arXiv:2303.11481v1 [math.NT] 20 Mar 2023

比安基与希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形

ALBERTO VERJOVSKY* & ADRI´AN ZENTENO †

2023年3月22日

摘要

在一系列发表于 *Mathematische Annalen* 的论文中，比安基和 Blumenthal 引入了比安基轨形和希尔伯特-布卢门撒尔曲面的概念，将其作为与二次域相关的模曲线的推广。本文秉承相同的理念，并沿用类似的推理思路，提出比安基与希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形的概念，将其作为 D´ıaz、Vlacci 和第一作者近期定义的利普希茨与赫尔维茨四元数模轨形的推广。具体而言，我们用实二次域的基本单位来描述希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形的尖点横截面。这些七维可解流形是圆上的虚 $\mathbb{T}^6$ 丛，其单值化为 6维环面上的线性阿诺索夫微分同胚。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11R52、20H10、11F06。

1. 引言

经典模曲线定义为双曲复上半平面 $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ 对模群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 作用所得的商 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ 。利用四元数代数构造模群的一种方法如下：首先，从不定四元数代数 $\left(1,1\right)_{\mathbb{Q}}$ 出发，它同构于 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$。然后，在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ 中寻找整元素，得到 $\mathbb{Z}$-阶 $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$，并取其单位群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$。最后，考虑由 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 中行列式为 $\overline{1}$ 的元素构成的指数为二的子群 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ，并将其射影化，得到福克斯群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ；该群通过保定向等距变换忠实地作用于 $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$。类似地，通过考虑形如 $\left(1,\frac{1}{K}\right)$ 的不定四元数代数（其中 K 是虚二次域或实二次域），可以得到用于构造相应比安基轨形（或希尔伯特-布卢门撒尔曲面）的比安基（或希尔伯特-布卢门撒尔）模群。这些群是克莱因群（或二重福克斯群），通过保定向等距变换作用于双曲实三维空间 $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$ （或 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} := \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$）。详情请见 [25, 第 38] 章。

另一方面，通过考察定四元数代数 $\left(-1,-1\right)_{\mathbb{Q}}$，D´ıaz、Vlacci 和第一~~作者~~ [11] 最近引入了利普希茨模群和赫尔维茨模群 $\Gamma \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ ，作为经典模群的推广。这些新的四元数模群由 Bisi 和 Gentili 在 [7], 中提出的某些条件刻画，这些条件使我们能够在双曲四元数半空间 $\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}} := \{\mathrm{q} \in \mathbb{H} : \Re(z) > 0\}$ 上获得适当且不连续的作用，并定义四元数轨形 $\Gamma\backslash\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}$。我们指出，Bisi-Gentili条件是 Ahlfors 在 [2]中描述的某些条件的一种变体。关于使用 Ahlfors条件定义轨形的内容，参见 [20] 。

本文沿用比安基 [5] [6] 和 Blumenthal [8] [9], 的推理思路，将 Bianchi 和希尔伯特-布卢门撒尔四元数模群定义为利普希茨与赫尔维茨四元数模群的推广。一方面，考虑定四元数代数 $\left(-1,-1\right)_{\mathbb{Q}}$，中的 $\mathbb{Z}$-阶 $\mathcal{O}$，我们定义了 Bianchi 四元数模群 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ ，它在 Hamilton四元数 $\mathbb{H}$上共形作用。根据 [11]*中的庞加莱扩张定理，这一作用可扩展为在实双曲5空间 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$上的作用，从而使我们能够定义 Bianchi四元数轨形

$$M_{\mathcal{O}} := \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})\backslash\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}.$$

墨西哥国立自治大学库埃纳瓦卡数学研究所。Av. Universidad s/n. Col. Lomas de Chamilpa，邮编 62210，墨西哥库埃纳瓦卡。

E-mail address: alberto@matcuer.unam.mx

†数学研究中心（Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.），Jalisco s/n.，Valenciana区，邮编36023，墨西哥瓜纳华托。 *E-mail address:* adrian.zenteno@cimat.mx

*扩展版可见 arXiv:1503.07214

另一方面，设 K 是一个实二次域，其整数环为 $\mathbb{Z}_K$。对于全定四元数代数 $\left(\frac{-1}{K}\right)$中的每个 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$，我们定义与 $\mathcal{O}$ 相关联的希尔伯特-布卢门塔尔四元数模群 $\Gamma(\mathcal{O}) \subseteq \mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$，它作用于两个双曲四元数半空间的乘积 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} := \mathbf{H}^1_{\mathbb{H}} \times \mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}$，从而生成希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形

$$M_{\Gamma(\mathcal{O})} := \Gamma(\mathcal{O}) \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}.$$

最后，众所周知，希尔伯特-布卢门撒尔曲面的尖点截面是环面上某个阿诺索夫微分同胚的三维映射环面 [13]。本文最后，我们描述希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形 $M_{\Gamma(\mathcal{O})}$在 ∞ 处的尖点。特别地，我们证明，∞ 处尖点的截面是一个虚拟的 $(6,\ 1)$-环面丛，其描述依据是 ε的基本单位 $\mathbb{Z}_K$。

致谢
第一作者获得墨西哥国立自治大学 DGAPA 的 PAPIIT 项目 IN108120 资助。第二作者获得 CONACYT 资助项目 432521（墨西哥博士后驻留计划 2021 年学术类别）的资助。

2. 四元数 Möbius 变换预备知识

本节将回顾一些关于四元数代数的定义，并复习一些有关四元数莫比乌斯变换的经典事实，这些内容将在全文中用到。主要参考文献为 [1]，[2]，[7]，[11]，[24] 和 [25]。更多细节和参考文献请参阅上述文献。

2.1 - 一般定义

定义 2.1. 设 K 是一个特征为零的域。若存在 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j} \in \mathcal{B}$ 使得 $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{ij}\}$ 构成 $\mathcal{B}$ 上的一个 K基，则称 K-代数 $\mathcal{B}$ 为 K上的四元数代数，且

$$\mathbf{i}^2 = a,\ \mathbf{j}^2 = b \text{ and } \mathbf{ij} = -\mathbf{ji},$$

其中 a、$b \in K^\times$满足上述条件。此类代数通常记作 $\left(\frac{a, b}{K}\right)$。

特别地，当 $K = \mathbb{R}$ 和 $a = b = -1$ 时（于是 $\mathbf{i} = \sqrt{-1} = i$、$\mathbf{j} = \sqrt{-1} = j$ 且 $\mathbf{ij} = ij = k$），四元数代数 $\left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right)$ 就是Hamilton四元数的经典代数，通常记作 $\mathbb{H}$。更一般地，若 $\mathcal{B} = \left(\frac{a, b}{\mathbb{R}}\right)$ 是 $\mathbb{R}$上的四元数代数，则 $\mathcal{B} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$或 $\mathcal{B} \simeq \mathbb{H}$（后一种情形当且仅当 $a, b < 0$时发生）。另一方面，当 $K = \mathbb{C}$时，对于所有 $a, b \in \mathbb{C}^\times$，都有 $\mathcal{B} = \left(\frac{a, b}{\mathbb{C}}\right) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$。

Insp在复共轭作用下，我们可以在 $\mathcal{B}$ 上定义一个标准对合，其形式为 ma p

$$\bar{\ } : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathbf{q} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{ij} \longmapsto \overline{\mathbf{q}} = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{ij}.$$

此类对合的存在使我们能够定义约化迹 $\mathrm{trd} : \mathcal{B} \to K$，其中 $\mathrm{trd}(\mathbf{q}) := \mathbf{q} + \mathbf{q}$；以及约化范数 $\mathrm{nrd} : \mathcal{B} \to K$，其中 $\mathrm{nrd}(\mathbf{q}) := \mathbf{q}\mathbf{q}$。接着，我们可以定义 $\Re(\mathbf{q}) := \frac{\mathrm{trd}(\mathbf{q})}{2}$和 $|\mathbf{q}| := \mathrm{nrd}(\mathbf{q})$。我们特别关注由以下方式定义的 K-子空间，即 $\mathcal{B}$ 中的纯元素子空间：

$$\mathcal{B}^0 := \{\mathbf{q} \in \mathcal{B} : \mathrm{trd}(\mathbf{q}) = 0\}$$

以及正规子群

$$\mathcal{B}^1 := \{\mathbf{q} \in \mathcal{B}^\times : \mathrm{nrd}(\mathbf{q}) = 1\}$$

$\mathcal{B}^\times$ 中约化范数为 1 的元素所构成的子群。

当 $\mathcal{B} \simeq \mathbb{H}$ 时，我们有 $\mathbb{H}^0$ 是经典纯哈密顿数构成的子空间，而 $\mathbb{H}^1$ 是单位哈密顿数构成的经典子群。作为集合，单位哈密顿数自然地与三维球面相对应

$\mathbb{S}^3$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中。群 $\mathbb{H}^1$ 通过共轭作用 $\omega \mapsto \mathfrak{q}\omega\mathfrak{q}^{-1}$ 在 $\mathbb{H}^0 \simeq \mathbb{R}^3$ 上（从左侧）进行旋转。此作用定义了一个群同态 $\mathbb{H}^1 \to$SO(3)，并构成以下正合列

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(3) \longrightarrow 1.$$

将商群 $\mathbb{H}^1/\{\pm 1\}$ 解释为 $\mathbb{R}^3$ 的旋转群，对于确定 $\mathbb{H}^1$中的某些代数子结构非常有用。例如，根据 SO 中有限群的分类(3) [25, 命题 11.5。2], 可知， $\mathbb{H}^1$ 的每个有限子群都同构于下列群之一 [24, 第一章, 定理 3.7]:

i. 阶为 n 的循环群 C_n，由 $s_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ 生成;

ii. 阶为 $4n$ 的二元二面体群（双循环群） Q_{4n}，由 s_{2n} 和 j 生成;

iii. 阶为 24 的二元四面体群 $2T$，其表示为

$$\langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^3 = rst = 1 \rangle$$

where $r = i$, $s = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ and $t = \frac{1}{2}(1 + i + j - k)$;

iv. 阶为 48 的二元八面体群 $2O$，其表示为

$$\langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^4 = rst = 1 \rangle$$

where $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $s = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ and $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$; or

v. 阶为 120 的二元二十面体群 $2I$，其表示为

$$\langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^5 = rst = 1 \rangle$$

where $s = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$, $t = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^{-1}i + j)$ and $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is the golden ratio.

2.2 - M ¨obius 变换

令 $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上的（根据具体情形取右模或左模） 2×2 矩阵模，其矩阵元素属于 $\mathbb{H}$。可以证明，$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ 中所有右可逆矩阵也都是左可逆的 [7, 命题 2.3]。于是，我们可以将一般线性群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{H})$ 定义为 $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ 中所有可逆矩阵组成的集合。

定义 2.2。令 $\hat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 为 $\mathbb{H}$ 的紧化，且令 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{H})$。我们将与 γ 相关联的四元数 M ¨obius 变换定义为实解析函数 $F_\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，其定义如下

$$F_\gamma(\mathfrak{q}) := (a\mathfrak{q} + b) \cdot (c\mathfrak{q} + d)^{-1}, \tag{1}$$

其中，若 $c = 0$，则令 $F_\gamma(\infty) = \infty$；若 $c \neq 0$，则令 $F_\gamma(\infty) = ac^{-1}$，并令 $F_\gamma(-c^{-1}d) = \infty$。

与复数情形一样，每个四元数莫比乌斯变换都是位似变换、平移和反演的复合。更确切地说，设 b, $c \in \mathbb{H}$，其中 $c \neq 0$。我们将左位似变换 $h_c \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 定义为映射 $\mathfrak{q} \mapsto c\mathfrak{q}$，将平移 $T_b \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 定义为映射 $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} + b$，并将反演 $I \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 定义为映射 $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{q}\,|\mathfrak{q}|^2$。于是， $F_\gamma(\mathfrak{q})$ 可分解如下:

$$\mathfrak{q} \xrightarrow{T_{c^{-1}d}} (\mathfrak{q}+c^{-1}d) \xrightarrow{h_c} c\mathfrak{q} + d \xrightarrow{I} (c\mathfrak{q}+d)^{-1} \xrightarrow{h_{b-ac^{-1}d}} (b-ac^{-1}d)(c\mathfrak{q}+d)^{-1} \xrightarrow{T_{ac^{-1}}} (b-ac^{-1}d)(c\mathfrak{q}+d)^{-1}+ac^{-1}$$

$$= (b - ac^{-1}d)(c\mathfrak{q} + d)^{-1} + ac^{-1}(c\mathfrak{q} + d)(c\mathfrak{q} + d)^{-1} = (a\mathfrak{q} + b)(c\mathfrak{q} + d)^{-1}.$$

因此

$$F_\gamma = T_{ac^{-1}} \circ h_{b-ac^{-1}d} \circ I \circ h_c \circ T_{c^{-1}d}. \tag{2}$$

令 $\mathcal{M} := \{F_\gamma : \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{H})\}$ 为关于复合运算的四元数 M ¨obius 变换群。映射 $\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{H}) \to \mathcal{M}$，定义为 $\Phi(\gamma) := F_\gamma$，是一个满射群反同态，且 $\ker(\Phi) := \{t\mathcal{I} : t \in \mathbb{R}^\times\}$，其中 $\mathcal{I} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{H})$ 为单位矩阵。由于

ˆ四元数 M¨obius 变换是 $\mathbb{H}$ 的保向共形微分同胚，而 $\mathbb{H}$ 可通过立体投影与 4-球 $\mathbb{S}^4$ 等同，因此

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{H}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{H})/\{t\mathcal{I} : t \in \mathbb{R}^\times\} \simeq Conf_+(\mathbb{S}^4),$$

其中， $Conf_+(\mathbb{S}^4)$ 表示四维球面上保定向的共形微分同胚群。为行文方便，我们有时会将一个四元数系数矩阵与其诱导的莫比乌斯变换等同起来，反之亦然。

现在，令

$$\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) > 0\} \subseteq \mathbb{H}$$

为一维四元数双曲空间的半空间模型。该空间与带有庞加莱度量 $(ds)^2 = \frac{(dx_0)^2+(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2}{x^2}$ 的实双曲四维空间 $\mathrm{H}^4_{\mathbb{R}} := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_0 > 0\}$ 等距。

令 $\mathcal{M}^{0}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 为保持 $\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}}$ 不变的四元数莫比乌斯变换子群。由于任意 $F_\gamma \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 都是共形的且保定向，并且是 $\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}}$ 的等距变换，因此 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 同构于群 $Conf_+(\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}})$ 和 $Isom_+(\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}})$，它们分别是半空间模型 $\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}}$ 上保定向的共形微分同胚群和等距变换群。此外， $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 通过保定向的共形变换作用于双曲四维空间的无穷远球面，该空间定义为 $\partial\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \Re(\mathbf{q}) = 0\} \cup \{\infty\}$。于是，
$\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}} \cong Conf_+(\mathbb{S}^3)$。

我们注意到， $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 可被刻画为由满足以下等价的（Bisi-Gentili）BG 条件[7, 定理 1。11] [11, 命题 2。3] （这些条件是 Ahlfors 所述条件的一种变化形式 [2] 以及 Vahlen 所述条件 [21]）：

$$\left\{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) : \overline{\gamma}^\top \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) : \Re(a\overline{c}) = 0,\ \Re(b\overline{d}) = 0,\ \overline{b}c + \overline{d}a = 1\right\}, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) : \Re(c\overline{d}) = 0,\ \Re(a\overline{b}) = 0,\ a\overline{d} + b\overline{c} = 1\right\}. \tag{5}$$

$\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 的一个重要子群是仿射子群 $\mathcal{A}(\mathbb{H})$，它由形如 $\begin{pmatrix} \lambda a & b \\ 0 & \lambda^{-1}a \end{pmatrix}$ 的矩阵诱导的变换构成，其中 $|a| = 1$、 $\lambda > 0$ 和 $\Re(a\overline{b}) = 0$ （显然满足 BG 条件）。群 $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 中固定无穷远点的极大子群，而任意 $F_\gamma \in \mathcal{A}(\mathbb{H})$ 都在 $\partial\mathrm{H}^1_{\mathbb{H}}$ 上充当共形变换。此外， $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ 是作用于无穷远处纯四元数空间的保向共形变换群，该空间可与 $\mathbb{R}^3$ 等同，从而 $\mathcal{A}(\mathbb{H}) \cong Conf_+(\mathbb{R}^3)$。

$\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 的元素有一种实用的分解，称为岩泽分解 [11, 命题 2.4], 指出，每个 $\gamma \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}$ 都可以写成如下形式

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+$、 $\omega \in \mathbb{H}^0$ 和 α、 $\beta \in \mathbb{H}$ 满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 和 $\Re(\alpha\overline{\beta}) = 0$。第一个矩阵是固定 0 和 8 的位似变换，第二个矩阵是沿 ω方向、固定 8 的抛物平移，第三个矩阵则是四维旋转。事实上，由所有形如 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$的矩阵构成的集合 $\mathcal{K}$与特殊正交群 $\mathrm{SO}(4)$ 同构，后者是一个实紧李群，维数为 6。于是，我们可以推知，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 中所有满足 BG 条件的矩阵构成的集合具有 10 维实维数。特别要注意的是，对角矩阵子集 $\mathcal{D} := \left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\right\}$在无穷远处的作用由 $\mathbf{q} \mapsto \alpha\mathbf{q}\overline{\alpha}$给出，这就是 $\mathrm{SO}(3)$ 在纯四元数 $\mathbb{H}^0$空间中的通常作用。于是， $\mathcal{D}$ 与 $\mathrm{SO}(3)$同构。

3. 全定四元数代数中的阶

设 K 是一个数域，$\mathbb{Z}_K$ 表示其整数环。例如，若 $K=\mathbb{Q}$，则 $\mathbb{Z}_K$ 就是 $\mathbb{Z}$；若 K 是一个二次域（即对于某个非平凡的无平方因子整数 $n\in\mathbb{Z}$（不等于 0 和 1），有 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{n})$），则 $\mathbb{Z}_K=\mathbb{Z}[\theta]:=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\theta$，其中

$$\theta:=\begin{cases}\sqrt{n} & \text{if } n\not\equiv 1 \mod 4\\ \frac{1+\sqrt{n}}{2} & \text{if } n\equiv 1 \mod 4\end{cases}.$$

定义 3.1. 四元数代数 $\mathcal{B}$ over K 中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$，是 $\mathcal{B}$ 中的一个四维 $\mathbb{Z}_K$ 格，同时也是一个含幺环。此外，如果没有其他 $\mathbb{Z}_K$-阶真包含 $\mathcal{O}$，则称 $\mathcal{O}$ 为极大阶。

注 1. 极大 $\mathbb{Z}_K$-阶类似于数域的整数环，但一个重要区别是，整数环是唯一的，而一个四元数代数可以有许多个极大 $\mathbb{Z}_K$-阶。例如，如果 $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{B}$ 是一个极大 $\mathbb{Z}_K$-阶，且 $\mathfrak{q}\in\mathcal{B}^\times$，那么 $\mathfrak{q}\mathcal{O}\mathfrak{q}^{-1}\subseteq\mathcal{B}$ 是一个极大$\mathbb{Z}_K$-阶；但由于 $\mathcal{B}$ 是非交换的，我们可能有 $\mathfrak{q}\mathcal{O}\mathfrak{q}^{-1}\neq\mathcal{O}$。

设 a、$b\in\mathbb{Z}_K\backslash\{0\}$ 和 $\mathcal{B}=\left(\frac{a}{K},\frac{b}{K}\right)$。$\mathcal{B}$ 中最自然的 $\mathbb{Z}_K$-阶例子是标准阶

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}:=\mathbb{Z}_K\oplus\mathbb{Z}_K\mathbf{i}\oplus\mathbb{Z}_K\mathbf{j}\oplus\mathbb{Z}_K\mathbf{ij}.$$

特别是，当 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_K$, $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_K):=\mathcal{O}_{\mathcal{B}_K}=\mathbb{Z}_K\oplus\mathbb{Z}_Ki\oplus\mathbb{Z}_Kj\oplus\mathbb{Z}_Kk$ 被真包含于$\mathbb{Z}_K$-阶中时

$$\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}_K):=\mathbb{Z}_K\oplus\mathbb{Z}_Ki\oplus\mathbb{Z}_Kj\oplus\mathbb{Z}_K\xi,$$

其中 $\xi=\frac{1+i+j+k}{2}$，这表明 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_K)$ 从来不是 $\mathbb{Z}_K$中的极大 $\mathcal{B}_K$-阶。这些阶推广了 Lipschiz 环和赫尔维茨整数环 $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ 以及 $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ 中研究的对象[11]。然而，与 $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ 在 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}=\left(\frac{-1}{\mathbb{Q}},\frac{-1}{\mathbb{Q}}\right)$的极大性不同，赫尔维茨在 $\mathcal{B}_K$中并不总是极大的。例如，如果~~K~~$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，我们可以将 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ 的二元八面体阶定义为

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{O}}:=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\oplus\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\eta\oplus\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\delta\oplus\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\eta\delta,$$

其中 $\eta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$和 $\delta=\frac{1+j}{\sqrt{2}}$，它真包含赫尔维茨($\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$)。类似地，当 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$时，我们可以将$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$的二元二十面体阶定义为

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{I}}:=\mathbb{Z}[\varphi]\oplus\mathbb{Z}[\varphi]i\oplus\mathbb{Z}[\varphi]\zeta\oplus\mathbb{Z}[\varphi]i\zeta,$$

其中 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金比例，$\zeta=\frac{\varphi+\varphi^{-1}i+j}{2}$ 则恰当地包含 $\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}[\varphi])$。事实上，$\mathcal{O}_{\mathfrak{O}}$和 $\mathcal{O}_{\mathfrak{I}}$ 分别是 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ 的极大 $\mathbb{Z}_K$-阶（参见 [25, §11.5]）。

3.1 - 全定四元数代数

设 $\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}$ 是一个嵌入，它诱导出阿基米德绝对值 $|x|_\sigma:=|\sigma(x)|$。众所周知，除等价外，K 上的每个阿基米德绝对值都由一个从 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入诱导；两个这样的嵌入所产生的绝对值等价，当且仅当它们相同或相差一个复共轭作用。我们将 K 的阿基米德位 σ 定义为 K 上的阿基米德绝对值 $|\cdot|_\sigma$ 的等价类，并用 K_σ 表示 K 关于 $|\cdot|_\sigma$的完备化（也称为 K 在位 σ处的完备化）；它同构于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。特别地，如果对 K的每个阿基米德位 σ，$K_\sigma\cong\mathbb{R}$，则称 K 为全实。

定义 3.2. 若数域 K 上的四元数代数 $\mathcal{B}$ 满足对 K 的所有阿基米德位 σ，均有 $\mathcal{B}_\sigma:=\mathcal{B}\otimes_{\mathbb{Q}}K_\sigma\simeq\mathbb{H}$，则称其为全定的。

我们注意到，当 σ 是一个复位时，有 $\mathcal{B}_\sigma=\mathcal{B}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$。因此，如果 $\mathcal{B}$是 K上的全定四元数代数，那么 K 必然是全实域。特别地，我们将记 $\mathcal{B}_K$ 为定义在全实域K上的全定四元数代数 $\left(\frac{-1,}{K}\frac{}{}\frac{}{}^{-1}\right)$。今后，我们假设 $\mathcal{B}_K$ 是全定的。于是，它可以嵌入到 $\overline{\mathbb{H}\text{ 中}}$，并且通过限制，我们可以将 $\mathcal{B}_K$ 的任意 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$ 嵌入到 $\mathbb{H}$中。

现在，设 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$。回顾一下， γ 的 Dieudonné 行列式定义为非负实数

$$\det_{\mathbb{H}}(\gamma) := \sqrt{|a|^2|d|^2 + |c|^2|b|^2 - 2\Re(c\overline{a}b\overline{d})}.$$

可以证明，矩阵 $\gamma \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ 可逆，当且仅当 $\det_{\mathbb{H}}(\gamma) \neq 0$ [7, 命题 2。8]。那么，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{H})$ 恰好是 M 中所有矩阵组成的集合$_2(\mathbb{H})$ ，其中矩阵的 Dieudonn´e 行列式非零。因此，我们可以将特殊线性群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ 定义为 GL 中所有矩阵组成的集合$_2(\mathbb{H})$ ，其中矩阵的 Dieudonn´e 行列式为 1；并将 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})/\{\pm\mathcal{I}\}$。

我们特别关注的子集是 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ ，它由全定四元数代数 $\mathcal{B}$的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$ 中所有矩阵组成；事实上，它是一个子群。这或许是专家们熟知的结论，但由于缺少参考文献，我们仍给出证明。

引理 3.1。设 $\mathcal{B}$ 是 K 上的全定四元数代数， $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶。那么，$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ 的一个子群。

证明。显然，$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 中矩阵的右乘积定义良好、满足结合律，且 $\mathcal{I} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$，因为 $\mathcal{O}$ 是含幺环。因此，我们只需证明每个 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 的右逆都属于 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$。

首先假设 $abcd \neq 0$，那么根据 [7, 注 2.2], ，我们有

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} (a - bd^{-1}c)^{-1} & (c - db^{-1}a)^{-1} \\ (b - ac^{-1}d)^{-1} & (d - ca^{-1}b)^{-1} \end{pmatrix}$$

其中 a^{-1}、 b^{-1}、 c^{-1}、 d^{-1} 不一定属于 $\mathcal{O}$。利用范数的乘法性以及 [7, 引理 2.4], ，我们有

$$|a|^2|d-ca^{-1}b|^2 = |b|^2|c-db^{-1}a|^2 = |c|^2|b-ac^{-1}d|^2 = |d|^2|a-bd^{-1}c|^2 = |a|^2|d|^2+|c|^2|b|^2-2\Re(c\overline{a}b\overline{d}) = 1.$$

那么，由于 $\mathfrak{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathfrak{q}}}{|\mathfrak{q}|^2}$ 且 $\mathfrak{q}^{-1} = \frac{\mathfrak{q}}{|\mathfrak{q}|^2}$，

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} (a - bd^{-1}c)^{-1} & (c - db^{-1}a)^{-1} \\ (b - ac^{-1}d)^{-1} & (d - ca^{-1}b)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\overline{a}-\overline{bd}^{-1}\overline{c})}{|a-bd^{-1}c|^2} & \frac{(\overline{c}-\overline{db}^{-1}\overline{a})}{|c-db^{-1}a|^2} \\ \frac{(\overline{b}-\overline{ac}^{-1}\overline{d})}{|b-ac^{-1}d|^2} & \frac{(\overline{d}-\overline{ca}^{-1}\overline{b})}{|d-ca^{-1}b|^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|d|^2}{|d|^2}\frac{(\overline{a}-\overline{bd}^{-1}\overline{c})}{|a-bd^{-1}c|^2} & \frac{|b|^2}{|b|^2}\frac{(\overline{c}-\overline{db}^{-1}\overline{a})}{|c-db^{-1}a|^2} \\ \frac{|c|^2}{|c|^2}\frac{(\overline{b}-\overline{ac}^{-1}\overline{d})}{|b-ac^{-1}d|^2} & \frac{|a|^2}{|a|^2}\frac{(\overline{d}-\overline{ca}^{-1}\overline{b})}{|d-ca^{-1}b|^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |d|^2(\overline{a}-\overline{bd}^{-1}\overline{c}) & |b|^2(\overline{c}-\overline{db}^{-1}\overline{a}) \\ |c|^2(\overline{b}-\overline{ac}^{-1}\overline{d}) & |a|^2(\overline{d}-\overline{ca}^{-1}\overline{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d|^2(\overline{a}-\overline{b}\frac{d}{|d|^2}\overline{c}) & |b|^2(\overline{c}-\overline{d}\frac{b}{|b|^2}\overline{a}) \\ |c|^2(\overline{b}-\overline{a}\frac{c}{|c|^2}\overline{d}) & |a|^2(\overline{d}-\overline{c}\frac{a}{|a|^2}\overline{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d|^2\overline{a}-\overline{b}d\overline{c} & |b|^2\overline{c}-\overline{d}b\overline{a} \\ |c|^2\overline{b}-\overline{a}c\overline{d} & |a|^2\overline{d}-\overline{c}a\overline{b} \end{pmatrix}$$

其所有系数都属于 $\mathcal{O}$。

现在假设 γ 的某个元素为 0。例如，若 $a = 0$ 且 $bc \neq 0$，根据 [7], 的 (2.3)，我们有

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 b^{-1} 和 c^{-1} 不一定属于 $\mathcal{O}$。那么，由于 Dieudonn´e 行列式等于 1，我们有$|c|^2|b|^2 = 1$ 和

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\overline{c}}{|c|^2}d\frac{\overline{b}}{|b|^2} & \frac{\overline{c}}{|c|^2} \\ \frac{\overline{b}}{|b|^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{|c|^2|b|^2}\overline{c}d\overline{b} & \frac{\overline{c}}{|c|^2}\frac{|b|^2}{|b|^2} \\ \frac{|c|^2}{|c|^2}\frac{\overline{b}}{|b|^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{c}d\overline{b} & |b|^2\overline{c} \\ |c|^2\overline{b} & 0 \end{pmatrix}$$

其所有系数都属于 $\mathcal{O}$。其他情况类似。 □

3.2 - 四元数阶的单位群

在数论中， $\mathbb{Z}_K$ 的一个非常重要的子群是单位群 $\mathbb{Z}_K^\times$ ，其结构因狄利克雷单位定理[16, Chapter I §7]而得到了充分理解。另一方面，任意四元数代数中的 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$ 的单位群 $\mathcal{O}^\times$ 的描述则更加复杂。然而，由于

我们只关注 $\mathbb{Z}_K$全定四元数代数中的阶 $\mathcal{B}$ 在 K上的情形，因此可以将$\mathcal{O}^\times$ 描述为由 $\mathbb{Z}_K^\times$ 和扭群 $\mathcal{O}^1$ 构成: $= \{\mathbf{u} \in \mathcal{O}^\times : \mathrm{nrd}(\mathbf{u}) = 1\}$ （这是$\mathcal{O}^\times$ [25, 命题 32.3。7]中的一个有限子群） $\mathcal{O}$ 如下。

令 J_K 为 K 到 $\mathbb{C}$ 的所有嵌入集合（实际上是到 $\mathbb{R}$ 的嵌入，因为 K 是全实的）。众所周知，这类互不相同的嵌入恰有 $[K:\mathbb{Q}]$ 个。令 $K_+^\times := \{w \in K^\times : \sigma(w) > 0$ 对所有 $\sigma \in J_K\}$ 均成立的 $K^\times$ 的全正元素集合，并令 $\mathbb{Z}_{K+}^\times := \mathbb{Z}_K^\times \cap K_+^\times$ 为 $\mathbb{Z}_K$ 中的全正单位元群。由于 $\mathrm{nrd}(\mathcal{O}) \subseteq \mathbb{Z}_K$ [25, §10.3] 且 $\mathrm{nrd}(\mathcal{B}^\times) \subseteq K_+^\times$ [25, §14.7], , 我们有 $\mathrm{nrd}(\mathcal{O}^\times) \subseteq \mathbb{Z}_{K+}^\times$。于是，约化范数诱导出以下正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^1 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\mathrm{nrd}} \mathbb{Z}_{K+}^\times$$

这意味着 $\mathcal{O}^1$ 是 $\mathcal{O}^\times$的正规子群。另一方面，由于 $Z(\mathcal{B}^\times) = K^\times$，我们有 $\mathbb{Z}_K^\times \subseteq Z(\mathcal{O}^\times)$，这意味着 $\mathbb{Z}_K^\times$ 是 $\mathcal{O}^\times$的正规子群。因此，$\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$ 是 $\mathcal{O}^\times$ 的正规子群，并且由于 $\mathrm{nrd}(\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1) = \mathbb{Z}_K^{\times 2}$，我们有以下嵌入

$$\mathcal{O}^\times/\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1 \hookrightarrow \mathbb{Z}_{K+}^\times/\mathbb{Z}_K^{\times 2}.$$

最后，由于 $\mathbb{Z}_K^\times$ 是有限生成的 [3, §13.3]， $\mathbb{Z}_{K+}^\times/\mathbb{Z}_K^{\times 2}$ 是一个有限初等阿贝尔 2-群。因此，$\mathcal{O}^\times$ 是由 $\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$ 和一个初等阿贝尔 2-群构成的扩张。事实上，Vign´eras 在 [23, Th´eor`eme6] 中证明， $[\mathcal{O}^\times : \mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1]$ 等于 1、2 或 4。

当 $K = \mathbb{Q}$时，可以证明 $\mathcal{O}^\times = \mathcal{O}^1 \subseteq \mathbb{H}^1$ [25, Lemma 11.5.9]。那么， $\mathcal{O}^\times$ 同构于上文所述的 $\mathbb{H}^1$ 的某个有限子群。这一描述对于 [11] 将利普希茨和赫尔维茨四元数模群及其基本域描述出来至关重要。事实上，可以证明 [24, Chapitre V, Proposition 3.1] ，给定一个（全）定四元数代数 $\mathcal{B} = \left(\frac{a,\ b}{\mathbb{Q}}\right)$极大 $\mathbb{Z}$-阶 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ 的 $\mathcal{O}^\times$ 单位群是 2、4 或 6 阶循环群，除非

- $\mathcal{B} = \left(\frac{-1,\ \mathbb{Q}}{}^{-3}\right)$ 其中 $\mathcal{O}^\times$ 同构于二元二面体群 $Q_{12} = \langle s_6, j\rangle$；并且
- $\mathcal{B} = \left(\frac{-1,\ \mathbb{Q}}{}^{-1}\right)$，其中 $\mathcal{O}^\times \simeq \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})^1$同构于二元四面体群 $2T$。

当 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 是全实域时，对 $\mathcal{O}^\times$ 的描述会稍微复杂一些，因为它不再是有限的，但仍然可以完成。在这种情况下，利用狄利克雷单位定理 [3, 定理 11.5。1]，我们有

$$\mathbb{Z}_K^\times = \{\pm\varepsilon^\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}, \tag{7}$$

其中 ε 是 $\mathbb{Z}_K$ 的基本单位，并经过归一化，使得对于典范嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{R}$，有 $\varepsilon > 1$ 。由于 K 是实二次域，众所周知 [3, 第 11] 章中有述， $\mathbb{Z}_K^{\times 2} = \langle\varepsilon^2\rangle$ 并且

$$\mathbb{Z}_{K+}^\times = \begin{cases} \langle\varepsilon\rangle & \text{if } N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1 \\ \langle\varepsilon^2\rangle & \text{if } N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1. \end{cases}$$

那么，若 $N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1$, 我们得出 $\mathcal{O}^\times \simeq \mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$ 而若 $N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$, 我们得出 $\mathcal{O}^\times$ 同构于 $\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$ 或同构于 $\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$的二次扩张。最后，由于 K 是全实域，有限子群 $\mathcal{O}^1$ 嵌入于 $\mathbb{H}^1$。接着，我们可以利用（7）以及上一节给出的 $\mathbb{H}^1$ 有限子群的描述，得到对 $\mathcal{O}^\times$ 的显式描述。

例如，沿用上文提到的极大 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}_\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ 和 $\mathcal{O}_\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$ ，设 $\varepsilon = 1+\sqrt{2}$ 和 $\varepsilon = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 分别为 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 和 $\mathbb{Z}[\varphi]$ 的归一化基本单位。由 [25, §11.5], 可知， $\mathcal{O}_\mathfrak{D}^1$ 同构于二元八面体群 $2O$ ，而 $\mathcal{O}_\mathfrak{I}^1$ 同构于二十面体群 $2I$。于是，由于 $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(1+\sqrt{2}) = -1$ 和 $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}}(\varphi) = -1$, , 我们有

$$\mathcal{O}_\mathfrak{D}^\times \simeq 2O \cdot \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}^\times \quad \text{and} \quad \mathcal{O}_\mathfrak{I}^\times \simeq 2I \cdot \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}^\times.$$

$\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}_K)$ 是一个极大 $\mathbb{Z}_K$-阶的例子如下。令 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ 和 $\varepsilon = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 为 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$的归一化基本单位。由于 $2\varepsilon = 2(\frac{9+\sqrt{13}}{2}) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{13})^{\times 2}$，由[14, 表 4.3] 可知，在 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}$中不存在 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}$-阶 $\mathcal{O}$ ，其扭群 $\mathcal{O}^1$ 同构于

$2O$ 或 $2I$。由此，根据 $\mathbb{H}^1$ 有限子群的分类可知，$\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})})$ 是极大的。另一方面，由于 $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})/\mathbb{Q}}(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) = -1,$，我们得到

$$\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})})^\times \simeq \mathrm{Hur}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})})^1 \cdot \mathbb{Z}^\times_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})} \simeq 2T \cdot \mathbb{Z}^\times_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}.$$

事实上，由 [25, §32.7] 可知，群 $2O$ 和 $2I$ 仅当实二次域 K 分别为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 时，才会作为四元数 $\mathbb{Z}_K$-阶 $\mathcal{O}$ 的扭群出现。此外，同上文所引文献还可知，定义在 K 上的全定四元数代数 $\mathcal{B}$ 含有一个阶 $\mathcal{O}$，其扭群同构于 $2T$、$2O$ 和 $2I$，当且仅当 $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}_K$。这也说明了为何我们在接下来的章节中特别关注 $\mathcal{B}_K$，而非其他全定四元数代数 $\mathcal{B}$。

4. 四元数模群

在 [11] 中，利普希茨四元数模群和赫尔维茨四元数模群被引入为经典模群的四元数类比，它们作用于 $\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}$。沿用这一类比，本节将介绍比安基模群和希尔伯特 - 布卢门撒尔模群的四元数类比，它们分别作用于 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}$ $\times\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}$。

4.1 - 比安基四元数模群

本小节主要参照 [11] 在 arXiv:1503.07214 上提供的扩展版本第 13 节。令 $\mathbb{B}^5 \subseteq \mathbb{R}^5$ 为闭五维球，并将 $\mathbb{B}^5$ 的内部与实双曲5空间 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$等同，后者可视为 $\{(\mathbf{q}\ t) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{H}, t > 0\}$。如我们在 § 2中所见，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 通过四元数莫比乌斯变换 (1) 在 $\hat{}\mathbb{H} \simeq \mathbb{S}^4 = \partial\mathbb{B}^5$ 上共形作用。于是，根据庞加莱扩张定理，每个 $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 都可规范地扩张为 $\mathbb{B}^5$的共形微分同胚；将其限制在 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$上，便得到开五维圆盘 $\mathbb{D}^5$ 在庞加莱双曲度量下的保向等距变换 $\tilde{\gamma}$。反过来，$\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$ 的任意保向等距变换都可规范地扩张到理想边界 $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \cong \hat{}\mathbb{H}$，成为 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$的一个元素。因此，映射 $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ 是一个同构，且 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) = Isom_+(\mathbb{B}^5) = Isom_+(\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}})$。具体而言，对于每个 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$，四元数莫比乌斯变换 F_γ 的庞加莱扩张 $F_{\tilde{\gamma}} : \mathbf{H}^5_{\mathbb{R}} \to \mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$ 由下式给出（见引文所述定理 13.2）：

$$F_{\tilde{\gamma}}(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{1}{|c\mathbf{q} + d|^2 + |c|^2 t^2} ((a\mathbf{q} + b)(\overline{\mathbf{q}c} + \overline{d}) + a\overline{c}t^2), \frac{t}{|c\mathbf{q} + d|^2 + |c|^2 t^2} \right)$$

a而当 $t = 0$ 它对应于定义中所述的 γ 在 $\hat{}\ \mathbb{H} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上的作用 1.

设 $\Gamma \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 是作用于 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$上的离散子群。由克莱因群的标准事实可知，$\Gamma$ 在 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$上适当地且不连续地作用。因此，$M_\Gamma := \mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}/\Gamma$ 是一个完备实五维双曲轨形。如下可由四元数代数构造 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 的离散子群实例。

定义 4.1. 设 $\mathcal{O}$ 是四元数代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{H}$的一个 $\mathbb{Z}$-阶。我们将与 $\mathcal{O}$ 相关联的 Bianchi四元数模群定义为群 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) :=\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm\mathcal{I}\}$。

显然，与$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ 的 $\mathbb{Z}$-阶 $\mathcal{O}$ 相关联的 Bianchi四元数模群 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \subseteq\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 是一个离散子群，并且等距地作用于 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$上。接着，我们将与 $\mathcal{O}$ 相关联的 Bianchi 四元数模轨形定义为

$$M_{\mathcal{O}} := \mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}/\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}).$$

设 $\mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$ 为（格） $\mathcal{O}$ 的一组基。例如，$\mathfrak{B}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} = \{1、\ i、\ j、\ k\}$ 以及 $\mathfrak{B}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})} = \{1、\ i、\ j、\ \xi\}$，其中 $\xi = \frac{1+i+j+k}{2}$。正如我们在 §3.2 中提到的，四元数代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ 中任意 $\mathbb{Z}$ 阶的 $\mathcal{O}$ 都满足 $\mathcal{O}^\times = \mathcal{O}^1$。因此，$\mathcal{O}$ 同构于 $\mathbb{H}^1$ 的一个有限子群，可按 §2.1 中的方法用生成元和关系来描述。我们用 $\mathfrak{U}_{\mathcal{O}}$ 表示 $\mathcal{O}^\times$的生成元集合。例如，$\mathfrak{U}_{\mathbb{H}(\mathbb{Z})} = \{i、\ j\}$ 以及 $\mathfrak{U}_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})} = \{i、\ \xi、\ \tau\}$，其中 ξ 如上所述，且 $\tau = \frac{1+i+j-k}{2}$。因此，由 (2) 可得 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ 的以下一组（非极小）生成元：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} : \omega \in \mathfrak{B}_{\mathcal{O}},\ \mathbf{u} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{O}} \right\} \tag{8}$$

利用这组生成元，很容易看出，我们可以为 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ 在 $\mathbf{H}^5_{\mathbb{R}}$ 上的庞加莱扩张作用选取一个基本域 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$，它是五维烟囱的一个子集：

$$\mathcal{P} := \{(\mathbf{q},t) = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, t) \in \mathbf{H}^5_{\mathbb{R}} : -1/2 \leqslant x_n \leqslant 1/2,\ (n = 0,1,2,3) \text{ and } |\mathbf{q}|^2 + |t|^2 \geqslant 1\}.$$

接下来，我们给出以下结果，它为有限双曲体积的完备实五维双曲轨形提供了一些具体例子。

命题 4.1. 设 $\mathcal{O}$ 是四元数代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{H}$ 的一个 $\mathbb{Z}$ 阶。则 Bianchi 四元数模轨形 $M_{\mathcal{O}}$ 具有有限双曲体积。

一般而言，不能指望轨形一定具有有限覆盖的流形。不过，在我们的情形中，多亏了塞尔伯格引理 [4] [19], , 定义这些轨形的群 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ $M_{\mathcal{O}}$ 具有有限指数的无挠子群。因此，对于每个 $\mathbb{Z}$阶 $\mathcal{O}$，都存在一个有限轨形覆盖 $\sim$ $\sim p:$ $M_{\mathcal{O}} \to M_{\mathcal{O}}$，其中 $M_{\mathcal{O}}$ 是一个有限体积的双曲五维流形。

最后，我们指出，如果像数论中的通常做法那样，将 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ 的尖点（等价地，轨形 $M_{\mathcal{O}}$ 的尖点）定义为 [10] [22], 即 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ 在 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 中的有理点轨道，我们就能用算术方法证明以下关于轨形 $M_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})}$ 的尖点的结果。

命题 4.2. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ 只有一个尖点。

证明。由于 $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个格，我们有 $\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}) \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{H}$。于是， $\mathbb{H}$ 中的每个元素 β 都可以写成 $\beta = \alpha c^{-1}$，其中 $\alpha \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$、 $0 \neq c \in \mathbb{Z}$。事实上，我们可以选取互素的 α 和 c。根据右侧 B´贝祖定理，[25, 推论 11.3.6] 存在 μ、 $\nu \in \mathbb{H}ur(\mathbb{Z})$ 使得

$$\alpha\mu - c\nu = 1.$$

这给出满足 $F_\gamma(\infty) = \alpha c^{-1}$的 $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \nu \\ c & \mu \end{pmatrix}$。利用 [7] 的引理 2.4 以及 c的交换性，我们有

$$\det_{\mathbb{H}}(\gamma) = \sqrt{|\alpha|^2|\mu|^2 + |c|^2|\nu|^2 - 2\Re(c\overline{\alpha}\nu\overline{\mu})} = \sqrt{|c\nu - c\alpha c^{-1}\mu)|^2} = \sqrt{|\alpha\mu - c\nu)|^2} = 1$$

于是， $\gamma \in$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$。因此， $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}ur(\mathbb{Z}))$ 唯一的尖点是 8 的轨道。 □

注 2. 类比于数域 K 的整数环 $\mathbb{Z}_K$ 的类数 $h_{\mathbb{Z}_K}$，四元数代数 $\mathcal{B}$（定义在 K 上）中 $\mathcal{O}$ 阶 $\mathbb{Z}_K$ 所关联的左（或右）类数 $h_{\mathcal{O}}$ 的概念已有充分研究 [25, 第 17] 章。特别地，由 [25, 命题 11.3.4], 可知 $h_{\mathbb{H}ur(\mathbb{Z})} = 1$。因此，前述结果与经典结论相符：比安基 [12, §7.2] 或希尔伯特-布卢门撒尔 [22, (1.1)命题]轨形的尖点数等于其关联二次域的类数。

4.2 - 希尔伯特-布卢门撒尔四元数模群

设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 为实二次域， $\mathbb{Z}_K$ 为其整数环， $\mathcal{O}$ 为全定四元数代数 $\mathcal{B}_K$ 中的一个 $\mathbb{Z}_K$ 阶。众所周知，嵌入 $\mathbb{Z}_K \hookrightarrow \mathbb{R}$ 并非离散的。因此，与前一种情形相反，我们无法将 $\mathcal{O}$ 离散地嵌入 $\mathbb{H}$，因而 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$ 不是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 的离散子群。然而， $\mathbb{Z}_K$ 存在一个离散嵌入 [18, §4.2 命题 2]

$$\mathbb{Z}_K \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

通过伽罗瓦扭曲 $w = \alpha + \beta\sqrt{n} \mapsto (w, \sigma(w)) := (\alpha + \beta\sqrt{n}, \alpha - \beta\sqrt{n})$，它们诱导出一个离散嵌入

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \tag{9}$$

由 $\mathbf{q} \mapsto (\mathbf{q}\ \sigma(\mathbf{q})) := \big(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad \sigma(x_0) + \sigma(x_1) i + \sigma(x_2) j + \sigma(x_3) k\big)$，最后 (9扩张为一个离散嵌入

$$\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}). \tag{10}$$

于是，我们可以用 ($_2(\mathcal{O})$ 在 (10) 下的像来标识 PSL9) 这个嵌入从闵可夫斯基数论几何的角度来看更为自然，因为当 $\mathcal{B}_K$是一个定义在实二次域上的全定四元数代数时， $\mathcal{B}_K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{H}$。

令 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} := \mathbf{H}^1_{\mathbb{H}} \times \mathbf{H}^1_{\mathbb{H}} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$，它与配备庞加莱度量黎曼积度量的 $\mathbf{H}^4_{\mathbb{R}} \times \mathbf{H}^4_{\mathbb{R}}$ 等距。正如预期，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 通过四元数莫比乌斯变换 $(\gamma_1, \gamma_2) \cdot (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) = (F_{\gamma_1}(\mathfrak{q}_1), F_{\gamma_2}(\mathfrak{q}_2))$ 作用于 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$，但并非所有 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 都保持 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$不变。与一维情形一样，使 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 保持不变的矩阵对 (γ_1, γ_2)构成的集合 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 与 $Conf_+(\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}})$ 和 $Isom_+(\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}})$同构，并且可将其刻画为满足如下条件的 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$ 的集合： γ_1 和 γ_2 都满足 BG 条件。此外， $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}}$ 作用于 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 和 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}} \cong Conf_+(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$的边界 $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$。

现在，我们可以描述 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的一类特殊等距变换，它们属于

$$\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O}) := \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \cap \mathcal{M}_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}},$$

该类变换将用于定义我们的四元数模群。

定义 4.2. 设 $\mathcal{B}_K$ 中的 $\mathbb{Z}_K$-阶为 $\mathcal{O}$，且 $\mathcal{B}_K$ 的纯元素中属于 $\mathcal{O}$ 的集合为 $\Im\mathcal{O}$。我们将 $\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 中由 $\Im\mathcal{O}$ 的元素所生成的 $\Im\mathcal{O}$-平移子群定义为

$$\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} := \left\{ T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \mid \ b \in \Im\mathcal{O} \right\}.$$

$\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的平移定义为一个变换

$$T_{(b_1,b_2)} := (F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}) : \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$$

它对应于一对具有如下形式的矩阵

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}},$$

其中 b_1 和 b_2 满足 $\Re(b_1) = 0$ 和 $\Re(b_2) = 0$。注意，若 $b \in \mathcal{O}$ 和 $\Re(b) = 0$，则 $\Re(\sigma(b)) = 0$，并且我们可以将群 $\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}}$ 视为 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中具有形式 $T_{(b,\ \sigma(b))}$ 的平移集合，其中 $b \in \Im\mathcal{O}$。

注 3。注意，如果 $\mathcal{O}$是 $\mathbb{Z}_K$阶 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_K) := \{\mathfrak{q} = t + xi + yj + zk \mid w, x, y, z \in \mathbb{Z}_K\}$的 $\mathcal{B}_K$，那么我们有

$$\Im\mathbb{H}(\mathbb{Z}_K) = \left\{ \frac{1}{2}(\mathfrak{q} - \overline{\mathfrak{q}}) \mid \mathfrak{q} \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}_K) \right\} = \{xi + yj + zk : x, y, z \in \mathbb{Z}_K\},$$

类似于复数的虚部。不过， $\Im\mathcal{O}$ 并不总是等于集合 $\{\frac{1}{2}(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{O}\}$。例如，设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$，其中 $n \not\equiv 1 \bmod 4$（那么它的整数环为$\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$），并考虑 $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}(\sqrt{n})}$的 $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$阶

$$\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}[\sqrt{n}]) = \left\{ \mathfrak{q} = t + xi + yj + zk \mid t, x, y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \text{ or } t, x, y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}] + \frac{1}{2} \right\}.$$

容易看出，通过取 $\mathfrak{q} = \frac{1+i+j+k}{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$，有 $\frac{i+j+k}{2} \in \{\frac{1}{2}(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]\} \subseteq \mathcal{B}_K^0$，但$\frac{i+j+k}{2} \notin \mathrm{Hur}(\mathbb{Z}[\sqrt{n}])$，尤其是 $\frac{i+j+k}{2} \notin \Im\mathrm{Hur}(\mathbb{Z}[\sqrt{n}])$。

定义 4.3. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{B}_K$ 中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶，且 ε 是 $\mathbb{Z}_K$ 的基本单位。我们将 $\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 的标量酉子群定义为以下矩阵的集合：

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) := \left\{ D_\ell := \begin{pmatrix} \varepsilon^\ell & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-\ell} \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \mid \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的左双齐次变换定义为变换 $h_{(c_1,c_2)} : \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} \to \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$，由映射 $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \mapsto (c_1\mathfrak{q}_1, c_2\mathfrak{q}_2)$给出，其中 c_1, $c_2 \in \mathbb{H}$满足 $\Re(c_1\mathfrak{q}_1) > 0$和 $\Re(c_2\mathfrak{q}_2) > 0$。注意， $D_\ell \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 定义了 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$中的左双齐次变换 $h_{(\varepsilon^{2\ell}, \sigma(\varepsilon)^{2\ell})}$。

定义 4.4. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{B}_K$中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶。我们将 $\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 的挠幺正子群定义为由以下矩阵组成的集合

$$\mathcal{U}^1(\mathcal{O}) := \left\{ D_{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{O}^1 \right\}.$$

回顾§2.1， $\mathbb{H}^1$ 通过共轭作用在 $\mathbb{H}^0 \simeq \mathbb{R}^3$ 上进行旋转。接着，我们将 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的左双旋转定义为变换 $r_{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)} : \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} \to \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$， 它由映射 $(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \mapsto (\mathbf{u}_1\mathbf{q}_1\mathbf{u}_1^{-1}, \mathbf{u}_2\mathbf{q}_2\mathbf{u}_2^{-1})$给出，其中 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}^1$。注意，由于 $\mathcal{O}^1 \subseteq \mathbb{H}^1$ 且对于所有 $\mathbf{u} \in \mathcal{O}^1$都有 $\sigma(\mathbf{u}) \in \mathcal{O}^1$， 因此 $D_{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^1(\mathcal{O})$ 定义了 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$中的左双旋转$r_{(\mathbf{u},\ \sigma(\mathbf{u}))}$。

最后， $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的反演定义为 $(I, I) : \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}} \to \mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$，其中 I 是由矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$定义的通常反演。

定义 4.5. 设 K 为实二次域， $\mathcal{O}$ 为四元数代数 $\mathcal{B}_K$中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶。我们将与 $\mathcal{O}$ 相关联的希尔伯特-布卢门撒尔四元数模群 $\Gamma(\mathcal{O}) \subseteq \mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 定义为由 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{O})$、 $\mathcal{U}^1(\mathcal{O})$、 $\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}}$ 和 I生成的群。

备注 4. 当 $N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$, $\mathcal{O}^\times$ 可能是 $\mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1$ 的二次扩张时，在这种情况下，$\mathcal{O}^\times \simeq \mathbb{Z}_K^\times\mathcal{O}^1\langle 1+i\rangle$ 由 [23, 命题 6] 和 [14, 表 4.3, §8]可得。然而，我们不在定义 $1+i$ 中纳入 4.3，也不在定义 4.4 中纳入（因此也不纳入定义 4.5），因为在这两种情况下 $1+i$都不能生成满足 BG 条件的矩阵。

定义 4.6。设 K 是一个实二次域， $\mathcal{O}$ 是四元数代数 $\mathcal{B}_K$中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶。我们将与 $\mathcal{O}$ 相关联的希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形定义为

$$M_{\Gamma(\mathcal{O})} := \Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}.$$

5. 希尔伯特-布卢门撒尔四元数轨形的尖点形状

理解希尔伯特-布卢门撒尔四元数轨形的几何，首先要能够描述其尖点的形状。本节将遵循 [13], [15]和 [17]，描述 $M_{\Gamma(\mathcal{O})}$在 8 处的尖点。

为此，回顾一下， $(m,1)$-环面丛是一个纤维丛的全空间，其底流形为圆 $\mathbb{S}^1$， 纤维为 m-环面 $\mathbb{T}^m$。于是，如果拓扑空间 M 有一个有限覆盖空间是 $(m,1)$-环面丛，我们就称 M 为虚拟 $(m,1)$-环面丛。

如 [13, §2] 所示，可以利用实二次域的全正单位构造有趣的 (2,1)-环面丛例子。设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 为一个实二次域，其整数环为 $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$， 单位群为 $\mathbb{Z}_K^\times = \{\pm\varepsilon^\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$。为简便起见，假设 $N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1,$ ，那么 $\mathbb{Z}_{K+}^\times = \langle\epsilon\rangle$， 其中 $\epsilon = \varepsilon^2$。正如我们在 § 4.2 中所见， $\mathbb{Z}_K$通过伽罗瓦扭曲 $w \mapsto (w, \sigma(w))$，有一个离散嵌入 $\mathbb{Z}_K \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，从而在 $\mathbb{R}^2$中产生一个格 Λ。因此，考虑 $\mathbb{Z}_{K+}^\times$ 通过乘法在 $\mathbb{Z}_K$ 上的作用，我们可以将此作用扩展为 $\langle\epsilon\rangle$ 在 Λ 上的作用，方式如下

$$\varphi_\epsilon(w, \sigma(w)) := (\epsilon w, \sigma(\epsilon)\sigma(w)) = (\epsilon w, \epsilon^{-1}\sigma(w)) \tag{11}$$

并定义半直积

$$S_\epsilon(\mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}_{K+}^\times) = \Lambda \rtimes_{\varphi_\epsilon} \langle\epsilon\rangle. \tag{12}$$

由于 $\epsilon \in \mathbb{Z}_{K+}^\times$ 是全正的，通过映射 $\epsilon \mapsto \log\epsilon$ 和 $\sigma(\epsilon) \mapsto \log\sigma(\epsilon)$，我们可以将 $\mathbb{Z}_{K+}^\times$ 识别为 $\mathbb{R}$ 中秩为 1 的加法子群。这里，我们将 $\mathbb{R}$ 视为 $\mathbb{R}^2$ 中的超平面 $\log x + \log\sigma(x) = 0$， 之所以可以这样做，是因为 $\epsilon\sigma(\epsilon) = \epsilon\epsilon^{-1} = 1$。这使我们能够将 $\langle\epsilon\rangle$ 在 Λ 上的作用扩展为 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用，并表明 $S_\epsilon(\mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}_{K+}^\times)$ 自然地嵌入为可解李群 $S(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ 中的离散子群。接下来，给定正合列（半直积）

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow S_\epsilon(\mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}_{K+}^\times) \longrightarrow \langle\epsilon\rangle \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

我们得到陪集空间的商序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \longrightarrow M_\epsilon \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow 0$$

这证明了商空间

$$M_\epsilon = S_\epsilon(\Lambda, \langle\epsilon\rangle)\backslash S(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

是一个以 $\mathbb{S}^1 = \langle\epsilon\rangle\backslash\mathbb{R}$ 为底空间、以 $\mathbb{T}^2 = \Lambda\backslash\mathbb{R}^2$为纤维的(2,1)-环面丛。特别地， M_ϵ 是一个基本群为

$$\pi_1(M_\epsilon) = S_\epsilon(\mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}_{K+}^\times) \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}.$$

最后一个对应关系是通过将 $(\lambda、\ \epsilon^l) = ((\lambda_1、\ \lambda_2)、\ \epsilon^l)$ 映射到 $(\lambda_1 = \alpha + \beta\theta、\ l)$ 或 $(\lambda_2 =\alpha + \beta\sigma(\theta)、\ -l)$之一给出的。

注 5. 如果我们知道实二次域的基本单位，作用 (11) 就可以非常明确地描述。例如，设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 其整数环为 $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ，基本单位为 $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$。根据狄利克雷单位定理，我们有 $\mathbb{Z}_K^\times = \{(1 \pm \sqrt{2})^\ell : \ \ell \in \mathbb{Z}\}$ 并且，由于$N_{K/\mathbb{Q}}(1 + \sqrt{2}) = -1$, $\mathbb{Z}_{K+}^\times = \langle(1 + \sqrt{2})^2\rangle = \{(1 \pm \sqrt{2})^{2l} : l \in \mathbb{Z}\}$。现在注意，要描述 (11)，只需描述$\epsilon = (1 + \sqrt{2})^2$ 的幂对整数 $\alpha + \beta\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$的作用。于是，明确地说，我们有

$$(1 + \sqrt{2})^2(\alpha + \beta\sqrt{2}) = 3\alpha + 4\beta + (2\alpha + 3\beta)\sqrt{2},$$

它也可以通过识别 $\alpha+\beta\sqrt{2} \leftrightarrow(\alpha, \beta)^\intercal$，以矩阵形式表示为乘积 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$。

这类环面丛的重要性以及其构造的明确性，源于希尔伯特-布卢门塔尔曲面的所有尖点截面都是以这种方式构造的 (2,1)-环面丛 [13]。事实上，这使得我们能够对所有 Sol 3-流形进行分类 [15]。沿着这一思路，本节的主要目标是证明以下结果。

定理 5.1. 设 K 为一个实二次域， $\mathcal{O}$ 为四元数代数 $\mathcal{B}_K$中的一个 $\mathbb{Z}_K$-阶。那么，与 $\mathcal{O}$相关的希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形 $M_{\Gamma(\mathcal{O})}$ 在 8 处尖点的一个截面是一个虚拟的 $(6, 1)$-环面丛。

为了证明我们的结果，我们首先利用 th 构造一个合适的 $(6、\ 1)$-环面丛 e 描述 关于 $\Gamma(\mathcal{O})$ ，见§4.2。

令 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \subseteq \Gamma(\mathcal{O})$ 为 $\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 的标量酉子群，令 $\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} \subseteq \Gamma(\mathcal{O})$ 为 $\mathrm{PSL}_2^{\mathrm{BG}}(\mathcal{O})$ 中由 $\Im\mathcal{O}$ 的元素进行 $\Im\mathcal{O}$-平移所构成的子群。注意， $\mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{O})$ 通过 M¨obius 变换作用于 $\Im\mathcal{O}$

$$F_{D_\ell}(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon^\ell & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-\ell} \end{pmatrix}(b) = \varepsilon^{2\ell} b \tag{13}$$

或者等价地， $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$通过共轭作用于 $\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}}$ $D_\ell \cdot T_b \cdot D_{-\ell} = T_{2\ell b}$。将嵌入（9）限制到 $\Im\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$，我们得到一个离散嵌入 $\Im\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{H}^0 \times \mathbb{H}^0$ ，通过伽罗瓦扭曲 $b \mapsto (b, \ \sigma(b)) =\big(x_1 i + x_2 j + x_3 k, \ \ \sigma(x_1)i + \sigma(x_2)j + \sigma(x_3)k\big)$, 这给出了 Λ 中的一个格 $\mathbb{H}^0 \times \mathbb{H}^0 \cong \mathbb{R}^6$。然后，我们可以将 (13) 扩展为作用于 Λ 的作用，通过

$$\varphi_\varepsilon(D_\ell, (b, \sigma(b))) := (F_{D_\ell}(b), F_{\sigma(D_\ell)}(\sigma(b))) \tag{14}$$

并定义半直积

$$S_\varepsilon(\Im\mathcal{O}, \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})) = \Lambda \rtimes_{\varphi_\varepsilon} \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \cong \Im\mathcal{O} \rtimes \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \cong \mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} \rtimes \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \cong \mathbb{Z}^6 \rtimes \mathbb{Z}. \tag{15}$$

与经典情形一样，由于 $\varepsilon^2 \in \mathbb{Z}_{K+}^\times$，我们可以将 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 视为 $\mathbb{R}$中的一个秩为 1 的加法子群。这使我们能够将（14）扩展为 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^6$ 上的作用，并将 $S_\varepsilon(\Im\mathcal{O}, \ \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}))$ 嵌入可解李群 $S(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^6 \rtimes \mathbb{R} \cong (\mathbb{H}^0 \times \mathbb{H}^0) \rtimes \mathbb{R}$中，使其成为一个离散子群。然后，与前一个例子一样，给定正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow S_\varepsilon(\Im\mathcal{O}, \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})) \longrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(\mathbb{R}^6,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

我们得到一个由陪集空间构成的商序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{T}^6 \longrightarrow M_\varepsilon(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathbb{S}^1 = \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})\backslash\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}^6 = \Lambda\backslash\mathbb{R}^6$，这证明了以下结果。

引理 5.2。商空间

$$M_\varepsilon(\mathcal{O}) = S_\varepsilon(\Im\mathcal{O},\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}))\backslash S(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$$

是一个基本群为 $\pi_1(M_\varepsilon(\mathcal{O})) = S_\varepsilon(\Im\mathcal{O},\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})) \cong \mathbb{Z}^6 \rtimes \mathbb{Z}$ 的 (6,1)-环面丛。

与经典情形一样，13式中 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 对 $\Im\mathcal{O}$ 的作用，在已知实二次域的基本单位时，可以非常明确地描述。例如，设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 并假设 $n \not\equiv 1$模 4。在这种情况下， $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ 而 $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]^\times$ 的基本单位具有如下形式 $\varepsilon = x + y\sqrt{n}$，其中$x$， $y \in \mathbb{Z}$。众所周知， $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 对 $\Im\mathcal{O}$ 的作用由矩阵 ¨的幂所诱导的莫比乌斯作用给出，作用于形如 $b = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \Im\mathcal{O}$的元素。具体而言，由于 $x + y\sqrt{n}$ 是实数，我们有

$$\begin{pmatrix} x+y\sqrt{n} & 0 \\ 0 & (x+y\sqrt{n})^{-1} \end{pmatrix} (x_1 i + x_2 j + x_3 k) = (x+y\sqrt{n})^2 x_1 i + (x+y\sqrt{n})^2 x_2 j + (x+y\sqrt{n})^2 x_3 k$$

那么，对作用的描述可以简化为描述 $\begin{pmatrix} x+y\sqrt{n} & 0 \\ 0 & (x+y\sqrt{n})^{-1} \end{pmatrix}$在整数 $\alpha + \beta\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ 上的作用，正如经典情形那样。由于该作用由下式给出

$$(x+y\sqrt{n})^2(\alpha+\beta\sqrt{n}) = (x^2+ny^2)\alpha + 2yn\beta + (2y\alpha + (x^2+ny^2)\beta)\sqrt{n},$$

因此，它可以表示为乘积 $\begin{pmatrix} x^2+ny^2 & 2yn \\ 2y & x^2+ny^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$。由此，我们可以将 $\begin{pmatrix} x+y\sqrt{n} & 0 \\ 0 & (x+y\sqrt{n})^{-1} \end{pmatrix}$ 在 $b = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \Im\mathcal{O}$ 上的作用明确表示为乘积

$$\begin{pmatrix} (x^2+ny^2) & 2yn & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2y & (x^2+ny^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x^2+ny^2) & 2yn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y & (x^2+ny^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (x^2+ny^2) & 2yn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & (x^2+ny^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

通过利用下式给出的 $\Im\mathcal{O}$ 与 $\mathbb{Z}^6$ 之间的对应关系

$$x_1 i + x_2 j + x_3 k = (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{n})i + (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{n})j + (\alpha_3 + \beta_3\sqrt{n})k \leftrightarrow (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3,\beta_3)^\intercal.$$

正如我们将在接下来的两个例子中看到的，当 $n \equiv 1$ 模 4 时，并不存在类似（16）的一般公式，但我们可以逐个情形明确计算该作用。

例 1。设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 的整数环为 $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\theta] = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$。与前一种情况一样，要描述 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 在 $\Im\mathcal{O}$ 上的作用，可以归结为描述 $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} =$ 的 M¨obius 作用

$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ 在整数 $\alpha+\beta\theta=\alpha+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\in\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ 上。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(\alpha+\beta\theta) &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\beta\theta \\
&= \alpha+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha+\beta\theta+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta\theta \\
&= \alpha+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\beta \\
&= \alpha+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha+\beta+2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta \\
&= (\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),
\end{aligned}$$

它们生成矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，由此可得 $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ 对形如

$(\alpha_1+\beta_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))i+(\alpha_2+\beta_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))j+(\alpha_3+\beta_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))k\in\Im\mathcal{O}$ 的元素的显式作用，其形式为乘积

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\alpha_2\\\beta_2\\\alpha_3\\\beta_3\end{pmatrix}$$

例2. 设 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ 的整数环为 $\mathbb{Z}_K=\mathbb{Z}[\theta]=\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$。$\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$ 对整数 $\alpha+\beta\theta=\alpha+\beta\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\in\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ 的莫比乌斯作用由下式给出

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(\alpha+\beta\theta) &= \varepsilon^2\alpha+\varepsilon^2\beta\theta \\
&= \left(\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)\alpha+\left(\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)\beta\theta \\
&= \alpha(4+3\theta)+\beta\theta(4+3\theta) \\
&= 4\alpha+3\alpha\theta+4\beta\theta+3\beta\theta^2 \\
&= 4\alpha+3\alpha\theta+4\beta\theta+3\beta\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right) \\
&= 4\alpha+3\alpha\theta+4\beta\theta+3\beta(3+\theta) \\
&= (4\alpha+9\beta)+(3\alpha+7\beta)\theta,
\end{aligned}$$

它们给出了矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$ 在 $(\alpha_1+\beta_1\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right))i+(\alpha_2+\beta_2\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right))j+(\alpha_3+\beta_3\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right))k\in\Im\mathcal{O}$ 上的显式作用，该作用由乘积给出

$$\begin{pmatrix}4&9&0&0&0&0\\3&7&0&0&0&0\\0&0&4&9&0&0\\0&0&3&7&0&0\\0&0&0&0&4&9\\0&0&0&0&3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\alpha_2\\\beta_2\\\alpha_3\\\beta_3\end{pmatrix}.$$

定理的证明 *5.1*。 正如我们在第一节中看到的 节

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}^1_{\mathbb{H}}}}(\infty) = \mathcal{A}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3 \rtimes (\mathbb{R}^+ \times O(3)).$$

于是， $\Gamma(\mathcal{O})$ 中固定 8 的平移集合为 $\mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} \cong \Im\mathcal{O}$， $\Gamma(\mathcal{O})$ 中的位似变换集合为 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \cong \mathbb{Z}_{K+}^\times$，而 $\Gamma(\mathcal{O})$ 中固定 0 和 8 的旋转集合为 $\mathcal{U}^1(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}^1$。因此，

$$\mathrm{Stab}_{\Gamma(\mathcal{O})}(\infty) = \mathcal{A}(\mathcal{O}) := \mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} \rtimes (\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \times \mathcal{U}^1(\mathcal{O})) \cong \Im\mathcal{O} \rtimes (\mathbb{Z}_{K+}^\times \times \mathcal{O}^1).$$

我们可以定义轨形 $M_{\mathcal{A}(\mathcal{O})} := \mathcal{A}(\mathcal{O})\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$，它在 (∞,∞) 的一个小邻域内与 $M_{\Gamma(\mathcal{O})}$ 重合。

另一方面，考虑子群 $\Delta(\mathcal{O}) := \mathcal{T}_{\Im\mathcal{O}} \rtimes \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O}) \cong \Im\mathcal{O} \rtimes \mathbb{Z}_{K+}^\times$，我们可以定义 $M_{\Delta(\mathcal{O})} := \Delta(\mathcal{O})\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$。注意，$M_{\Delta(\mathcal{O})}$ 可以与 $M_\varepsilon(\mathcal{O}) \times \mathbb{R}^+$ 相识别，其中 $M_\varepsilon(\mathcal{O})$ 是引理 5.2 中定义的 (6,1)-环面丛。因此，由于 $[\mathcal{A}(\mathcal{O}) : \mathcal{U}^1(\mathcal{O})]$ 是有限的，我们有 $M_\varepsilon(\mathcal{O})$ 给出了 ∞ 处尖点截面的有限覆盖，该尖点属于 $M_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}$，这就证明了结论。 □

注记 6。与 [11] 中所述的轨形不同，希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形的完整描述仍远非我们力所能及。主要原因是$\mathcal{O}^\times$ 在 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{H}}$ 中的单位元作用十分复杂。一方面，有限挠幺子群 $\mathcal{U}^1(\mathcal{O})$ 通过旋转起作用，这与经典比安基模轨形 [12, §7.3] 的情形相同，也与 [11] 中研究的利普希茨和赫维茨模轨形的情形相同。另一方面，标量酉子群 $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{O})$ 通过位似变换起作用，这与经典希尔伯特-布卢门塔尔曲面 [17] [22] 的情形相同。因此，我们在希尔伯特-布卢门塔尔四元数轨形中发现了经典比安基轨形与希尔伯特-布卢门塔尔曲面相混合的情形。因此，要完整描述 $M_{\Gamma(\mathcal{O})}$，就必须处理这两类几何对象通常各自带来的复杂问题，并将二者结合起来。

参考文献

[1] Lars V. Ahlfors。《多维莫比乌斯变换》。奥德韦数学讲席演讲。明尼阿波利斯，明尼苏达州：明尼苏达大学数学学院。150页。4.45美元（1981年），1981年。[2] Lars V. Ahlfors。《莫比乌斯变换与克利福德数》，第65–73页。施普林格，柏林海德堡，柏林、海德堡，1985年。[3] S.aban Alaca 和 Kenneth S. Williams。《代数数论导论》。剑桥：剑桥大学出版社，2004年。[4] Roger C. Alperin。《塞尔伯格引理浅释》。《数学教学》（第2辑），33：269–273，1987年。[5] Luigi Bianchi。《具有整数复系数的线性代换群的几何表示及其在数论中的应用》。《数学年刊》，38(3)：313–333，1891年。[6] Luigi Bianchi。《关于系数属于虚二次域的线性代换群》。《数学年刊》，40(3)：332–412，1892年。[7] Cinzia Bisi 和 Graziano Gentili。《四元数情形下的莫比乌斯变换与庞加莱距离》。《印第安纳大学数学杂志》，58(6)：2729–2764，2009年。.[8] O. Blumenthal。《多变量模函数》（第一部分）。《数学年刊》，56：509–548，1903年。[9] O. Blumenthal。《多变量模形式》（第二部分）。《数学年刊》，58：497–527，1904年。[10] Fred Diamond 和 Jerry Shurman。《模形式初阶》，研究生数学教材第228卷。柏林：施普林格，2005年。[11] Juan Pablo D´ıaz、Alberto Verjovsky 和 Fabio Vlacci。《四元数克莱因模群与四元数上的算术双曲轨形》。《几何专论》，192：127–155，2018年。

[12] J. Elstrodt、F. Grunewald 和 J. Mennicke。《作用于双曲空间的群：调和分析与数论》。施普林格数学专著。柏林：施普林格，1998年。[13] Friedrich E. P. Hirzebruch。《希尔伯特模曲面》。《数学教学》（第2辑），19：183–281，1973年。[14] Qun Li、Jiangwei Xue 和 Chia-Fu Yu。《实二次域上全定四元数代数的极大阶之单位群》。《美国数学会汇刊》，374(8)：5349–5403，2021年。[15] DB McReynolds。《希尔伯特模簇的尖点》。载于《剑桥哲学学会数学学报》第144卷，第749–759页。剑桥大学出版社，2008年。[16] J¨urgen Neukirch。《代数数论》。Norbert Schappacher 从德文译出，数学科学基础丛书第322卷。柏林：施普林格，1999年。[17] Joseph Quinn 和 Alberto Verjovsky。《希尔伯特-布卢门撒尔曲面的尖点形状》。《几何专论》，206：27–42，2020年。[18] Pierre Samuel。《数的代数理论》（第二、第三周期）。巴黎：Hermann，2003年。[19] Atle Selberg。《高维对称空间中的不连续群》。函数论国际研讨会论文集，孟买，1960年1月，147–164页（1960年），1960年。[20] Arseniy (Senia) Sheydvasser。《扭曲欧几里得算法：在数论与几何中的应用》。《代数杂志》，569：823–855，2021年。.[21] K. Th. Vahlen。《运动与复数》。《数学年刊》，55：585–593，1902年。[22] Gerard Van Der Geer。《希尔伯特模曲面》，第16卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[23] Marie-France Vign´eras。《全定四元数体之阶的简化》。《纯粹与应用数学杂志》，286/287：257–277，1976年。[24] Marie-France Vign´eras。《四元数代数算术》，数学讲义第800卷。施普林格，查姆，1980年。[25] John Voight。《四元数代数》，研究生数学教材第288卷。查姆：施普林格，2021年。