arXiv:2303.11466v1 [cs.DM] 20 Mar 2023

关于平面图的区间边着色

Arsen Hambardzumyan[*]
埃里温国立大学信息学与应用数学系，亚美尼亚 0025

Levon Muradyan[†]埃里温国立大学信息学与应用数学系，亚美尼亚 0025

2023年3月22日

摘要

若图 G 的边用颜色 $1,\ldots,t$ 染色，且所有颜色都被使用，并且与 G 的每个顶点关联的边所用颜色互不相同且构成一个整数区间，则称其为区间边染色。1990 年，Kamalian 证明，若至少有一条边的图 G 有区间 t 染色，则 $t \leq 2|V(G)|-3$。2002 年，Axenovich 改进了这一平面图上界：若平面图 G 有区间 t染色，则 $t \leq \frac{11}{6}|V(G)|$。Axenovich 在同一篇论文中提出猜想：若平面图 G 有区间 t 染色，则 $t \leq \frac{3}{2}|V(G)|$。本文通过证明若平面图 G 有区间 t 染色，则 $t \leq 3|V(G|-4)$，证实了这一猜想。我们还证明，若外平面图 G 有区间 t 染色，则 $t \leq \frac{|V(G)|}{2}-1$。此外，所有这些上界都是紧的。

关键词：边染色、区间边染色、平面图、外平面图

1 引言

我们使用 [22] 表示此处未定义的术语和记号。我们研究有限、无向且没有自环或重边的图。分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集。顶点 $v \in V(G)$ 的度记为 $d_G(v)$，图 G 的最大度记为 $\Delta(G)$，图 G 的直径记为 $\mathrm{diam}(G)$，色指数记为 $\chi'(G)$。图 G 的正常边染色是一个映射 $\alpha: E(G) \to \mathbb{N}$，满足对于 G 中任意一对相邻边 e 和 e'，都有 $\alpha(e) \neq \alpha(e')$。

图 G 的区间 t染色是指一种正常边染色 α，将 G 的边染上颜色 1、.....、t，使得所有颜色都被使用，并且对于每个 $v \in V(G)$，与 v 关联的边所用颜色构成一个整数区间。若存在一个整数 $t \geq 1$，使图 G 有区间染色，则称图 G 为可区间染色，

[*]电子邮箱地址：hambardzumyanarsen99@gmail.com
[†]电子邮箱地址：levonmuradyanlevon@gmail.com

其中 G 有一个区间 t-染色。所有可区间染色图组成的集合记为 $\mathfrak{N}$。对于图 $G \in \mathfrak{N}$，使 G 有区间 t-染色的 t 的最大值记为 $W(G)$。区间染色这一概念由 Asratian 和 Kamalian [3]于 1987 年提出（英文版见 [4]），其动机是寻找紧凑的学校课程表，即每位教师和每个班级的课程都安排在连续时段内的课程表。这个问题对应于寻找二分多重图的区间边染色问题。在 [3, 4], 中，Asratian 和 Kamalian 指出，若 G 可区间染色，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。此外，他们还证明，判断一个 r-正则（$r \geq 3$）图是否有区间染色是一个 NP- 完全问题。Asratian 和 Kamalian 还证明 [3, 4] ，若无三角形图 G 有区间 t- 染色，则 $t \leq |V(G)| - 1$。在 [13], 中，Kamalian 研究了完全二分图和树的区间染色。特别地，他证明完全二分图 $K_{m,n}$ 有区间 t-染色，当且仅当 $m+n-\gcd(m,n) \leq t \leq m+n-1$，其中 $\gcd(m,n)$ 是 m 和 n的最大公约数。在 [18, 19], 中，Petrosyan、Khachatrian 和 Tananyan 研究了完全图和 n维超立方体的区间染色。特别地，他们证明， n维超立方体 Q_n 有区间 t-染色，当且仅当 $n \leq t \leq {}^{n}(_{n+1})$ 2。一般而言，判断一个二分图是否有区间染色 [21]是一个 NP-完全问题。事实上，对于每个正整数 $\Delta \geq 11$，都存在一个最大度为 Δ 且无法进行区间染色 [20]的二分图。不过，已有研究证明某些类的图可以进行区间染色；例如，树、正则二分图和完全二分图 [3, 11, 13], 次三次图（其中 $\chi'(G) = \Delta(G)$[1], 双凸二分图 [2, 14], 网格图 [8], 外平面二分图 [9], $(2, b)$-双正则图 [11, 12, 15] 以及 (3, 6)-双正则图 [6] 均有区间染色。其中，(a, b)-双正则图是指一种二分图，其一侧的所有顶点的度均为 a，另一侧的所有顶点的度均为 b。

关于图的区间边染色中颜色数量的一般上界已在 [14, 10] 中得到。在特别情况下，Kamalian [14]证明，若 G 是至少有一条边的简单图，且 $G \in \mathfrak{N}$，则 $W(G) \leq 2|V(G)| - 3$。此外，这个上界是紧的，适用于 K_2。2001年，Giaro、Kubale 和 Ma-lafiejski [10] 通过证明以下结论，略微改进了该上界：若 G 是至少有 3 个顶点的简单图，且 $G \in \mathfrak{N}$，则$W(G) \leq 2|V(G)| - 4$。另一方面， [18] 中证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个图 G，使得 $G \in \mathfrak{N}$ 且 $W(G) \geq (2-\varepsilon)|V(G)|$。对于平面图，Axenovich 改进了参数 $W(G)$ 的一般上界。特别是，她证明，若 G是平面图且 $G \in \mathfrak{N}$，则 $W(G) \leq \frac{11}{6}|V(G)|$，并猜想该上界可以改进为 $W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)|$。在 [4],，Asratian 和 Kamalian 证明，若 G连通且 $G \in \mathfrak{N}$，则 $W(G) \leq (\mathrm{diam}(G) + 1)(\Delta(G) - 1) + 1$。他们还证明，若 G 是连通二部图且 $G \in \mathfrak{N}$，则该上界可以改进为 $W(G) \leq \mathrm{diam}(G)(\Delta(G) - 1) + 1$。Kamalian 和 Petrosyan [16] 指出，这些上界无法得到显著改进。最近，Casselgren、Khachatrian 和 Petrosyan[7] 推导出了多重图的区间边染色中颜色数量的上界。特别是，他们证明，若 G 是连通三次多重图且 $G \in \mathfrak{N}$，则$W(G) \leq |V(G)| + 1$，并且这个上界是紧的。

本文证实了 Axenovich 关于平面图区间边染色的猜想。我们还证明，若 G 是外平面图且 $G \in \mathfrak{N}$，则 $W(G) \leq |V(G)| - 1$，并且这一上界是紧的。

2 主要结果

在陈述并证明主要结果之前，我们需要介绍关于平面图和外平面图的两个简单性质，以及一个新引理。

引理 2.1. *[22]* 一个阶为 $n \geq 2$ $(n \geq 3)$ 的平面图 G 至多有 $3n-5$ $(3n-6)$ 条边。

引理 2.2. 一个阶为 n $(n \geq 2)$ 的外平面图 G 至多有 $2n-3$ 条边。

我们还需要下面这个简单引理。

引理 2.3. 如果一个图 G 有一个区间 $W(G)$-染色 α，且在该染色 α 中只使用一次的颜色数为 k，那么

$$W(G) \leq \frac{|E(G)|+k}{2}.$$

证明. 由于 G 的一个区间 $W(G)$-染色 α 中，只有 k 种颜色只使用一次，而其余 $W(G)-k$ 种颜色至少使用两次，因此我们得到

$$|E(G)| \geq k + 2(W(G)-k), \text{ thus}$$

$$W(G) \leq \frac{|E(G)|+k}{2}.$$

□

现在我们可以证明第一个主要结果。

定理2.4。 若 G 是一个至少有两个顶点且满足 $G \in \mathfrak{N}$的平面图，则

$$W(G) \leq \frac{3|V(G)|-4}{2}.$$

证明。 设 α 是 G 的一个区间 W（G）-染色，且 k 是染色 α中仅使用一次的颜色数。若 $k \leq 1$, 那么根据引理2.1和引理2.3，我们有

$$W(G) \leq \frac{|E(G)|+k}{2} \leq \frac{3|V(G)|-5+1}{2} = \frac{3|V(G)|-4}{2}.$$

因此，我们可以假设 $k \geq 2$。

我们将 G 中在染色 α里颜色仅使用一次的边记为 e_1，e_2、.....、e_k。设 $e_i = u_iv_i$ 和 $c_i = \alpha$（e_i）（$1 \leq i \leq k$）。不失一般性，可假设 $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$。另外，定义 $c_0 = 1$ 和 $c_{k+1} = W$（G）。显然， $c_0 \leq c_1$且 $c_k \leq c_{k+1}$。

对于每个 i $(1 \leq i \leq k+1)$，令 $C_i = \{e|\, e \in E(G)$ 和 $\alpha(e) \leq c_i\}$ 及 G_i 为图 G 的子图，它们包含所有颜色小于或等于 c_i (C_i) 的边及其关联顶点。此外，对于每个 i $(1 \leq i \leq k+1)$，令 $C_i' = \{e|\, e \in E(G)$ 和 $c_{i-1} \leq \alpha(e) \leq c_i\}$及 G_i' 为图 G 的子图，它们包含所有颜色大于或等于 c_{i-1} 且小于或等于 c_i (C_i') 的边及其关联顶点。显然， $G_1 = G_1'$

以及 $G = G_{k+1}$。还需注意，由于 G 是平面图，对于每个 $i\,(1 \le i \le k+1)$， G 的子图 G_i 和 G'_i 也都是平面图。

证明对于每个 $i\,(1 \le i \le k)$，都有 $V(G'_i) \cap V(G'_{i+1}) = \{u_i, v_i\}$。

显然，根据 G'_i 和 G'_{i+1}的定义，我们有 $\{u_i, v_i\} \subseteq V(G'_i) \cap V(G'_{i+1})$。现在假设 $V(G'_i) \cap V(G'_{i+1})$ 中含有顶点 w，它既不是 u_i，也不是 v_i。由于$w \in V(G'_i)$，根据 G'_i的定义，存在一条与 w 关联的边 $e' \in E(G)$，使得 $\alpha(e') \le c_i$。同理，由于 $w \in V(G'_{i+1})$，根据 G'_{i+1}的定义，存在一条与 w 关联的边 $e'' \in E(G)$，使得 $\alpha(e'') \ge c_i$。由于 α 是区间染色， G 中存在一条颜色为 c_i 且与顶点 w关联的边。正如前面所述，颜色 c_i 在染色 α 中只出现一次，且该颜色对应的唯一边是 e_i，它不与 w关联，因此 $w \notin V(G'_i) \cap V(G'_{i+1})$。因此，对于每个$i\,(1 \le i \le k)$，都有 $V(G'_i) \cap V(G'_{i+1}) = \{u_i, v_i\}$。这意味着对于每个 $i\,(1 \le i \le k)$，都有 $C'_i \cap C'_{i+1} = \{e_i\}$。

由于对于每个 $i\,(2 \le i \le k+1)$， $V(G'_{i-1}) \cap V(G'_i) = \{u_{i-1}, v_{i-1}\}$ 和 $C'_{i-1} \cap C'_i = \{e_{i-1}\}$，我们得到以下两个性质成立：

(a) 对于每个 $i\,(2 \le i \le k+1)$， $|V(G'_i)| = |V(G_i) \setminus V(G_{i-1})| + 2$;

(b) 对于每个 $i\,(2 \le i \le k+1)$， $C'_i = (C_i \setminus C_{i-1}) \cup \{e_{i-1}\}$，因此 $|C_i \setminus C_{i-1}| = |C'_i| - 1$。

另一方面，由于对于每个 $i\,(1 \le i \le k+1)$， G 的子图 G_i 和 G'_i 都是平面图，根据引理 2.1，我们得到以下两个性质成立：

(c) $|C'_1| \le 3|V(G'_1)| - 5$ 和 $|C'_{k+1}| \le 3|V(G'_{k+1})| - 5$，因为这些平面子图可能只包含两个顶点；

(d) </style}对于每个 $i\,(2 \le i \le k)$， $|C'_i| \le 3|V(G'_i)| - 6$，因为 $|V(G'_i)| \ge 3$ (G'_i 至少包含两条边 e_{i-1} 和 e_i)。

现在，利用上述性质 (a)-(d)，并考虑引理 2.3，我们得到

$$W(G) = W(G_{k+1}) \le \frac{|C_{k+1}| + k}{2} = \frac{|C_1| + \sum_{i=2}^{k+1} |C_i \setminus C_{i-1}| + k}{2} =$$
$$= \frac{|C'_1| + \sum_{i=2}^{k+1} (|C'_i| - 1) + k}{2} = \frac{|C'_1| + |C'_{k+1}| + \sum_{i=2}^{k} |C'_i| - k + k}{2} \le$$
$$\le \frac{3|V(G'_1)| - 5 + 3|V(G'_{k+1})| - 5 + \sum_{i=2}^{k} (3|V(G'_i)| - 6)}{2} =$$
$$= \frac{3|V(G'_1)| - 5 + 1 + \sum_{i=2}^{k+1} (3|V(G'_i)| - 6)}{2} =$$
$$= \frac{3|V(G_1)| - 4 + \sum_{i=2}^{k+1} (3(|V(G_i) \setminus V(G_{i-1})| + 2) - 6)}{2} =$$
$$= \frac{3|V(G_1)| - 4 + 3\sum_{i=2}^{k+1} |V(G_i) \setminus V(G_{i-1})|}{2} = \frac{3|V(G_{k+1})| - 4}{2} = \frac{3|V(G)| - 4}{2}.$$

□

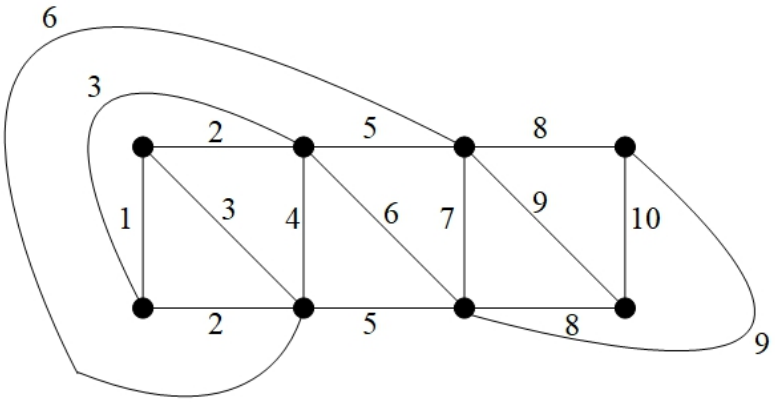


图1：一个有8个顶点且具有区间10-着色的平面图 G_8 。

在 [5], Axenovich 构造了一族阶为 n 的可区间着色平面图 G_n 和 $W(G_n) = \binom{3n-4}{2}$ 。图 1 展示了这样一个可区间着色的平面图 G_8 。

我们的下一个结果涉及外平面图的区间边染色 .

定理2 .5. 若 G 是一个至少有两个顶点的外平面图，且 $G \in \mathfrak{N}$，则 n

$$W(G) \leq |V(G)| - 1.$$

证明。 与定理2.4的证明相同，设 α 是 G 的一个区间 $W(G)$-染色，且 k 表示染色 α中仅使用一次的颜色数。若 $k \leq 1$，则由引理2.2和引理2.3可得

$$W(G) \leq \frac{|E(G)| + k}{2} \leq \frac{2|V(G)| - 3 + 1}{2} = |V(G)| - 1.$$

因此，我们可以假设 $k \geq 2$。

我们用 e_1、e_2、.....、e_k 表示 G 中在染色 α里仅使用一次的颜色所对应的边。令 $e_i = u_i v_i$ 和 $c_i = \alpha(e_i)$ $(1 \leq i \leq k)$。不失一般性，不妨假设 $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$。我们还定义 $c_0 = 1$ 和 $c_{k+1} = W(G)$。显然， $c_0 \leq c_1$和 $c_k \leq c_{k+1}$。

对于每个 i $(1 \leq i \leq k+1)$，令 $C_i = \{e|\, e \in E(G)$ 和 $\alpha(e) \leq c_i\}$ 和 G_i 为图 G 的子图，其中包含所有颜色小于或等于 c_i (C_i) 的边及其关联顶点。此外，对于每个 i $(1 \leq i \leq k+1)$，令 $C'_i = \{e|\, e \in E(G)$ 和 $c_{i-1} \leq \alpha(e) \leq c_i\}$和 G'_i 为图 G 的子图，其中包含所有颜色大于或等于 c_{i-1} 且小于或等于 c_i (C'_i) 的边及其关联顶点。显然，$G_1 = G'_1$ 和 $G = G_{k+1}$。还需指出，由于 G 是一个外平面图，对于每个 $i(1 \leq i \leq k+1)$， G 的子图 G_i 和 G'_i 也都是外平面图。

同样，与定理2.4的证明类似，可以证明对于每个 i $(1 \leq i \leq k)$， $V(G'_i) \cap V(G'_{i+1}) = \{u_i, v_i\}$和 $C'_i \cap C'_{i+1} = \{e_i\}$ 。

由于对于每个 i $(2 \leq i \leq k+1)$， $V(G'_{i-1}) \cap V(G'_i) = \{u_{i-1}, v_{i-1}\}$ 和 $C'_{i-1} \cap C'_i = \{e_{i-1}\}$，我们可得以下两个性质成立：

(1) 对于每个 $i\,(2 \le i \le k+1)$, $|V(G_i')| = |V(G_i) \setminus V(G_{i-1})| + 2$;

(2) 对于每个 $i\,(2 \le i \le k+1)$, $C_i' = (C_i \setminus C_{i-1})$, 因此 $\cup\{e_{i-1}\}$, $|C_i \setminus C_{i-1}| = |C_i'| - 1$.

另一方面, 由于对于每个 $i\,(1 \le i \le k+1)$, G_i 和 G_i' 是 G 的外平面子图, 根据引理 2.2, 我们得到以下性质成立:

(3) 对于每个 $i\,(1 \le i \le k+1)$, $|C_i'| \le 2|V(G_i')| - 3$, 因为 $|V(G_i')| \ge 2$。

由于 G 的区间 $W(G)$-染色 α 中, 只有 k 种颜色仅使用一次, 而其余 $W(G)$ 种 $-k$ 颜色至少使用两次, 因此对于每个 $i\,(1 \le i \le k+1)$, 我们来估计 G_i' 中除唯一颜色 c_1, c_2, ..., c_k之外使用的不同颜色的最大数量:

(4) G_1' 只包含一条边, 该边使用 k 唯一颜色之一着色, 因此, 除唯一颜色 $c_1, c_2, \ldots, c_k$外, G_1' 中使用的不同颜色最多为 $\left\lfloor \frac{|C_1'|-1}{2} \right\rfloor$;

(5) 对于每个 i $(2 \le i \le k)$, G_i' 只包含两条边, 这两条边分别使用k 唯一颜色中的两种着色, 因此, 除唯一颜色 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 外, G_i' 中使用的颜色最多为 $\left\lfloor \frac{|C_i'|-2}{2} \right\rfloor$;

(6) G_{k+1}' 只包含一条边, 该边使用 k 唯一颜色之一着色, 因此, 除唯一颜色 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 外, G_{k+1}' 中使用的颜色最多为 $\left\lfloor \frac{|C_{k+1}'|-1}{2} \right\rfloor$。

现在, 利用上述性质 (1)-(6), 我们有

$$W(G) \le k + \left\lfloor \frac{|C_1'|-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{|C_{k+1}'|-1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=2}^{k} \left\lfloor \frac{|C_i'|-2}{2} \right\rfloor \le$$

$$\le k + \left\lfloor \frac{2|V(G_1')|-3-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2|V(G_{k+1}')|-3-1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=2}^{k} \left\lfloor \frac{2|V(G_i')|-3-2}{2} \right\rfloor =$$

$$= k + |V(G_1')| - 2 + |V(G_{k+1}')| - 2 + \sum_{i=2}^{k} (|V(G_i')| - 3) =$$

$$= k + |V(G_1')| - 2 + 1 + \sum_{i=2}^{k+1} (|V(G_i')| - 3) =$$

$$= k + |V(G_1)| - 1 + \sum_{i=2}^{k+1} (|V(G_i) \setminus V(G_{i-1})| + 2 - 3) =$$

$$= k + |V(G_1)| - 1 + \sum_{i=2}^{k+1} (|V(G_i) \setminus V(G_{i-1})|) - k =$$

$$= |V(G_1)| + \sum_{i=2}^{k+1} (|V(G_i) \setminus V(G_{i-1})|) - 1 = |V(G_{k+1})| - 1 = |V(G)| - 1.$$

□

由于所有树都是外平面且区间可着色的 [13], ，很容易看出，对于具有 n 个顶点的毛毛虫树 T_n， $W(T_n) = n-1$ [2]。文献 [10], 证明，具有 n 个顶点的扇图 F_n（$n>3$）有一个区间（$n-1$）-染色。由于扇图 F_n 是外平面的，对于任意正整数 $n>3$， $W(F_n) = n-1$。这表明，关于 $W(G)$ 的所有已证明上界都是紧的。

致谢 我们谨向 Petros A. Petrosyan 致以谢意，感谢他提出的建议与支持。

证明后补注 在撰写本文期间，我们注意到 L. Hollom、J. Portier 和 L. Versteegen 提交了一篇预印本 [17]，发表于 ArXiv，作者在其中独立证明了 Axenovich猜想。我们的证明与他们不同，而且我们关于外平面图区间边着色的结果并未涵盖在 L. Hollom、J. Portier 和 L. Versteegen 的结果中。我们还认为，定理2.4中的一种证明技巧有助于回答问题5.1-2 [17]。

参考文献

[1] A.S. Asratian、C.J. Casselgren、P.A. Petrosyan，将图分解为区间可着色子图及无等待多阶段调度，《离散应用数学》，2023年，即将发表。[2] A.S. Asratian、T.M.J. Denley、R. Haggkvist，《二部图及其应用》，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[3] A.S. Asratian、R.R. Kamalian，多重图的边的区间染色，《应用数学》5 (1987) 25–34（俄文）。[4] A.S. Asratian、R.R. Kamalian，图的区间边着色研究，《组合理论杂志B辑》62 (1994) 34–43。[5] M.A. Axenovich，平面图的区间着色，《数值大会》159 (2002) 77-94。[6] C.J. Casselgren、B. Toft，顶点度较小的双正则二部图的区间边着色，《图论杂志》80 (2015) 83–97。[7] C.J. Casselgren、H.H. Khachatrian、P.A. Petrosyan，关于图的区间着色和循环区间边着色中颜色数量的一些界，《离散数学》341 (2018) 627–637。[8] K. Giaro、M. Kubale，完全和非完全图的笛卡尔积的连续边着色，《数值大会》128 (1997) 143–149。[9] K. Giaro、M. Kubale，多阶段系统中零一时间操作的紧凑调度，《离散应用数学》145 (2004) 95–103。

[10] K. Giaro、M. Kubale、M. Ma-lafiejski，一般图的边的连续着色，《离散数学》236 (2001年) 131–143。[11] H.M. Hansen，最短等待时间调度，理学硕士论文，欧登塞大学，欧登塞，丹麦，1992年（丹麦语）。[12] D. Hanson、C.O.M. Loten、B. Toft，双正则二部图的区间着色，《组合论》50 (1998) 23–32。[13]R.R. Kamalian，完全二分图和树的区间着色，预印本，亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院计算中心，埃里温，1989年（俄文）。[14] R.R. Kamalian，图的区间边着色，博士论文，新西伯利亚，1990年。[15] R.R. Kamalian、A.N. Mirumian，某类二部图的区间边着色，《亚美尼亚共和国国家科学院报告》97 (1997) 3–5（俄文）。[16] R.R. Kamalian、P.A. Petrosyan，关于图的区间边着色最大跨度上界的注记。《离散数学》312 (2012)，393–1399。[17] L. Hollom、J. Portier、L. Versteegen，图的区间着色，ArXiv，2023年，https://arXiv.org/2303.05505[18] P.A. Petrosyan，完全图和 n维超立方体的区间边着色，《离散数学》310 (2010) 1580–1587。[19] P.A. Petrosyan、H.H. Khachatrian、H.G. Tananyan，图的笛卡尔积的区间边着色 I，《数学讨论：图论》33(3) (2013) 613–632。[20]P.A. Petrosyan、H.H. Khachatrian，不可作边着色的二部图和多重图的区间着色，《图论杂志》76 (2014) 200-216。[21] S.V. Sevast'janov，二部图边的区间可着色性，《离散分析方法》50 (1990) 61–72（俄文）。[22] D.B. West，《图论导论》，普伦蒂斯-霍尔，新泽西州，2001年。