arXiv:2303.11474v1 [math.AG] 20 Mar 2023

实族的等奇异性与无穷远处的 Lipschitz-Killing 曲率密度

NICOLAS DUTERTRE 和 VINCENT GRANDJEAN

Abstract. 固定一个扩张实数有序域的 o-极小结构。设 $(W_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^s}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭子集可定义族，其全空间 $W=\cup_{\mathbf{y}}W_{\mathbf{y}}\times\mathbf{y}$ 是一个闭的连通可定义子流形 C^2，且包含于 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s$。设 $\varphi\colon W\to\mathbb{R}^s$ 是到第二个因子的投影的限制。

在定义 $K(\varphi)$（即 φ 的广义临界值集）并证明其是 $\mathbb{R}^s$ 中余维为正的闭可定义集、包含 φ 的分岔值且在一般平面截面下保持稳定之后，我们证明所有无穷远处的 Lipschitz-Killing 曲率密度 $\mathbf{y}\mapsto\kappa_i^\infty(W_{\mathbf{y}})$ 都是 $\mathbb{R}^s\setminus K(\varphi)$ 上的连续函数。当 W 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s$ 的一个可定义超曲面 C^2 时，我们进一步得到，无穷远处的对称主曲率密度 $\mathbf{y}\mapsto\sigma_i^\infty(W_{\mathbf{y}})$ 是 $\mathbb{R}^s\setminus K(\varphi)$ 上的连续函数。

Contents

1. 引言 1 2. 杂项 4 3. 关于 o-极小结构 5 4. 一些初等线性代数 6 5. 无穷远处爆破 8 6. Rabier 数、Malgrange-Rabier 条件 9 7. Malgrange-Rabier 条件与无穷远处的几何 12 8. 分岔值与平凡化结果 15 9. 与超曲面族相关的子水平集族 17 10. 关于无穷远链接 18 11. 超平面截面与 Malgrange-Rabier 条件 20 12. Lipschitz-Killing 测度 22 13. 带边界子流形的情形 24 14. 可定义族与无穷远处 Lipschitz-Killing 曲率密度的连续性 25 15. 超曲面的曲率 27 16. 曲率积分的连续性与超曲面族 28 参考文献 30

1. 引言

设 $(W_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in P}$ 是一族以 P 为参数空间、由 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 构成的子集。这是该族全空间在投影 φ 下的水平集（投影到 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上所得的水平集）

两位作者均获得了 ANR 项目 LISA17-CE400023-01 的部分资助。Nicolas Dutertre 获得了 Centre Henri Lebesgue 项目 ANR-11-LABX-0020-0 的部分资助。Vincent Grandjean 获得了 FUNCAP/CAPES/CNPq 巴西资助项目 306119/2018-8 的资助。

$W := \cup_{\mathbf{y}\in P} W_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}$ 投影到参数空间

$$\varphi : W \to P.$$

假设 φ 连续，则当 φ 在 c 的某个邻域上诱导出拓扑平凡纤维丛结构，且模型纤维为 $W_{\mathbf{c}}$、φ 是到基底的投影映射时，该族在 $\mathbf{c} \in P$ 处局部平凡。类似地，若一个 C^k 映射 $F\colon X \to P$ 满足 $k \geq 1$，则当它在 c 的某个邻域上诱导出 C^{k-1} 平凡纤维丛结构，且模型纤维为 $F^{-1}(\mathbf{c})$ 时，该映射在 $\mathbf{c} \in P$ 处局部平凡。根据 Ehresmann纤维化定理 [19]，真且满射的 F 在 P上诱导出局部平凡纤维丛。F 不局部平凡的值称为分岔值。临界值都是分岔值。

只要映射或族在某种明确意义下是刚性的/正则的，分岔值就很少见，例如实多项式函数和复多项式函数只有有限多个分岔值 [46]。正则分岔值更为罕见，也难以检测。当 X 和 P 是仿射空间时，已有关于 F 或 W 在正则值处局部平凡的充分条件。其中包括 Malgrange-Rabier 条件 [40, 41, 28]，、t-正则性 [42, 47, 48, 10]、ρ-正则性 [38, 34, 10],以及无穷远处的球面性 [7, 8, 15]。在给定值处满足任何这类无穷远处的正则性条件，都会迫使邻近水平集在无穷远处呈现“温和”的行为。

一个与等奇异理论相关的有趣课题，是寻找能够刻画这些无穷远处正则性条件的数值判据。例如，受 Teissier 关于平面截面和极不变量的研究启发，[43, 44, 45], Tibˇar 为仿射超曲面的复族 $(\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\colon F(\mathbf{x}\ t) = 0\})_{t\in\mathbb{C}}$ 的每个参数 t 构造了一个取整数值的类极不变量向量 $\alpha^*(t)$，其中 $F\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ 是一个多项式；该向量在某个值 c 处的局部常值性等价于其邻域内的 t-正则性 c。（另请参见 [22, 39]，其中较早出现了针对复多项式的等奇异性数值判据的特殊情形。）

在实情形下，前文提到的局部（复）极不变量可能的对应物是 Lipschitz-Killing 曲率的积分。由于一般而言，这类积分作为给定实族 W 参数的函数，并非只取孤立值，因此我们应当转而考察这类函数的连续性。第一步虽小却至关重要：给定一个无穷远处的正则性条件 R，能否构造一个定义在族 W 参数空间上的向量值映射，使得一旦族 W 在 c 处满足 R-正则性，该映射就在 c 的某个邻域内连续?

本文所述结果的研究方法基于两个事实：(i) 复多项式函数的 t-正则性在一般平面截面下保持稳定 [47]；(ii) 第一作者关于温和集合的 Lipschitz-Killing 曲率 / 测度的一般结果 [12, 13, 14] 在很大程度上依赖于一般平面截面。本文构造了一个向量值映射，其分量由 Lipschitz-Killing 曲率/测度构成，并证明该映射在任何同时为正则值和 Malgrange-Rabier 正则值的点处连续。

我们讨论更一般的情形，即子集 $\mathbb{R}^n$ 的可定义族，其全空间为闭子流形。只需考虑连通的全空间，以下假设全空间连通。设有一个扩张实数有序域的 o-极小结构。考虑以下 C^2 可定义映射：

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y}$$

定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 上的可定义闭连通 C^2 子流形 W，其维数为 $W \geq s$。由于按定义 $\varphi^{-1}(\mathbf{y}) = W_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}$，我们关注闭子集的可定义族 $(W_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^s}$ 在附近（φ 的）正则值处的局部平凡性。转到映射F的图后，F 所需的性质与 φ 的性质之间存在简单而明确的对应关系，如下

此处已作验证。 C^2 的选取是任意的。我们所做的一切在 C^k-正则性、$2 \leq k \leq \infty$ 中都有对应的类似结论。

本文的结果分为两类：I）关于 Malgrange-Rabier 正则性条件（见定义 6.1，下文简称为 (MR)）；II）关于无穷远处的 Lipschitz-Killing 曲率密度。

I）在函数情形（即 $s = 1$）下，描述 (MR)-正则性较为简单：若存在正常数 M_c，使得对任意满足以下条件的序列 $(\mathbf{w}_k)_k$，其中各项属于 W：(i) $|\mathbf{w}_k| \to \infty$；(ii) $\varphi(\mathbf{w}_k) \to c$，则称值 c 对 φ 是 (MR)-正则值。

$$k \gg 1 \implies |\mathbf{w}_k| \cdot |\nabla \varphi(\mathbf{w}_k)| \geq M_c.$$

φ 的临界值集为 $K_0(\varphi)$，而非 (MR)-正则值集为 $K_\infty(\varphi)$。我们将在这一最一般的背景下证明以下结果：

定理 I. 1) $K_\infty(\varphi)$ 是可定义的；
2) $K(\varphi) := K_0(\varphi) \cup K_\infty(\varphi)$ 是闭的、可定义的（引理 6.4），且具有正余维（定理 7.5）；

3) 族 $(W_\mathbf{y})_{\mathbf{y} \notin K(\varphi)}$ 在其每个点处都是 C^1 局部平凡的（定理 8.2），由此我们推出 $Bif(\varphi) \subset K(\varphi)$（推论 8.6）；
4) 正则值处的 (MR) 条件在一般平面截面下保持稳定（定理 11.2）。

如果定理 I 中陈述 1)、2) 和 3) 的所有已知实例都是当前框架的特例，那么第 4) 点在实情形中是新的，并且超出了复多项式函数的范畴。

II) 设 Z 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个维数为 d 的闭连通 C^2 子流形（赋予欧几里得度量张量的限制）。我们将考虑的其他对象是 Z 在无穷远处的 Lipschitz-Killing 曲率密度，定义如下

$$\kappa_i^\infty(Z) := \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{d-i}} \int_{Z \cap \mathbf{B}_R^n} K_i(Z, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \text{for } i = 0, \ldots, d,$$

其中，$K_i(Z, \mathbf{x})$ 是 Z 在 $\mathbf{x}$ 处的第 i 个 Lipschitz-Killing 曲率。注意，当 i 为奇数或 $\geq d+1$ 时，$K_i(Z, \mathbf{x}) = 0$。当 Z 是由 $-\nabla f|_Z$ 定向的超曲面 $\{f = 0\}$ 时，令 $\sigma_i^Z(\mathbf{x})$ 表示 Z 在 $\mathbf{x}$ 处主曲率的第 i 个对称函数。我们进一步将 Z 在无穷远处的对称主曲率密度定义为

$$\sigma_i^\infty(Z) := \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{n-1-i}} \int_{Z \cap \mathbf{B}_R^n} \sigma_i^Z(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

当 i 为偶数时，$2\sigma_i^\infty(Z) = \kappa_i^\infty(Z)$；但一般而言，当 i 为奇数时，$\sigma_i^\infty(Z)$ 不恒等于零。根据推论 8.3，我们可以归结为对每个 $\mathbf{y} \notin K(\varphi)$，$W_\mathbf{y}$ 连通的情形。我们的主要结果定理 14.3 和定理 16.2 可简洁地表述如下：

定理 II. 假设对每个 $\mathbf{y} \notin K(\varphi)$，$W_\mathbf{y}$ 连通。对于每个 $i = 0, \ldots, \dim W - s$，函数 $\mathbf{y} \mapsto \kappa_i^\infty(W_\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上连续。此外，当这些 $W_\mathbf{y}$ 是超曲面时，对于每个 $i = 0, \ldots, n-1$，函数 $\mathbf{y} \mapsto \sigma_i^\infty(W_\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上连续。

定理 II 延续了第二位署名作者 [21]，的研究成果，该成果指出，与一个 C^2 可定义函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 相关的以下总高斯-克罗内克曲率函数至多只有有限个不连续点

$$y \mapsto GK(y) := \int_{f^{-1}(y)} \kappa_y(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \text{ and } y \mapsto |GK|(y) := \int_{f^{-1}(y)} |\kappa_y(\mathbf{x})| \mathrm{d}\mathbf{x}, \text{ where } \kappa_y := \sigma_{n-1}^{f^{-1}(y)},$$

以及我们最近的结果 [15]，，其中证明了在函数同时满足无穷远处球面正则的任意正则值处，GK 和 $|GK|$ 都具有连续性。值得一提的是，最近的预印本 [11] 从以下方面研究了无穷远处等奇异性的充分条件：

给定映射 F 的各水平集上的集值映射。定理 I 和定理 II 与 [3, 4, 37] 的结果相关，这些结果讨论了可定义子集的 Whitney 分层和 Verdier 分层上的局部 Lipschitz-Killing 不变量的连续性。

本文的组织结构如下：第 2 节介绍后文将用到的记号和一些预备知识。第 3 节列举若干关于可定义性的事实，以确保讨论具有一定的完备性。第 4 节至第 8 节介绍定理 I 所需的材料。我们详细证明了事实 1) 至 3)。我们的论述大量运用了 Rabier 数（定义 4.1），而引理 4.3 说明了研究族为何涵盖映射的情形。沿着 Rabier 的思路证明定理 8.2[41] 本身就很有意义，注 8.4 也同样如此。第 9 节将简要讨论与超曲面族相关的次水平集族的一个平凡化结果（命题 9.1）。第 10 节以明确的方式回顾无穷远处链接族的性质；这是研究 Lipschitz-Killing 测度/曲率的一项核心工具。我们还给出了命题 10.2 以及鲜为人知的命题 10.3 的证明。第 11 节处理定理 I 的第 4) 点。定理 11.2 是一项新结果，也是建立定理 II 所依托的两大基石之一。第 12 节至第 16 节旨在介绍获得定理 II 所需的全部 Lipschitz-Killing 测度/曲率相关材料。构建定理 II 所需的第二块基石是 Gauss-Bonnet 型定理 12.3（出自第一作者 [13, 14]）。

2. Miscellaneous

设 $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, +\infty[$ 且 $\mathbb{R}_{>0} :=]0, +\infty[$。

我们用 0 表示任何维数至少为二的向量空间或子空间的原点（或零向量）。

$\mathbb{R}^q$ 中以原点为中心的欧几里得单位闭球记为 B^q。若 w 是 $\mathbb{R}^q$中的一点，以 w 为中心、半径为 r 的欧几里得闭球记为 $\mathrm{B}^q(\mathrm{w}\ r)$。当 w 恰为原点时，简记为 B^q_r。

$\mathbb{R}^q$ 中以原点为中心的欧几里得单位球面记为 S^{q-1}。以原点为中心、半径为 r的欧几里得球面记为 S^{q-1}_r。

$\mathbb{R}^q$ 中由 k维向量平面组成的格拉斯曼流形记为 $\mathrm{G}(k, q)$。有时我们将 $\mathrm{G}(1, q)$记为 P^{q-1} 。我们使用相同的记号 P，既表示 $\mathrm{G}(k, q)$中的一点，也表示 $\mathbb{R}^q$中与之对应的向量子空间。

任意实向量空间 $\mathbb{R}^q$ 都配备有欧几里得度量，以及与之相关的标量积$\langle -, - \rangle$ 和范数 $|-|$。对欧几里得结构施加限制后， $\mathbb{R}^q$ 的任意向量子空间 E 都成为一个欧几里得空间。 E 的单位球面为 $\mathrm{S}(E)$，而 $\mathbb{R}^q$ 中 E 的正交补为 $E^\perp$。

给定 $\mathbb{R}^q$的一个序列 $(\mathrm{w}_k)_k$ ，我们用 $\mathrm{w}_k \to \infty$ 表示当 k 趋于 $+\infty$时， $|\mathrm{w}_k| \to +\infty$ 。

给定欧几里得空间 $\mathbb{R}^q$中的任意 C^1 子流形 S ，切丛 TS 是 $T\mathbb{R}^q|_S$的一个向量子丛，因此配备了 $T\mathbb{R}^q|_S$上的黎曼度量张量在 TS上的限制。

设 X, Y 是 $\mathbb{R}^q$ 中的两个连通 C^1 子流形。若满足以下条件，则称点 Y 处的有序对 (X, Y) 是 Whitney (a)-正则的：(i) Y 满足边界条件 $Y \subset \mathrm{clos}(X) \setminus X$；(ii) 对于任意满足 $\mathrm{x}_k \to \mathrm{y}$ 且 $T_{\mathrm{x}_k} X \to P \in \mathrm{G}(\dim X, q)$ 的 X 序列 $(\mathrm{x}_k)_k$，都有 $T_{\mathrm{y}} Y \subset P$。设 $f\colon X \cup Y \mapsto \mathbb{R}$ 是连续函数，且其每个限制 $f|_X$ 和 $f|_Y$ 均为 C^1。若点 Y 处的有序对 (X, Y) 是 Whitney (a)-正则的，且满足以下条件，则称函数 f 在点 Y 处满足 Thom 条件 (a_{rel})（亦称 Thom (a_{rel})-正则）：(i) 函数 $f|_X$ 和 $f|_Y$ 具有常秩；(ii) 对于任意满足 $\mathrm{x}_k \to \mathrm{y}$ 且 $\ker D_{\mathrm{x}_k}(f|_X) \to T \in \mathrm{G}(\dim X - 1, q)$ 的 X 序列 $(\mathrm{x}_k)_k$ ，都有 $\ker D_{\mathrm{y}}(f|_Y) \subset T$。

设 $a \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$。设 $f, g\colon (I, a) \to \mathbb{R}$ 是在 a 处的两个实函数芽，其中 I 是任意一个内部非空且其在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的边界包含 a 的区间。我们采用以下记号：

$$\text{(i) } f \sim g \iff \lim_a \frac{f}{g} \in \mathbb{R}^*, \quad \text{(ii) } f \simeq g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1, \quad \text{(iii) } |f| \ll |g| \iff \lim_a \frac{|f|}{|g|} = 0.$$

如果 $f, g\colon (I, a) \to \mathbb{R}^s$，对于 $s \geq 2$，我们记作

$$\text{(iv) } f \sim g \iff |f| \sim |g|, \quad \text{(v) } f \simeq g \iff |f| \simeq |g|.$$

3. On o-minimal structures

我们在此汇集一些关于 o-极小结构和可定义性的定义与事实，后文将用到这些内容（关于严谨处理，参见 [16, 17] ）。我们的观点接近于 [27, 6]中的观点。

一个扩张实数有序域 $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ 的 o-极小结构 $\mathcal{M}$ 是一个集族 $(\mathcal{M}_q)_{q\in\mathbb{N}}$，其中每个 $\mathcal{M}_q$ 都是 $\mathbb{R}^q$ 的子集族，满足以下公理：
1）对于每个 $q \in \mathbb{N}$，族 $\mathcal{M}_q$ 是 $\mathbb{R}^q$ 的子集的布尔子代数。2）对于任意一对子集 $A \in \mathcal{M}_p$ 和 $B \in \mathcal{M}_q$，则有 $A \times B \in \mathcal{M}_{p+q}$。3）设 $\pi:\ \mathbb{R}^{q+1} \to \mathbb{R}^q$ 是在前 q 个因子上的投影。给定 $\mathcal{M}_{q+1}$ 的任意子集 A，其投影 $\pi(A)$ 是属于 $\mathcal{M}_q$ 的子集。4） $\mathbb{R}^q$ 的代数子集属于 $\mathcal{M}_q$。5）族 $\mathcal{M}_1$ 恰好由点和区间的有限并组成。

这些事实表明，最小的 o-极小结构就是半代数子集构成的结构，因此它包含于任何其他结构中。

本文其余部分均假设给定了这样一个 o-极小结构 $\mathcal{M}$ 。

$\mathbb{R}^q$ 的子集 A 称为可定义子集，简称可定义（在给定的 o-极小结构中），如果$A \in \mathcal{M}_q$。

设 A 是 $\mathbb{R}^q$ 的子集，映射 $A \mapsto \mathbb{R}^r$ 称为可定义的，如果其图是 $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ 的可定义子集。

设 A 是 $\mathbb{R}^q$ 的可定义子集，且设 B 是 A 的可定义子集。层对 (A, B) 存在可定义的 Whitney (a)-正则 C^k 分层，即以下结论成立：
定理。（例如参见 [50, 35, 9, 17, 36]）。对于每个正整数 k，存在 A 的一个有限划分，使其由连通的 C^k 子流形组成，称为分层，并具有以下性质：(i) 每个分层都是可定义的；(ii) B 是若干分层的并；(iii) 对于每个层对 (X, Y)，若 $\dim X > \dim Y$，则要么满足边界条件 $Y \subset \mathrm{clos}(X) \setminus X$，要么交集 $Y \cap \mathrm{clos}(X)$ 为空；(iv) 每个满足边界条件的层对 (X, Y) 在 Y 的每一点处都是 Whitney (a)-正则的。

设 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 是一个可定义映射。设 B 是 A 的一个可定义子集。函数 f 具有一个可定义的 (a_{rel})- 正则分层 C^k，即以下陈述成立：
定理。（例如参见 [23, 1, 29, 30, 32, 33]）。对于每个正整数 k，存在一组 Whitney (a)-正则分层 C^k，将层对 (A, B) 分层，并满足以下附加性质：(v) 对每一对分层 (X, Y)，限制 $f|_{X\cup Y}$ 在 Y 的每一点处都是 (a_{rel})-正则的。

子集或映射的可定义性概念可沿任意可定义子集取芽。特别地，映射 $(\mathbb{R}, +\infty) \to \mathbb{R}^s$ 的芽在 $+\infty$ 处可定义，当且仅当它有一个可定义的代表元。
设 I, a 如上。若 $a < +\infty$，令 I^+ 为 $(I \cap]a, +\infty[, a)$；若 and $a = +\infty$，则令其为 $(\mathbb{R}, +\infty)$。类似地，当 $a > -\infty$ 时，令 I^- 为 $(I \cap]-\infty, a[, a)$；若 $a = -\infty$，则令其为 $(\mathbb{R}, -\infty)$。
我们想回顾以下两个众所周知的初等事实：设 $\varepsilon \in \{+, -\}$ 满足 I^ε 非空。设 $f\colon (I^\varepsilon, a) \to \mathbb{R}$ 可定义。

(i) 对于每个非负整数 k，存在 $\mathcal{U}_k$ a 的一个开邻域，使得 f 有一个 C^k 代表元 $I^\varepsilon \cap \mathcal{U}_k \mapsto \mathbb{R}$。

(ii) 存在 $\mathcal{U}$ a 的一个开邻域，使得 f 存在一个单调代表元$I^\varepsilon \cap \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$。

设 $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ 是在 $+\infty$ 处可定义的映射。微分映射 $t \mapsto \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ 在 $+\infty$ 处也可定义。我们定义

$$\mathbf{u}(t) := \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \in \mathbf{S}^{n-1}, \text{ and } L(t) := \mathbb{R}\gamma'(t) \in \mathbf{P}^{n-1}$$

分别为与 γ 相关的割线映射和切向方向映射；二者在 $+\infty$ 处均可定义。在 $+\infty$ 处的可定义性保证下列极限存在

$$\mathbf{u}_\gamma := \lim_{t\to+\infty} \mathbf{u}(t), \text{ and } L_\gamma := \lim_{t\to+\infty} L(t).$$

此外，以下这个非常有用的结果成立。

引理 3.1. [6, 引理 2.5-7] *1)* $L_\gamma = \mathbb{R}\mathbf{u}\gamma$;
2）进一步假设，当 t 足够大时，$|\gamma(t)| = t$。那么

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma'(t) = \mathbf{u}_\gamma.$$

特别地，$|\gamma'|$ 有界。

我们还回顾如下结论：

引理 3.2. 设 $f : (\mathbb{R}_{\geq 0}, +\infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是在 $+\infty$ 处可定义函数的芽，且当 $t \to +\infty$ 时 $f \to 0$。以下极限成立：

$$(i)\ \lim_{t\to+\infty} t \cdot f'(t) = 0, \text{ and } (ii)\ \lim_{t\to+\infty} t^{1+\tau} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} = -\infty,\ \forall\, \tau > 0.$$

证明。我们回顾一下，在充分靠近 $+\infty$ 时，可定义函数最终是单调的。在这两种情况下，结合 $+\infty$ 附近的可积性论证，并通过导出与所需结论相矛盾的结果，即可完成证明。□

我们的设定：设 W 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中一个 C^2 连通闭子流形，且在 $\mathcal{M}$ 中可定义。欧几里得度量在 TW 上的限制，在 W 上诱导出一个可定义的黎曼度量 C^1。此外，我们还要求

$$\dim W \geq s.$$

令 $\varphi : W \mapsto \mathbb{R}^s$ 为投影在 $\mathbb{R}^s$上的映射对 W 的限制，因此 φ 是一个 C^2 且可定义的映射。

4. Some elementary linear algebra

设 V 是一个维数为 q的实向量空间。
令 G 为并集 $\cup_k$G(k, V)，即 V的整体格拉斯曼空间。

我们假设 V配备了标量积 $\langle -, - \rangle$。令 $|-|$ 为相应的范数。V的任意向量子空间 E 均配备标量积的限制，从而在 E上得到一个标量积。令 S(E) 为 E的单位球面。

设 E 是 V的一个向量子空间，且 u 是 V的一个单位向量。u 到 E 的距离定义为

$$\delta_q(\mathbf{u}, E) := \max\{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| : \mathbf{v} \in \mathbf{S}(E^\perp)\}.$$

函数 (u E) $\mapsto \delta_q$(u E) 在 S(V) $\times$ G 上是半代数的。
设 E、F 是 V 的向量子空间。从 E 到 F 的距离定义为

$$\delta_q(E, F) := \max\{\delta_q(\mathbf{u}, F) : \mathbf{u} \in \mathbf{S}(E)\}.$$

函数 $(E,F) \to \delta_q(E,F)$ 关于 $\mathsf{G} \times \mathsf{G}$ 中的元素也是半代数的。它对 E 和 F 并不对称。然而，它在 $\mathsf{G}(k,V) \times \mathsf{G}(k,V)$ 上的限制，在 $\mathsf{G}(k,V)$ 上给出了一个距离。

令 $\mathcal{L}(p,q)$ 为从 $\mathbb{R}^p$ 到 $\mathbb{R}^q$ 的线性映射空间。该空间配备欧几里得范数。令 $\Sigma(p,q)$ 为 $\mathcal{L}(p,q)$ 的代数子集，由所有非满射线性映射组成。对于 $\mathcal{L}(p,q)$ 的线性算子 A，令 $A^* \in \mathcal{L}(q,p)$ 为 A 的伴随算子。

Defi定义 4.1. 令 $A \in \mathcal{L}(p,q)$。算子 A 的 Rabier 数定义为 as

$$\nu(A) := \inf_{|\varphi|=1} |A^*(\varphi)|. \tag{4.1}$$

由 [41, 28, 24]，可知，我们有以下结果:

命题 4.2. 令 $A \in \mathcal{L}(p,q)$。我们有

$$\inf_{|\varphi|=1} |A^*(\varphi)| = \sup\{r > 0 : \mathbf{B}^q(\mathbf{0},r) \subset A \cdot \mathbf{B}^p(\mathbf{0},1)\} = \operatorname{dist}(A, \Sigma(p,q)).$$

令 A 为 $\mathcal{L}(p,q)$ 的任意线性映射。每当算子 A 非满射时，我们就有 $\nu(A) = 0$。对于任意实数 λ，我们也有

$$\nu(\lambda A) = |\lambda| \nu(A).$$

令 $N(A)$ 为 $\mathbb{R}^p$ 中 $\ker A$ 的正交空间。虽然这显而易见，但仍值得单独指出以下结论

$$\nu(A) = \nu(A|_{N(A)}) \geq \nu(A|_P) \tag{4.2}$$

对每个子空间 $\mathbb{R}^p$ 的 P。
为了处理族而非映射，以下初等结果是这一方法的关键。

引理 4.3. 设 $A \in \mathcal{L}(p,q)$，且 V 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 的子空间，也是 A 的图。设 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^q$ 是典范投影 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ 在 V 上的限制。

1) If $\nu(A) > 0$, then

$$\nu(A) := \min\{|A \cdot \mathbf{u}| : \mathbf{u} \in \mathbf{S}(N(A))\}. \tag{4.3}$$

2) 以下结论成立

$$\nu(\varphi) = \frac{\nu(A)}{\sqrt{1+\nu(A)^2}}. \tag{4.4}$$

证明. 第 1 点) 显而易见。
对于第 2 点，注意到 $\nu(\varphi) = 0$ 当且仅当 $\nu(A) = 0$。
因此，我们假设 $\nu(A)$ 为正。用 $N(A)$ 代替 $\mathbb{R}^p$ 不会改变 $\nu(A)$ 的值。因此，我们可以假设 V 是 $A|_{N(A)}$ 的图。

考虑 $N(A)$ 的如下实代数子集

$$S_A := \{\mathbf{u} \in N(A) : |\mathbf{u}|^2 + |A \cdot \mathbf{u}|^2 = 1\}.$$

子集 S_A 是紧致的，且不包含 $\mathbf{0}$。考虑如下连续半代数映射

$$a : S_A \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \mapsto \frac{|A \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

由于 S_A 在 $\mathsf{S}(N(A))$ 上的径向投影是一个同胚，a 的像是区间 $[\nu(A)\ \|A\|]$。对于 $\mathbf{u} \in S_A$，我们推得

$$|\mathbf{u}| = \frac{1}{\sqrt{1+a(\mathbf{u})^2}}, \text{ and } |A\mathbf{u}| = \frac{a(\mathbf{u})}{\sqrt{1+a(\mathbf{u})^2}}.$$

根据 φ 和 $\nu(\varphi)$ 的定义，我们得到

$$\nu(\varphi) = \min\{|\mathbf{v}| : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{S}(V)\} = \min\{|A \cdot \mathbf{u}| : \mathbf{u} \in S_A\}.$$

由于函数 $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ 是递增的，我们得到

$$\nu(\varphi) = \frac{\nu(A)}{\sqrt{1+\nu(A)^2}}.$$

□

5. Blowing-up at infinity

我们需要描述　　在我们的设定中（并为满足我们的目的）恰当地描述一个无穷远点的邻域　　y.

设 I :=]0, +∞[。设 M := I × S^{n-1}。给定点 m = (r, u) ∈ I × S^{n-1}，我们注意到$T_{\mathbf{m}}$M = ℝ × $T_{\mathbf{u}}$ S^{n-1}。

$\mathbb{R}^n$ 在无穷远处的球面爆破是如下纳什微分同胚，定义为

$$\beta : \mathbf{M} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} \mapsto \mathbf{x} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{r}}.$$

映射 β 提供了一个单一坐标图，用于研究任意映射的行为；该映射的源是 $\mathbb{R}^n$中的一个非有界区域，且该区域位于无穷远处的边界部分附近。

设$\overline{\mathbf{M}}$:= [0, +∞[×S^{n-1}。它是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$的一个半代数子集，并且是一个具有光滑代数边界的子流形

$$\mathbf{M}^\infty := 0 \times \mathbf{S}^{n-1}.$$

我们将 $\mathbb{R}^n$ 紧致化为带边纳什流形 $\overline{\mathbb{R}^n}$:= M ⊔ **0** = $\mathbb{R}^n$ ⊔S^{n-1}，通过映射 β将 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$与 M 识别。我们还定义

$$\mathbf{M}_s := \mathbf{M} \times \mathbb{R}^s, \quad \overline{\mathbf{M}}_s := \overline{\mathbf{M}} \times \mathbb{R}^s, \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_s^\infty := \mathbf{M}^\infty \times \mathbb{R}^s.$$

设 G(k, $\overline{\mathbf{M}_s}$)为 M$_s$的秩为 k的子空间的格拉斯曼丛。
设 clos(Z) 为 M$_s$ 中 C^1 的闭包，其中 C^1 是 M$_s$的连通可定义子流形。设

$$Z^\infty := \mathrm{clos}(Z) \cap \mathbf{M}_s^\infty.$$

设 $g : Z \to \mathbb{R}$ 是一个可定义的 C^1 函数。我们将 g 在 clos(Z) 上的相对切丛定义如下

$$\mathcal{T}_g := \mathrm{clos}\{(\mathbf{z}, T_{\mathbf{z}}g) \in \mathbf{G}(\dim Z - 1, \overline{\mathbf{M}}_s)|_{Z\setminus \mathrm{crit}(g)}\} \subset \mathbf{G}(\dim Z - 1, \overline{\mathbf{M}}_s)|_{\mathrm{clos}(Z)},$$

其中，$T_{\mathbf{z}}g$ 是经过点 z 的 g 水平集的切空间。注意，$\mathcal{T}_g$ 是 G(dim Z − 1, M$_s$) 中的闭可定义集合。令 π : G(dim Z − 1, M$_s$) → $\overline{\mathbf{M}_s}$ 为投影 (z T) ↦ z，它将格拉斯曼丛投影到基空间上。$\mathcal{T}_{g,\,\mathbf{z}}$ 在 z ∈ M$_s$ 上方的纤维是 G(dim Z − 1, $T_{\mathbf{z}}$M$_s$) 中由下式定义的子集

$$\mathbf{z} \times \mathcal{T}_{g,\mathbf{z}} := \mathcal{T}_g \cap \pi^{-1}(\mathbf{z}).$$

定义 5.1. g 在无穷远处、clos(Z) 上的相对切丛定义为

$$\mathcal{T}_g^\infty := \pi^{-1}(Z^\infty) \cap \mathcal{T}_g.$$

对任意 z ∈ Z^∞，令 $(\mathcal{T}_g^\infty)_{\mathbf{z}}$ 为位于 z 上方的 $\mathcal{T}_g$ 的纤维。

令 r$_Z$: $Z \to \mathbb{R}$ 为将 r 限制到 Z 所得到的可定义函数，即对于 z = (r, u, y) ∈ M$_s$，我们有 r$_Z$(z) = r。

函数 r$_Z$ 在 Z^∞ 附近的行为，包含了一些关于 Z 聚集到 Z^∞ 的信息。t-正则性 [42, 48] 的概念关乎复或实多项式函数的图的射影紧化在无穷远除子处的相对余法空间的性质

函数。在我们当前最一般的实可定义情形中，无穷远除子的对应概念是“边界子集” Z^∞。借助 Rabier 数，用切空间的极限来阐述 t-正则性这一对应概念会清晰、简便得多（见定义 5.2）。我们引入以下映射

$$\beta_s := \beta \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^s} : \mathbf{M} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s.$$

对于 $T(\mathcal{T}^\infty_{r_\mathbf{z}})_\mathbf{z}$ 的任意切空间极限，其中 $\mathbf{z} = (0, \mathbf{u}, \mathbf{c})$，将 $T_\mathbf{z}\mathbf{M}_s = T_{(0,\mathbf{u})}\mathbf{M} \times T_\mathbf{c}\mathbb{R}^s$ 投影到该乘积的第二个因子 $T_\mathbf{c}\mathbb{R}^s$ 上，再限制到 T，即为 T 在 $\mathbb{R}^s$ 上的投影。

定义 5.2. 设 W 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中一个维数为 $d \geq s$ 的闭连通可定义子流形。设 $Z := \beta_s^{-1}(W)$。

若对任意 $\mathbf{z} \in Z^\infty \cap \mathbf{M} \times \mathbf{c}$ 以及任意 $T \in \mathcal{T}^\infty_{\mathbf{r}_Z,\ \mathbf{z}}$，投影映射 $T \to \mathbb{R}^s$ 都是满射，则子集 W 在值 $\mathbf{c}$ 处是 t-正则的。

若 W 是 $F\colon X \to \mathbb{R}^s$ 的图，则映射 F 在值 $\mathbf{c}$ 处是 t-正则的，当且仅当 W 是。

对于多项式或半代数映射 C^1，注意到 [48, Defi- nition 2.10] 和 [10,Definition 2.5] 在某种程度上等价于我们的定义 5.2。

为 $[0, +\infty[$ 和 $\mathbf{S}^{n-1}$ 分别赋予欧几里得度量后，空间 $\mathbf{M}$ 继承了这种度量乘积结构，$\mathbf{M}_s$ 也如此。

若 $\mathbf{m} = (\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{c})$ 是 $\mathbf{M}_s$ 中的任意一点，则 $T_\mathbf{m}\mathbf{M}_s = \mathbb{R} \times T_\mathbf{u}\mathbf{S}^{n-1} \times T_\mathbf{c}\mathbb{R}^s$。对于 $\mathbf{M}$ 的任意给定子空间 T，令 $L : T \mapsto \mathbb{R}^s = T_\mathbf{c}\mathbb{R}^s$ 为 T 到 $\mathbb{R}^s$ 的投影。L 的 Rabier 数 $\nu_s(L)$ 是相对于 $\mathbf{M}_s$ 上的乘积度量以及 $\mathbb{R}^s$ 上的标准度量定义的。令 $\pi_s(\mathbf{m})$ 为 $T_\mathbf{m}\mathbf{M}_s$ 到 $T_\mathbf{c}\mathbb{R}^s$ 的投影。

我们得到如下关于 t-正则性的有用且定量的刻画。

引理 5.3. 子流形 $W = \beta_s(Z)$ 在正则值 $\mathbf{c}$ 处 t-正则，当且仅当存在 $\nu_\mathbf{c} > 0$，使得对于每个 $\mathbf{z} \in Z^\infty \cap \mathbf{M}^\infty \times \mathbf{c}$ 以及每个 $T \in \mathcal{T}^\infty_{r_Z,\ \mathbf{z}}$，都有

$$\nu_s\left(\pi_s(\mathbf{z})|_T\right) \geq \nu_\mathbf{c}.$$

证明. 这是以下事实的直接推论： $Z^\infty \cap \mathbf{M}^\infty \times \mathbf{c}$ 可定义且紧；映射 $\mathbf{z} \mapsto \nu_s(\pi_s(\mathbf{z})|_{T_\mathbf{z}\mathbf{r}_Z})$ 可定义且连续；从 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 到 $\mathbb{R}^s$ 的 $(\dim\ W - 1)$ 维平面的投影是连续的；以及 t-正则性的定义。□

6. Rabier number, Malgrange-Rabier condition

设 $\mathbf{w} := (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的欧几里得坐标。设 W 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的一个闭连通可定义子流形，维数为 $d \geq s$，并设 $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^s$ 为投影 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y}$。我们引入以下记号（见 [41, 28]）：

定义 6.1. 若存在正常数 L，使得映射 φ 在值 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$ 处满足 Malgrange-Rabier 条件（MR），则

$$|\varphi(\mathbf{w}) - \mathbf{c}| \ll 1 \text{ and } |\mathbf{w}| \gg 1 \implies |\mathbf{w}| \cdot \nu(D_\mathbf{w}\varphi) \geq L. \tag{6.1}$$

我们也称 φ 在 $\mathbf{c}$ 处是 (MR)-正则的。

在定义 6.1 中，映射 φ 趋于有限值 $\mathbf{c}$，因此无穷远处的渐近现象只发生在 $\mathbb{R}^n$ 分量的方向上。换言之，由于 $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$，我们可以等价地要求 $|\mathbf{x}| \gg 1$ 和 $|\mathbf{x}| \cdot |D_\mathbf{w}\varphi| \geq L$，而不是要求 $|\mathbf{w}| \gg 1$ 和 $|\mathbf{w}| \cdot |D_\mathbf{w}\varphi| \geq L$。

作为 (MR)-正则值的对应概念，我们明确引入以下定义

定义 6.2. 映射 φ 的渐近临界值 c，简单来说就是 φ的 Malgrange-Rabier 临界值，即存在 W 中的点序列 $\mathrm{w}_k := (\mathrm{x}_k, \mathrm{y}_k)_k$，满足：(i) $\mathrm{w}_k \to \infty$，(ii) $\mathrm{y}_k \to \mathrm{c}$，并且

$$|\mathbf{w}_k| \cdot \nu(D_{\mathbf{w}_k}\varphi) \to 0.$$

通常将映射 φ 的 ACV 集合记作 $K_\infty(\varphi)$。

定义 6.3。 φ 的广义临界值是子集中的任意值

$$K(\varphi) := K_0(\varphi) \cup K_\infty(\varphi) \subset \mathbb{R}^s.$$

记号：设 $\nu^\varphi(\mathrm{w}) := \nu(D_{\mathbf{w}}\varphi)$。

我们先给出以下预期结果：

引理 6.4。子集 $K(\varphi)$ 是可定义且闭的。

证明。由于 Malgrange-Rabier 条件可由结构 $\mathcal{M}$ 的语言中的一个一阶公式表述，因此子集 $K_\infty(\varphi)$ 在该结构中是可定义的。因此，子集 $K(\varphi)$ 也同样如此。将 $\mathbb{R}^q$ 紧化为 S^q，并将 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 紧化为 $[0, +\infty]$，方法是在无穷远处添加一个点。该紧化是半代数的。考虑以下紧致可定义子集

$$G := \mathrm{clos}\{(\mathbf{w}, (1 + |\mathbf{w}|) \cdot \nu^\varphi(\mathbf{w})) \in W \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^s \times [0, +\infty].$$

记 $g\colon G \to \mathrm{S}^s$ 为到 $\mathrm{S}^s = \mathbb{R}^s \sqcup \infty$ 上的投影，则有以下恒等式

$$K(\varphi) = \mathbb{R}^s \cap g\left(G \cap \mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^s \times 0\right)$$

证明得证。 □

下一个结果说明了映射 φ 的某个特征在值 $\mathrm{c} \notin K(\varphi)$ 附近的无穷远处的行为。

引理 6.5。设 c 是 φ 的一个正则值，同时也是 (MR)-正则的。设 $(\mathrm{w}_k)_k$ 是 W 的任意序列，满足 (i) $\mathrm{w}_k \to \infty$，(ii) $\mathrm{y}_k \to \mathrm{c}$。以下极限成立

$$\lim_{k \to +\infty} \delta_{n+s}\left(\frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}, T_{\mathbf{w}_k}\varphi\right) = 0. \tag{6.2}$$

证明。根据假设，存在正常数 L，使得对于陈述中任意的序列 $(\mathrm{w}_k)_k$，我们有

$$|\mathbf{w}_k| \cdot \nu^\varphi(\mathbf{w}_k) \geq L, \text{ for } k \gg 1.$$

只需考虑在 $+\infty$ 处可定义的路径，而非序列。令

$$t \mapsto \mathbf{w}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in W$$

为 $+\infty$ 处的一个可定义映射的芽，使得当 t 趋于 $+\infty$ 时

$$\mathbf{w}(t) := t\mathbf{u}(t), \text{ with } \mathbf{u}(t) \in \mathbf{S}^{n+s-1};\ \mathbf{y}(t) \to \mathbf{c}.$$

特别地，$\mathrm{u}(t) \to \mathrm{u} \in \mathrm{S}^{n-1} \times \mathbf{0}$。由于 φ 是可定义的，切向纤维映射

$$\mathbf{w} \mapsto T_{\mathbf{w}}\varphi \in \mathbf{G}(\dim W - s, n + s)$$

是可定义的。因此，下述映射在 $+\infty$ 处是可定义的

$$t \mapsto T_{\mathbf{w}(t)}\varphi, \text{ and } T_{\mathbf{w}(t)}\varphi \to T$$

当 t趋于 $+\infty$时。我们想要证明

$$\lim_\infty \delta_{n+s}(\mathbf{w}', T_{\mathbf{w}}\varphi) = 0,$$

由于引理 3.1 给出 $\left|\mathbf{w}' - \mathbf{w}\,|\mathbf{w}|\right| \to 0$ 在无穷远处成立。映射

$$t \mapsto f(t) := \varphi(\mathbf{w}(t)) - \mathbf{c}$$

在 $+\infty$ 处可定义，并且当 t 趋于 $+\infty$时趋于 0。对 f的每个分量分别处理，引理 3.2 得出

$$t \cdot f'(t) \to \mathbf{0}.$$

令 $N_{\mathbf{w}}\varphi \subset T_{\mathbf{w}}W$ 为 $T_{\mathbf{w}}\varphi$的正交补。令 $\mathbf{w}' = \mathbf{w}'_T + \mathbf{w}'_N$ 为 $\mathbf{w}'$ 在正交直和 $T_{\mathbf{w}(t)}\varphi \oplus N_{\mathbf{w}(t)}\varphi = T_{\mathbf{w}(t)}W$中的分解。当然，以下每个映射的芽

$$t \mapsto T_{\mathbf{w}(t)}W, \;\; t \mapsto N_{\mathbf{w}(t)}\varphi, \;\; t \mapsto \mathbf{w}'_T, \;\text{and}\; t \mapsto \mathbf{w}'_N$$

在 $+\infty$处可定义。根据定义，我们有

$$\delta_{n+s}(\mathbf{w}', T_{\mathbf{w}}\varphi) = |\mathbf{w}'_N|.$$

将前一个等式与假设结合起来，我们得到

$$|D_{\mathbf{w}}\varphi \cdot \mathbf{w}'| = |D_{\mathbf{w}}\varphi \cdot \mathbf{w}'_N| \geq |\mathbf{w}'_N| \cdot \nu^{\varphi}(\mathbf{w}(t)),$$

由此可得

$$|\mathbf{w}'_N(t)| \leq \frac{t \cdot |f'(t)|}{L} \to 0.$$

□

我们引入如下定义：

定义 6.6. 连续正函数 $\mu : (\mathbb{R}_{\geq 0}, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在 $+\infty$处快速增长，当且仅当

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \cdot \mu(t) = +\infty.$$

对于在 $+\infty$处快速增长的函数芽 μ，我们定义

$$K^{\mu}_{\infty}(\varphi) = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s : \exists (\mathbf{w}_k)_k \in W \text{ with } \mathbf{w}_k \to +\infty, \mathbf{y}_k \to \mathbf{c} \text{ such that } \mu(|\mathbf{w}_k|) \cdot \nu^{\varphi}(\mathbf{w}_k) \to 0\}.$$

在定义 6.6 中，等价地，我们可以要求 $\mu(|\mathbf{x}_k|) \cdot \nu^{\varphi}(\mathbf{w}_k) \to \infty$。当函数芽$\mu$ 在 $+\infty$处可定义时，子集 $K^{\mu}_{\infty}(\varphi)$ 是可定义的，且包含于 $K_{\infty}(\varphi)$ 中。如 [6, 28], 所示，我们有

命题 6.7. 存在一个无穷远处的函数芽 $\mu : (\mathbb{R}_{\geq 0}, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它快速增长且在 $+\infty$处可定义，使得

$$K_{\infty}(\varphi) = K^{\mu}_{\infty}(\varphi).$$

证明。证明的思路与 [6, 引理 3.3] 或 [28, 引理 3.1]相同。利用立体投影的逆映射，任意欧几里得空间 $\mathbb{R}^q$ 都可以光滑且半代数地紧化为 $\mathbb{S}^q = \mathbb{R}^q \sqcup \infty$。令 $\mathrm{clos}(W)$ 为 W 在 $\mathbb{S}^{n+s}$中的闭包。我们考虑以下可定义映射

$$G : W \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, \; \mathbf{w} \mapsto (\varphi(\mathbf{w}), |\mathbf{w}| \cdot \nu^{\varphi}(\mathbf{w})).$$

令 $Y := \mathrm{clos}(W) \times \mathbb{S}^s \times \mathbb{S}^1$。定义

$$\Gamma := \mathrm{clos}(\mathrm{graph}(G)) \subset Y \text{ and } A := \infty \times \mathrm{clos}(K_{\infty}(\varphi)) \times 0 \subset Y.$$

注意到 A 是闭的。可定义翅膀引理（[50], [31, 引理 2.7]）指出，存在 Γ 的一个闭可定义子集 B，使得

$$B \cap A = \emptyset, \;\text{and}\; \mathrm{clos}(B) \cap \Gamma \setminus \mathrm{graph}(G) = A.$$

点 $\infty \times \mathbf{u} \times 0$ 属于 A，当且仅当存在一个序列 $(\mathbf{w}_k)_k \in \pi_W(B)$，使得 $\mathbf{w}_k \to \infty$、$\mathbf{y}_k \to \mathbf{c}$ 且 $|\mathbf{w}| \cdot \nu^{\varphi}(\mathbf{w}) \to 0$，其中 π_W: $\Gamma \mapsto \mathbf{clos}(W)$ 是到第一个因子的投影。考虑以下可定义函数

$$b(r) := r \cdot \max\{\nu^{\varphi}(\mathbf{w}) \text{ for } \mathbf{w} \in \pi_W(B) \text{ and } |\mathbf{w}| = r\}.$$

我们按照 [6, 引理 3.3] 中的方法验证，定义的函数

$$r \mapsto \mu(r) := \frac{r}{\sqrt{b(r)}}$$

满足所述结论。 □

作为本节的总结，我们想就图像这一特殊情形补充几点说明。

设 X 是 $\mathbb{R}^n$的一个闭连通可定义 C^2-子流形。设 $F: X \to \mathbb{R}^s$ 是一个 C^2 且可定义的映射。我们假设 $\dim X \geq s$。需要考虑相应的 Rabier 数函数:

$$\mathbf{x} \mapsto \nu^F(\mathbf{x}) := \nu(D_{\mathbf{x}}F).$$

我们回顾以下补充定义:

若存在正常数L，使得对于任意满足以下条件的 X 序列 $(\mathbf{x}_k)_k$: (i) $\mathbf{x}_k \to +\infty$, (ii) $F(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{c}$, 均有: 则称值 $\mathbf{c}$ 是映射 F 的 Malgrange-Rabier 正则值。

$$|\mathbf{x}_k| \cdot \nu^F(\mathbf{x}_k) \geq L.$$

若存在一个满足以下条件的 X 序列 $(\mathbf{x}_k)_k$: (i) $\mathbf{x}_k \to +\infty$, (ii) $F(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{c}$, 且 (iii) $|\mathbf{x}_k| \cdot \nu^F(\mathbf{x}_k) \to 0$, 则称值 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$ 是映射 F 的渐近临界值。

令 W 为 F 的图，并令 $\mathbf{w} = (\mathbf{x}\ F(\mathbf{x}))$ 为 W 中的一点。由于 $T_{\mathbf{w}}W$只是线性映射 $D_{\mathbf{x}}F$: $T_{\mathbf{x}}X \to \mathbb{R}^s$ 的图，引理 4.3 的等式（4.4）保证，值 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$ 属于 $K_{\infty}(F)$ 当且仅当它属于 $K_{\infty}(\varphi)$。

本节中针对 φ 提出的任何命题和概念，都可推广到映射 F。所需的修改显而易见；我们可以验证，关于F 的每个命题，其证明都可以按照相同步骤，轻易地由对应的关于 φ的命题改写而来。

7. Malgrange-Rabier condition and geometry at infinity

我们将在此结合第 5 节关于无穷远的局部观点与第 6 节的仿射观点。

无穷远处爆破映射 $\beta: \mathbf{M} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ 虽然是微分同胚，却绝不是等距变换。不过，球面 $r \times \mathbf{S}^{n-1}$ 会映射到球面 $\mathbf{S}^{n-1}_{\frac{1}{r}}$ 上；同一点处与球面相切的两条向量之间的夹角以及它们与球面的正交性也都保持不变，如下所示：设 $\mathbf{m} = (\mathbf{r}, \mathbf{u})$ 是 $\mathbf{M}$ 上的一点。我们得到

$$D_{\mathbf{m}}\beta|_{T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1}} = \mathbf{r}^{-1}\mathrm{Id}_{T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1}}, \text{ and } D_{\mathbf{m}}\beta \cdot \partial_{\mathbf{r}} = -r^{-2}\mathbf{u} = -\mathbf{r}^{-1}\beta(\mathbf{m}).$$

在 Z 附近处理 $\mathbf{r}_Z = 0$，就是在 W的一个无穷远邻域内进行处理。我们得到如下结果:

引理 7.1. 若 φ 在正则值 $\mathbf{c}$ 处为 (MR)-正则，则 W 在 $\mathbf{c}$ 处为 t-正则。

证明。只需证明沿一条无穷远路径成立即可。设 $t \mapsto \mathbf{w}(t) \in W$ 是在 $+\infty$ 处可定义的映射芽，使得: $\mathbf{z}(t) := \beta_s^{-1}(\mathbf{w}(t)) \to \mathbf{z}_{\infty} = (\mathbf{0},\mathbf{u},\mathbf{c}) \in \mathbf{M}^{\infty}_s$，其中 $\mathbf{c}$ 是 φ 的一个 (MR)-正则值，并且

$$T(t) := T_{\mathbf{z}(t)}Z \to T, \text{ and } R(t) := T_{\mathbf{z}(t)}\mathbf{r}_Z \to R.$$

不失一般性，我们进一步假设 $\mathsf{w}(t) = t\mathsf{u} + o(t)$，并令

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = \frac{\mathbf{w}(t)}{|\mathbf{w}(t)|} + o(1).$$

回顾一下

$$R(t) \subset T(t) \cap 0 \times T_{\mathbf{u}(t)}\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^s.$$

设 $D(t) := D_{\mathbf{w}(t)}\varphi$。设 $\nu(t) = \nu^{\varphi}(\mathsf{w}(t))$。根据假设，我们有

$$t \cdot \nu(t) \geq L, \text{ for some constant } L > 0.$$

仍记 $D(t)$ 为将 $D(t)$ 延拓到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 后在 $(T_{\mathbf{w}(t)}W)^{\perp}$ 上取零映射所得的映射。换言之，我们有

$$t \gg 1 \Longrightarrow \frac{1}{\nu(t)} D(t) \cdot \mathbf{B}^{n+s}(\mathbf{0}, 1) \supset \mathbf{B}^s(\mathbf{0}, 1).$$

设 ξ_s 为 $\mathbf{S}^{s-1}$ 中任意一个向量。存在一个无穷远处可定义映射的芽

$$t \mapsto \chi(t) \in \mathbf{B}^{n+s}(\mathbf{0}, 1)$$

沿 w 与 X 相切，使得当 t 足够大时

$$\xi_s = \frac{1}{\nu(t)} D(t) \cdot \chi(t) \in \mathbf{S}^{s-1}.$$

在正交直和

$$T_{\mathbf{w}(t)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s) = \mathbb{R}\mathbf{u}(t) \oplus T_{\mathbf{u}(t)}\mathbf{S}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^s,$$

中，我们将 $\chi(t)$ 分解为可定义正交直和

$$\chi(t) = \psi(t)\mathbf{u}(t) + \chi_{\mathbf{S}}(t) + \nu(t)\xi_s.$$

我们得到

$$\xi(t) := D_{\mathbf{w}(t)}\beta_s^{-1} \cdot \frac{1}{\nu(t)}\chi(t) = \left(\frac{-\psi(t)}{t^2\nu(t)}, \frac{1}{t\nu(t)}\chi_{\mathbf{S}}(t), \xi_s \right).$$

由于一旦 t 足够大，$|\chi(t)| \leq 1$ 和 $t \cdot \nu(t) \geq L$，我们便可推得存在 $\xi_{\mathbf{S}} \in T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1}$，使得

$$\xi(t) \to (0, \xi_{\mathbf{S}}, \xi_s) \in \mathbb{R} \times T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^s,$$

这就证明了所述结果。事实上，向量 $(0, \xi_{\mathbf{S}}, \xi_s)$ 必然属于 R，因为 R 是 $T \cap 0 \times T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^s$ 的子空间。□

下一个引理是引理 7.1 的逆命题。

引理 7.2. 若 W 在 φ的正则值 c 处是 t-正则的，则 φ 在 c 处是 (MR)-正则的。

证明。再次，只需检验该性质沿无穷远处的可定义路径成立。设 $t \mapsto \mathsf{w}(t) := (\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t))$ 是在 $+\infty$处可定义的映射芽，且 $\mathsf{z} = \beta_s^{-1} \circ \mathsf{w}$。考虑如下极限，其中 $t \to +\infty$

$$\mathbf{z}(t) \to \mathbf{z}_{\infty} := (0, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \in \overline{\mathbf{M}}_s^{\infty}, \text{ and } R(t) := T_{\mathbf{z}(t)}\mathbf{r}_Z \to R,$$

其中 $Z := \beta_s^{-1}(W)$。我们可以假设 $\mathsf{z}(t) = (t^{-1}, \mathsf{u}(t), \mathsf{y}(t))$，其中 $\mathsf{y}(t) \to \mathsf{c} \notin K(\varphi)$。令

$$\pi_s(t) := \pi_s(\mathbf{z}(t)) \text{ and } \nu_s(t) := \nu_s\left(\pi_s(t)|_{T_{\mathbf{z}(t)}\mathbf{r}_Z}\right).$$

该假设意味着

$$\lim_{t \to +\infty} \nu_s(t) = \nu \geq \nu_{\mathbf{c}}.$$

设 ξ 是 $\mathbb{R}^s$ 的一个单位向量。设 $\xi(t)$ 是一个取值于 $T\mathbf{r}_Z$ 的可定义路径，沿着路径 $t \mapsto \mathsf{z}(t)$，使得当 t 足够大时，我们有

$$\pi_s(t) \cdot \xi(t) = \xi.$$

因此，我们可以写出以下正交分解

$$\xi(t) = r(t)\partial_{\mathbf{r}} \oplus \zeta(t) \oplus \xi \in T_{\mathbf{z}(t)}\mathbf{M}_s = \mathbb{R} \oplus T_{\mathbf{u}(t)}\mathbf{S}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^s,$$

因此，假设推出

$$r(t) = 0, \text{ and } |\xi(t)| \leq \frac{1}{\nu_s(t)} \leq \frac{2}{\nu}.$$

令 $t \mapsto \chi(t)$ 为无穷远处的可定义路径

$$\chi(t) := D_{\mathbf{z}(t)}\beta_s(t) \cdot \xi(t) \in T_{\mathbf{w}(t)}W.$$

将 $\chi(t)$ 分解到正交直和 $\mathbb{R}\mathbf{u}(t) \oplus T_{\mathbf{u}(t)}\mathbf{S}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^s$ 中，我们得到

$$\chi(t) = 0 \oplus \mathbf{v}(t) \oplus \xi.$$

特别地，显然可得

$$D_{\mathbf{w}(t)}\varphi \cdot \chi(t) = \xi.$$

根据 z 的参数化方式，我们有 $|\mathbf{x}(t)| = t$。由于

$$\xi(t) = 0 \oplus \frac{1}{t}\mathbf{v}(t) \oplus \xi,$$

此外，我们注意到

$$\frac{2}{\nu} \cdot t \ \geq \ t \cdot |\xi(t)| \ \geq \ |\chi(t)|.$$

由于 $|\mathbf{w}(t)| \geq t$，前面的不等式推出以下包含关系

$$\mathbf{B}_1^s \subset D(t) \cdot \mathbf{B}^{n+s}_{\frac{2}{\nu}|\mathbf{w}(t)|},$$

其中，$D(t) \in \mathcal{L}(n+s, s)$ 是 $D_{\mathbf{w}(t)}\varphi$ 到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的线性延拓，它在 $T_{\mathbf{w}(t)}W$ 的法空间 $N_{\mathbf{w}(t)}W$ 上是零映射，其中 $T_{\mathbf{w}(t)}W$ 位于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中。换言之，我们已经证明

$$\nu^{\varphi}(\mathbf{w}(t)) = \nu(D(t)) \geq \frac{\nu_{\mathbf{c}}}{2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{w}(t)|},$$

至此证明完毕。 □

结合引理 7.1、引理 7.2，我们在最一般的情形下证明了以下

命题 7.3。φ 的正则值 c 是 (MR)-正则的，当且仅当子流形 W 在值 c 处是 t-正则的。

换言之，在这一最一般的背景下，我们严格证明了 (MR)-正则性与（当前形式的）t-正则性等价（特殊情形见 [48, 10, 15] ）。

备注 7.4。当 $d = s$ 时，c 处的 Malgrange-Rabier 正则性条件等价于映射 φ 在值 c 处的局部真性，也就是说，φ 在 c 的某个邻域上是真映射。事实上，渐近临界值与映射 φ 的非真值重合（参见 [28, 第 86 至88] 页，并几乎可以直接将其中的论证改用于我们的背景）。特别地，引理 7.1 和引理 7.2 显然成立。

利用命题 6.7，我们现在可以证明以下 Morse-Sard 型结果；其证明不同于 [26, 28] 中给出的证明，并且比 [10]对这里所涉及的几何现象提供了更精确的洞见。

定理 7.5。子集 $K_\infty(\varphi)$ of $\mathbb{R}^s$ (是可定义的)，且具有正余维。

证明。根据命题 6.7，我们知道 $K_\infty(\varphi) = K_\infty^\mu(\varphi)$，其中某个快速衰减函数 μ 在 $+\infty$ 处可定义。以下子集

$$W_1 := \{\mathbf{w} \in W : \mu(|\mathbf{w}|) \cdot \nu^\varphi(\mathbf{w}) \leq 1\}$$

是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的闭可定义子集。令

$$Z_1 := \beta_s^{-1}(W_1), \text{ and } Z_1^\infty := \operatorname{clos}(Z_1) \cap \mathbf{M}_s^\infty.$$

由引理 7.1 和引理 7.2 可知，Z_1^∞ 中的任意点 $\mathsf{z}_\infty = (0, \mathsf{u}, \mathsf{c})$ 都是序列 $(\mathsf{z}_k)_k$ 的极限，其中这些点属于 Z_1，且满足 $T_{\mathbf{z}_k}\mathsf{r}_Z \to R \subset T_{\mathbf{z}_\infty}\overline{M}_s$ 不满射到 $\mathbb{R}^s$。令 τ_Z 为 $\operatorname{clos}(Z)$ 在 $\mathbb{R}^s$ 上的投影。因此

$$\tau_Z(Z_1^\infty) = K_\infty(\varphi).$$

令 r_1 为 r_Z 在 $\operatorname{clos}(Z_1)$ 上的限制。这是一个连续可定义映射。芽 $\mathbf{M}_s^\infty$ 处的芽对 (Z_1, Z_1^∞) 可定义地分层，使其关于函数 r_1 [33] 为 (a_{rel})-正则。令 z_∞ 为 S^∞ 中的一点，且 S^∞ 是包含于 Z_1^∞ 中的一个分层。因此，对于任意收敛到 z_∞ 的 Z_1 序列 $(\mathsf{z}_k)_k$，$T_{\mathbf{z}_\infty}S^\infty$ 包含于 z_∞ 处相对切空间 $T_{\mathbf{z}_k}\mathsf{r}_Z = T_{\mathbf{z}_k}\mathsf{r}_1$，的极限 T 中。由命题 7.3 及 Z_1 的定义，极限 T 不可能满射到 $\mathbb{R}^s$。因此我们推得

$$\operatorname{rank} D_{z_\infty}(\tau_Z|_{S^\infty}) \leq s - 1,$$

因此我们得到

$$\dim \tau_Z(Z_1^\infty) \leq s - 1.$$

□

8. Bifurcation values and triviality results

在此最一般的情形下，我们回顾前几节中关于 (MR)-正则值 c 邻近处等奇异性的概念和结果。

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个连通的、可定义的 C^a 子流形，同时也是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，其中 $a \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \infty$。设 $F\colon X \to \mathbb{R}^s$ 是一个 C^k 可定义映射，其中 $2 \leq k \leq a$。在此定义中，C^k 理解为 F 在 X 上可能达到的最大正则性。为了使结论具有意义，我们假设 $\dim X \geq s$。

定义 8.1. 若 $\mathbb{R}^s$ 的值 c 存在一个在 $\mathbb{R}^s$ 中包含 c 的邻域 $\mathcal{V}$，使得映射 F 的限制

$$F|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} := F^{-1}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$$

是一个以 $\mathcal{V}$ 为底空间、以 $F^{-1}(\mathsf{c})$ 为模型纤维的平凡 C^{k-1}-纤维丛，而 $F|_{\mathcal{U}}$ 是到基底的投影映射。

现在，我们可以在以下预期的定理中看到先前引入的 (MR)-正则性条件与等奇异性之间的关系

定理 8.2. 若 $\mathbb{R}^s$ 的正则值 c 对映射 F 是 (MR)-正则的，则 c 是 F 的典型值。

过去四十年间，这一结果曾多次出现，主要针对函数[22, 42, 39, 41, 48, 34, 28, 24, 25, 6, 26, 10, 15]（此列表远非详尽）。我们在此给出的证明是显式的，不涉及繁琐的流的复合 s （一旦 $s \geq 2$，这一步通常不会显式完成）。我们沿用了 Rabier [41] 简单而优美的思路（另见 Jelonek 在 [24, 25] 中的变体，该变体运用了 Gaffney 对 (MR)-正则性的刻画 [20]）。

证明。假设 c 是 F的一个 (MR)-正则值。存在一个正数 ε ，使得闭球 B := B^p(c ε) 与 $K(F)$不相交。令 F 为带边界的闭可定义 C^k 子流形

$$\mathbf{F} := F^{-1}(\mathbf{B}) \subset X.$$

注意，随着 k 趋于无穷远，序列 $(\mathbf{x}_k)_k$ 离开 F，要么趋于边界 ∂F，要么趋于无穷远（参见引理 4.1] 中的条件（4.1） [41, ）。经过平移，我们可以假设 $\mathbb{R}^n$ 的原点不属于 F。根据 Malgrange-Rabier 正则性的定义，我们可以假设存在一个正常数 M ，使得下列估计在 F 中成立：

$$|\mathbf{x}| \cdot \nu(D_{\mathbf{x}}F) \geq M. \tag{8.1}$$

对于 x $\in$ F，令 A(x) := $D_{\mathbf{x}}F$。我们考虑如下线性映射

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) := A(\mathbf{x})^t \cdot (A(\mathbf{x}) \cdot A(\mathbf{x})^t)^{-1}.$$

按照 Rabier 的术语，V(x) 是 A(x) 的右逆：

$$A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathrm{Id}_{T_{F(\mathbf{x})}}\mathbb{R}^s.$$

映射 x $\mapsto$V(x) 是向量丛 $F^*(T\mathbb{R}^s)|_{\mathbf{F}}$ 的一个 C^{k-1} 可定义截面，其取值属于 $NF|_{\mathbf{F}} \subset T\mathbb{R}^n|_{\mathbf{F}}$，即 F 上的法丛。现在我们沿用 Rabier 的证明 [41, 第 4] 节。考虑下列带参数的微分方程：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = & \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{c}) \\ \mathbf{x}(0) & \in & \mathbf{F} \end{cases} \tag{8.2}$$

其中 y $\in$B。带参数的向量场

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{c})$$

是可定义的，且 C^{k-1}。若 Ψ 表示常微分方程 (8.2) 的流，则注意到

$$F(\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})) = F(\mathbf{x}) + t(\mathbf{y} - \mathbf{c}).$$

设 z = (x, y) 属于 F $\times$ B，且设 $I_{\mathbf{z}}$ 为常微分方程 (8.2) 的解存在的定义域

$$t \mapsto \varphi(t; \mathbf{z})$$

，并且在此定义域内 φ(0;z) = x。令

$$\ell(t; \mathbf{z}) := \left| \int_0^t |\mathbf{V}(\varphi(\tau; \mathbf{z}))| \mathrm{d}\tau \right|,$$

表示轨迹 $t \mapsto \varphi$(t;z) 在时刻 0 与 t 之间的长度。结合估计式 (8.1) 并运用 Gr¨onwall 论证（见 [7]），可得

$$\ell(t; \mathbf{z}) \leq \frac{1}{M} \cdot |\mathbf{y} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{x}| \cdot e^{\frac{t}{M}}.$$

由此可仿照引理 4.2], 的证明得出：对于每个 x $\in F^{-1}$(c)，区间 $I_{\mathbf{z}}$ 都包含 $[-1, 1]$。该平凡化由 C^{k-1} 微分同胚实现

$$F^{-1}(\mathbf{c}) \times \mathbf{B} \to \mathbf{F}, \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \Psi(1, \mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{8.3}$$

□

令 $\mathcal{V}$为 $\mathbb{R}^s \setminus K(F)$ 的任意一个连通分支。令 $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha$ 为$F^{-1}(\mathcal{V})$ 的连通分支，并令 F^a为 F 在 $\mathcal{U}_a$上的限制。定理 8.2 推出：

推论 8.3. . 对每个 $a = 1, \ldots, \alpha$，映射 F^a: $\mathcal{U}_a \mapsto \mathcal{V}$在 $\mathcal{V}$上诱导出一个局部平凡的 C^{k-1} 纤维丛结构，其连通模型纤维为 $F^{-1}(\mathrm{c}_a) \cap \mathcal{U}_a$ ，其中 $\mathrm{c}_a \in \mathcal{V}$。

以下内容值得关注

注 8.4. 假设 F 是实解析且全局次解析的。定理 8.2 的证明表明，在 (MR)-正则值附近，方程 (8.3) 生成的流是实解析的，因为 ξ 是实解析映射。

定义 8.5。 $\mathbb{R}^s$ 的一个值 c 若不是典型值，则称为映射 F 的一个分岔值。令$Bif(F)$为 F的分岔值集合。

定理 8.2 和定义 8.5 的（预期）推论如下

推论 8.6。 $Bif(F) \subset K(F)$。

9. Sub-level sets family associated with a family of hypersurfaces

第 16 节将采用这一设定。

设 $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ 是一个可定义函数，且 0 是 F 的正则值。定义以下 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的闭可定义子集,

$$\mathcal{W} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s : F(\mathbf{p}) \leq 0\}, \text{ and } W := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s : F(\mathbf{p}) = 0\}.$$

我们假设 $\mathcal{W}$ 和 W 均非空。注意， $\mathcal{W}$ 是一个带可定义边界 W 的可定义子流形。设 $\varphi : W \to \mathbb{R}^s$、 $\omega : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^s$ 分别为投影映射 (x, y) $\to$ y。对于每个参数 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$，我们定义函数

$$f_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ as } \mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

从而得到可定义函数族 $(f_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^s}$。对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ ，有

$$\varphi^{-1}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{y}}^{-1}(0) \times \mathbf{y} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \text{ and } \omega^{-1}(\mathbf{y}) = \{f_{\mathbf{y}} \leq 0\} \times \mathbf{y} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s.$$

记作

$$\mathcal{W}_{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \leq 0\}, \text{ and } W_{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

每当 y 是 φ 的正则值时，水平集 $W_{\mathbf{y}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭可定义超曲面，它围成带边界 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}}$ 的闭可定义子流形。

我们需要关于函数族 $(\mathcal{W}_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\notin K(\varphi)}$ 的一些等奇异性结果，类似于第 8 节中给出的结果，不过针对的是映射 ω ，而不是单独的 φ。

命题 9.1。对于每个 c $\notin K(\varphi)$，都存在一个以 c 为中心、半径为 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的闭球 B，使得 ω^{-1} (B) 是 B 上以 $\mathcal{W}_{\mathbf{c}} \times$c 为模型纤维的 C^1 平凡纤维丛。

证明。根据 [5, 定理 6.11],，超曲面 W 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中有一个可定义邻域，该邻域与下述集合 C^1 可定义微分同胚:

$$NW(\rho) := \{(\mathbf{w}, \xi) \in NW : |\xi| \leq \rho(\mathbf{w})\},$$

其中 ρ 是 W 上的 C^2 正可定义函数， NW 是 W 在 $T(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s)$ 中的法丛。该微分同胚是通过限制“端点映射”得到的

$$E : T(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, \ (\mathbf{p}, \xi) \mapsto \mathbf{p} + \xi$$

到 $NW(\rho)$。上述 W 的邻域定义为

$$\mathscr{T}_\rho := E(NW(\rho)).$$

令 $N\varphi$ 为 $T\varphi$ 在 $T(W \setminus \text{crit}(\varphi))$ 中的法丛。它是 C^1、可定义的，且秩为 s。令 $N_\rho\varphi$ 为通过对 $N\varphi$ 进行平行移动得到的 $T(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s)|_{\mathscr{T}_\rho}$ 的可定义 C^1 向量丛，其秩为 s： 任意 p $\in \mathscr{T}_\rho$ 都可唯一写成 p =w $+\xi$，其中 (w ξ) 属于 $NW(\rho)$；当 w 不是 φ 的临界点时，

$$(N_\rho\varphi)_{\mathbf{p}} := N_{\mathbf{w}}\varphi.$$

假设对于某个正半径 ε，有 $\mathrm{B} = \mathrm{B}^s(\mathrm{c}, \varepsilon)$。对于 $\mathrm{p} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \omega^{-1}(\mathrm{B})$，我们定义

$$A(\mathbf{p}) := D_{\mathbf{p}}\omega, \text{ and } V(\mathbf{p}) := A(\mathbf{p})^t \cdot (A(\mathbf{p}) \cdot A(\mathbf{p})^t)^{-1}.$$

注意，$V(\mathrm{p}) : T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^s \mapsto \mathbf{0} \times T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^s \subset T_{\mathbf{p}}\mathcal{W}$ 是 $T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^s$的“恒等”映射。类似地，对于 $\mathrm{p} \in \mathscr{T}_\rho \cap \omega^{-1}(\mathrm{B})$，我们定义如下线性算子：

$$A_\rho(\mathbf{p}) := D_{\mathbf{p}}\omega|_{N_\rho\varphi}, \text{ and } V_\rho(\mathbf{p}) := A_\rho(\mathbf{p})^t \cdot (A_\rho(\mathbf{p}) \cdot A_\rho(\mathbf{p})^t)^{-1}.$$

对于任意 $\mathrm{p} \in \mathscr{T}_\rho$，我们有 $A_\rho(\mathrm{p}) \cdot V_\rho(\mathrm{p}) = \mathrm{Id}^{T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^s}$。注意，映射 $\mathrm{p} \to V_\rho(\mathrm{p})$ 是 C^1 且可定义的。由于任意 $\mathrm{p} \in \mathscr{T}_\rho$ 都能唯一地写成 $\mathrm{p} = \mathrm{w} + \xi$，我们得到

$$A_\rho(\mathbf{p}) = D_{\mathbf{w}}\varphi|_{N_{\mathbf{w}}\varphi}.$$

存在 C^1 可定义函数 $a_0, b_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto [0,1]$，使得：(i) $a_0 + b_0 \equiv 1$；(ii) $a_0^{-1}(0) = [1, +\infty[$；(iii) $b_0^{-1}(0) = [0, \frac{1}{2}]$。任意 $\mathrm{p} \in \mathscr{T}_\rho$ 都有唯一形式 $\mathrm{p} = \mathrm{w} + \xi$。在$\omega^{-1}(\mathrm{B})$上定义如下映射：

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{p}) := \begin{cases} V(\mathbf{p}) & \text{if } \mathbf{t} \notin \mathscr{T}_\rho \\ V_\rho(\mathbf{p}) & \text{if } \mathbf{t} \in \mathscr{T}_{\frac{\rho}{2}} \\ a_0\left(\frac{|\xi|}{\rho(\mathbf{p})}\right) V_\rho(\mathbf{p}) + b_0\left(\frac{|\xi|}{\rho(\mathbf{p})}\right) V(\mathbf{p}) & \text{if } \mathbf{t} \in \mathscr{T}_\rho \setminus \mathscr{T}_{\frac{\rho}{2}}. \end{cases}$$

它是可定义的，且 C^1 并满足

$$D_{\mathbf{p}}\omega \cdot \mathbf{V}(\mathbf{p}) = \mathrm{Id}_{T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^s}.$$

注意，只要 p 属于 $\mathcal{W} \setminus W$，就有 $\nu(D_{\mathbf{p}}\omega) = 1$。根据 c 和 B 的定义，存在一个正常数 M（取决于 B），使得

$$\mathbf{w} \in \varphi^{-1}(\mathbf{B}) \Longrightarrow (1 + |\mathbf{w}|) \cdot \nu^\varphi(\mathbf{w}) \geq M.$$

注意，对于任意 $\mathrm{p} = \mathrm{w} + \xi \in \mathscr{T}_\rho \cap \omega^{-1}(\mathrm{B})$，都有

$$\nu(A_\rho(\mathbf{p})) = \nu^\varphi(\mathbf{w}).$$

我们再次考虑常微分方程 (8.2)。关于 $\nu(D_{\mathbf{p}}\omega)$ 和 $\nu^\varphi(\mathrm{w})$ 估计的说明，只是为了确保定理 8.2 的证明中 Gr¨onwall 论证能够顺利进行，从而本证明的其余部分可以直接适用于当前的 V，并产生一个 C^1 流，给出所述的平凡化。□

令 $\mathcal{V}$ 为 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的任意一个连通分支。令 $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha$ 为 $\omega^{-1}(\mathcal{V})$ 的连通分支，并令 ω^a 为 ω 在 $\mathcal{U}_a$ 上的限制。命题 9.1 推出如下结论

推论9.2. 对每个 $a = 1, \ldots, \alpha$，映射 $\omega^a : \mathcal{U}_a \to \mathcal{V}$ 在 $\mathcal{V}$上诱导出一个局部平凡纤维丛结构，其连通模型纤维为 $\omega^{-1}(\mathrm{c}_a) \cap \mathcal{U}_a$，其中 $\mathrm{c}_a \in \mathcal{V}$。

10. On the link at infinity

设 S 是 $\mathbb{R}^p$的一个闭可定义子集。对于任意正半径 R，令

$$S_R := S \cap \mathbf{S}_R^{p-1}.$$

族 $(S_R)_{R>0}$ 是一个可定义族，因此存在一个正半径 r_S，使得只要 $R > r_S$，S_R 的拓扑类型便保持不变（例如参见 [5, 定理 5.22]）。为了运用 [13, 14], 中发展的技术，我们回顾以下关键概念：

定义 10.1。S 的无穷远链接 $\mathrm{Lk}^\infty(S)$ 是 $R > r_S$ 的任意子集 S_R。

设 W 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的一个 C^2 连通闭可定义子流形，并设 $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^s$ 是典范投影 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ 在 W 上的限制。对于 $\mathbb{R}^s$ 的任意值 y，我们回顾一下，$\varphi^{-1}(\mathrm{y}) = W_{\mathbf{y}} \times \mathrm{y}$。

令 $\mathcal{V}$ 为 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的任意一个连通分支。令 $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha$ 为 $\varphi^{-1}(\mathcal{V})$ 无穷远处的芽的连通分支。记作 $(\varphi|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{y}) = W^a{}_{\mathbf{y}} \times \mathrm{y}$。

以下结果可能是众所周知的民间结果，但我们仍将给出证明。

命题 10.2. 设 c 是 φ 中属于 $\mathcal{V}$ 的一个正则且 (MR)-正则值。对于每个 $a = 1, \ldots, \alpha$，都存在一个以 c 为中心且不与 $K(\varphi)$ 相交的 $\mathbb{R}^s$ 闭球 B，并且存在 $R_{\mathbf{B}} > 0$，使得对于每个 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}^\circ$ 以及每个 $R \geq R_{\mathbf{B}}$，链接 $(\varphi|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{y})_R$ 和 $(\varphi|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{c})_{R_{\mathbf{B}}}$ 微分同胚；链接 $(W^a{}_{\mathbf{y}})_R$ 和 $(W^a{}_{\mathbf{c}})_{R_{\mathbf{B}}}$ 也微分同胚。

证明。我们可以假设 $\alpha = 1$。令 $\psi\colon W \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^s$ 定义为 $\mathrm{w} \mapsto (|\mathrm{x}|^2, \mathrm{y})$，其中 $\mathrm{w} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$。引理 6.5 表明，存在一个以 c 为中心的闭球 B 和一个正半径 R_1，使得 ψ 在 $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \cap \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : |\mathrm{x}| \geq R_1\}$ 上是真下沉映射。注意，以下闭可定义子集

$$\mathbf{F} := \varphi^{-1}(\mathbf{B}) \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x}| > R_1\}.$$

是一个带边界的子流形。将 φ 限制在可定义的带边界子流形 (F ∂F) 上，得到一个 C^2 下沉映射。Ehresmann 纤维化定理表明，在 B° 上即可得到所需结果，只要 $R_{\mathbf{B}} > R_1$。

要得到关于 φ 的水平集而非族 $(W_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}}$的结果，我们沿用前一个证明的相同思路，只需将 ψ 改为映射 $\mathrm{w} \mapsto (|\mathrm{w}|^2, \mathrm{y})$。□

我们在本节最后还讨论第 9 节所述超曲面族背景下“次水平集族”的无穷远链环。我们沿用完全相同的记号。令 $\mathcal{V}$ 为 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的任意一个连通分支。令 $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha$ 为 $\omega^{-1}(\mathcal{V})$ 的无穷远处的芽的连通分支。记作 $(\omega|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{y}) = \mathcal{W}^a_{\mathrm{y}} \times \mathrm{y}$。我们有如下结果。

命题 10.3. 设 c 是 $\mathcal{V}$ 的正则且 (MR)-正则值。对于每个 $a = 1, \ldots, \alpha$，存在一个以 c 为中心、半径为 $\mathbb{R}^s$ 的闭球 B，且 B 不与 $K(\varphi)$ 相交；此外还存在 $R_{\mathbf{B}} > 0$，使得对于每个 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}^\circ$ 和每个 $R \geq R_{\mathbf{B}}$，链环 $(\omega|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{y})_R$ 与 $(\omega|_{\mathcal{U}^a})^{-1}(\mathrm{c})_{R_{\mathbf{B}}}$ C^1 微分同胚，并且链环 $(\mathcal{W}^a_{\mathrm{y}})_R$ 与 $(\mathcal{W}^a_{\mathrm{c}})_{R_{\mathbf{B}}}$ 也 C^1 微分同胚。

证明。我们可以假设 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 和 $\omega^{-1}(\mathcal{V})$ 的无穷远处的芽都是连通的。

考虑映射 $\psi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^s$，定义为 $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto (|\mathrm{x}|^2, \mathrm{y})$。对于 $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$，命题 10.2 表明，存在 c 在 $\mathbb{R}^s$ 中的一个小邻域 U，以及 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集K_0，使得

$$(\varphi^{-1}(U) \setminus K_0 \times U) \cap \mathrm{crit}(\psi|_W) = \emptyset.$$

还要注意到显然有 $\mathrm{crit}(\psi) = \mathbf{0} \times \mathbb{R}^s$。设 B 是 $\mathbb{R}^s$ 中以 c 为中心、半径为 $r > 0$ 的一个闭球。子集 $K_1 := \mathrm{B}^n_1 \times \mathrm{B}$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中是紧致的。

命题 10.4。 $(\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \setminus K_1) \cap \mathrm{crit}(\psi) = \emptyset$。

证明。若 $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \varphi^{-1}(\mathrm{B})$，则 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$。若 (x, y) 属于 $\mathrm{crit}(\psi)$，则 $\mathrm{x} = \mathbf{0}$。 □

经过缩小 r 后，我们可以假设闭球 B 包含于 U 中。取 $R_1 > 0$，使得 $\mathrm{B}^n_{R_1}$ 包含 $K_0 \cup \mathrm{B}^n_1$。定义

$$K := \mathbf{B}^n_{R_1} \times \mathbf{B}$$

使得 $(K_0 \times B) \cup K_1$ 是 K 的子集。命题 10.4 表明，映射 $\psi|_{\mathcal{W}}$ 在 $\varphi^{-1}(B) \setminus K$ 上是真下沉映射。此处适用带边流形的 Ehresmann 纤维化定理。因此，我们得到了所述的 C^1 型恒定性结果。由于

$$\psi^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbf{y}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}$$

由此我们得出，对于所有 $\mathbf{y} \in B^\circ$，链接 $Lk^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}})$ 和 $Lk^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{c}})$ 是 C^1-微分同胚的。

要得到关于 ω 的水平集而非族 $(\mathcal{W}_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}}$的结果，只需遵循与前一个证明相同的思路，仅将 ψ 改为 $\mathbf{p} \mapsto (|\mathbf{p}|^2, \mathbf{y})$。□

11. Hyperplane sections and Malgrange-Rabier Condition

我们先给出以下简单引理：

引理 11.1（另见 [13]）。设 S 是 $\mathbb{R}^q$ 中余维为正的连通可定义 C^2 子流形。对于每个 $k \geq$ 维数 S，都存在 $G(k, q)$ 的一个开稠密可定义子集 Ω^k_S，使得$S \cap P$ 对于 Ω^k_S中的任意 k维平面 P 都是横截的（但可能在原点处）。

证明。令 0 为 $\mathbb{R}^q$ 的原点，并令 $S^* := S \setminus \mathbf{0}$。令 $k \geq \dim S$。考虑以下子集

$$B_k := \{(\mathbf{x}, P) \in S^* \times \mathbf{G}(k, q) : \mathbf{x} \in P\}.$$

由于它是以 S^* 为底、模型纤维为 $G(k-1, q-1)$ 的纤维丛，因此它是 $G(k, q)$ 中一个维数为 $\dim S + (k-1)(q-k)$ 的闭可定义子流形。令 π_k 为投影 $B_k \to G(k, q)$。它显然是一个可定义映射。其临界值集合 $\Delta = \pi_k(\mathrm{crit}(\pi_k))$ 在 $G(k, q)$ 中是可定义的，且具有正余维。补集 $G(k, q) \setminus \mathrm{clos}(\Delta)$ 即为所求的 Ω^k_S。□

当然，该证明对任意 k都成立，但当 $q - k \geq \dim S$ 时，我们有 $\pi(B_k) = \Delta$，因此 π_k 在 $P \notin \Delta$ 上的纤维为空。

由于 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个维数为 $k - s$ 的线性子空间 P 都唯一对应于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 中一个维数为 k 的线性子空间 $P \times \mathbb{R}^s$，我们来验证以下子集

$$\Pi(k) := \{P \times \mathbb{R}^s \in \mathbf{G}(k, n+s) : P \in \mathbf{G}(k-s, n)\}.$$

是 $G(k, n+s)$ 的一个非奇异射影子簇，且与 $G(k-s, n)$ 同构。

本文第一个主要的新结果如下：

定理 11.2。设 $\mathbf{c} \notin K(\varphi)$。对于每个 $k \geq n + s - \dim W$，存在 $\Pi(k)$ 的一个可定义开稠密子集 $\Omega^k_{\mathbf{c}}$，其由满足 $\mathbf{c}$ 不属于 $K(\varphi|_{P \times \mathbb{R}^s})$ 的 k-向量平面 $P \times \mathbb{R}^s$ 组成。

证明。注意，对于 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $p \geq 1$ 的任意向量 p-平面 P，我们有

$$\beta^{-1}(P) =]0, +\infty[\times \mathbf{S}(P) \subset \overline{\mathbf{M}}.$$

我们将 M 中由 P 诱导的“p-平面”定义为

$$P^+ := [0, +\infty[\times \mathbf{S}(P) \subset \overline{\mathbf{M}}.$$

设 $\mathbf{c}$ 是 φ 的一个（正则）值。映射φ 的值 $\mathbf{c}$ 在无穷远处的聚点集合是 $S^{n-1} \times \mathbf{0} \subset S^{n+s-1}$ 中定义的闭可定义子集，其定义如下：

$$W^\infty_{\mathbf{c}} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{S}^{n+s-1}; \exists\, (\mathbf{w}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W : \mathbf{w}_k \to \infty, \mathbf{y}_k \to \mathbf{c}, \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|} \to \mathbf{u} \right\}. \tag{11.1}$$

记 $W^\infty_{\mathbf{c}} = A^\infty_{\mathbf{c}} \times \mathbf{0}$。回顾一下，$Z = \beta_s^{-1}(W)$，且 $Z^\infty = \mathrm{clos}(Z) \cap \mathbf{M}^\infty_s$。注意到

$$Z^\infty_{\mathbf{c}} := Z^\infty \cap 0 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{c} = 0 \times A^\infty_{\mathbf{c}} \times \mathbf{c}.$$

回顾一下，$\mathsf{z} = (r, \mathsf{u}, \mathsf{y}) \in \mathsf{M}_s$，且对于 $\mathsf{z} \in Z$，$\mathsf{r}_Z(\mathsf{z}) = r$。我们需要以下中间结果：

断言 11.3。设 $\mathsf{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$。存在 Z_{c}^∞的一个可定义分层，使得对于 A_{c}^∞中的任意点 u，以及满足 (i) $r_k \to 0$、(ii) $\mathsf{y}_k \to \mathsf{c}$、(iii) $\mathsf{u}_k \to \mathsf{u}$，且 (iv)$T_{\mathbf{z}_k}\mathbf{r}_Z \to R$的 Z 的任意序列 $(\mathsf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$，我们有

$$T_{\mathbf{u}}S \subset R,$$

其中 S是包含 $0 \times \mathsf{u} \times \mathsf{c}$ 的 Z_{c}^∞的分层。

断言的证明。函数 r_Z 在 Z^∞上连续且可定义地延拓为 0。按照 [32, 33]，可以对其进行可定义分层（a_{rel}）。我们还可以要求 $0 \times A_{\mathsf{c}}^\infty \times \mathsf{c}$ 是若干分层的并。$0 \times A_{\mathsf{c}}^\infty \times \mathsf{c}$ 的任意分层均具有 $0 \times S \times \mathsf{c}$ 的形式，其中 S^{n-1}的某个子流形 S。□

我们再次记 $W_{\mathsf{c}} \times \mathsf{c} := \varphi^{-1}(\mathsf{c})$。在 M_s^∞ 的邻域内工作会更方便，更确切地说，在附近的 Z_{c}^∞。

令 $S_1, \dots, S_l$为由断言 11.3 得到的 A_{c}^∞的分层。

令 $k \le n + s$ 为满足 $k + \dim W - s \ge n$ 的任意整数。考虑 $\mathsf{G}(k - s, n)$ 的以下可定义开稠密子集

$$\Omega_{\mathsf{c}}^k := \cap_{j=0}^l \Omega_{S_j}^{k-s},$$

其中 $\Omega_{S_j}^{k-s}$是引理 11.1 中与 S_j 对应的 $\mathsf{G}(k - s, n)$ 的可定义开稠密子集。假设 $\dim W - s \ge n - k + 1$。

令 P为 Ω_{c}^k 中的一个 $(k - s)$-平面。令 $(\mathsf{z}_m)_m$ 为一个由 $P^+ \times \mathbb{R}^s \setminus Z^\infty$ 构成的序列，使得 $\mathsf{z}_m \to \mathsf{z}_\infty = (0, \mathsf{u}, \mathsf{c}) \in Z_{\mathsf{c}}^\infty$。我们可以假设

$$T_{\mathbf{z}_m}\mathbf{r}_Z \to R, \text{ and } \mathbf{u}_m \to \mathbf{u} \in (0 \times A_{\mathsf{c}}^\infty \cap P^+) \times \mathbf{0}.$$

由于 $\mathsf{u} \in P^+$，我们推得 $P = \mathbb{R}\mathsf{u} \oplus T_{\mathsf{u}}\mathsf{S}(P)$。
接下来所有计算都在

$$T_{\mathbf{z}_\infty}\overline{\mathbf{M}}_s = \mathbb{R} \times T_{\mathbf{u}}\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^s.$$

因此，我们将 P记作 $\mathbb{R} \times T_{\mathsf{u}}\mathsf{S}(P) = T_{(0,\mathbf{u})}P^+ \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$。
根据假设 $R = 0 \times R_1 \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^s$，空间 R 满射到 $\mathbb{R}^s$（见定义 5.2 和引理 7.1）。我们要证明 $R \cap P \times \mathbb{R}^s$ 满射到 $\mathbb{R}^s$。令

$$0 \times K_R \times \mathbf{0} := R \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbf{0} = \ker(R \mapsto \mathbb{R}^s).$$

我们可以假设 $K_R = \mathbb{R}^p \times \mathbf{0} \subset \mathbb{R}^{n-1}$，其中 $p =$维数为 $W - s - 1$。根据假设，记 S为包含 u 的 A_{c}^∞分层，则有

$$T_{\mathbf{u}}S \subset K_R, \text{ and } P + T_{\mathbf{u}}S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

由于 $T_{\mathbf{u}}S$ 包含　　在 $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$中，$k$平面 P并不包含于其中。令 $0 \times P_1 := P \cap 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$。由于我们已确　nd

$$K_R + P_1 = \mathbb{R}^{n-1},$$

我们推导出以下关键事实

$$\mathbf{0} \times \mathbb{R}^{n-1-p} \subset P_1.$$

令 $N_R := K_R^\perp \cap R$为 R中 K_R的正交补，因此，限制在 N_R上的到 $\mathbb{R}^s$ 的投影是一个同构。由于空间 N_R包含于 $\mathbf{0} \times \mathbb{R}^{n-1-p} \times \mathbb{R}^s$中，我们推导出

$$N_R = (0 \times P_1 \times \mathbb{R}^s) \cap N_R \subset (P \times \mathbb{R}^s) \cap R.$$

换言之，$R \cap (P \times \mathbb{R}^s)$满射到 $\mathbb{R}^s$上。
假设维数为 $W - s = n - k$。对于 Ω_{c}^k 的每个一般 k-平面 P，纤维 $(\varphi|_{P\times\mathbb{R}^s})^{-1}(\mathsf{c})$ 都是有限集。W^∞_{c} 的定义排除了在其非空时 c 是 $\varphi|_{P\times\mathbb{R}^s}$ 的适当值的可能性，因此 c

若 $W^{\infty}_{\mathbf{c}}$ 非空，则 c 属于 $K(\varphi|_{P\times\mathbb{R}^s})$。在这种情况下，前一情形中使用的论证表明，存在一个从维数为 $s-1$ 的空间到 $\mathbb{R}^s$ 的满射映射。□

设 $F\colon X\to\mathbb{R}^s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 C^2 可定义映射，其定义域为闭连通的 X可定义子流形 C^2，且 $\dim X\geq s$。本节最初的目标是证明定理 11.2 的推论，即以下结果：

推论 11.4. 设 c 是一个不属于 $K(F)$ 的值。对于每个 $k\geq n-(\dim X-s)$，存在 $\mathrm{G}(k,n)$ 的一个可定义稠密开子集 $\mathcal{V}^k_{\mathbf{c}}$，使得对于 $\mathcal{V}^k_{\mathbf{c}}$ 的每个平面 P，值 c 都不属于 $K(F|_P)$。

证明. 设 W 是 F 的图，并设 $\varphi: W\to\mathbb{R}^s$ 是投影 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ 在 W 上的限制。正则映射

$$\Pi(k+s)\overset{\iota_n}{\mapsto}\mathbf{G}(k,n),\ P\mapsto P_n:=P\cap\mathbb{R}^n\times 0$$

是一个同构。设 $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^s$，且 c 不属于 $K(\varphi)=K(F)$。对于任意 $l\geq(n+s)-(\dim W-s)$，令 $\mathcal{U}^{l+s}_{\mathbf{c}}$ 为定理 11.2 中的稠密开子集。其像

$$\mathcal{V}^k_{\mathbf{c}}:=\iota_n(\mathcal{U}^{k+s}_{\mathbf{c}})$$

在 $\mathrm{G}(k,n)$ 中是可定义的、开且稠密的。 □

12. Lipschitz-Killing Measures

本节将非常简要地介绍 Br¨ocker 和 Kuppe 的方法 [2]，以说明 o-极小结构中可定义集的 Lipschitz-Killing 测度。它们是定义函数 $\Lambda^{\infty}_k(-)$（定义 12.2）的关键要素，也是定理 12.3 中所述一般 Gauss-Bonnet 公式的基石。

我们先简要回顾欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中子流形的外蕴几何。

设 Z 是一个 C^2 连通的可定向子流形，赋有欧几里得度量张量的 $\mathbb{R}^n$ 限制。设 x 是 Z中的一点。令 $\mathrm{S}(N_{\mathbf{x}}Z)$ 为法空间 $N_{\mathbf{x}}Z=T_{\mathbf{x}}Z^{\perp}$在 $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n$中的单位球面。给定 $\mathrm{S}(N_{\mathbf{x}}Z)$ 中的向量 v，令 $\mathbf{v}^*$ 为 $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ 上的线性形式，其定义为与 v 的标量积。

令 ∇ 为关于欧几里得度量张量在 $\mathbb{R}^n$ 上的协变微分。

要定义 Z 在任意一点处的 Lipschitz-Killing 曲率，至关重要的是第二基本形式族 $(II_{\mathbf{n}})^{\mathbf{n}\in\mathbf{S}(NZ)}$，其中 $\mathrm{S}(NZ)$ 是 $T\mathbb{R}^n|_Z$ 中 Z 的法丛 NZ 的单位球面丛。给定 $\mathbf{n}=(\mathbf{x},\mathbf{v})\in\mathrm{S}(NZ)$，回顾一下，$II_{\mathbf{n}}$（沿方向 v 的第二基本形式）是定义在 $T_{\mathbf{x}}Z$ 上的对称双线性形式，

$$II_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=-\langle\nabla_{\mathbf{u}_1}\nu,\mathbf{u}_2\rangle,$$

其中 $\mathbf{u}_1$,和 $\mathbf{u}_2$ 是 $T_{\mathbf{x}}Z$ 中的向量，而 ν 是 v 在 x 处垂直于 Z 的任意 C^1 局部延拓。

对每个 $l=0,\ldots,\dim Z$，令 $\sigma^Z_l(\mathbf{n})$ 为 $II_{\mathbf{n}}$ 作为 $T_{\mathbf{x}}Z$ 上的对称自同态时其特征值的第 l 个初等对称函数。

令 X 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭可定义子集，并配备 $\mathcal{S}=\{S_a\}_{a\in A}$，即一个有限的 C^2 定义 Whitney 分层。令 S 为维数为 d_S 的一个分层 S_a。设 x 是 S 中的一点，v 是在 x 处垂直于 S 的单位向量。回顾以下指标的定义

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{nor}}(\mathbf{v}^*,X,\mathbf{x})=1-\chi\left(X\cap N_{\mathbf{x}}\cap\mathbf{B}^n(\mathbf{x},\varepsilon)\cap\{\mathbf{v}^*=\mathbf{v}^*(\mathbf{x})-\delta\}\right),$$

其中，$0<\delta\ll\varepsilon\ll 1$ 和 $N_{\mathbf{x}}$ 是 $\mathbb{R}^n$中 x 处到 S 的一个法向（可定义）截面。

对于每个 $k=0,\dots,n$，我们定义函数 $\lambda_k^S\colon S\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\lambda_k^S(\mathbf{x}):=\begin{cases}\dfrac{1}{s_{n-k-1}}\displaystyle\int_{\mathbf{S}(N_{\mathbf{x}}S)}\mathrm{ind}_{\mathrm{nor}}(v^*,X,\mathbf{x})\sigma_{d_S-k}^S(\mathbf{x},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v} & \text{if}\quad 0\le k\le d_S\\ 0 & \text{if}\quad d_S+1\le k\le n,\end{cases}$$

其中 s_l 是 $\mathbb{R}^{l+1}$ 的单位欧几里得球面 $\mathbf{S}^l$ 的 l-维体积。
若 S 的维数为 n，则对所有 $\mathbf{x}\in S$，我们有

$$\lambda_0^S=\cdots=\lambda_{n-1}^S\equiv 0\ \text{ and }\ \lambda_n^S\equiv 1.$$

若 S 的维数为 0，则

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{nor}}(\mathbf{v}^*,X,\mathbf{x})=\mathrm{ind}(\mathbf{v}^*,X,\mathbf{x}):=1-\chi\left(X\cap\mathbf{B}^n(\mathbf{x},\varepsilon)\cap\{\mathbf{v}^*=\mathbf{v}^*(\mathbf{x})-\delta\}\right),$$

并且我们定义

$$\lambda_0^S(\mathbf{x})=\frac{1}{s_{n-1}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\mathrm{ind}(\mathbf{v}^*,X,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{v},\ \text{ and }\ \lambda_k^S\equiv 0,\ \text{ once }\ k\ge 1.$$

定义 12.1。设 $k\in\{0,\dots,n\}$。 X 的第 k 个 Lipschitz-Killing 测度 $\Lambda_k(X,-)$ 定义如下：

$$U\mapsto\Lambda_k(X,U)=\sum_{a\in A}\int_{S_a\cap U}\lambda_k^{S_a}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},$$

其中 U 是 X的任意有界 Borel 子集。

将 X的维数记为 d，显然有

$$\Lambda_{d+1}(X,-)=\cdots=\Lambda_n(X,-)\equiv 0,$$

对于 X 的任意有界 Borel 子集 U，有

$$\Lambda_d(X,U)=\mathcal{H}_d(U),$$

其中 $\mathcal{H}_d$ 是 $\mathbb{R}^n$中的 d维豪斯多夫测度。

X 的紧子集穷尽族 $(K_R)_{R>0}$ 是 X 中一族关于包含关系递增的紧集，且覆盖 X：

$$\bigcup_{R>0}K_R=X.$$

为简洁地呈现公式，我们引入一些新记号。设 g_n^l 为赋予欧几里得度量时， $\mathbb{R}^n$ 的向量 l维平面所构成的格拉斯曼流形 $\mathbf{G}(l,n)$ 的体积（见第 4 节）。我们先给出以下两组数：

定义 12.2. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭可定义子集。对于每个 $l=0$、...、n，定义 $\chi_l^\infty(X)$ 为

$$\chi_l^\infty(X):=\frac{1}{2g_n^l}\int_{\mathbf{G}(l,n)}\chi\left(\mathrm{Lk}^\infty(X\cap P)\right)\mathrm{d}P, \tag{12.1}$$

并将 $\Lambda_l^\infty(X)$ 定义为 X 在无穷远处的第 l 个 Lipschitz-Killing 不变量，其定义为

$$\Lambda_l^\infty(X):=\lim_{R\to+\infty}\frac{\Lambda_l(X,X\cap\mathbf{B}_R^n)}{b_lR^l}, \tag{12.2}$$

其中 b_l 是欧几里得单位球 $\mathbf{B}_1^l$ 的体积。

注意，对于 $X \subset \mathbb{R}^n$ ，显然有如下等式

$$\chi(\mathrm{Lk}^\infty(X)) = 2\chi_n^\infty(X). \tag{12.3}$$

当 X 是闭定义连通子流形时，注意到只要 $\mathrm{Lk}^\infty(X \cap P)$ 的维数为奇数，即 $\dim\ X - (n-k)$ 为偶数时， $\chi_k^\infty(X) = 0$。当 $n-k \geq \dim X$ 时，我们还发现

$$\chi_k^\infty(X) = 0,$$

因为对于位于 $\mathrm{G}(k,n)$ 的可定义开稠密子集中的 P，链接 $\mathrm{Lk}^\infty(X \cap P)$ 为空。

现在我们回顾若干关于闭定义集 X （它是 $\mathbb{R}^n$ 的子集）的高斯-博内型公式。这些公式由第一作者于 [13, 14] 中建立，并将数值 $\chi_l^\infty(-)$ 与 $\Lambda_l^\infty(-)$ 联系起来。

定理 12.3（[13, 14]）。1）极限

$$\Lambda_0^\infty(X) := \lim_{R \to +\infty} \Lambda_0(X, X \cap K_R)$$

存在，且与紧子集穷尽族 $(K_R)_{R>0}$ 的选取无关。更准确地说，以下等式成立：

$$\Lambda_0^\infty(X) = \chi(X) - \chi_n^\infty(X) - \chi_{n-1}^\infty(X). \tag{12.4}$$

2) 对于每个 $k = 1, \ldots, n-2$，我们还有：

$$\Lambda_k^\infty(X) = -\chi_{n-k-1}^\infty(X) + \chi_{n-k+1}^\infty(X), \tag{12.5}$$

对于 $l = n-1, n$，我们有

$$\Lambda_l^\infty(X) = \chi_{n-l+1}^\infty(X). \tag{12.6}$$

注 12.4. 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的以下两个向量

$$\Lambda_*^\infty(X) = (\Lambda_0^\infty(X), \ldots, \Lambda_n^\infty(X)) \text{ and } \chi_{-*}^\infty(X) = (\chi(X), \chi_n^\infty(X), \ldots, \chi_1^\infty(X)).$$

如定理 12.3 所示，这两个向量包含了关于无穷远处 X 的相同信息。具体而言，存在一个上三角矩阵 L，它仅依赖于 n，系数属于 $\{-1, 1\}$ ，且对角线元素全为 1，使得

$$\Lambda_*^\infty(X) = L \cdot \chi_{-*}^\infty(X).$$

13. The case of sub-manifolds with boundary

我们描述 $(X, \partial X)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 d 的闭 C^2 可定义带边子流形时的 Lipschitz-Killing 测度。在这种情况下，分割 $X = X^\circ \sqcup \partial X$（其中 $X^\circ = X \setminus \partial X$）是 X 的 C^2 可定义 Whitney 分层，因此我们可以应用第 12 节中的构造。

设 $\mathbf{x} \in X^\circ$。若 $d < n$，则对于 $k = 0, \ldots, d$，我们有

$$\lambda_k^{X^\circ}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_{n-k-1}} \int_{\mathbf{S}(N_{\mathbf{x}} X^\circ)} \sigma_{d-k}^{X^\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{v}.$$

We g欧氏子流形外蕴几何的以下恒等式

$$\lambda_k^{X^\circ}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_{n-k-1}} K_{d-k}(X^\circ, \mathbf{x}),$$

其中 $K_{d-k}(X^\circ, -)$ 是 X° 的第 $(d-k)$ 个 Lipschitz-Killing 曲率。我们回顾一下

$$d-k \text{ odd} \implies K_{d-k}(X^\circ, -) \equiv 0.$$

我们回顾一下，如果 $d = n$，那么 $\lambda_n^{X^\circ} \equiv 1$ 和 $\lambda_0^{X^\circ} = \cdots = \lambda_{n-1}^{X^\circ} \equiv 0$。

设 $\mathbf{y} \in \partial X$，并令 $\nu_{\mathbf{y}}$ 为在 $\mathbf{y}$ 处与 X 相切、垂直于边界 ∂X 且指向内侧的单位向量。对于 $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{n-1}$，我们回顾如下两种情况之一成立：

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{nor}}(\mathbf{v}^*, X, y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \langle \mathbf{v}, \nu_{\mathbf{y}} \rangle > 0 \\ 0 & \text{if} \quad \langle \mathbf{v}, \nu_{\mathbf{y}} \rangle < 0 \end{cases}.$$

令 $\mathbf{S}(N_{\mathbf{y}}\partial X)^+$ 为如下开半球面：

$$\mathbf{S}(N_{\mathbf{y}}\partial X)^+ = \{\mathbf{v} \in \mathbf{S}(N_{\mathbf{y}}\partial X) \,:\, \langle \mathbf{v}, \nu_{\mathbf{y}} \rangle > 0\}.$$

因此，对于 $k = 0, \ldots\ldots, d-1$，我们可以写成

$$\lambda_k^{\partial X}(\mathbf{y}) = \frac{1}{s_{n-k-1}} \int_{\mathbf{S}(N_{\mathbf{y}}\partial X)^+} \sigma_{d-1-k}^{\partial X}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{v}.$$

维数为 d 的带边可定义子流形的情形，给出了 Lipschitz-Killing 测度的如下显式描述。对于 X 的任意有界 Borel 子集 U，我们有

$$\Lambda_d(X, U) = \mathcal{H}_d(U). \tag{13.1}$$

当 $d < n$ 和 $k = 0, \ldots\ldots, d-1$ 时，我们有

$$\Lambda_k(X, U) = \int_{X^\circ \cap U} \lambda_k^{X^\circ}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial X \cap U} \lambda_k^{\partial X}(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{13.2}$$

如果 $d = n$ 和 $k = 0, \ldots\ldots, n-1$,

$$\Lambda_k(X, U) = \int_{\partial X \cap U} \lambda_k^{\partial X}(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{13.3}$$

14. Definable families and continuity of Lipschitz-Killing curvature densities atinfinity

回到前几节的设定：设 W 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ 的 C^2 连通子流形，同时也是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，且在 $\mathcal{M}$ 中可定义；设 φ: $W \to \mathbb{R}^s$ 是典范投影在 W 上的限制，投影的定义域为 $\mathbb{R}^s$。设 $d = \dim W$。因此，对 φ 的任意正则值 $\mathbf{y}$，水平集 $\varphi^{-1}(\mathbf{y})$ 要么为空，要么是 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $d-s$ 的 C^2 可定义子流形，其形式为

$$\varphi^{-1}(\mathbf{y}) = W_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s.$$

我们不再研究水平集族 $(\varphi^{-1}(\mathbf{y}))_{\mathbf{y}}$，而是研究将 φ 的水平集投影到 $\mathbb{R}^n$ 上所得的族 $(W_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}}$；这是 $\mathbb{R}^n$ 的一个由闭子集构成的可定义族。

设 $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_\beta$ 是 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的连通分支，其中 $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_b)$ 非空。对于每个 $b = 1, \ldots, \beta$，设 $\mathcal{U}_{b,1}, \ldots, \mathcal{U}_{b,\alpha_b}$ 是 $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_b)$ 的连通分支。对于每个 $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_b$ 以及每个 $a = 1, \ldots, \alpha_b$，设

$$W_{\mathbf{y}}^a \times \mathbf{y} := W_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y} \cap \mathcal{U}_{b,a}. \tag{14.1}$$

E根据推论 8.3，每个这样的子流形 $W_{\mathbf{y}}^a$ 都非空、闭且连通 .

本节现在给出所需的连续性结果：函数 $\mathbf{y} \mapsto \Lambda_k^\infty(W_{\mathbf{y}})$ 在某个正则值附近的性质；该正则值同时也是这个可定义族的一个 (MR)-正则值。

命题 14.1. 对每个 $k = 0, \ldots, d-s$，对每个 $b = 1, \ldots, \beta$，以及每个 $a = 1, \ldots, \alpha_b$，函数

$$\mathbf{y} \mapsto \chi_{n+1-k}^\infty(W_{\mathbf{y}}^a), \text{ and } \mathbf{y} \mapsto \Lambda_{d-s-k}^\infty(W_{\mathbf{y}}^a)$$

在 $\mathcal{V}_b$ 上连续（其中 $\chi_{n+1}^\infty(-)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集上的零函数）。

证明。由定理 12.3 和注 12.4 可知，只需对函数 $\mathbf{y} \mapsto \chi^{\infty}_{n+1-k}(W_{\mathbf{y}})$ 证明这一点。根据推论 8.3，可知映射 $\mathbf{y} \mapsto \chi(W^a_{\mathbf{y}})$ 对每个 $a = 1, \ldots, \alpha_b$ 在 $\mathcal{V}_b$ 上为常数。

对于 $\mathbb{R}^n$ 的闭可定义子集 X，记作

$$\chi^{\infty}(X) := \chi(\mathrm{Lk}^{\infty}(X)).$$

• 首先假设，对于 $\mathbf{y} \notin K(\varphi)$，$W_{\mathbf{y}}$ 是连通的。根据定义，$k = 0$ 的情形显然，因此我们先讨论 $k = 1$ 的情形。设 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$。命题 10.2 表明，存在 $\mathbf{c}$ 在 $\mathbb{R}^s$ 中的一个开邻域 U，使得

$$\mathbf{y} \in U \Longrightarrow 2\chi^{\infty}_n(W_{\mathbf{y}}) = \chi^{\infty}(W_{\mathbf{y}}) = \chi^{\infty}(W_{\mathbf{c}}).$$

换言之，映射 $\mathbf{y} \mapsto \chi^{\infty}_n(W_{\mathbf{y}})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的每个连通分支上都是常值的。

现在讨论 $k = 2, \ldots d - s$ 的情形，且 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$。定理 11.2 保证存在 $\mathrm{G}(n+1-k, n)$ 的一个开稠密可定义子集 $\mathcal{U}^k_{\mathbf{c}}$，使得

$$P \in \mathcal{U}^k_{\mathbf{c}} \Longrightarrow \mathbf{c} \notin K(\varphi|_{P \times \mathbb{R}^s}).$$

对于任意 $P \in \mathrm{G}(n+1-k, n)$ 以及任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$，我们有

$$(\varphi|_{P \times \mathbb{R}^s})^{-1}(\mathbf{y}) = (W_{\mathbf{y}} \cap P) \times \mathbf{y} \subset P \times \mathbb{R}^s.$$

对于 $k = 1$，给定 $P \in \mathcal{U}^k{}_{\mathbf{c}}$，存在一个包含于 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi|_{P \times \mathbb{R}^s})$ 中的开邻域 U_P，使得对于所有 $\mathbf{y} \in U_P$，我们都能找到

$$\chi^{\infty}(W_{\mathbf{y}} \cap P) = \chi^{\infty}(W_{\mathbf{c}} \cap P),$$

我们可以将其写成

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{c}} \chi^{\infty}(W_{\mathbf{y}} \cap P) = \chi^{\infty}(W_{\mathbf{c}} \cap P).$$

现在，由勒贝格控制收敛定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{c}} \int_{\mathbf{G}^{n+1-k}_n} \chi^{\infty}(W_{\mathbf{y}} \cap P) \mathrm{d}P &= \int_{\mathbf{G}^{n+1-k}_n} \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{c}} \chi^{\infty}(W_{\mathbf{y}} \cap P) \mathrm{d}P \\ &= \int_{\mathbf{G}^{n+1-k}_n} \chi^{\infty}(W_{\mathbf{c}} \cap P) \mathrm{d}P, \end{aligned}$$

这就是所需的连续性结果。

• 设 $b \in \{1, \ldots, \beta\}$，且 $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_b$。对于每个 $a = 1, \ldots, \alpha_b$，连通情形表明，每个函数 $\mathbf{y} \mapsto \chi^{\infty}_{n+1-k}(W^a_{\mathbf{y}})$ 在 $\mathcal{V}_b$ 上都是连续的。□

设 X 是 $\mathbb{R}^q$ 中一个维数为 d 的闭可定义子流形。对于 $i = 0, \ldots, d$，令 $K_i(X, \mathbf{x})$ 表示 X 在 $\mathbf{x}$ 处的第 i 个 Lipschitz-Killing 曲率。对于 $i \geq d+1$，如有需要，我们可以定义 $K_i(X, -) \equiv 0$。在当前实数情境中，我们所寻求的整体类极不变量将在下一个定义中给出。

定义 14.2。设 $i \in \{0, \ldots, d\}$。维数为 d 的 $\mathbb{R}^q$ 中的闭可定义子流形 X 的第 i 个无穷远处的 Lipschitz-Killing 曲率密度定义为

$$\kappa^{\infty}_i(X) := \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{d-i}} \int_{X \cap \mathbf{B}^n_R} K_i(X, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

本文的第二个主要结果如下

定理 14.3. 对于每个 $i = 0, \dots, d-s$、每个 $b = 1, \dots, \beta$，以及每个 $a = 1, \dots, \alpha_b$，函数

$$\mathbf{y} \to \kappa_i^\infty(W_\mathbf{y}^a)$$

是连续的在 $\mathcal{V}_b$ 上。因此，函数 $\mathbf{y} \mapsto \kappa_i^\infty(W_\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi$ 上连续 $)$.

证明。正如我们在命题 14.1 的证明中所见，只要 $\mathbf{y}$ 位于 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$，我们只需考虑连通的 $W_\mathbf{y}$；在证明余下部分中，我们都假设这一点。

我们先处理 $i = d - s$ 的情形。定理 12.3（另见 [13, 定理 5.6]）给出

$$\frac{1}{s_{n-1}}\kappa_{d-s}^\infty(W_\mathbf{y}) = \chi(W_\mathbf{y}) - \chi_n^\infty(W_\mathbf{y}) - \chi_{n-1}^\infty(W_\mathbf{y})$$

对任意正则值 $\mathbf{y}$ 均成立。应用命题 14.1 即可完成此情形的证明。

对于 $2 \le i \le d-s-1$，以及 φ 的任意正则值 $\mathbf{y}$，定理 12.3（另见 [14, 定理 4.1]）给出

$$\frac{1}{s_{n-(d-s)+i-1} \cdot b_{d-s-i}}\kappa_i^\infty(W_\mathbf{y}) = -\chi_{n-(d-s)+i-1}^\infty(W_\mathbf{y}) + \chi_{n-(d-s)+i+1}^\infty(W_\mathbf{y}).$$

我们再次由命题 14.1 得出结论。

对于 $i = 0$ 或 1，以及 φ 的任意正则值 $\mathbf{y}$，定理 12.3 再次给出

$$\frac{1}{s_{n-(d-s)+i-1} \cdot b_{d-s-i}}\kappa_i^\infty(W_\mathbf{y}) = \chi_{n-(d-s)+i+1}^\infty(W_\mathbf{y}).$$

我们指出，项

$$\chi_{n-(d-s)}^\infty(W_\mathbf{y})$$

出现在关于曲率 K_1 的等式中的项实际上为零，因为一般而言 $W_\mathbf{y} \cap P$ 的维数为 0，因而是紧致的。我们再次用前一个命题得出结论。□

注 14.4。对于奇数 i，给定子流形 X 的第 i 个 Lipschitz-Killing 曲率函数 $K_i(X, –)$ 恒为零，因此在我们的语境中，映射 $\mathbf{y} \mapsto \kappa_i^\infty(W_\mathbf{y})$ 是 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上的零映射。

15. Curvatures of hypersurfaces

本节研究可定义函数 C^2 的正则水平集这一特殊情形，并将其上的一些类曲率积分表示为 Lipschitz-Killing 测度。

设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可定义函数 C^2。我们假设 0 是 f 所取的 f 的正则值，因此 $Y = f^{-1}(0)$ 是一个非空的超曲面 C^2。我们用法向量 $-\nabla f|_Y$ 赋予 Y 定向，约定当且仅当 $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\nabla f(\mathbf{x}))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正向基时，$(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ 是 $T_\mathbf{x}Y$ 的正向基。

Y 的高斯映射 ν_Y 如下：

$$\nu_Y : Y \to \mathbf{S}^{n-1}, \quad \mathbf{x} \mapsto -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(\mathbf{x}).$$

它的导数

$$D_\mathbf{x}\nu_Y : T_\mathbf{x}Y \mapsto T_{\nu(\mathbf{x})}\mathbf{S}^{n-1} = T_\mathbf{x}Y$$

是一个自伴算子。主曲率 $k_1(\mathbf{x}) \dots, k_{n-1}(\mathbf{x})$ 是 $D_\mathbf{x}\nu_Y$ 的特征值的相反数。令 σ_i^Y 为主曲率的第 i 个初等对称函数。注意，σ_{n-1}^Y 是高斯–克罗内克曲率，且 $\sigma_0^Y \equiv 1$。这些初等对称函数与 Y 的 Lipschitz-Killing 曲率以及次水平集 $\mathcal{Y} := \{f \le 0\}$ 的关系如下：给定 $\mathbf{x} \in Y$，由于 Y 是 $\mathcal{Y}$ 的边界，我们注意到

$$i \text{ even} \implies 2\sigma_i^Y(\mathbf{x}) = K_i(Y, \mathbf{x}) = s_i \cdot \lambda_{n-1-i}^Y(\mathbf{x}).$$

定义 15.1. 令 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$。超曲面 Y 在无穷远处的第 i 个对称主曲率密度定义为

$$\sigma_i^{\infty}(Y) := \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{n-1-i}} \int_{Y \cap \mathbf{B}_R^n} \sigma_i^Y(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{15.1}$$

$\mathcal{Y}$ 的无穷远处的密度定义为

$$\Theta_n^{\infty}(\mathcal{Y}) := \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^n} \mathcal{H}_n(\mathcal{Y} \cap \mathbf{B}_R^n). \tag{15.2}$$

在此背景下，方程（13.3）给出

$$\sigma_{n-1-i}^{\infty}(Y) = s_{n-1-i} b_i \cdot \Lambda_i^{\infty}(\mathcal{Y}), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

下一个推论给出了方程（12.1）和方程（12.3）中的数值 χ_l^{∞}(–)与方程（15.1）中的数值 σ_l^{∞}(–)之间的明确关系。这是定理 12.3 中关于函数 f 的等值集的 Gauss-Bonnet 公式、带边流形的高斯-博内测度描述，以及用于数值 σ_i^{∞}(–)的方程（13.3）的一个应用。

推论 15.2。

$$\Theta_n^{\infty}(\mathcal{Y}) = \chi_1^{\infty}(\mathcal{Y}), \tag{15.3}$$

以及对于 $i = n-1$

$$\frac{1}{s_{n-1}} \sigma_{n-1}^{\infty}(Y) = \chi(\mathcal{Y}) - \chi_n^{\infty}(\mathcal{Y}) - \chi_{n-1}^{\infty}(\mathcal{Y}), \tag{15.4}$$

对于 $i = 0$、...、$n-2$,

$$\frac{1}{s_i b_{n-i-1}} \sigma_i^{\infty}(Y) = -\chi_i^{\infty}(\mathcal{Y}) + \chi_{i+2}^{\infty}(\mathcal{Y}). \tag{15.5}$$

注 15.3. 我们可以用法向量 $\nabla f|_Y$ 为 Y 定向，约定 $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ 是 $T_{\mathbf{x}}Y$ 的正向基，当且仅当 $(\nabla f(\mathbf{x}), \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正向基。在这种情况下，H 的高斯映射 ν_H 为:

$$\nu_Y : Y \to \mathbf{S}^{n-1}, \quad \mathbf{x} \mapsto \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(\mathbf{x}).$$

主曲率 $k_1(\mathbf{x}) \ldots, k_{n-1}(\mathbf{x})$ 是 $D_{\mathbf{x}}\nu_Y$ 的特征值。

16. Continuity of curvature integrals and families of hypersurfaces

在最后这一节中，我们将拓展并深化第 [15], 节开始的研究，在此讨论超曲面族这一特殊情形。

我们在第 9 节的框架下进行研究。给定一个 C^2 可定义函数 $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$，其中 0 是正则值。再次令 $\mathcal{W}$ 和 W 定义为

$$\mathcal{W} := \{\mathbf{p} : F(\mathbf{p}) \leq 0\}, \text{ and } W := \{\mathbf{p} : F(\mathbf{p}) = 0\}.$$

映射 ω、φ 分别是投影 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ 到 $\mathcal{W}$、W 上的限制。实际上，我们处理的是 W 的连通分支，因此进一步假设 W 是连通的。对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$，函数 $f_{\mathbf{y}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$（定义为 $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}; \mathbf{y})$）也是 C^2 且可定义的。我们回顾一下

$$\mathcal{W} \cap \mathbb{R}^n \times \mathbf{y} = \mathcal{W}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}, \text{ and } \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = W_{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}.$$

每当 $\mathbf{y}$ 是 φ 的正则值时，超曲面 $W_{\mathbf{y}} = f_{\mathbf{y}}^{-1}(0)$ 就是 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}} := \{f_{\mathbf{y}} \leq 0\}$ 的边界，而 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}} := \{f_{\mathbf{y}} \leq 0\}$ 是一个 C^2 闭可定义n 维带边子流形。

令 $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_\beta$ 为 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 的连通分支，其中 $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_b)$ 非空。对于每个$b = 1, \ldots, \beta$，令 $\mathcal{U}_{b,\ 1}, \ldots, \mathcal{U}_{b,\ \alpha_b}$ 为 $\omega^{-1}(\mathcal{V}_b)$ 的连通分支。对于每一对 (b, a) 以及每个 $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_b$，令

$$\mathcal{W}_{\mathbf{y}}^a := \mathcal{W}_{\mathbf{y}} \cap \mathcal{U}_{b,a}.$$

我们得到如下结论：

命题 16.1. 对每个 $b = 1$，.....，β，对每个 $a = 1$，.....，α_b，以及对 $k = 1$，.....，n，函数 $\mathbf{y} \mapsto \chi_k^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}^a)$ 在 $\mathbb{R} \setminus K(\varphi)$ 上连续。

证明. 我们也可以假设 $b = 1$ 和 $\alpha_1 = 1$。因此 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}}^a = \mathcal{W}_{\mathbf{y}}$。

我们先处理 情形 $k = n$。命题 10.3 表明，下列函数在 $\mathcal{V}_b$

$$\mathbf{y} \mapsto \chi_n^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) = \chi^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}).$$

我们假设 $1 \le k \le n$。令 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$。定理 11.2 保证，对于几乎所有的$P \in \mathsf{G}(k, n)$，值 $\mathbf{c}$ 不属于 $K_\infty(\varphi|_{P \times \mathbb{R}^s})$。命题 10.3 表明，存在 $\mathbb{R}^s$ 中 $\mathbf{c}$ 的一个开邻域 V_P，使得对于所有 $\mathbf{y} \in V_P$,

$$\chi^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}} \cap P) = \chi^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{c}} \cap P).$$

证明通过应用勒贝格控制收敛定理结束，做法与命题 14.1 的证明相同。□

对于每个 $b = 1$、.....、β，令 $\mathcal{U}_{b,1}$、.....、$\mathcal{U}_{b,\alpha_b}$ 为 $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_b)$ 的连通分支。对于 $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_b$ 且 $a = 1$、.....、α_b，令

$$\mathcal{W}_{\mathbf{y}}^a := \mathcal{W}_{\mathbf{y}} \cap \mathcal{U}_{b,a}, \text{ and } W_{\mathbf{y}}^a := W_{\mathbf{y}} \cap \mathcal{U}_{b,a}.$$

本文最后一个主要结果如下：

定理 16.2。对于每个 $b = 1$、.....、β，以及每个 $a = 1$、.....、α_b，以下陈述均成立：(1) 对于每个 $i = 0$、.....、$n - 1$，函数 $\mathbf{y} \mapsto \sigma_i^\infty(W^a\mathbf{y})$ 在 $\mathcal{V}_b$ 上连续。因此，$\mathbf{y} \mapsto \sigma_i^\infty(W_{\mathbf{y}})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上连续。

(2) 函数 $\mathbf{y} \mapsto \Theta_n^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}^a)$ 在 $\mathcal{V}_b$ 上也是连续的。因此，$\mathbf{y} \mapsto \Theta_n^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}})$ 在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上连续。

证明。设 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^s \setminus K(f)$。我们可以假设 $\mathcal{W}_{\mathbf{c}}$ 和 $W_{\mathbf{c}}$ 都是连通的。将定理 12.3 中的 Gauss-Bonnet 公式应用于 n 维闭定义集 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}}$，得到

$$\Lambda_0^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) = \chi(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) - \chi_n^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) - \chi_{n-1}^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}). \tag{16.1}$$

此外，对于 $k = 0$、.....、$n - 2$，我们有：

$$\Lambda_k^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) = -\chi_{n-k-1}^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) + \chi_{n-k+1}^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}), \tag{16.2}$$

and

$$\Lambda_{n-1}^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) = \chi_2^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) \tag{16.3}$$

$$\Theta_n^\infty(\mathcal{Y}) = \Lambda_n^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}) = \chi_1^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}}). \tag{16.4}$$

由于 $\mathcal{W}_{\mathbf{y}}$ 是 n 维的，等式 (16.1)、(16.2)、(16.3) 和 (16.4) 并非平凡。

应用命题 16.1，我们得到，对于 $k = 0$、.....、n，函数

$$\mathbf{y} \mapsto \Lambda_k^\infty(\mathcal{W}_{\mathbf{y}})$$

在 $\mathbb{R}^s \setminus K(\varphi)$ 上连续。只需应用推论 15.2 中的表达式即可得出结论。 □

References

[1] K. Bekka, *Regular stratification of subanalytic sets*, 伦敦数学学会会报 25 (1993) 7–16.[2] L. Br¨ocker & M. Kuppe, *Integral geometry of tame sets*, 《几何奉献》82 (2000), 285–323.[3] G. Comte, *Équisingularité réelle : nombres de Lelong et images polaires*, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup´er. (4) 33 (2000), no. 6, 757–788.[4] G. Comte & M. Merle, *Équisingularité réelle II : invariants locaux et conditions de régularité*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 41 (2008), no. 2, 221–269.[5] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, 数学研究博士课程, 比萨大学数学系, 国际出版与印刷研究所, 2000.[6] D. d'Acunto, *Valeurs critiques asymptotiques d'une fonction définissable dans une structure o-minimale*, 《波兰数学年刊》 LXXV (2000) (1) 35–45.[7] D. d'Acunto & V. Grandjean, *On gradient at infinity of semialgebraic functions*, 《波兰数学年刊》87 (2005) 39–49.[8] D. d'Acunto & V. Grandjean, *A Gradient inequality at infinity for tame functions*, Rev. Math. Complutense 18 (2005), no. 2, 493–501.[9] Z. Denkowska & J. Stasica, *Ensembles Sous-analytiques à la Polonaise*, 巴黎 Hermann 出版社 2007.[10] L. R. G. Dias, M. A. A. Ruas, and M. Tib˘ar, *Regularity at infinity of real mappings and a Morse-Sard Theorem*, 《拓扑学杂志》5 (2012), no. 2, 323–340.[11] S. T. Dihn & T. S. Pham, *Some variational properties of tangent directions at infinity of real algebraic sets*, 预印本 arXiv:2105.10345.[12] N. Dutertre, *Geometrical and topological properties of real polynomial fibres*, 《几何奉献》105, no. 1 (2004), 43–59.[13] N. Dutertre, *A Gauss-Bonnet formula for closed semi-algebraic sets*, Advances in Geometry 8, no. 1 (2008), 33–51.[14] N. Dutertre, *Euler characteristic and Lipschitz-Killing curvatures of closed semi-algebraic sets*, Geom. Dedicata 158, no. 1 (2012), 167–189.[15] N. Dutertre & V. Grandjean, *Gauss-Kronecker Curvature and equisingularity at infinity of definable families*, 《亚洲数学杂志》25 , no. 6 (2021), 815–840.[16] L. van den Dries, *Tame Topology and o-Minimal Structures*, 伦敦数学会讲义丛书 248, Cam- bridge Univ. Press, 1988.[17] L. van den Dries & C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, 《杜克数学杂志》 84 (1996), 497–540.[18] J.H.G. Fu, *Curvature measures of subanalytic sets*, 《美国数学杂志》 116, no. 4 (1994), 819–880.[19] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, 拓扑学研讨会, Brux- elles (1950), 29–55.[20] T. Gaffney, *Fibers of polynomial mappings at infinity and Generalized Malgrange Condition*, 《数学汇编》119, (1999) 157–167.[21] V. Grandjean, *On the total curvatures of a tame function*, Bull. Braz. Math. Soc, New Series 39, no. (4) (2008), 515–535.[22] H. V. H`a & D. T. Lˆe, *Sur la topologie des polynômes complexes*, 《越南数学学报》9 (1984) 21–32.[23] H. Hironaka, *Stratification and flatness*, in *Real and Complex Singularities*, Proc. Oslo 1976, ed. Per Holm, Stijthof and Noordhof (1977), 199–265.[24] Z. Jelonek, *On the generalized critical values of a polynomial mapping*, 《数学手稿》110 (2003) 145–157.[25] Z. Jelonek, *On asymptotic critical values and the Rabier theorem*, 几何奇点理论, Banach 中心出版物 65 (波兰科学院, 华沙, 2004) 125–133.[26] Z. Jelonek &K. Kurdyka, *Quantitative Generalized Bertini–Sard Theorem for Smooth Affine Varieties*, 《离散与计算几何》34 (2005) 659–678.[27] K. Kurdyka, *On gradients of functions definable in o-minimal structures*, 《傅里叶研究所年刊》(格勒诺布尔) 48 (1998) 769–783.[28] K. Kurdyka & P. Orro & S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values*, 《微分几何杂志》56 (2000) 67–92.[29] K. Kurdyka & A. Parusi´nski, (w_f)*-stratification of subanalytic functions and the Lojasiewicz inequality*, 《巴黎科学院院刊》S´erie 318 (1994) 129–133.[30] K. Kurdyka & G. Raby, *Densité des ensembles sous-analytiques*, 《傅里叶研究所年刊》 39 (1989) 735–771.

[31] T. L. Loi, *Whitney Stratification of Sets Definable in the Structure* $\mathrm{R}^{\exp}$, Banach 中心出版物, 33 (1996) 401–409。[32] T. L. Loi, *Thom stratifications for functions definable in o-minimal structures on* $(\mathbb{R}, +, .)$, 《巴黎科学院报告》, 第 324 卷, I 辑, (1997) 1391–1394。[33] T. L. Loi, *Verdier and strict Thom Stratifications in o-minimal structures*, 《伊利诺伊数学杂志》142 (2) (1998) 347–356。[34] T. L. Loi 与 A. Zaharia, *Bifurcation sets of functions definable in o-minimal structures*, 《伊利诺伊数学杂志》42 (1998) 449–457。[35] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, IH ´ES 预印本, 1965。[36] X.V.N. Nguyen、S. Trivedi 与 D. Trotman。 *A geometric proof of the existence of definable Whitney stratifications*, 《伊利诺伊数学杂志》, 58 (2) (2014) 381–389。[37] X.V.N. Nguyen 与 G. Valette, *Whitney stratifications and the continuity of local Lipschitz Killing curvatures*, 《傅里叶研究所年刊》, 68 (2018), 第 5 期, 2253–2276。[38] A. Nemethi 与 A. Zaharia, *On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary*, 《京都大学数理科学研究所出版物》26 (1990) 681–689。[39] A. Parusi´nski, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*, 《数学汇编》97 (1995) 369-384。[40] F. Pham, *La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin*, 载于《微分系统与奇点》, 1983 年 6—7 月, Ast´erisque 130 (1983) 11–47。[41] P. J. Rabier, *Ehresmann's fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*, 《数学年刊》146 (1997) 647–691。[42] D. Siersma 与 M. Tib˘ar, *Singularities at infinity and their vanishing cycles*, 《杜克数学杂志》80 (1995), 第 3 期, 771–783。[43] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, 《卡尔热兹奇点》（《奇点与几何分析研讨会》, 科学研究所, 卡尔热兹, 1972）, 第 285–362 页, *Astérisque*, 第 7、8 期, 法国数学学会, 巴黎, 1973。[44] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, 《数学发明》40 (1977), 第 3 期, 267–292。[45] B. Teissier, *Variétés polaires, II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, 载于《代数几何》（拉拉比达, 1981）, 314–491, 《数学讲义》961, 施普林格, 柏林, 1982。[46] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, 《美国数学会通报》75 (1969) 240-282。[47] M. Tib˘ar, *Asymptotic equisingularity and topology of complex hypersurfaces*, 《国际数学研究通知》(1998), 第 18 期, 979–990。[48] M. Tib˘ar, *Regularity at infinity of real and complex polynomial functions*, 载于《奇点理论》（利物浦, 1996）, 伦敦数学会讲义丛书, 263, 249–264, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1999。[49] G. Valette, *Volume, Whitney conditions and Lelong number*, 《波兰数学年刊》93 (2008), 第 1 期, 1–16。[50] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, 《数学年刊》81 (1965), 496–549

Univ Angers, CNRS, LAREMA, SFR MATHSTIC, F-49000 Angers, France
Email address: nicolas.dutertre@univ-angers.fr

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88.040-900 Florianópolis -SC, Brasil, Brasil*Email address*: vincent.grandjean@ufsc.br