Rips复形）。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 为一个加权简单图，其诱导的测地距离为 $d_{\mathcal{G}}$。对于 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们将**Vietoris-Rips复形** $VR_\alpha(\mathcal{G})$ 定义为一个抽象单纯复形，其顶点属于 $\mathcal{V}$，并且对于 $k \geq 2$，当且仅当 $d_{\mathcal{G}}(x_i, x_j) \leq \alpha$ 对所有 $0 \leq i \leq j \leq k$ 成立时， k-单形 $\sigma = [x_0, x_1, \ldots, x_k] \in VR_\alpha(\mathcal{G})$ 属于该复形。

然而，如果 $\mathcal{V}$ 的基数很大，那么对于较大的 α，$VR_\alpha(\mathcal{G})$ 中的单形数量可能会大到无法使用计算工具进行分析。解决可扩展性问题的一种替代方法是构造另一个顶点集为 $L \subset \mathcal{V}$ 的单纯复形，其中$|L| < |\mathcal{V}|$。这类单纯复形之一是见证复形 [1, 2, 7,8]。

定义 1.2（见证复形）。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 是一个加权简单图，其诱导的测地距离为 $d_{\mathcal{G}}$，并取子集 $L, W \subset \mathcal{V}$。对于$\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，令 $Wit_\alpha(W, L)$ 为顶点集为 L 的抽象单纯复形；当且仅当对于每个 $\tau \subseteq \sigma$，都存在 $w \in W$，使得 $d_{\mathcal{G}}(w, l) \leq d_{\mathcal{G}}(w, l') + \alpha$ 对于所有 $l \in \tau$ 和$l' \in L \setminus \tau$成立时， $\sigma \in Wit_\alpha(W, L)$ 是一个单形。复形 $Wit_\alpha(W, L)$ 称为 $\mathcal{G}$ 的见证复形，其见证点集为 W，地标点集为 L。

给定一个非递减数值序列 $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$，在 $\mathcal{G}$ 上构造的相应 Vietoris-Rips复形满足 $VR_{\alpha_0}(\mathcal{G}) \subseteq VR_{\alpha_1}(\mathcal{G}) \subseteq \cdots \subseteq VR_{\alpha_n}(\mathcal{G})$，也就是说，尺度值序列定义了一个滤过单纯复形。若我们选取地标点集和见证点集 L， $W \subset \mathcal{V}$，也存在一个滤过 $Wit_{\alpha_0}(L, W) \subseteq Wit_{\alpha_1}(L, W) \subseteq \cdots \subseteq Wit_{\alpha_n}(L, W)$。随后可以在这两个滤过单纯复形中计算持久同调。然而，在图上计算见证复形颇具挑战，因为难以确定某些单形的见证点，下面的示例将对此加以说明。

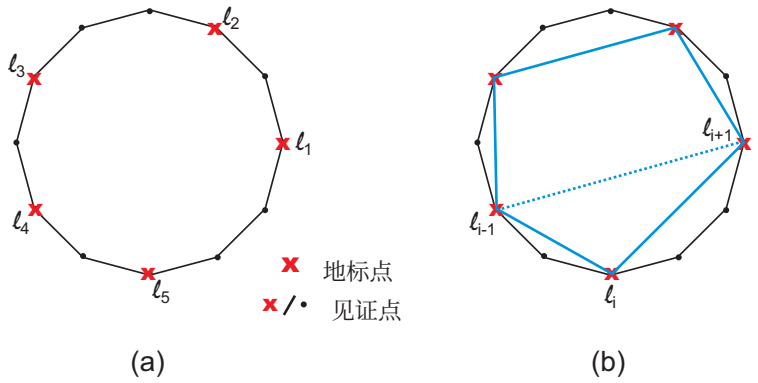


图 1：圈图中的地标点。

例 1.3。假设我们关注的是 1-加权圈图 $\mathcal{C}_m$, $m \geq 4$ 的一维持久同调，其顶点集为 $\mathcal{V}$。令 $L \subset \mathcal{V}$ 为地标点集， $W = \mathcal{V}$ 为见证点集（见图 1a）。不难确定最小尺度值 $\alpha > 0$ ，使得对于任意两个相邻地标点 $l_i, l_{i+1} \in L$ ，$Wit_\alpha(L, W)$ 都包含 1-单形 $\{l_i, l_{i+1}\}$（图 1b 中，1-单形以连接相邻地标点的边表示）。这些 1-单形构成一个在 α 处诞生的一维拓扑特征 γ 。然而，对于三个连续的地标点 $l_{i-1}, l_i, l_{i+1} \in L$，从组合角度确定见证点以及 1-单形 $\{l_{i-1}, l_{i+1}\}$（图 1b 中的虚线边）在何种尺度值下出现在过滤见证复形中要困难得多；甚至更难确定 γ 何时消失。

Dowker复形 [3, 4] 是在放宽见证复形定义（定义1.2）之后得到的构造，这样更容易计算：

定义 1.4 （Dowker复形）。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 是一个加权简单图，其诱导测地距离为 $d_{\mathcal{G}}$，并设 $L, W \subset \mathcal{V}$。对于 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，令 $Dow_\alpha(W, L)$ 为顶点集为 L 的抽象单纯复形；当且仅当存在 $w \in W$ 使得对所有 $l \in \sigma$，$d_{\mathcal{G}}(w, l) \leq \alpha$ 时， $\sigma \in Dow_\alpha(W, L)$ 是一个单形。单纯复形 $Dow_\alpha(W, L)$ 称为 $\mathcal{G}$ 的 **Dowker 复形**，其见证点集和地标点集分别为 W 和 L。

请注意，见证点复形和 Dowker复形的构造高度依赖于集合 L 和 W的选择。在 [7], 中，提出了两种用于定义地标点集合 L 的算法：随机 和最大最小 算法。更多

最近，[1] 提出了 ϵ-网算法，用于获取满足 $L \subset \mathcal{V}$稀疏性和与点集邻近性这两项性质的地标点集合$\mathcal{V} \setminus L$，从而能够在计算复杂性和潜在的信息损失之间进行权衡。

定义 1.5 (ϵ-网)。令 $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{G}})$ 为由加权图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 得到的有限度量空间。给定 $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subset \mathcal{V}$ 和 $\epsilon \geq 0$，则：

(i) 若集合 L 中的点的 ϵ-闭邻域 $\{\mathcal{N}(u_i)\}_{i=1}^{l}$ 覆盖 $\mathcal{V}$，则称 L 是 $\mathcal{G}$ 的 **ϵ-样本**，即对任意 $v \in \mathcal{V}$，均存在 $u_j \in L$ 使得 $d_{\mathcal{G}}(v, u_j) \leq \epsilon$。(ii) 若任意两个不同的点 $u_i, u_j \in L$ 的距离 $d_{\mathcal{G}}(u_i, u_j) > \epsilon$，则称 L 是 **ϵ-稀疏的**。(iii) 若集合 L 是 $\mathcal{G}$ 的 ϵ-样本且是 ϵ-稀疏的，则称其为 $\mathcal{G}$ 的 **ϵ-网**。

开放问题。在本节中，$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 是一个加权简单图，$d_{\mathcal{G}}$ 是由 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{V}$ 上诱导的测地距离。在度量空间 $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{G}})$ 上构造 Dowker单纯复形，依赖于对地标点集和见证点集的选取。通常，见证点集取为顶点集 $W = \mathcal{V}$，或地标点集的补集 $W = \mathcal{V} \setminus L$。此外，地标点集的选取方式有很多种。存在一个用于定义地标点集的 ϵ-网，可确保某些组合性质和几何性质，如 [1] 所示。此外，[1] 证明，对于加权图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 和一个特定的 ϵ，存在一个 $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{G}})$ 上的 ϵ-网，其基数有一个依赖于 ϵ、图的直径和顶点数的上界（定理 3）。然而，这一上界并不一定接近最优上界，而对其进行进一步分析，对于机器学习和统计学中的图学习应用具有许多重要意义。因此，我们将关于图上 Dowker复形的第一个开放问题表述如下：

开放问题1.1。给定一个加权简单图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 和$\epsilon > 0$，确定 $\mathcal{G}$ 的 ϵ-网中元素数量的最优上界和下界。

文献 ϵ 提出了三种在度量图中构造 ϵ-网的方法，即贪心算法、迭代算法和*SPT* 剪枝算法。文中还通过实验比较了这些算法在同一图上生成的地标数量，以及它们的执行时间。因此，接下来很自然会提出这样一个问题：

开放问题 1.2. 对于加权简单图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E},\ \omega)$，请提出一种算法，构造其 $\mathcal{G}$ 的 ϵ-网，使得：

(i) 所需地标点数量少于现有算法；(ii) 算法的执行时间短于现有算法。

由于真实世界数据集通常含有噪声且不完整，在 Dowker复形中恰当地选择地标点，在应用中具有多方面的潜在益处。首先，这有助于聚焦最关键的拓扑特征（即“数据骨架”），从而提升图学习算法的性能。其次，这有助于增强对噪声和数据扰动的鲁棒性。第三，通过降低计算成本，它为在图学习的下游任务中应用拓扑数据分析提供了新的思路。事实上，由于在大型图上计算持久同调通常会因计算成本高得令人望而却步，Dowker复形构造通过恰当选择地标点提供了一种有前景的替代方案。此外，地标点与见证点之间的数据分离会触发一种内在的空间分解，这与处理现代大规模并行计算时所需的自然局部分区相契合 [11]。

鉴于 Vietoris-Rips复形在拓扑数据分析中的广泛应用，一个自然的问题是：对于同一个加权图 $\mathcal{G}$，比较通过 Vietoris-Rips复形和 Dowker复形构造得到的持久同调。我们用 $PD^i(\mathcal{K})$ 表示滤过单纯复形 $\mathcal{K}$ 中维数为 i 的持久图。对于度量图，一维同调尤为相关。众所周知，当尺度值 α 足够大时，持久图 $PD^1(VR_\alpha(\mathcal{G}))$ 中的点数（计入重数）与 $\mathcal{G}$ 的亏格相同，也就是 $\mathcal{G}$ [10] 的最小环系的基数。选择地标点来构造见证复形或 Dowker复形时，一个主要顾虑是可能丢失相关的拓扑信息。于是，下一个问题随之而来：

开放问题 1.3. 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ 为加权简单图。取见证点集合 $W = \mathcal{V}$。

(i) 确定 $\epsilon > 0$，以及如何选择一个 ϵ-网 $L \subset \mathcal{V}$，使得$PD^1(Dow_\alpha(W,\ L))$ 的基数等于 $\mathcal{G}$ 的亏格，其中 α 的取值充分大。(ii) 假设给定了一个满足 (i) 的 $\mathcal{G}$ 的 ϵ-网。求 $d_B(PD^1(VR_\alpha(\mathcal{G}))\ PD^1(Dow_\alpha(W,\ L)))$ 的上界，该上界以 $\mathcal{G}$ 和 ϵ 中环的长度表示，其中 d_B 是持久图之间的瓶颈距离。

最后，另一个重要但尚未得到充分探索的主题，是由 Dowker复形得到的持久同调的稳定性。稳定性保证，对度量图 $\mathcal{G}$ 进行“小扰动”以获得新的度量图 $\mathcal{G}'$后，相应的持久图在某种距离下彼此接近，例如瓶颈距离或Wasserstein距离。这里的扰动指任何可能涉及边删除、添加、边切分或收缩，或改变权重函数（这会自动改变距离 $d_{\mathcal{G}}$）的变换。对于依赖于地标点和见证点选取的复形，扰动可以是改变这两组点的选取。对于 Dowker复形，已有一些稳定性结果，包括 Dowker交错和 Dowker对偶 [3,（见第 4.2 节）3]。具体而言，Dowker对偶可解释为如下性质：如果 $L,\ W \subset \mathcal{V}$ 是 $\mathcal{G}$的地标点集和见证点集，那么 $Dow_\alpha(W,\ L)$ 和 $Dow_\alpha(L,\ W)$ 具有相同的同伦类型，因此这两个过滤单纯复形具有相同的持久同调。

开放问题1.4。 设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\omega)$ 为加权图，且 $L,W\subset\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{G}$ 的地标点集和见证点集。

(i) 设 $\mathcal{G}'=(\mathcal{V},\mathcal{E},\omega')$ 为度量图，其顶点集和边集与 $\mathcal{G}$ 相同，但权重函数为另一个函数 ω'。求一个界，用 ω 与 ω' 之间的上确界距离来表示对应于 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的 Dowker复形的持久图之间的瓶颈距离。(ii) 若 L 和 L' 是 $\mathcal{G}$ 的两个地标点集，且均为 ϵ-网，求出关于这些地标点的条件，使得 $Dow_\alpha(W,L)$ 与 $Dow_\alpha(W,L')$ 具有相同的同伦类型。

近期研究探讨了有向图中 Dowker复形的一些性质。例如，已有研究给出了循环网络的 Dowker 持久图的完整刻画，并证明了 [4] 对成对交换以及 [6] 对共轭关系和移位等价关系的一些稳定性性质。尽管图上的 Dowker复形在理论性质和实际应用方面仍大多未获充分探索，我们认为，Dowker复形有望解决诸多瓶颈，而这些瓶颈目前阻碍了拓扑数据分析在真实世界图数据集分析中的广泛应用。

致谢。 本研究得到美国海军研究办公室（ONR）项目资助，编号为 N00014-21-1-2530。本文中表达的任何观点、发现、结论或建议均为作者观点，不一定反映美国海军研究办公室的立场。

参考文献

[1] N. A. Arafat、D. Basu 和 S. Bressan。“ϵ-网诱导的图上的惰性见证复形”。载于：(2020)。 DOI：10.48550/ARXIV.2009.13071。URL：https://arxiv.org/abs/2009.13071。[2] J. D. Boissonnat、L. Guibas 和 S. Oudot。“利用见证复形进行任意维数的流形重构”。载于：第二十三届计算几何年度研讨会论文集。2007年，第194–203页。[3] F. Chazal、V. De Silva 和 S. Oudot。“几何复形的持久性稳定性”。载于：Geometriae Dedicata 173.1（2014年），第193–214页。[4] S. Chowdhury 和 F. M´emoli。“函子性 Dowker 定理与非对称网络的持久同调”。载于：Journal of Applied and Computational Topology 2（2018年），第115–175页。[5] D. Cohen-Steiner、H. Edelsbrunner 和 J. Harer。“持久图的稳定性”。载于：第二十一届计算几何年度研讨会论文集。2005年，第263–271页。[6] D. Cˆot´e。《自关系上的 Dowker 复形与滤过》。2023年。 DOI：10.48550/ARXIV.2301.03739。 URL：https://arxiv.org/abs/2301.03739。[7] V. De Silva 和 G. Carlsson。“使用见证复形进行拓扑估计。”载于：PBG。2004年，第157–166页。[8] T. K. Dey、F. Fan 和 Y. Wang。“点数据上的图诱导复形”。载于：第二十九届计算几何年度研讨会论文集。2013年，第107–116页。[9] H. Edelsbrunner、D. Letscher 和 A. Zomorodian。“拓扑持久性与简化”。载于：第41届计算机科学基础年度研讨会论文集。IEEE。2000年，第454–463页。[10] E. Gasparovic 等。“度量图的一维内在 Čech 持久图的完整刻画”。载于：《计算拓扑研究》（2018年），第33–56页。[11] R. Lewis 和 D. Morozov。“使用膨胀复形并行计算持久同调”。载于：第27届 ACM 并行算法与架构研讨会论文集。2015年，第323–331页。[12] X. Liu 等。“基于 Dowker 复形的机器学习（DCML）模型用于蛋白质-配体结合亲和力预测”。载于：PLoS Computational Biology 18.4（2022年），e1009943。

[13] A. Zomorodian 和 G. Carlsson。《计算持久同调》。载于：第二十届计算几何年度研讨会论文集。2004年，第347–356页。

2. 概率组合学在量子电路表达能力中的应用

Bill Kay、*Ryan Bennink*

引言。 量子计算是一种计算系统，在该系统中，某些物理性质被用于为某些类别的问题带来计算优势。近年来，人们对一些量子计算设备的使用日益增多。许多可使用的设备规模较小且噪声较大，而变分方法 通过传统计算机修改某个量子电路的参数，以最大化其输出函数，在实践中取得了成功 [3, 2, 5]。本文旨在介绍一个纯粹的组合问题，并解释其与量子计算中的一个问题之间的关系。我们注意到，我们是在 [1] 关于随机二进制向量的概率性背景下进行分析的。因此，组合问题的进展可以对量子计算产生影响。随后，我们将介绍一系列示例、初步结果和未解决的问题。

交换量子电路最初以“瞬时量子多项式时间”电路的形式提出，是一类相对简单却表现出非平凡量子行为的量子电路。就我们的目的而言，交换量子电路可以描述为：首先创建由 [4], 个量子比特的所有计算基态构成的均匀叠加态，然后对选定的量子比特子集施加依赖于奇偶性的相位。每个子集由一个二进制向量 2^n 指定，其对应的相位则由一个实角度 n 指定。

定义 2.1（交换量子电路）。 由二进制向量 $a_1, \ldots, a_m \in \{0,1\}^n$ 及其对应参数 $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$ 指定的交换量子电路会生成如下形式的量子态

$$\frac{1}{2^{n/2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{0\ldots0}}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{1\ldots1}} \right) \in \mathbb{C}^{2^n}$$

其中

$$\phi_x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i (-1)^{\langle a_i, x \rangle}$$

且 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 GF(2)^{n}中的内积。

在变分量子计算中，向量 a_1、……、a_m指定了固定的电路结构，而角度 θ_1、……、θ_m 则是变分参数。一个基本问题是这类结构的 表达能力：给定向量 a_1、……、a_m，改变角度 θ_1、……、θ_m能在多大程度上改变输出态？直观而言，可以用随机选取参数值时两个输出态的预期（不）相似度来量化表达能力：电路的表达能力越强，两个随机输出态越有可能彼此不同。正如 [1], 中所讨论的，对于交换量子电路，这个期望值可以转化为一个组合问题，涉及下文所述的二进制矩阵。文中证明，在电路达到最大规模这一特殊情况下，也就是每个非空量子比特子集都有一个独立相位时，表达能力问题可归结为计算阿贝尔平方的数量。本文将探讨更一般的问题：计算涉及任意量子比特子集集合的交换量子电路的表达能力。下一节将用纯组合语言来表述这一问题。最后，我们将给出一些例子、特殊情形和开放问题。

一个组合问题。 本节将给出若干定义，采用约定的记号有助于表述清晰。为便于阐述，我们在此为本节固定若干这样的记号。固定 n， $t \in \mathbb{Z}^+$ 并令 $1 \leq m \leq 2^n - 1$。

- 令 $\mathbf{x} = (x_1^T, \ldots, x_t^T)$，其中 $x_i \in \{0,1\}^n$ 对于 $1 \leq i \leq t$。
- 令 $\mathbf{y} = (y_1^T, \ldots, y_t^T)$，其中 $y_i \in \{0,1\}^n$ 对于 $1 \leq i \leq t$。
- $\mathbf{A} = (a_1^T, \ldots, a_m^T)$，其中 $a_i \in \{0,1\}^n$ 对于 $1 \leq i \leq m$。此外，$\{a_i\}_{i=1}^m$ 均非零且两两不同。

为清晰起见，$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 是带有指定列标签的 $n \times t$ 二进制矩阵，而$\mathbf{A}$ 是一个 $n \times m$ 二进制矩阵，其列均不相同且非零，并带有指定标签。对于我们的具体应用，我们按字典序排列$\mathbf{A}$ 的列。我们指出，每个 a_i 都是一个长度为 n的二进制向量，并且自然对应于长度为 n 的向量的指标子集。

现在我们需要以下定义：

定义 2.2 (表达能力指标)。 给定上述$\mathbf{A}$，$\mathbf{x}$ 和 $1 \leq i \leq m$，我们将第 i 个表达能力指标 $m_i^{\mathbf{A}}(\cdot)$定义为：

$$m_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{t} \langle a_i, x_j \rangle_2$$

其中内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ 是模 2 运算，而外层求和是积分。

当上下文清楚地表明$\mathbf{A}$ 时，我们只写作 $m_i(\cdot)$。由于这些并非标准定义，且涉及模运算和整数算术的混合，我们给出一个说明性示例：

示例2.3。设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们有：

$$\begin{aligned} m_5(\mathbf{x}) &= \langle a_5, x_1 \rangle_2 + \langle a_5, x_2 \rangle_2 + \langle a_5, x_3 \rangle_2 + \langle a_5, x_4 \rangle_2 \\ &= 0 + 1 + 1 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

现在我们可以提出一个一般性的组合问题，并将其与交换量子电路的计算表达能力联系起来。

计算问题。给定$\mathbf{A}$，令$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 均匀随机采样。计算：

$$\mathbb{P}\left((m_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{y})) \ \forall i \right)$$

尽管计算问题本身就很有趣，但我们希望阐明它与交换量子电路计算表达能力之间的关系。回顾定义2.1 可知，交换量子电路的表达能力以状态向量指标的子集集合为输入。此外，我们还指出，对于长度为 n的状态向量，指标子集与长度为 n 的二进制向量之间存在一种自然对应关系（即所选指标的示性向量）。事实上，从 [1]中的分析可以看出，如果我们将感兴趣的状态向量指标子集编码为$\mathbf{A}$，那么计算问题中给出的计算就是求得所需表达能力的关键计算。具体而言，研究表明，最大交换量子电路的表达能力，等价于令$\mathbf{A}$为所有 $2^n - 1$ 非零长度的 n 二进制向量，而计算问题中的概率恰好可通过计数阿贝尔平方来确定。

示例、初步结果与开放问题。请注意，对于每个**A**的取值，都会得到一个不同的计算问题实例。对于某些固定的**A**取值，计算问题有一种自然的解释。

例 2.4. 设 $\mathbf{A}$ 为所有长度为 n 、重量为 $\mathbf{1}$ 的向量（即 $n \times n$ 单位矩阵）的集合。设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为 $n \times t$ 二进制矩阵。那么

$$(m_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{y}))\ \forall i$$

当且仅当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的行和相同时，条件成立。

这显然成立，因为 $\langle a_j, x_i \rangle_2 = 1$ 当且仅当 x_i 在坐标 j处为 $\mathbf{1}$。利用这一组合解释，当 $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 单位矩阵时，我们可以通过以下等价引理解决计算问题：

引理 2.5. 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为 $n \times t$ 均匀随机抽取的二进制矩阵。那么 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的所有行和都相同的概率为

$$\binom{2t}{t}^n \frac{1}{2^{2tn}}.$$

证明. 我们先讨论一对长度为 t的均匀随机二进制向量。由于我们要计算 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$的行和，先针对固定的一行进行讨论，再将独立概率相乘即可得出结论。对所有可能的行和求和，一对长度为 t的二进制向量具有相同行和的概率为：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}^2 (1/2)^{2k} (1/2)^{2(t-k)} &= \frac{1}{2^{2t}} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}^2 \\
&= \frac{1}{2^{2t}} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \binom{t}{t-k} \\
&= \frac{1}{2^{2t}} \binom{2t}{t}
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式可通过计算恰有 t 个 $\mathbf{1}$ 的长度为 $2t$的二进制向量的数量得出。右侧直接计算了这个数量，而左侧计算的是第一半有 k 个 $\mathbf{1}$、第二半有 $t-k$ 个 $\mathbf{1}$ 的所有可能方式。对$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 的所有n 个（相互独立的）行求积，即可得到所需的概率。 □

$\mathbf{A}$ 的每一列都会对计算问题中$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 可能的取值增加一个约束。事实上，满足计算问题中运算的$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$数对集合关于$\mathbf{A}$的各列是单调的：若$\mathbf{A}_2$ 的列集合包含$\mathbf{A}_1$,的列集合，那么

$$(m_i^{\mathbf{A}_2}(\mathbf{x}) = m_i^{\mathbf{A}_2}(\mathbf{y}))\ \forall i \Rightarrow (m_i^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{x}) = m_i^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{y}))\ \forall i.$$

例如，如果$\mathbf{A}$ 的列中包含所有长度为 n 、权重为 1 的二进制向量，如果$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 满足计算问题中的条件，那么$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$必然具有相同的行和。我们针对$\mathbf{A}$的另一种选择给出了计算问题的组合解释，然后利用单调性，针对$\mathbf{A}$的另一种选择陈述并证明计算问题。

例 2.6。 设 $a_{i,j}$ 为长度为 n 的二进制向量，其在位置 i和 j上为 1，其余位置为 0。设 x 为任意长度为 n 的二进制向量。若 x 的第 i和第 j个元素不一致，则 $\langle a_{i,j}, x\rangle_2$ 为 1，否则为 0。我们称其为 x中的 i,j-不匹配。因此，如果$\mathbf{A}$ 由所有长度为 n 且权重至多为 2 的二进制向量组成，并且$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 是 $n \times t$ 二进制矩阵，那么

$$(m_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{y}))\ \forall i$$

当且仅当$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 具有相同的行和，并且对于每一对行 i和 j ，$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 存在 i,j-不匹配的列数相同。

例 2.6中所给出的族对应的计算问题仍未解决。不过，我们提出如下结论：

引理 2.7。 设 $\mathbf{A}$ 是由第一坐标为1且重量为1 或2的二进制向量组成的集合。设$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$是均匀随机抽取的 $n \times t$二进制矩阵。那么：

$$\mathbb{P}\left((m_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{y}))\ \forall i\right)$$

由下式给出：

$$\frac{1}{2^{2tn}} \sum_{k=0}^{t} \left(\binom{2k}{k} \binom{2(t-k)}{t-k} \right)^{n-1} \binom{t}{k}^2$$

证明。 对于$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 均匀随机抽样的情况，我们希望计算$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 具有相同行和的概率，并且对于每个 $1 < j \leq n$，具有 $\mathbf{1}, j$-不匹配的列数相同。我们声称

$$\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}^2 \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{t-k} \binom{k}{j}^2 \binom{t-k}{\ell}^2 \right)^{n-1}$$

统计满足以下条件的（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）对的数量

$$(m_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{y})) \ \forall i$$

成立。现在我们来统计这样的数对。首先，分别固定 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的第一行。由于行和必须相同，这两行中的 $\mathbf{1}$ 的数量相同，记为 k。对于每一行 $1 < r \leq n$，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 中的 $\mathbf{1}$ 的数量相同。由于$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$的行和相同，这个数量也相同。注意，$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 中的 $\mathbf{1}$，r 匹配数和不匹配数也必须相同。我们可以通过枚举在第一项为 $\mathbf{1}$ 的列中放置 $\mathbf{1}$ 的方式数，再枚举在第一项为 $\mathbf{0}$ 的列中放置 $\mathbf{1}$ 的方式数来计算这一数量。第 r 行有 $j + \ell$ 1 个 $\mathbf{1}$，其中 j 个位于第一项为 $\mathbf{1}$ 的列，ℓ 个位于第一项为 $\mathbf{0}$ 的列。因此，对于每个固定的 j 和 ℓ，有

$$\binom{k}{j}^2 \binom{t-k}{\ell}^2$$

种放置这些 $\mathbf{1}$ 的方式。对 j 和 ℓ 的所有取值求和可知，对于$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的每一对固定首行，都有

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{t-k} \binom{k}{j}^2 \binom{t-k}{\ell}^2$$

种将这些 $\mathbf{1}$ 放置在第 r 行的方式。这些选择对各行$1 < r \leq n$彼此独立，因此共有

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{t-k} \binom{k}{j}^2 \binom{t-k}{\ell}^2 \right)^{n-1}$$

固定首行时，$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 的选择。对于每个 k，在$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$的首行中放置 $\mathbf{1}$ 的方式有 $\binom{t}{k}$ 种。对每个 k 求和，所需的总数

个 (**x**,**y**) 对为

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}^2\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{t-k}\binom{k}{j}^2\binom{t-k}{\ell}^2\right)^{n-1}$$

参照引理 2.5 证明中的类似分析可知，这就是

$$\sum_{k=0}^{t}\left(\binom{2k}{k}\binom{2(t-k)}{t-k}\right)^{n-1}\binom{t}{k}^2$$

共有 2^{2tn} 个可能的数对（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$），两边相除即可得到引理 2.7陈述中的结论。

□

引理 2.5 和2.7 的证明方法依赖于逐行独立性。然而，这些方法无法直接推广到 $\mathbf{A}$ ，例如，无法推广到所有权重至多为 2 的二进制向量，因为对于 $1 \leq i < j < k \leq m$， i 个 j-不匹配的构型会影响 j， k 个 i， k-不匹配的可能构型。更广泛地说，一旦族 $\mathbf{A}$ 足够丰富，我们所依赖的独立性这一步就不再适用，需要更复杂的分析。因此，我们提出以下（开放）问题：

开放问题 2.1。 固定 m 和 $k \leq m$。当$\mathbf{A}$ 由所有权重至多为 k 的向量组成时，我们能否回答计算问题?

引理2.5 在 $k = 1$时回答了开放问题2.1 ，而 [1] 的极大情形在 $k = m$时回答了开放问题2.1 。这些边界情形是 k 仅有的使开放问题2.1得到解答的取值。

开放问题 2.2。对于哪些$\mathbf{A}$ 的取值，我们能够精确地回答计算问题? 对于哪些$\mathbf{A}$ 的取值，我们能够高效地回答计算问题?

为了换一种说法表述开放问题2.2的第二部分，我们提出：

开放问题 2.3。对于任意$\mathbf{A}$，计算问题是否为 NP完全?

最后，我们指出，计算问题的精确解可以回答交换量子电路的表达能力问题，而计算问题的近似解则可以近似回答交换量子电路的表达能力问题。因此我们提出：

开放问题 2.4. 对于哪些**A** 的取值，我们可以近似求解计算问题?

致谢。 本研究在橡树岭国家实验室开展，该实验室由 UT-Battelle, LLC 运营，并根据合同 DE-AC05-00OR22725 为美国能源部（DOE）服务。本研究获得了美国能源部先进科学计算研究（ASCR）量子计算计划加速研究项目的支持，项目工作提案编号为 ERKJ354。

参考文献

[1] Ryan S. Bennink。 量子计算问题中的阿贝尔平方计数。2022年8月。 DOI： 10.48550/arXiv.2208.02360。arXiv：arXiv:2208.02360。[2] Alicia B Magann 等。“从脉冲到电路，再回到脉冲：变分量子算法的量子最优控制视角”。载于： *PRX Quantum* 2.1（2021年），第010101页。[3] Jarrod R McClean 等。“变分混合量子经典算法理论”。载于： 新物理学杂志 18.2（2016年），第023023页。[4] Dan Shepherd 和 Michael J. Bremner。“时间结构无序的量子计算”。载于： 《英国皇家学会学报*A*辑：数学、物理与工程科学》 465.2105（2009年2月），第1413–1439页。 DOI： 10.1098/rspa.2008.0443。[5] Xiao Yuan 等。“变分量子模拟理论”。载于： *Quantum* 3（2019年），第191页。

3. 4-均匀超图最小 s-t 割问题的计算复杂性

Nate Veldt

引言。 在图中寻找最小的 s-t 割，是最基础且广为人知的组合优化问题之一，在数学、计算机科学、运筹学和数据科学中得到了广泛研究和应用。问题的输入是一个图 $G = (V, E)$，其中指定了一个源节点 s 和一个汇节点 t。目标是删除最少数量的边，以断开从 s 到 t的所有路径；或者等价地，将节点划分成两部分，使 s 和 t 彼此分离，同时使割的大小最小

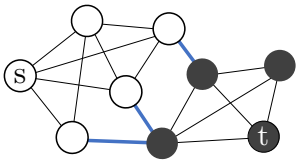


图 2：图 s-t 割。

图 s-t 割问题的两种表述

1. 找出一个最小规模的边集，删除该边集后可将 s 与 t 分隔开（例如图 2中的三条蓝色边）。2. 将 V 划分为 $S \subseteq V$ 和 $S = V \backslash S$ （例如图 2中的白色节点和黑色节点），其中 $s \in S$ 和 $t \in S$，以使割 边的数量最少（即跨越两个划分的边）。

惩罚（见图 2）。自 20 世纪 50 年代以来，这个问题就已有多项式时间解 [1], ，如今许多其他算法也作为本科算法课程的标准内容定期开设。

s-t 割问题也可以在输入为超图$\mathcal{H} = (V, E)$时定义，此时每条边 $e \in E$ 可以包含两个或更多节点。如果我们以一种方式推广图 s-t 割问题的表述，目标就只是删除数量最少的一组超边，以分隔源节点 s 和汇节点 t。半个多世纪前，Lawler [3], 给出了该问题的一个多项式时间解，其做法是将超图约化为一个具有扩充节点集的有向图中的 s-t 割问题。然而，推广图 s-t 割问题的第二种表述（划分节点以分隔 s 和 t，同时最小化割代价），会导出与这一边删除问题并不等价的其他问题。当一条超边包含两个以上节点时，将这些节点分隔到两个节点集 S 和 S中有不止一种方式。在 4-均匀超图中（见图 3），我们可以对 1 对 3 超边划分和 2 对 2 划分区别对待。近年来，人们越来越关注在这类广义割惩罚 [7,5, 6, 8, 4], 下求解超图割问题，因为根据具体应用，将超边中的节点以不同方式划分，可能更受青睐，也可能不那么理想。例如，在许多机器学习和数据挖掘应用中，超边代表一组数据对象之间存在关联、应当具有相同标签或属于同一簇的证据。在这些情况下，更理想的做法是以这样的方式划分超边，使割的同一侧包含大多数（即使不是全部）节点。同时，采用不同的割惩罚会导致问题的计算复杂性产生巨大差异，即使超边非常小也是如此。我们具体考虑一个尚未解决的问题：4-均匀超图中广义超图 s-t割问题的计算复杂性。

基数型超图 s-t 割问题。设 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 是一个超图，其中源节点为 s ，汇节点为 t。给定节点的二分划分

$\{S, S\}$ 后，可根据割的小侧节点数（即基数）对超边进行分类。小侧上有 i 个节点的边记为 $\partial_i(S) = \{e \in \mathcal{E} : \min\{|e \cap S|, |e \cap S|\} = i\}$。我们在 $|e \cap S|$ 和 $|e \cap S|$ 之间取最小值，以确保所得超图割函数具有对称性，从而推广图割函数对称这一性质。设 $w_i \geq 0$ 为分配给 $\partial_i(S)$ 中每条超边的惩罚。将 w_0 设为 0，以确保只有实际被割开的超边才会受到惩罚。基数型超图 s-t 割问题定义如下：

$$\min_{S \subseteq V} \sum_i w_i |\partial_i(S)|, \qquad \text{subject to } s \in S \text{ and } t \in \bar{S}. \tag{1}$$

当 $w_i = 1$ 对每个 $i > 0$，这等价于寻找需要移除的最少超边数，以分隔 s 与 t，并可通过 Lawler 的归约 [3] 在多项式时间内求解。如果 $\mathcal{H}$ 是 3-均匀超图，那么无论如何切割一条超边，都会恰好有一个节点位于 S 中，或恰好有一个节点位于 S中。由于所有超边的割惩罚都相同，因此可以用 Lawler 算法求解。

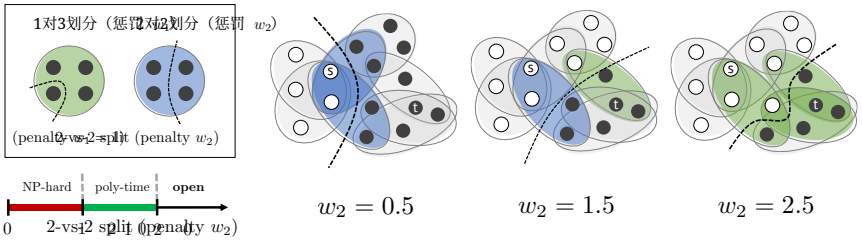


图 3：在 4-均匀超图中，s-t割的最优解取决于分配给 2 对 2 超边划分的惩罚 w_2（即二分划分两侧各有两个节点）。所有 1 对 3 超边划分的惩罚均为 $w_1 = 1$。先前的研究表明，当 $w_2 \in [0, 1)$ 时，该问题是 NP-hard 的；而当 $w_2 \in [1, 2]$时，可在多项式时间内求解。当 $w_2 > 2$时，该问题的复杂度仍未解决。

***4*-均匀超图的结果。** 当 $\mathcal{H}$ 为 4-均匀时，2 对 2 划分（惩罚为 w_2）与 1对3划分（惩罚为w_1）有所不同。只要 $w_1 > 0$，就可以对参数进行缩放而不失一般性，使得 $w_1 = 1$。对于某些 w_2 的取值，Veldt、Benson 和 Kleinberg [6]展示了如何将超图问题归约为图的 s-t 割问题，

方法是用包含辅助顶点和有向边的构件替换每条超边。目标是设计构件，使归约后有向图中的割惩罚与原超图中的割惩罚相匹配。在 4-均匀情形中，事实证明，当且仅当 $1 \leq w_2 \leq 2$ 时，这才有可能。如果 $0 \leq w_2 < 1$，则可通过从最大割的优化版本归约，证明该问题为 NP-hard；最大割是 Karp 的 21 个 NP完全问题之一 [2]。若 $G = (V, E)$ 是表示一个最大割实例的无权图，此归约会构造一个具有相同节点集并额外包含两个节点 s 和 t的超图。对于每条边 $(u, v) \in E$，都会引入一条超边$\{u, v, s, t\}$；由于它同时包含 s 和 t，因此在所得超图的 s-t割问题中，它必须被割开。如果 $w_2 < w_1 = 1$，那么超边的 2 对 2 划分比 1对3划分代价更低。因此，最小 s-t 割就是使 2 对 2 超边划分数量最多的割，这等价于在 G 中寻找一种节点的二分划分，使被割开的边数量最大。

开放问题与研究动机。根据上述符号和术语，我们的开放问题可以正式表述如下。

开放问题 3.1。当 $w_2 > 2$ 和 $w_1 = 1$ 时，基数型 4-均匀超图 s-t 割问题的复杂性如何?

除了图归约策略不再适用之外，目前对该问题的计算复杂性一无所知。一个合理的第一步是研究将 $w_1 = 1$ 设为某值并令 $w_2 \to \infty$ 取极限所得的特殊情形。该极限收敛到 No-Even-Split 4-均匀 s-t 割问题：在分隔 s 和 t 时，尽量减少 1 对 3 超边划分的数量，同时不进行任何 2 对 2 超边划分。将节点 s 单独放入一个簇，总能以一种不产生偶数划分的方式将 s 与 t 分隔开来，但如何找到数量最少的 1 对 3 划分，其计算复杂性尚不清楚。

开放问题3.2。No-Even-Split 4一致 s-t 割问题的复杂度是什么?

这个开放问题的特殊情形 3.1 尤其有趣，因为它与一个 s-t 割问题关系密切，而该问题有一个非常简单的解。具体而言，这个问题乍看之下似乎等价于令 $w_2 = 1$ 并取 $w_1 \to 0$ 的极限，但两者之间存在一个微妙而有趣的区别。令 $w_2 = 1$ 且 $w_1 = 0$ 会得到一个容易优化的退化问题，因为将 s 与其余节点分开时，割代价为 0。然而，如果 $w_1 = 1$ 且 $w_2 \to \infty$，那么将 s

（或 t）与所有其他节点分开。尽管它与一个退化且容易求解的问题关系密切，但尚不清楚 No-Even-Split 4-均匀 s-t 割是否是 NP-hard，或者是否存在一种策略能够在多项式时间内求解。

若能解决 No-Even-Split 问题，希望能为参数区域 $w_2 \in (2, \infty)$ 上的其他多项式时间算法或困难性结果带来启示。对于最大超边大小大于 4 的超图，已知的 NP-hard 性结果与多项式时间解之间的差距更大。当超边大小任意，且割惩罚满足 $w_i = f(i)$，其中 f是某个递增凹函数时，超图问题可以归约为一个有向图 s-t 割问题 [6]。此外，还有一些参数范围已知问题为 NP-hard，但在许多参数设置下，既没有已知的困难性结果，也没有多项式时间解。希望针对 4-均匀情形的新技术也能帮助缩小这些差距。

除了理论价值之外，回答这些问题还有望推动下游应用中实用超图算法的最新进展。广义超图割问题已用于数据挖掘和机器学习应用，例如节点分类 [4, 7, 8]和图像分割 [5], ，但现有方法只关注割惩罚为子模的情形。在大多数应用中，割惩罚也基于基数 [6], ，此时这种子模性恰好对应于由凹函数定义的割惩罚 f。例如，如果改为选择满足 $w_i = g(i)$ 的惩罚，其中函数递增且严格凸，记为 g，那么将同一超边中的节点分配到同一个簇或赋予相同的节点标签，就更有道理了。然而，在这种设置下寻找最小割的计算复杂性尚不明确。带有s-t 的 4-均匀超图割问题是这类凸惩罚超图割问题中最简单的例子。开放问题3.1 的答案将为理解这类问题以及许多其他类型的广义超边割惩罚在算法上可能实现什么，提供亟需的第一步。

参考文献

[1] Lester Randolph Ford 和 Delbert R. Fulkerson。《网络中的最大流》。载于：加拿大数学杂志8 (1956)，第 399–404 页。[2] Richard M. Karp。《组合问题之间的可归约性》。施普林格，2010。

[3] E. L. Lawler。《超图的割集与划分》。载于：*Networks*3.3 (1973)，第 275–285 页。 DOI：10.1002/net.3230030306。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/net.3230030306。 URL：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230030306。[4] Pan Li 和 Olgica Milenkovic。《子模超图：p-拉普拉斯算子、切格不等式与谱聚类》。载于：第*35*届国际机器学习会议论文集。第80卷。ICML '18。PMLR，2018，第 3014–3023 页。 URL：http://proceedings.mlr.press/v80/li18e.html。[5] Nate Veldt、Austin R Benson 和 Jon Kleinberg。《针对基数型分量的可近似分解子模函数最小化》。载于：神经信息处理系统进展34 (2021)。[6] Nate Veldt、Austin R Benson 和 Jon Kleinberg。《具有一般分裂函数的超图割》。载于：*SIAM*评论64.3 (2022)，第 650–685 页。[7] Nate Veldt、Austin R. Benson 和 Jon Kleinberg。《超图中局部化比率割目标的最小化》。载于：第*26*届 *ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘国际会议论文集。KDD '20。2020年。[8] Yu Zhu 和 Santiago Segarra。《具有边依赖顶点权重的超图割》。载于：应用网络科学7.1 (2022)，第 1–20 页。

4. 有向无环图中的边消去与顶点消去问题

Uwe Naumann

引言。 过去几十年间，计算机硬件和软件的发展取得了令人瞩目的进步。因此，数值模拟已成为科学与工程的支柱之一。具有实际意义的现实世界现象会用数学模型加以描述。对这些模型进行数值求值，可得到多元向量函数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，它们通常由高度复杂的计算机程序实现。

数值程序的算法微分 [7, 11]在计算科学与工程的众多领域中发挥着核心作用，包括误差估计、不确定性量化、参数敏感性分析、模型校准和优化。例如，所得导数程序可用于计算（可微）函数的雅可比矩阵F.

数值程序中的数据流会形成一个有向无环图（DAG） $G = (V,\ E)$，其中整数顶点表示程序的所有输入值、中间值和输出值 $v_i,\ \ i = 1$、.....、$|V|$，有向边 $E \subseteq V \times V$ 则表示数据依赖。将局部偏导数$d_{i,\ j} = \frac{\partial v_j}{\partial v_i}$ 与所有边相关联，即可得到微分链式法则：

$$\frac{dv_t}{dv_s} = \sum_{(s,*,t)} \prod_{(i,j)\in(s,*,t)} d_{i,j}\ , \tag{2}$$

其中求和遍历连接顶点 s、$*$、t 的所有路径（ s 和顶点 t [1]）。因此，可以为由这两个顶点表示的任意一对值定义（偏）导数。

问题的形式化表述。

定义 4.1（边消除）。设 $G = (V、\ E)$ 和 $(i、\ j) \in E$. 前向消除 $(i、\ j)$，得到 $G - (i、\ j) \equiv G^f = (V^f、\ E^f)$，使得

$$V^f = \begin{cases} V & \text{if } |P_i| > 1 \\ V \setminus j & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad E^f = E \cup \{(i,k) : k \in S_j\}$$

代价为 $|S_j|$.

后向消除 $(i、\ j)$，得到 $G - (j、\ i) \equiv G^b = (V^b、\ E^b)$，使得

$$V^b = \begin{cases} V & \text{if } |S_i| > 1 \\ V \setminus i & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad E^b = E \cup \{(k,j) : k \in P_i\}$$

代价为 $|P_i|$.

前向-/后向-/可消除的 边必须具有非空的后继 [前驱] 集合。根据微分链式法则，所有完整的边消除序列都会将 G 转换为一个二部有向无环图，该图表示底层数值程序的雅可比矩阵。边消除序列的代价是各个边消除操作代价之和。我们的目标是在所有完整的边消除序列中使代价最小化。

开放问题 4.1 (Edge Elimination)。给定一个有向无环图G 和一个正整数 $k \geq 0,\ \ $ 是否存在一个代价小于或等于 k 的完整边消除序列?

消除一个顶点等价于对其入边进行前向消除。同样，这也等价于对其出边进行后向消除。

定义 4.2（顶点消去）。令 $G = (V,\ E)$，对 j进行 $j \in V$. 消去 后得到 $G - j \equiv G' = (V',\ E')$，使得

$$V' = V \setminus j \quad \text{and} \quad E' = E \cup \{(i,k) : i \in P_j \text{ and } k \in S_j\}$$

代价为 $|P_j| \cdot |S_j|$.

可消去的顶点必须具有非空的前驱集和后继集。根据微分链式法则，所有完整的顶点消除序列都会将 G 转换为表示底层数值程序雅可比矩阵的二部有向无环图。顶点消除序列的代价是各个顶点消去代价之和。我们的目标是在所有完整顶点消除序列中使代价最小。

开放问题 4.2（Vertex Elimination）。给定一个有向无环图 G 和一个正整数 $k \geq 0$，是否存在一个代价小于或等于 k的完整顶点消除序列?

什么是 *[未知]* 。边消除和顶点消去都会终止。其结构和数值正确性可由链式法则推出 [9]。

定理 4.3。 Jacobian Accumulation是 *NP*完全问题。

证明见 [10], 使用了从 Ensemble Computation [4]出发的归约。它利用局部偏导数之间潜在的代数依赖关系（尤其是相等关系；这些偏导数是有向无环图中边上的标签）。在相同假设下， Edge Elimination 和 Vertex Elimination 最终都被证明为 NP完全问题。定义4.1和4.2 中纯结构化表述的计算复杂性尚不清楚。

用于计算优质顶点消去和边消除序列的启发式方法基于结构化表述，例如 [2, 3, 5, 12]。

在稀缺性 [6]的情况下，需要使用不完整的消除序列。相关组合 MinimumEdge Count 问题要求以边数最少的有向无环图表示雅可比矩阵（不显式构造矩阵），其计算复杂性尚不明确 [8]。最终，应考虑 Edge Elimination 与 Vertex Elimination和 Minimum Edge Count的组合。

参考文献

[1] W. Baur 和 V. Strassen。《偏导数的复杂性》。载于：《理论计算机科学》22（1983），第 317–330 页。 ISSN：0304- 3975。[2] J. Chen 等。《一种求解最优导数累积的整数规划方法》。载于：《算法微分最新进展》。S. Forth 等编。第 87 卷。计算科学与工程讲义。柏林：施普林格，2012 年，第 221–231 页。 ISBN：978-3-540-68935-5。 DOI：10.1007/978-3-642-30023-3 20。[3] S. Forth 等。《通过源代码变换和顶点消去生成的雅可比代码可与手工编写的代码同样高效》。载于：ACM 数学软件汇刊 30.3（2004年），第 266–299 页。 URL：http://doi.acm.org/10.1145/1024074.1024076。[4] M. Garey 和 D. Johnson。《计算机与难解性：NP完全性理论指南》（数学科学丛书）。第一版。W. H. Freeman，1979 年。[5] A. Griewank 和 U. Naumann。《将雅可比矩阵累积为链式稀疏矩阵乘积》。载于：《数学规划》A辑 95.3（2003），第 555–571 页。 ISSN：0025-5610。 URL：http://dx.doi.org/10.1007/ s10107-002-0329-7。[6] A. Griewank 和 O. Vogel。《雅可比矩阵稀缺性的分析与利用》。载于：《复杂过程的建模、模拟与优化》。H. Bock 等编。柏林：施普林格，2005 年，第 149–164 页。[7] A. Griewank 和 A. Walther。《导数计算：算法微分的原理与技术》。第 2 版。《应用数学其他著作》第 105 卷。宾夕法尼亚州费城：SIAM，2008 年。 ISBN：978–0– 898716–59–7。[8] V. Mosenkis 和 U. Naumann。《在线性化有向无环图中，为最小边数和最优雅可比矩阵累积问题保持最优性的消去方法》。载于：《优化方法与软件》27.2（2012），第 337–358 页。[9] U. Naumann。《通过对偶计算图上的消去方法实现雅可比矩阵的最优累积》。载于：《数学规划》A辑 99.3（2004），第 399–421 页。 ISSN：0025-5610。 URL：http://dx.doi.org/10.1007/s10107-003-0456-9。[10] U. Naumann。《最优雅可比矩阵累积是NP完全问题》。载于：《数学规划》A辑 112.2（2008），第 427–441 页。 ISSN：0025-5610。 URL：http://dx.doi.org/10.1007/s10107-006-0042-z。

[11] U. Naumann。《计算机程序微分艺术》：算法微分导论。软件、环境与工具 24。宾夕法尼亚州费城：SIAM，2012 年。 ISBN：978–1–611972–06–1。URL：http://bookstore.siam.org/se24。[12] J. Pryce 和 M. Tadjouddine。《通过紧凑 LU 分解快速自动微分雅可比矩阵》。载于：*SIAM* 科学计算杂志30.4（2008），第 1659–1677 页。 DOI：10.1137/050644847。 URL：http://link.aip.org/link/?SCE/30/1659/1。

5. 数据流反转问题

Uwe Naumann

引言。过去几十年里，计算机硬件和软件的发展取得了令人瞩目的进步。因此，数值模拟已成为科学与工程的重要支柱之一。具有实际意义的现实世界现象通常以数学模型描述。对这些模型进行数值求值，可得到多元向量函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \mathbf{y} = F(\mathbf{x})$，它们通常由极其复杂的计算机程序实现。

在给定输入下对数值程序求值，会生成一个有向无环图（DAG） $G = (V, E)$。其整数顶点 $V = (X, Z, Y)$ 包括 $n \geq 1$ 表示 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$p \geq 0$ 的源节点 $X = \{1, \ldots, n\}$、$Z = \{n+1, \ldots, n+p\}$ 中间顶点以及 $m \geq 0$ 表示 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. 的汇点 $Y = \{n+p+1, \ldots, n+p+m\}$。中间顶点和汇点对应对基本函数的调用

$$\mathbf{v}_j = F_j(\mathbf{v}_i)_{(i,j)\in E} \quad \text{for } j = n+1, \ldots, n+p+m \, .$$

有向边 $E \subseteq V \times V$ 源于程序中相应的数据依赖。顶点的拓扑序由此确定。数值模拟的有向无环图会变得非常庞大。它们不具持久性，因为无法存储在内存中。

数值程序的算法微分（AD） [7, 13]在伴随模式下，在误差估计、不确定性量化、参数敏感性分析、模型校准和优化等众多计算科学与工程领域中发挥着核心作用。它能以机器精度高效地计算（$\mathcal{O}(m)$ 梯度（$m = 1$），否则就必须通过数值近似来计算，代价为 $\mathcal{O}(n)$，其中通常 $n \gg 1$. 请参阅 www.autodiff.org，了解 AD 项目和研究小组的链接，以及关于该主题的详尽参考书目。

算法伴随将 $\bar{}\mathbf{x} = \bar{}\mathbf{x} + F'(\mathbf{x})^T \cdot \bar{}\mathbf{y}$ 计算为

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i + F'_j(\mathbf{v}_i)_{(i,j)\in E} \cdot \bar{\mathbf{v}}_j \quad \text{for } j = n+p+m, \ldots, n+1$$

通过按逆序访问非持久$\mathbf{v}_i$ 。等价地，有向无环图G 通过按逆序访问其顶点来反转。给定实现中程序变量被覆盖而丢失的值 F 需要恢复。简单地说，可以将所有被覆盖的所需 [1, 9] 值压入栈中。数据流反转所需的持久内存达到最大值（$\mathcal{O}(n+p)$）。另一种方法是从持久输入重新计算所有被覆盖的所需值，从而使持久内存需求达到最小值（$\mathcal{O}(n)$）。反转非持久内存中的数据流会产生二次计算成本（$\mathcal{O}(p^2)$）。每个中间值都需要从$\mathbf{x}$重新计算。不失一般性，可以假设所有 F_j. 组合 DAG Reversal 问题旨在有限的（$\ll \mathcal{O}(p^2)$）持久内存中，最小化数据流反转的计算成本。

数据流反转除了应用于算法伴随之外，还可用于大规模数值模拟的反向调试 [4] ，以及用于提升计算机系统容错性的检查点技术 [16]。

问题的形式化表述。

开放问题5.1 (DAG Reversal)。 给定一个有向无环图 G和两个整数$M \geq n$ 和 $O \geq 0$ ，能否在大小小于或等于 M 的持久内存中，以小于或等于 O的计算成本反转 G ?

哪些内容 *[*尚*]*未知。

定理5.1。 DAG Reversal 是*NP*完全的。

证明见 [12]。相关的 Call Tree Reversal问题也已知是NP完全的 [11]。

数据流反转方法的最新进展主要由针对特定模拟场景的特殊情况解决方案推动 [3, 15, 17]。针对某些类型的演化（有向无环图为简单链）的最优检查点方法已得到开发 [5, 6]。推广方法包括用于 Call Tree Reversal [10] 的混合整数规划和分治方法 [14]。更多信息请参阅 [8] 。

组合数据流反转问题有望从进一步的形式化理论分析中获益。尤其是，目前还没有可用的近似方法。

参考文献

[1] B. Dauvergne 和 L. Hasco¨et.《反向自动微分中检查点的数据流方程》。载于：《计算科学——ICCS 2006》。V. Alexandrov 等编。第 3994 卷。计算机科学讲义。海德堡：施普林格，2006 年，第 566–573 页。[2] C. Bischof 等编。《自动微分进展》。计算科学与工程讲义（LNCSE）64。施普林格，2008 年。[3] I. Charpentier.《检查点方案还是伴随代码：在气象模型 Meso-NH 中的应用》。载于：《SIAM 科学计算杂志》22.6（2001 年），第 2135–2151 页。[4] J. Engblom.《反向调试综述》。载于：2012 年系统、软件、SoC 与硅调试会议论文集（2012 年），第 1–6 页。[5] A. Griewank.《在反向自动微分中实现时间与空间复杂度的对数增长》。载于：《优化方法与软件》1（1992 年），第 35–54 页。[6] A. Griewank 和 A. Walther.《算法 799：Revolve：一种用于计算微分反向或伴随模式的检查点实现》。载于：ACM 数学软件汇刊 26.1（2000 年 3 月），第 19–45 页。[7] A. Griewank 和 A. Walther.《导数计算：算法微分的原理与技术》。第 2 版。应用数学其他著作 105。宾夕法尼亚州费城：SIAM，2008 年。 ISBN：978–0–898716–59–7。[8] L. Hasco¨et.《伴随算法的反转策略》。载于：《从语义学到计算机科学：纪念 Gilles Kahn 文集》。Y. Bertot 等编。剑桥大学出版社，2009 年，第 487–503 页。[9] L. Hasco¨et、U. Naumann 和 V. Pascual.《反向模式自动微分中的待记录分析》。载于：《未来一代计算机系统》21（2005 年），第 1401–1417 页。[10] J. Lotz、U. Naumann 和 S. Mitra.《用于调用树反转的混合整数规划》。载于：第七届 SIAM 组合科学计算研讨会论文集。SIAM，2016 年，第 83–91 页。[11] U. Naumann.《调用树反转是 NP完全问题》。载于： *[2]*。施普林格，2008 年，第 13–22 页。[12] U. Naumann.《有向无环图反转是 NP完全问题》。载于：《离散算法杂志》7（2009 年），第 402–410 页。

[13] U. Naumann。《计算机程序微分艺术：算法微分导论》。软件、环境与工具 24。宾夕法尼亚州费城：SIAM，2012年。 ISBN：978–1–611972–06–1。URL：http://bookstore.siam.org/se24。[14] J. Siskind 和 B. Pearlmutter。“适用于任意程序且无需用户注释的分治检查点”。载于：《优化方法与软件》33.4–6（2018），第1288–1330页。[15] W. Symes。“采用最优检查点的逆时偏移”。载于：《地球物理学》72.5（2007年9月），SM213–SM221。[16] A. Walther 和 S. Narayanan。“增强用于容错的二项式检查点技术”。载于：*2016*年 *SIAM* 组合科学计算研讨会（*CSC16*）。扩展摘要。[17] Q. Wang、P. Moin 和 G. Iaccarino。“用于非定常伴随计算的最小重复动态检查点算法”。载于：《*SIAM* 科学计算杂志》31.4（2009），第2549–2567页。

6. 异步性的代价

Carlos Ortiz Marrero，Stephen J. Young

引言。 求解大规模线性方程组 x^* 是科学计算中最常见的计算基本操作之一，也是多种应用数值方法的基础，包括计算流体动力学、优化和大气建模。尽管求解这类方程组的方法有很多（例如高斯消元法、克雷洛夫子空间方法或共轭梯度法），迭代方法因其直接明了、易于实现而广受欢迎。总的来说，迭代方法会巧妙地选择一个辅助矩阵 M，并利用 M 生成一个近似解$x^{(0)}$，$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，.....的序列，其递推关系为 $Mx^{(k+1)} = (M - A)$ $x^{(k)} + b$。因此，如果形如 $My = c$ 的方程组易于求解，就可以只付出一次矩阵向量乘法的代价来改进近似解。例如，当 M 取为 A 的（经缩放的）对角部分时，便得到（阻尼）雅可比迭代；当 M 取为 M的下三角部分时，便得到高斯-赛德尔迭代。

通常，对这些方法的分析会研究残差序列 $r^{(k)} = x^{(k)} - x^*$，而非直接研究近似解序列。很容易看出，残差解满足定义近似解的递推关系的齐次形式，

即 $Mr^{(k+1)} = (M - A)r^{(k)}$. 事实上，如果 M 可逆，那么残差序列为 $r^{(k)} = C^k r^{(0)}$，其中 $C = I - M^{-1}A$ 称为迭代矩阵。因此，求解 $Ax = b$ 的迭代方法可以理解为反复进行矩阵乘法。事实上，当且仅当 C 的谱半径 $\rho(C)$ 严格小于 1 时，迭代方法的收敛性与初始近似解无关。更进一步，如果 $\rho(C) < 1$，那么 $-\log_{10}(\rho(C))$ 给出了近似解增长速率（以迭代次数计）的下界，也就是说，$x^{(k)}$ 的精度小数位数约为 $-\log_{10}(\rho(C))$ $k + \log_{10}(\left\|r^{(0)}\right\|)$。

虽然迭代方法在求解线性系统方面非常有效且实用，但在考虑大规模系统时会遇到重大挑战 $Ax = b$，例如风力涡轮机建模、反应堆过程建模、用于催化剂设计的计算化学等诸多应用中出现的系统。具体而言，矩阵 A 可能非常庞大，以至于无法有效地存储在单个计算节点的内存（随机存取存储器）中——这就必须反复传输 A 的部分数据进出内存，从而显著降低性能；或者将系统拆分成若干部分，并使用多个计算节点来构建解。

更具体地说，假设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 且 $b \in \mathbf{R}^n$，我们希望使用标记为 1、2、.....、ℓ 的计算节点来求解系统 $Ax = b$。一种方法是将 A 的行划分为 ℓ 个集合，从而得到矩形矩阵$A_i \in \mathbf{R}^{k_i\times n}$，并对 M、x 和 b进行相应的划分。在雅可比迭代等情形中，只需对对角矩阵 M采用相同的划分，即可轻松扩展迭代方案，也就是 $M_i x_i^{(k+1)} = (M_i - A_i)x^{(k)} + b_i$，其中 $x^{(k)}$是在第 k次迭代时由局部解 $x_1^{(k)}$、.....、$x_\ell^{(k)}$ 重构得到的近似解。对于非对角的 M，例如高斯-赛德尔迭代，朴素的方法是使用下三角形式迭代求解 $x_i^{(k+1)}$，然后将关于 $x_i^{(k+1)}$ 的信息“传递”给后续计算节点，以便利用下三角形式求解 $x_{i+1}^{(k+1)}$、$x_{i+2}^{(k+1)}$、.....、$x_\ell^{(k+1)}$. 然而，这两种方法都会因不同计算节点之间的通信耗时而导致计算延迟。

在 Aurora、富岳和 LUMI 等大型高性能计算（HPC）系统中，这个问题尤为突出：系统规模以及整体网络拥塞可能导致显著的节点间通信延迟。事实上，据估计，对于某些科学计算，通信耗时占计算总时间的 50% 以上。

要求 [1]。在其他情境中，人们发现，通过异步地执行工作，也就是说，无需等待远程节点上的计算或工作结果，可以显著提高高性能计算（HPC）系统的性能 [2, 3, 4]。然而，人们对异步性如何影响求解线性方程组的迭代方法知之甚少。更一般地说，我们希望理解异步性的代价，也就是异步更新对迭代方法收敛速度的影响。

问题陈述。 为了初步理解异步性的代价，我们提出一个简单的异步更新模型。首先，我们假设迭代方法可以通过递推关系表示$x^{(k+1)} = Mx^{(k)}$其中，M是一个 $n \times n$实矩阵，其 $\rho(M) < 1$。为了为 M构建一个简单的异步更新模型，我们将矩阵 M划分为一个 $\ell \times \ell$ 分块数组，并对每个 $i \in [\ell]$ 定义更新方案

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \sum_j M_{ij} \tilde{x}_j^{(k-\delta_{ji})},$$

其中， δ_{ji} 表示信息从计算节点 j 到达计算节点 i 时的“延迟”（因此我们假设 $\delta_{ii} = 0$）。异步性的代价 可以看作 $\left\|x^{(k)}\right\|$和 $\left\|\tilde{x}^{(k)}\right\|$ 收敛到 0 的速率之差。按照这种表述，对于任意 $\kappa \geq \max_{i,\ j} \delta_{ij}$ 异步更新都可以看作定义在 $\mathbf{R}^{(\kappa+1)n}$ 上的一个线性算子，它将$(\tilde{x}^{(\kappa)}, \ldots, \tilde{x}^{(0)})$映射为$(\tilde{x}^{(\kappa+1)}, \ldots, \tilde{x}^{(1)})$，其中，对于所有分块 i， $\tilde{x}_i^{(\kappa+1)} = \sum_j M_{ij} \tilde{x}_j^{(\kappa-\delta_{ji})}$。我们用 $M^{(\delta,\kappa)}$ 表示该线性算子的矩阵，并注意到 $M^{(0,\kappa)}$ 对应于同步更新，它保留了 κ 步的历史记录。

引理 6.1. 设 M 为一个 $n \times n$ 实矩阵，具有 $\rho(M) < 1$ 分块成的数组。设 δ 是 $\mathbf{N}^{\ell \times \ell}$ 中的一个元素，使得 $\delta_{ii} = 0$ 对所有 i均成立。假设$\max_{ij} \delta_{ij} \leq \kappa \leq \kappa'$，则 $\rho(M^{(\delta,\kappa)}) = \rho(M^{(\delta,\kappa')})$。

证明。假设 (μ, v) 是 $M^{(\delta,\kappa)}$ 的一个特征对。由于 $M^{(\delta,\kappa)}$ 将 $(\tilde{x}^{(\kappa)}, \ldots, \tilde{x}^{(0)})$ 映射为 $(\tilde{x}^{(\kappa+1)}, \ldots, \tilde{x}^{(1)})$，因此存在某个向量 $v_0 \in \mathbf{R}^n$，使得 $v = (\mu^\kappa v_0, \mu^{\kappa-1} v_0, \ldots, \mu v_0, v_0)$。此外，由于 v 是 $M^{(\delta,\kappa)}$ 的特征向量，我们有 $\mu^{\kappa+1}(v_0)_i = \sum_j \mu^{\kappa-\delta^{ji}} v_0$。现在定义向量 $v' = (\mu^\kappa v_0, \mu^{\kappa-1} v_0, \ldots, \mu v_0, v_0, \mu^{-1} v_0, \ldots, \mu^{\kappa-\kappa'} v_0)$，并考察 $M^{(\delta,\kappa')} v'$。根据构造，对于某个 $w' \in \mathbf{R}^n$，有 construction $M^{(\delta,\kappa')} v' = (w', \mu^\kappa v_0, \ldots, \mu^{\kappa-\kappa'+1} v_0)$。此外， $w'_i = \sum_j \mu^{\kappa-\delta_{ji}} v_0 = \mu^{\kappa+1}(v_0)_i$。因此，$(\mu, v')$ 是 $M^{(\delta,\kappa')}$ 的一个特征对。类似的论证表明，

任意 $M(\delta,\kappa')$的特征对都对应着 $M^{(\delta,\kappa)}$ 的一个特征对。特别地，这两个矩阵共谱，因此具有相同的谱半径。

□

由引理 6.1可直接得出， $\rho(M^{(0,\kappa)}) = \rho(M)$，对任意 κ. 此外，我们只需关注 $M^{(\delta,\kappa)}$ 在任意时延系统 δ和 $\kappa =$最大值 δ的谱半径。因此，我们稍微滥用一下记号，用 $M^{(\delta)}$ 表示以下族中的任意一个元素$\{M^{(\delta,k)} \mid k \geq$ 最大值 $\delta\}$。

直观来看，如果固定最大时延 k，那么 $\rho(M^{(\delta)})$ 在任意一对节点之间的时延都达到最大时延时取最大值。在这种情况下，时延的均匀性使得可以显式计算 $\rho(M^{(\delta)})$。

引理 6.2. 设 M是一个 $n \times n$ 实矩阵，其 $\rho(M) < 1$ 被划分为一个由分块组成的 $\ell \times \ell$ 数组。设 δ是 $\mathbf{N}^{\ell\times\ell}$ 中的一个元素，满足：对于 M 的所有非零块， $\delta_{ij} = k$；则 $\rho(M^{(\delta)}) = \rho(M)^{1/k+1}$。

证明。 如引理 6.1所述，任意特征对 (μ, v) 对于 $M^{(\delta,\kappa)}$ 都具有如下形式$v = (w, \mu^{-1}, \ldots, \mu^{-\kappa}w)$，其中 $\mu w_i = \sum_j \mu^{-\delta_{ij}} M_{ij} w_j$。然而，由于 $\delta_{ij} = k$对于 M的任意非零分块都成立，因此可推出 $\mu w = \mu^{-k} M w$，且 (μ^{k+1}, w) 是 M 的一个特征对。容易看出，类似的构造可以将 M 的一个特征对变为 $M^{(\delta,\kappa)}$的一个特征对。关于谱半径的所需结论随即成立。

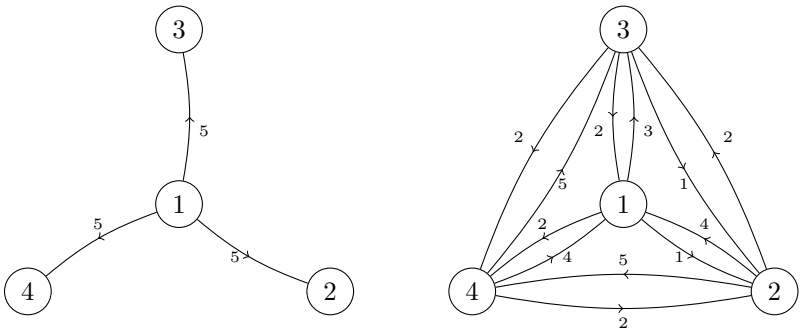
□

由此自然引出以下开放问题：

开放问题 6.1。 设 M 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其 $p(M) = \lambda < 1$被划分为一个分块阵列。对于 $[k]^{\ell\times\ell}$ 中所有对角线为零的元素 δ，是否都有 $\rho(M^{(\delta)}) \leq \lambda^{1/k+1}$? 如果不是，是否存在某个函数$f\colon (0,1) \times \mathbf{N} \to (0,1)$，使得 $\rho(M_{(\delta)}) \leq f(\lambda, k)$?

直观来看，这似乎是收敛速度可能遇到的最坏情况，也就是说，所有延迟都至多为 k。

实验结果。 为了初步解决这个问题，考虑从三种不同的系综中选取随机矩阵 M 。这些系综均由矩阵 X 导出，其中各元素相互独立且服从均值为零的正态分布； $M = X$是高斯正交系综，其中$M = X + X^T$； $M = XX^T$ 是 Wishart 系综。为方便记号，假设将 M 重新缩放，使其谱半径为 1。对于这些矩阵系综，我们还分别考虑与分块雅可比迭代相关联的迭代矩阵（同样将其归一化为范数 1），



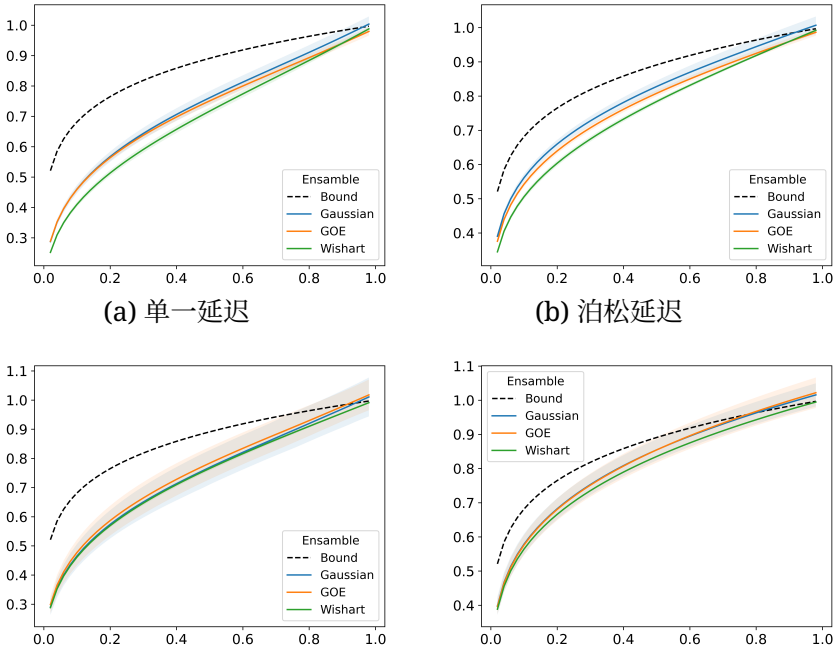
(a) 单一延迟 (b) 泊松延迟

图4：异步计算中的延迟模式。由 j 指向 i 的权重为 d的边表示信息从 j 传播到 i时延迟了 d 个时间步，即 $\delta_{ji} = d$。

也就是说，对角块为零，非对角块定义如下：$M_{ii}^{-1}M_{ij}$其中 M_{xy}表示 x， y 块，属于 M。在这六种情形中，我们还分别考虑 4 个计算节点的两种不同延迟模式：一个节点的延迟为 5，其余节点的延迟均为 0（图4a）；以及均值为 3 的随机泊松延迟（图 4b）。在图 5中，我们绘出了这些图在 50 次不同试验中的 $\rho((cM)^{(\delta)})$ 与 $c \in (0, 1)$ 之间的关系。

这些实验似乎至少在一定程度上支持了这样的猜想： $\rho(M(\delta)) \leq \rho(M)^{1/\max \delta}$，至少当 $\rho(M)$足够小时是如此。当 $\rho(M)$接近一时，我们预计，对该猜想的违反至少部分可能是谱半径计算中数值不稳定性所致。特别是，从引理 6.1 和 6.2 的证明中很容易看出，尽管 $M^{(\delta,\kappa)}$ 是一个 $(\kappa+1)n \times (\kappa+1)n$ 矩阵，但几何重数之和至多为 n。更复杂的是， $M^{(\delta)}$ 是非厄米的，且其元素既有正号也有负号，这增加了产生谱半径的特征值为复数的可能性。

另一个值得注意的现象是，当存在一个恒定延迟时，完整矩阵迭代与分块雅可比迭代的表现差异相对较小；而对于泊松延迟，分块雅可比迭代的谱半径则显著更高。一种可能的解释是考察平均有效延迟（定义为 M 的非零块上的平均延迟）：对于单个延迟节点，该值为 $15/16$；对于



(a) 单一延迟　(b) 泊松延迟

(c) 单一延迟，分块雅可比　(d) 泊松延迟，分块雅可比

图5：异步性的代价。对于三种矩阵系综中的每一种，实线表示从该系综中抽取的 50 个不同样本的平均谱半径，阴影区域表示两个标准差的范围。虚线表示以同步更新矩阵的谱半径为依据的猜想上界。

具有单个延迟节点的雅可比迭代，该值为 $33/16$；对于泊松延迟，该值为 $33/12$；对于具有泊松延迟的雅可比迭代，该值为 ρ。因此，人们或许可以推测，理解 $\rho(M^{(\delta)})$ 的关键参数是平均延迟，或许还应根据单个块的谱半径进行加权。

致谢。作者衷心感谢美国能源部先进科学计算研究办公室应用数学计划的资助，该资助属于异构环境下迭代求解器的随机化技术（RATFISH）项目。太平洋西北国家实验室由 Battelle 根据合同 DE-AC05-76RL01830 为美国能源部运营。

参考文献

[1] Nikhil Jain。《HPC网络上通信密集型应用的优化》。博士论文。伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校

，

2016年。[2] Joshua Suetterlein 等。“异步运行时实践：面向下一代运行时的内省框架”。载于：*2016*年 *IEEE* 国际并行与分布式处理研讨会工作坊（*IPDPSW*）。2016年，第 1744–1751 页。 DOI: 10.1109/IPDPSW.2016.191。[3] Joshua Suetterlein 等。“异步多任务运行时与大数据的结合：一瞥”。载于：*2020*年 *IEEE* 第 *27* 届高性能计算、数据与分析国际会议（*HiPC*）。2020年，第 233–242 页。 DOI: 10.1109/HiPC50609.2020.00037。[4] Joshua D. Suetterlein 等。“扩展异步多任务运行时的屋顶线模型”。载于：*2016*年 *IEEE* 簇计算国际会议（*CLUSTER*）。2016年，第 493–496 页。 DOI: 10.1109/CLUSTER.2016.47。

7. 电网的（$n-k$）条件零强迫

Sinan G. Aksoy、*Anthony V. Petyuk*、*Sandip Roy*、*Stephen J. Young*

引言。随着微电网、可再生能源、边缘发电和分布式能源资源的渗透率不断提高，维持电网输电稳定性的方式已发生巨大变化。例如，过去电网发电主要依靠大型旋转涡轮机（例如，由下落的水流驱动的水力涡轮机，以及燃气/燃煤/核电厂中的蒸汽动力涡轮机）。然而，2022年，公用事业规模发电中近14%来自风能或太阳能 [14]。与涡轮机发电不同，风能和太阳能发电都没有“惯性”，因此总发电量容易快速波动，且运营商无法控制。这给旨在通过调节发电量来维持电网稳定性的控制方案带来了巨大压力。电力系统中微电网渗透率不断提高，也使这些控制方案面临挑战：微电网是电网中的小型区域，其中包含足够的内部发电能力，因此能够脱离更大的电网运行，以提升局部稳定性。随着微电网改变与电网的连接方式，支配电网潮流的基本电气方程也会随之改变，进而影响控制方案。

电网的变化不仅给稳定控制带来挑战，也带来了提升容错性和效率的多种机遇。例如，过去25年来，人们已在电网内的特定地点部署了相量测量单元（PMU），用于测量当地电网的状态（即电压幅值和相位角），测量频率最高可达每秒120次，远高于以往每隔几秒才测量一次的方法。分布式能源资源（DER），例如电网级电池装置，渗透率不断提高，也为提升电网的容错性和稳定性创造了另一种机遇。这些大型电池装置不仅能够通过时间套利来调配可再生能源的电力（例如，储存太阳能电池板白天产生的多余电力，以供夜间使用），还可以通过选择性充电、孤岛运行和放电，成为电网的替代控制点，从而向整个电网系统快速注入电力。此外，由于电网级电池占地面积远小于传统发电厂，因此可以将其部署在有利于控制和稳定性的地点。

鉴于电网结构和运行点的多样性，要判断一组 PMU 是否能充分实现电网状态的可观测性，或者一组分布式能源资源是否能够稳定电网，似乎几乎难以做到。幸运的是，这两个问题都可以归结为一个关于电网结构的组合问题，即零强制。

定义 7.1（零强迫操作）。给定一个图 $G = (V, E)$ 和一组$S \subseteq V$ 被标为蓝色的顶点。如果存在一个顶点 s，使得 $\{v\} = N(s) - S$，那么顶点 $v \in V - S$ 就可以通过零强迫操作 被标为蓝色；也就是说，如果存在一个顶点 $s \in S$，使得 v 是 s 唯一一个未被标为蓝色的邻点。如果 v 是通过依赖于 s的零强迫操作被标为蓝色的，我们就说s 被用于将 v标为蓝色。

定义 7.2（零强迫集）。给定一个图 $G = (V, E)$，若存在一系列零强制操作，使得 $Z \subseteq V$ 中的所有顶点都被着色，则称集合 $Z \subseteq V$ 为一个零强迫集 。

关于确定最小零强迫集的大小和结构，已有大量文献（例如参见 [9]及其中的参考文献）。就电网应用而言， [11] 表明，与潮流方程相关的线性动力学可由零强迫集中的控制器实现可控，而 [4, 13] 则表明，如果将相量测量单元布置

在幂支配集上[1]，则可恢复网络中每条母线的相位。因此，分布式能源资源选址（例如电网级电池）和相量测量单元或可实现对电网的实时调控，从而提升效率和韧性。此外，近期研究 [12] 表明，零强迫集可用于识别微电网的控制点。然而，这些研究未能考虑电网的动态特性。具体而言，零强制是针对静态图定义的，无法适应底层网络拓扑的变化，因此限制了其在电网可观测性与控制方面的应用。

条件零强迫。为解决电网背景下零强迫的局限性，我们提出以下对零强迫的扩展，以识别能够实现电网可观测性与控制的韧性集。

定义 7.3 （($n-k$)-条件零强迫）。给定一个图 $G=(V,E)$，若集合 $Z \subseteq V$ 对于任意大小至多为 k 的边集 E'，都是 $G'=(V,E-E')$ 的零强迫集，则称其为 ($n-k$)-条件零强迫集。

我们注意到，Alameda、Kritschgau 和 Young 独立提出的边泄漏零强迫数 [2] 与此定义[2]基本等价。由于电网的输电和配电层级经常呈现“类树”结构，因此首先考察树上的 ($n-k$)-条件零强迫集是很自然的。为此，我们先回顾关于树的零强迫集的以下事实。

定理 7.4 ([6])。若 T 是一棵有 $t \geq 2$ 个叶节点的树，那么任取至少包含 $t-1$ 个叶节点的集合，都是 T.的零强迫集

在 ($n-k$)-条件零强迫的情形下，我们用它来证明以下引理。

引理 7.5。设 $T=(V,E)$ 是一棵树。对于任意 $k \geq 1$，集合 $Z \subseteq V$ 是($n-k$)-条件零强迫集，当且仅当 Z 包含所有度不超过 k 的顶点。

[1]幂支配集是一个顶点集合，S 它与这些顶点的邻域合并后构成一个零强迫集。

[2]不同于 ($n-k$)-条件零强迫，边泄漏零强迫过程中，边不会从图中移除，而是禁止使用。因此，在零强迫过程的某些阶段，条件零强迫过程可能强制出一个严格包含等价边泄漏过程中可强制顶点的集合。不过，Alameda、Kritschgau 和 Young 进一步证明，ℓ-边泄漏零强迫集与 ℓ-泄漏零强迫集相同。因此，根据引理 7.7 ℓ-边泄漏零强迫等价于 ($n-\ell$)-条件零强迫。

证明。 如果对于任意图， Z 是一个（$n-k$）-条件零强迫集，那么它必须包含所有度不超过 k 的顶点。特别地，如果度不超过 k 的某个顶点 v不在 Z 中，那么移除所有与 v关联的边后，得到的图中 Z 就不是零强迫集。

现在令 Z 为 T 中度至多为 k 的顶点集合，并令 F 为从 T 中移除一组 k 条边后形成的森林。首先注意，由于我们至多移除了 k 条边，因此 F 中任意孤立顶点在 T 中的度至多为 k。假设存在一棵树 T'，它有两个叶节点 u、$v \notin Z$。注意，由于 u 和 v 位于 F 中的同一棵树里，因此边 $\{u,v\}$ 不属于 T。所以，要使 u 和 v 都成为 F 中的叶节点，至少必须移除 $k+k>k$ 条边，这与 F 的构造相矛盾。因此，F 中的每棵树要么是属于 Z 的孤立顶点，要么是一棵至多有一个叶节点不属于 Z 的树。因此，根据定理 7.4， F 中的每棵树都可由 Z 强制。 □

($n-k$)-条件零强迫这一思想，并非首次尝试提出一种能够适应底层图变化、具有容错性的零强迫概念。例如，Dillman 和 Kenter [6] 在水流的背景下探讨容错性：水可能会从接合处“漏出”，从而阻止顶点参与强制过程。更形式化地说，他们给出了以下定义：

定义 7.6 （ℓ-泄漏零强迫）。 给定一个图 $G=(V,E)$，集合$Z \subseteq V$ 是一个 ℓ-泄漏零强迫集，当且仅当对于任意大小不超过 ℓ的顶点集合 $L \subseteq V$， Z 都是 G'的零强迫集，其中 G' 是通过向 L中的每个顶点添加一个悬挂顶点得到的。

注意，任何顶点 $v \in L$ 都不能通过零强迫操作用于为其他顶点着色。换言之，零强迫过程会从图中 L 里的顶点处“泄漏”出去，因此它们只能使新的悬挂顶点着色。在许多方面，泄漏零强迫过程可以被视为条件零强迫过程的顶点版本：在泄漏零强迫中，一个未知的顶点集合不能参与零强迫过程；而在条件零强迫过程中，一个未知的边集合不能参与零强迫过程。由此可见，这两个过程实际上等价，也就不足为奇了，下面我们将证明这一点。

引理 7.7。 集合 S 是一个$(n-k)$-条件零强迫集，当且仅当它是一个 k-泄漏零强迫集。

证明。 设 G 是一个图，并假设 Z 是 $G.$ 的一个（$n-k$）条件零强迫集。固定图 G 中任意一组包含 L 个泄漏点的集合，其中 $|L| \leq k$。我们

将确定一个至多包含 ℓ 条边的集合 $\mathcal{E}$，使得 $G-\mathcal{E}$ 存在一个不使用 L 中任何顶点的强制序列。为此，我们基于 Z 迭代构造被移除边的集合 $\mathcal{E}$。注意，只要 $|\mathcal{E}| \leq k$，从 Z 开始的强制过程就可以继续，因为 Z 是一个（$n-k$）条件零强迫集。现在，为了确定 $\mathcal{E}$ 中的这些边，考虑依次应用强制过程，直到首次使用顶点 $v \in L$ 为 u 着色。此时，将边 $\{v,u\}$ 加入 $\mathcal{E}$，并将其从图 G 中移除。由于 v 的所有邻点现在都已着色，在强制过程的后续步骤中，v 不会再为任何邻点着色。因此，我们可以有效地从 L 中移除 v。重复这一过程，得到一个大小至多为 k 的集合 $\mathcal{E}$，以及 $G-\mathcal{E}$ 的一个零强迫操作序列，其中 L 中没有任何顶点会强迫其他顶点。因此，对于 L 中所有顶点均为泄漏点的情形，S 是 G 的一个强制集。

反向论证的过程类似。设 Z 是一个针对 G 的 k-泄漏零强迫集，并固定 G 中任意一组 $\mathcal{E}$ 条边。我们再次反复应用零强迫过程，并在需要时构造泄漏点集 L。具体而言，对于每条边 $\{u,v\} \in E$，我们将该边上第一个被着色的顶点加入泄漏点集 L。显然，这样可以确保边 $\{u,v\}$ 不会用于强制过程，并且最多向集合 L 中添加 k 个顶点。 □

一般而言，确定最小零强迫集的大小是 $\mathcal{NP}$-完全的，即使对于受到严格限制的图类也是如此（例如参见 [8], ）。因此，确定最小的（$n-k$）条件零强迫数极有可能也是 $\mathcal{NP}$-完全的。然而，已知对应于电网网络的图类具有一些不同寻常的结构性质（例如参见 [1, 15]），包括平均度介于 1 和 2 之间、直径随顶点数的平方根增长，以及存在长圈。换句话说，根据引理 7.5，典型的电网网络具有类树结构，而树的最小（$n-k$）条件零强迫集已确切确定。这自然引出了我们的前两个开放问题：

开放问题7.1。对于环较少的图，是否存在对最小规模的（$n-k$）条件零强迫集的结构刻画？对于直径较大的稀疏图呢？

开放问题7.2。是否存在一种高效算法，可以确定环较少的图中最小规模的（$n-k$）条件零强迫集？对于直径较大的稀疏图呢？

即使电网网络的结构性质不足以提供一种高效方法来计算最小或近似最小的（$n-k$）-条件零强迫集，只要这种集合足够小，额外的

计算工作量或许仍值得。不过，为了评估识别最小（$n-k$）-条件零强迫集的价值，若能粗略估算所得集合的大小，将会有所帮助。

开放问题 7.3。 对于具有电网典型结构性质的图而言，最小 $(n-k)$-条件零强迫集的典型规模（以顶点数和边数衡量）是多少？

虽然可以通过将研究范围限制在具有若干标志性结构性质（例如密度、直径、最大度等受到限制）的图类中来回答这个问题，但更有价值的做法或许是借鉴近期有关刻画 Erd˝os-Rényi 随机图 [7]和随机正则图 [3, 10]零强制数的研究成果。尽管这些随机图模型的结构性质与电网相去甚远，但近期出现了一些模型，例如 Chung-Lu 链 [1] 和几何 Delaunay [5] 模型，已被证明能够捕捉电网的一系列结构性质。

致谢。 Sinan G. Aksoy、Anthony V. Petyuk 和 Stephen J. Young 获得了太平洋西北国家实验室（PNNL）实验室指导研究与开发（LDRD）计划下“通过数据驱动的智能设计控制实现容错性”（RD2C）倡议的支持。PNNL 是一所多项目国家实验室，由 Battelle Memorial Institute 根据合同编号 DE-AC05-76RL01830 代表美国能源部（DOE）运营。Sandip Roy 在美国国家科学基金会任职期间开展了这项研究，其支持来自与华盛顿州立大学签订的一项《政府间人事法》协议。

参考文献

[1] Sinan G Aksoy 等人。《电力基础设施网络的生成式图模型》。载于：《复杂网络杂志》7.1（2018年8月），第128–162页。[2] Joseph S Alameda、Juergen Kritschgau 和 Michael Young。《泄漏强制的推广》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2009.07073*（2020年）。[3] Deepak Bal 等人。《随机正则图中的零强迫》。载于：*J. Comb.* 12.1（2021年），第85–116页。 ISSN：2156-3527。 DOI：10.4310/JOC.2021.v12.n1.a4。 URL：https://doi.org/10.4310/JOC.2021.v12.n1.a4。

[4] Dennis J. Brueni 和 Lenwood S. Heath。《PMU布置问题》。载于：SIAM J. Discrete Math. 19.3（2005年），第744–761页。 ISSN：0895-4801。 DOI：10 . 1137 / S0895480103432556。 URL：https : / / doi . org / 10 . 1137/S0895480103432556。[5] Asim K. Dey、Stephen J. Young 和 Yulia R. Gel。《从德劳内三角剖分到拓扑数据分析：生成更逼真的合成电网》。审稿中。2023。[6] Shannon Dillman 和 Franklin Kenter。《泄漏强制：零强迫的一种新变体》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1910.00168（2019年）。[7] Sean English、Calum MacRury 和 Pawe˙l Pra˙lat。《随机图上的概率零强迫》。载于：《欧洲组合学杂志》91（2021年），第103207页。[8] Shaun Fallat、Karen Meagher 和 Boting Yang。《关于正半定零强迫数的复杂性》。载于：Linear Algebra Appl. 491（2016年），第101–122页。 ISSN：0024-3795。 DOI：10.1016/j.laa. 2015.03.011。 URL：https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.03.011。[9] Leslie Hogben、Jephian C.-H. Lin 和 Bryan L. Shader。《图的逆问题与零强迫》。第270卷。数学调查与专著。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022年，第xi+287页。 ISBN：978-1-4704-6655-8。 DOI：10 . 1090 / surv / 270。 URL：https://doi.org/10.1090/surv/270。[10] Thomas Kalinowski、Nina Kam˘cev 和 Benny Sudakov。《图的零强迫数》。载于：SIAM J. Discrete Math. 33.1（2019年），第95–115页。 ISSN：0895-4801。 DOI：10.1137/17M1133051。 URL：https: //doi.org/10.1137/17M1133051。[11] Nima Monshizadeh、Shuo Zhang 和 M Kanat Camlibel。《图上定义的动力系统的零强迫集与可控性》。载于：《IEEE自动控制汇刊》59.9（2014年），第2562–2567页。[12] Sandip Roy 等人。《基于逆变器的微电网的结构可控性评估》。载于：2021年北美电力研讨会（NAPS）

2021年，第1–6页。 DOI： 10.1109/NAPS52732.2021.9654687。[13] Logan A Smith 和 Illya V Hicks。“电网中的最优传感器布置：电力支配、集合覆盖与零强迫堡垒的邻域”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2006.03460*（2020年）。[14] Brady Tyra 等。《电力月刊》。技术报告。美国能源信息署，2023年2月。 URL： https://www.eia.gov/electricity/monthly/current month/february2023.pdf。[15] Stephen J. Young 等。“网络之网络视角下的电力网拓扑统计”。载于：*2018*年 *IEEE* 电力与能源协会大会（*PESGM*）。2018年，第1–5页。

Sinan G. Aksoy
Pacific Northwest National Laboratory电子
邮箱地址：sinan.aksoy@pnnl.gov

Ryan Bennink
Oak Ridge National Laboratory电
子邮箱地址：benninkrs@ornl.gov

Yuzhou ChenTemple University电子
邮箱地址：yuzhou.chen@temple.edu

José Frías
University of Texas at Dallas电子
邮箱地址：frias4@cimat.mx

Yulia R. Gel
University of Texas at Dallas电
子邮箱地址：ygl@utdallas.edu

Bill Kay
Pacific Northwest National Laboratory电子
邮箱地址：william.kay@pnnl.gov
Uwe NaumannRWTH Aachen University电
子邮箱地址：naumann@stce.rwth-aachen.de

Carlos Ortiz Marrero
Pacific Northwest National Laboratory电子
邮箱地址：carlos.ortizmarrero@pnnl.gov

Anthony V. PetyukHanford High School
电子邮箱地址：anthony.petyuk@gmail.com

Sandip Roy
Washington State University电
子邮箱地址：sandip@wsu.edu
Ignacio Segovia-Dominguez
University of Texas at Dallas
Jet Propulsion Laboratory, Caltech电子邮箱地址：
Ignacio.SegoviaDominguez@UTDallas.edu

Nate Veldt
Texas A&M University电子邮件地
址：nveldt@tamu.edu

Stephen J. Young
Pacific Northwest National Laboratory电子
邮件地址：stephen.young@pnnl.gov

Received 3 January 2023