arXiv:2303.11532v1 [math.LO] 21 Mar 2023

将实数轴分解为处处同构的子序

GARRETT ERVIN

Abstract. 我们证明，若 $\mathbb{R} = A \cup B$ 将 $\mathbb{R}$ 划分为两个子序 A和 B，那么存在一个开区间 I，使得 $A \cap I$与 $B \cap I$不同构。证明依赖于 $\mathbb{R}$的完备性。与此相对，我们证明存在对无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = A \cup B$ 的一种划分，使得对于每个开区间 I，$A \cap I$ 都与 $B \cap I$ 同构。我们不知道是否存在将 $\mathbb{R}$ 划分为三个子序的方法，使它们在每个开区间内都同构。

1. Introduction

设 A 和 B 是 $\mathbb{R}$的两个不相交子集，将它们视为$(\mathbb{R}, <)$的子序。若对于每个开区间 $I = (a, b)$，都有 $A \cap I$与 $B \cap I$序同构，则称 A 和 B 处处同构。此定义允许 $a = -\infty$ 和 $b = \infty$，因此，若 A 和 B 处处同构，那么它们作为线性序也同构。

如果 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的两个不相交可数子集，且它们在 $\mathbb{R}$ 中都稠密，那么 A 和 B 处处同构，因为对每个开区间 I，都有 $A \cap I \cong B \cap I \cong \mathbb{Q}$。这是由康托尔定理得出的：每个无端点可数稠密线性序都与有理数 [1, 序同构，见第 122] 页。例如，$\mathbb{Q}$ 及其平移 $\mathbb{Q} + \sqrt{2} = \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$ 处处同构。

处处同构集也有不可数实例。事实上，对于任意无限基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$，都可以在 $\mathbb{R}$ 中找到两个大小为 κ 的不相交子集 A 和 B，使它们处处同构。下文将介绍构造这类集合的一种方法，并进一步证明它们作为线性序可以是齐次的。

既然存在满足$|A| = |B| = 2^{\aleph_0}$ 的处处同构集 A 和 B，自然会问 $\mathbb{R}$ 能否划分为处处同构的“半集”，也就是说，是否存在两个处处同构的集合，其并集为 $\mathbb{R}$。我们的主要结果是，不存在这样的划分。

定理 1. 如果 $\mathbb{R} = A \cup B$ 是 $\mathbb{R}$的一个划分，那么存在一个开区间 I，使得 $A \cap I$与 $B \cap I$不同构。

存在许多划分 $\mathbb{R} = A \cup B$，使得 A 和 B 整体上同构。例如，令 A 为所有满足 $n \in \mathbb{Z}$ 的半开区间 $[2n, 2n + 1)$ 的并集，并令 B 为区间 $[2n + 1, 2n + 2)$ 的并集。那么 $x \mapsto x + 1$ 就定义了一个从 A 到 B 的序同构。当然，这些 A 和 B 并非处处同构，因为对于任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意开区间 $I \subseteq [n, n + 1)$，集合 $A \cap I$ 和 $B \cap I$ 中必有一个为空。对这个例子稍作变化，就能将 $\mathbb{R}$ 划分为两个整体上同构的集合，它们在 $\mathbb{R}$ 中都稠密，甚至在每个开区间内都有相同的基数。然而，定理 1 表明，不存在能使它们在每个开区间内都同构的构造。

定理 1 的证明以 $(\mathbb{R}, <)$ 的完备性为关键。如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的一个子序，且包含一个（完备的）开区间 I，那么将 $X = A \cup B$ 划分为两个处处同构集合的任何划分，都会导出将 I 划分为两个处处同构集合的划分。由于 I 与 $\mathbb{R}$ 同构，这又会导出将 $\mathbb{R}$ 划分为两个处处同构集合的划分，而这由定理 1 可知是不可能的。$\mathbb{R}$ 中不含开区间的最大子序，是通过从 $\mathbb{R}$ 中删去某个可数稠密子集而得到的。这些是可能被分解为两个处处同构集合的最大子序。由于任何这样的子序都与无理数集 $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 同构，我们可以具体地问：是否存在一个划分 $\mathbb{I} = A \cup B$，使得 A 和 B 处处同构？我们将证明，与 $\mathbb{R}$ 的情形相反，$\mathbb{I}$ 确实存在这样的划分。

定理 2。存在无理数集的一个划分 $\mathbb{I} = A \cup B$，使得 A 和 B 处处同构。

定理 1 的证明也依赖于这样一个事实：我们考虑的是将 $\mathbb{R}$ 划分为两部分。我们不知道是否能将 $\mathbb{R}$ 划分为 n 个处处同构的集合，其中某个 $n > 2$ 满足条件。

问题。是否存在一个划分 $\mathbb{R} = A \cup B \cup C$，使得对于每个开区间 I，都有 $A \cap I \cong B \cap I \cong C \cap I$?

我们的记号和术语大多是标准的。对于线性序 X 和 Y，如果 X 与 Y 序同构，我们记作 $X \cong Y$。开区间是线性序的一个凸子集，其中既没有最大元，也没有最小元。如果 X 是完备线性序（例如，如果 $X = \mathbb{R}$），那么 X 的每个开区间都可写成 (a, b)、(a, ∞)、$(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, \infty)$ 的形式，其中 a、$b \in X$ 满足条件。但如果 X 有间隙，那么它就会有无法用 X 中的端点表示的开区间。若线性序 X 中任意两个不同的点之间都存在第三个点严格位于它们之间，则称 X 是稠密的。若线性序 X 的子序 Y 满足：对于 X 中任意两个不同的点，要么它们都属于 Y，要么它们之间有一个点属于 Y，则称 Y 在 X 中稠密。由于 $\mathbb{R}$ 作为线性序是稠密的，因此 $\mathbb{R}$ 的任何在 $\mathbb{R}$ 中稠密的子序 Y，作为线性序也同样稠密。

致谢。衷心感谢 Jackie Ferry，没有她，这篇论文或许永远无法顺利完成；也感谢 J¨urgen Kritschgau 和 Alexander Kechris 提供的许多宝贵意见和建议。

2. Proof of Theorem 1

反设存在一个划分 $\mathbb{R} = A \cup B$，使得对于每个开区间 I，都存在一个序同构 $f_I \colon A \cap I \to B \cap I$。那么，特别地，$A$ 和 B 都在 $\mathbb{R}$ 中稠密，因为它们与每个开区间都有交集。对于给定的开区间 I，由于 f_I 是从 I 的稠密子集到 I的稠密子集上的保序双射，因此可以将其唯一延拓为 I 的序自同构。我们将 f_I 与此延拓等同。于是，由于 $A \cap I$ 和$B \cap I$ 划分了 I 和 $f_I[A \cap I] = B \cap I$，因此也必有 $f_I[B \cap I] = A \cap I$。也就是说，f_I 交换了不相交的同构子序 $A \cap I$ 和 $B \cap I$，同时保持 I 的序。

由于 f_I 没有不动点，给定 $x \in I$，我们有：要么 $x < f_I(x)$，要么 $x > f_I(x)$。在第一种情况下，由于 f_I是保序的，因此对所有 $n \in \mathbb{Z}$，必有 $f_I^n(x) < f_I^{n+1}(x)$。也就是说，我们有

$$\ldots < f_I^{-2}(x) < f_I^{-1}(x) < x < f_I(x) < f_I^2(x) < \ldots.$$

此外，非负迭代构成的递增序列 $f_I^n(x)$ $n \geq 0$ 在 I 中必定向右无界。因为如果该序列有界，使得点 $y = \lim_{n\to\infty} f_I^n(x)$ 属于 I，那么根据 f_I 的连续性，我们就有 $f_I(y) = y$，但这种可能性已被排除。同样，负迭代序列 $f_I^n(x)$ $n < 0$ 在 I 中必定向左无界。由此可知，由于 f_I 保序，它在整个 I 上递增，即对所有 $y \in I$，$y < f_I(y)$。

另一方面，也可能有 $x > f_I(x)$。在这种情况下，对称地有

$$\ldots < f_I^2(x) < f_I(x) < x < f_I^{-1}(x) < f_I^{-2}(x) < \ldots.$$

x 的正迭代和负迭代序列在 I 中分别向左和向右无界，因此 f_I 在整个 I上递减。但此时，逆映射 f_I^{-1} 在 I上递增，而且该映射也是 I 的一个序自同构，它交换集合 $A \cap I$和 $B \cap I$。因此，必要时用 f_I的逆映射替换它，我们可以假设所有 f_I 都递增。

注意，对于任意开区间 I和 $x \in I$，迭代序列中的点

$$\ldots < f_I^{-2}(x) < f_I^{-1}(x) < x < f_I(x) < f_I^2(x) < \ldots$$

交替属于 A 或 B: $f_I^n(x) \in A$ 当且仅当 $f_I^{n+1}(x) \in B$。因此，若 J 是一个与 I 相交且包含 $x \in I \cap J$的区间，那么 x在 f_I 作用下的某个迭代不可能等于 x在 f_J 作用下奇偶性不同的某个迭代。事实上，若存在某个k、$l \in \mathbb{Z}$，使得 $k \neq l$(模 2)，且有一点 z满足 $z = f_I^k(x) = f_J^l(x)$，那么z 就会同时属于 A 和 B，这是不可能的。

我们将找到这样的 z，从而得到矛盾。设 K 是一个固定的开区间。我们用 f 表示自同构 f_K。固定 $x \in K$，然后固定区间 $(f^{-1}(x)\ x)$ 内的一点 y。令 I 表示开区间 $(y, f^2(x))$。我们将自同构 f_I 记作 g。

由于迭代序列 $x < g(x) < g^2(x) < \ldots$ 在 I 中向右无界，因此存在唯一的 $n \geq 0$ 使得 $g^n(x) < f(x) \leq g^{n+1}(x)$。令 J 表示闭区间 $[g^n(x)\ f(x)]$。（这里考虑闭区间较为方便，因为我们马上要应用介值定理。）于是， J 是区间 $[g^n(x)\ g^{n+1}(x)]$ 的初始段，也是区间 $[x, f(x)]$的末段。因此， $f[J] = [f(g^n(x))\ f^2(x)]$ 是 $[f(x)\ f^2(x)]$的末段。由于 $f^2(x)$ 是 I 的右端点，我们有 $f[J]$ 也是 $I \cup \{f^2(x)\}$ 的末段。对于所有充分大的 k，必有 $g^k(x) \in f[J]$，因为这些迭代在 I 中向右无界。因此，对于所有充分大的 k，区间$g^k[J] = [g^{n+k}(x)\ g^k(f(x))]$ 都是 $f[J]$ 的子区间。

取一个足够大的偶整数 N，使得 $g^N[J]$ 是 $f[J]$的有界子区间；也就是说，$g^N[J]$ 的左端点严格大于 $f[J]$的左端点。我们总有 $g^N[J]$ 的右端点严格小于 $f[J]$的右端点，因为这个端点与 I 的右端点相同。这些映射在 J 上连续，因此它们的差 $f - g^N$ 也连续。由于 $f - g^N$ 在 J 的左端点处为负，在右端点处为正，根据介值定理，必定存在一个内点 $c \in J$，使得 $(f - g^N)(c) = 0$，从而得到 $f(c) = g^N(c)$。无论 c 属于 A 还是 B，我们都有 $f(c)$ 属于另一个集合；而根据 N 的偶性，$g^N(c)$ 属于与 c 相同的集合。但是 $f(c) = g^N(c)$，这与 $A \cap B = \emptyset$ 矛盾。□

我们注意到，定理 1 的结论更一般地适用于任意稠密完备线性序（L，$<$），因此，若 $A \cup B$ 是这样一个序的划分，

则必存在一个开区间，使得 A 和 B 在该区间上的限制不同构。若 L 不嵌入 ω_1 或其逆序，则基本上可以用与证明 $\mathbb{R}$ 相同的论证来证明这一点。若 L 确实嵌入 ω_1 或其逆序，则结论成立的原因有所不同。在这样的 L 中，总存在一个开区间 I，其中含有一个不可数无界单调序列。此类区间上的任何自同构都必有一个不动点，这使得 I 无法分割成两个同构子序，且二者在 I 中都稠密。

$\mathbb{R}$ 的完备性在证明中有几处用到，其中最重要的是保证每个迭代序列 $f_I^n(x)$ 在 I 中双向无界；此外，还以介值定理的形式再次用到它，从而在 $A \cap B$ 中得到一个点。如果我们对一个每个区间都存在间隙的线性序进行划分，就无法采取相应的步骤。事实上，我们将在下一节证明，无理数集可以分解为两个处处同构集。

证明也无法加以改造，以排除这样一种三集划分 $\mathbb{R} = A \cup B \cup C$ 的存在：其限制 $A \cap I$、$B \cap I$ 和 $C \cap I$ 在每个开区间 I 上两两同构。可以断言的是，不存在这样一种划分，使得同构 $A \cap I \cong B \cap I \cong C \cap I$ 对每个 I 都能同时由同一个自同构 $f_I : I \to I$ 见证。例如，若我们总有 $f_I[A \cap I] = B \cap I$ 和 $f_I[B \cap I] = C \cap I$，便能得到类似的矛盾。但这并未排除这样一种划分的可能性：例如，我们有两个同构 $f_I : A \cap I \to B \cap I$ 和 $g_I : B \cap I \to C \cap I$，它们在 I 上的延拓是 I 的两个不同自同构，对每个 I 都成立。我们猜想这样的划分确实存在。

3. Proof of Theorem 2

我们称子序 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为齐次的，如果对于每个开区间 I，都有 $X \cong X \cap I$。

例如，$\mathbb{R}$ 的任意可数稠密子集 X 都是齐次的，因为根据康托尔定理，对于每个开区间 I，都有 $X \cong X \cap I \cong \mathbb{Q}$。特别地，$\mathbb{Q}$ 是齐次的。事实上，对于任意无限基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$，都存在大小为 κ 的齐次子序 $X \subseteq \mathbb{R}$。实际上，这类序有很多种；在证明定理 2 的过程中，我们将介绍一种构造它们的方法。

我们的目标是将无理数集 $\mathbb{I} = A \cup B$ 划分为处处同构的集合 A 和 B。实际上，我们将给出这样一种分解，其中 A 和 B 都是齐次的。也就是说，对于每个开区间 I，都有 $A \cong A \cap I \cong B \cap I \cong B$。（我们强调，我们会对每个开区间 $I = (a, b)$ 且满足 $a, b \in \mathbb{R}$ 的情形都做到这一点，而不仅仅是对满足 $a, b \in \mathbb{I}$ 的情形。）

之所以要寻求将其划分为齐次集，是因为这有助于减少为证明处处同构而必须找到的同构的数量。因为如果 A 是齐次的，那么就存在一族序同构 $f_I : A \to A \cap I$，作为这种齐次性的见证。将这些映射与它们在 $\mathbb{R}$ 上的唯一延拓视为同一映射，于是对于每个满足 $f_I[A] = A \cap I$ 的开区间 I，$f_I : \mathbb{R} \to I$ 都是序同构。如果我们还对每个 I 都有 $f_I[B] = B \cap I$（正如我们将要安排的那样），那么要证明 A 和 B 处处同构，只需找到一个全局同构 $g : A \to B$。于是我们得到同构 $g_I : A \cap I \to B \cap I$，其中 $g_I = f_I \circ g \circ f_I^{-1}$，从而对每个 I 都有 $A \cap I \cong B \cap I$。

我们不会直接处理无理数集 $\mathbb{I}$，而是处理与之同构的线性序 $\mathbb{Z}^\omega$。这样做的原因是，我们将利用 $\mathbb{Z}^\omega$ 的有序群结构来定义全局同构 g。这里，$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 是自然数集，而 $\mathbb{Z}^\omega$ 是由序列 $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots)$ 组成的集合，其中对每个 $i \in \omega$ 都有 $u_i \in \mathbb{Z}$。$\mathbb{Z}^\omega$ 上的序采用字典序：对于不同的 u、$v \in \mathbb{Z}^\omega$，当且仅当 $u_n < v_n$ 时有 $u < v$，其中 n 是 ω 中满足 $u_n \neq v_n$ 的最小整数。众所周知，$\mathbb{Z}^\omega$ 与 $\mathbb{I}$ 序同构；不过，鉴于接下来的论述中查看证明会有所帮助，我们在此略述证明。

断言：$\mathbb{I} \cong \mathbb{Z}^\omega$。

证明。对于一个没有端点的稠密线性序 X，记其戴德金完备化为$\overline{X}$，即通过在 X 的每个间隙中填入一个点而得到的序。进行完备化时，我们不添加顶端点或底端点。

戴德金完备化是完备的，也就是说，$\overline{X}$ 中的每个有界单调序列都收敛到 $\overline{X}$中的一个点。在同构意义下，$\overline{X}$ 是唯一一个包含 X 作为稠密子序的完备线性序（无端点）。此外，对于任何在 $\overline{X}$ 中稠密的$Y \subseteq \overline{X}$，都有 $\overline{Y} = \overline{X}$。因此，如果我们能找到一个完备的序 R（无端点），且包含 $\mathbb{Z}^\omega$ 作为稠密子序，那么必有 $R \cong \overline{\mathbb{Z}^\omega}$。我们将在下文定义这样一个 R。此外，如果我们能证明差集 $Q = R \setminus \mathbb{Z}^\omega$ 在 R 中稠密且与 $\mathbb{Q}$同构，那么必有$R = \overline{Q}$ 与 $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$同构，且 $R \setminus Q = \mathbb{Z}^\omega$ 与 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$同构。

令 $\mathbb{Z}^{<\omega}$ 表示由 $u_i \in \mathbb{Z}$ 中元素构成的非空有限序列 $r = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ 的集合。令 $R = \mathbb{Z}^\omega \cup \mathbb{Z}^{<\omega}$。我们按以下规则对 R 排序：对于不同的 $u, v \in R$，若存在一个指标 i，使得 $u_i \neq v_i$，且对于最小的此类 i，有 $u_i < v_i$；或者 v 是有限序列，且 u 将 v 扩展为更长的有限序列或无限序列，则 $u < v$。不难验证，该规则对 R 给出了线性序，并且 $\mathbb{Z}^\omega$ 和 $\mathbb{Z}^{<\omega}$ 在 R 中都稠密。

我们进一步断言，R 是完备的。由于 $\mathbb{Z}^\omega$ 在 R 中稠密，只需验证 $\mathbb{Z}^\omega$ 中每个有界单调序列都收敛到 R 中的一个点。若 $u^0 < u^1 < u^2 < \ldots$ 是 $\mathbb{Z}^\omega$ 中的递增序列，其中 $u^i = (u^i_0, u^i_1, \ldots)$，那么第一坐标 u^i_0 要么在 $\mathbb{Z}$ 中无界，此时该序列在 $\mathbb{Z}^\omega$ 中无界；要么最终稳定，也就是说，存在一个 $v_0 \in \mathbb{Z}$，使得对所有充分大的 i，都有 $u^i_0 = v_0$。在第二种情形下，同样有两种可能：第二坐标 u^i_1 要么在 $\mathbb{Z}$ 中无界，此时该序列收敛到点 $(v_0) \in \mathbb{Z}^{<\omega}$；要么也最终稳定，也就是说，存在 v_1，使得对所有充分大的 i，都有 $u^i_1 = v_1$。在后一种情形下，同样可得，该序列要么收敛到点 $(v_0, v_1) \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，要么第三坐标 u^i_2 最终稳定于 v_2。如此继续下去，我们要么在某个有限阶段找到一个点 $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，使序列收敛于此；要么其所有坐标最终都稳定，此时序列收敛到点 $(v_0, v_1, \ldots) \in \mathbb{Z}^\omega$。同样可以验证，有界递减序列也必定收敛（不过在这种情况下，若该序列收敛到 $\mathbb{Z}^{<\omega}$ 中的一个点，它必定具有形式 $(v_0, v_1, \ldots, v_n - 1)$）。因此，$R$ 是完备的，断言得证。

由于 $\mathbb{Z}^{<\omega}$ 是可数的，没有最大元也没有最小元，并且（作为 R中的稠密子集）按线性序也是稠密的，因此我们有 $\mathbb{Z}^{<\omega} \cong \mathbb{Q}$。由此可得 $\overline{\mathbb{Z}^{<\omega}} \cong \mathbb{R}$ 和$\overline{\mathbb{Z}^{<\omega}} \setminus \mathbb{Z}^{<\omega} \cong \mathbb{I}$。但是，根据上文和 $R \setminus \mathbb{Z}^{<\omega} = \mathbb{Z}^\omega$，有 $\overline{\mathbb{Z}^{<\omega}} = R$，从而得到 $\mathbb{Z}^\omega \cong \mathbb{I}$。□

我们将把定理 2 所述的处处同构子序 A 和 B 构造为 $\mathbb{Z}^\omega$中彼此不相交的子序。最后，我们得到的不会是$A \cup B = \mathbb{Z}^\omega$，而是 $A \cup B = \mathbb{Z}^\omega \setminus C$，其中 C 是 $\mathbb{Z}^\omega$的某个可数子集。不过，删去一个可数点集不会改变无理数的序型，因为删去之后，它在实数中的补集虽然增加了可数多个点，却仍然是可数且稠密的，因此同构于 $\mathbb{Q}$。因此，我们将成功得到所需的分解，因为$A \cup B = \mathbb{Z}^\omega \setminus C \cong \mathbb{I} \setminus C \cong \mathbb{I}$。

我们引入一些记号来处理序列。我们用 $u, v, \ldots$ 表示无限序列（ $\mathbb{Z}^\omega$的元素），用 $r, s, \ldots$ 表示有限序列（ $\mathbb{Z}^{<\omega}$的元素），并用$n, m, \ldots$ 表示 $\mathbb{Z}$的元素。有时我们把 $\mathbb{Z}$ 的元素视为长度为 1 的序列，并认为 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}^{<\omega}$的子集。如果 r 是有限序列，而 u 是有限序列或无限序列，我们用 ru 表示将 r 与 u连接得到的序列。对于写成连接形式 $v = ru$的序列 v ，我们称 r 是 v的初始序列，而 u 是尾序列。

对于序列 $u, v \in \mathbb{Z}^\omega$ ，我们称 u 和 v 尾等价，并记作 $u \sim v$ ，如果存在有限序列 $r, s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 和一个无限序列 $u' \in \mathbb{Z}^\omega$ ，使得$u = ru'$ 且 $v = su'$。我们强调，在这个定义中， r 和 s 不必长度相同。尾等价是 $\mathbb{Z}^\omega$上的一种等价关系。我们用 $[u]$ 表示给定 $u \in \mathbb{Z}^\omega$ 的等价类。可以验证， $[u]$ 恰好是形如 ru'的序列所组成的集合，其中 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 是任意有限序列，而u' 是 u的尾序列。由于 u 的尾序列 u' 只有可数多个，且 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$也只有可数多个，因此每个尾等价类都是可数的。由于这些等价类将 $\mathbb{R}$ 划分为可数集，等价类的数量为 $2^{\aleph_0}$。

若 u 和 v 尾等价，我们称分解 $u = ru'$ 和 $v = su'$ 是 u 和 v 的相遇表示。相遇表示并不唯一，因为我们总可以沿着尾序列 u' 进一步拆分，从而得到新的表示。也就是说，若我们将 $u' = tu''$ 写作 u' 的某个初始序列 t ，那么 $u = rtu''$ 和 $v = stu''$ 也是 u 和 v 的相遇表示，只不过现在对应的是尾序列 u'' ，而非 u'。

对于 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，令 I_r 表示 $\mathbb{Z}^\omega$ 中以 r 开始的序列集合，因此 $u \in I_r$ 当且仅当存在 $u' \in \mathbb{Z}^\omega$ 使得 $u = ru'$。作为 $\mathbb{Z}^\omega$ 的子集，每个 I_r 都是一个开区间，我们称之为标准区间。 I_r 的端点不属于 $\mathbb{Z}^\omega$，而属于其完备化 $R = \mathbb{Z}^\omega \cup \mathbb{Z}^{<\omega}$: 若 $r = (u_0、u_1、\ldots\ldots、u_n)$ ，并令 $r' = (u_0、u_1、\ldots\ldots、u_n - 1)$ ，则 I_r 恰好是开区间（r'， r）。更严格地说，由于我们只将 I_r 视为 $\mathbb{Z}^\omega$ 的子集，它是 $\mathbb{Z}^\omega$ 中位于 r' 和 r 之间的点集。注意，对于两个有限序列 r 和 s，若 r 按字典序小于 s，则 I_r 完全位于 I_s 的左侧；而若 r 扩展了 s ，则 I_r 是 I_s 的子区间。

令 f_r 表示到 I_r 的投影，定义为对所有 $u \in \mathbb{Z}^\omega$， $f_r(u) = ru$ 。不难验证， f_r 是 $\mathbb{Z}^\omega$ 到 I_r 的序同构。由于对所有 r， $s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，我们有 $f_r \circ f_s = f_{rs}$，因此所有的 f_r 都可以写成投影 f_n （ $n \in \mathbb{Z}$）的迭代复合。

投影 f_r 与尾等价关系密切相关。我们断言，对于固定的 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 和 $u \in \mathbb{Z}^\omega$ ，有 $f_r[[u]] = [u] \cap I_r$。也就是说，每个f_r 都见证了尾等价类 $[u]$ 与其在 I_r上的限制序同构。如果 $v \in [u]$，使得对于某个有限序列 s 和 u的某个尾序列u' ，有 $v = su'$ ，那么 $f_r[v] = rv = rsu'$ 也与 u尾等价，从而得到正向

包含。另一方面，如果 $w \in [u] \cap I_r$，注意到 w 可以写成$w = rsu'$，其中 s 是某个有限序列，而 u' 是 u的尾序列。（要将 w 写成这种形式，我们可能需要沿着给定的、表示u 和 w的相遇表示的尾序列进行拆分，但这没有问题。）于是我们有 $f_r[su'] = w$，又因为 $su' \in [u]$，这就给出了反向包含。因此，如果 X 是 $\mathbb{Z}^\omega$ 的一个对子序，且对尾等价封闭（也就是说，X 是尾等价类的并），那么对于每个 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，都有 $f_r[X] = X \cap I_r$。

我们注意到，反过来，如果对每个 r 都有 $f_r[X] = X \cap I_r$，那么 X 在尾等价下封闭。这一点不难验证；由于我们的构造不会用到它，就留给读者自行证明。因此，尾等价类是 $\mathbb{Z}^\omega$ 中在所有 f_r 下保持不变的最小子序。

我们的目标是构造 $\mathbb{Z}^\omega$ 的子序 A 和 B，使它们除了处处同构之外，还具有齐次性。为了得到齐次性，我们将安排 A 和 B 都是尾等价类的并。根据我们刚才证明的结果，这就保证了对形如 $I = I_r$ 的每个区间，$A \cong A \cap I$ 和 $B \cong B \cap I$。事实证明，这足以确保对每个开区间 I，$A \cong A \cap I$ 和 $B \cong B \cap I$。

断言：设 $X \subseteq \mathbb{Z}^\omega$ 在尾等价下封闭，因此对每个 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 都有 $X \cong X \cap I_r$。那么 X 是齐次的。

在证明该断言时，我们将讨论序的片段和序和。线性序 X 的初始段 I 是 X 中的一个向左无界区间；也就是说，若 $y \in I$ 且 $x < y$，则 $x \in I$。末段 J 是初始段的补集，或者等价地说，是一个向右无界的区间。

我们将用到以下事实，该事实归功于林登鲍姆（[2], 或参见 [3, 第 248]页）：若L 和 M 是线性序，且 L 同构于 M的一个初始段，M 同构于 L的一个末段，那么 L 同构于 M。我们将在下文证明林登鲍姆定理的一个精化版本。

给定线性序 L_0 和 L_1，我们用 $L_0 + L_1$ 表示这样一个序（在同构意义下唯一）：它可以划分为一个同构于 L_0的初始段，以及相应的、同构于 L_1的末段。我们还考虑更长的序和$L_0 + L_1 + \ldots + L_n$，甚至是无限序和，例如 ω-和。

$$L_0 + L_1 + L_2 + \ldots,$$

或 ω^* 和

$$\ldots + L_2 + L_1 + L_0,$$

或 $\mathbb{Z}$ 和

$$\ldots + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2 + \ldots.$$

如果所有序 L_i 都同构于同一个序 L，那么我们用 nL 表示n和，用 ωL 表示 ω和，用 $\omega^* L$ 表示 ω^*和，并用 $\mathbb{Z}L$ 表示 $\mathbb{Z}$和。

形式上，我们将两个序 XY 的积视为它们底集的笛卡尔积 $X \times Y$，并按照以下规则按字典序排列：若 $x < x'$，或若 $x = x'$且 $y < y'$，则 $(x, y) < (x', y')$。例如，$\omega L = \{(n, l) : n \in \omega, l \in L\}$，按字典序排列。

断言的证明。对于 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，我们将 X_r 写作 $X \cap I_r$。序 I_n、$n \in \mathbb{Z}$,

将划分 $\mathbb{Z}^\omega$ 为 $\mathbb{Z}$ 个自身的副本。由于对于每个 n，都有 $X \cong X_n$，因此 X_n 划分 X 为 $\mathbb{Z}$ 个自身的副本。也就是说，我们有 $X \cong \mathbb{Z}X$。

我们断言，$X \cong \omega X$。一方面，X 同构于 ωX的一个初始段，即其在 ω和中的初始副本。另一方面，ωX 自然同构于 $\mathbb{Z}X$的右半部分，而它是 $\mathbb{Z}X$的一个末段。但 $\mathbb{Z}X$ 同构于 X，因此 ωX 同构于 X的一个末段。根据林登鲍姆定理，我们得到 $X \cong \omega X$，如所断言。

我们也可以类似地证明 $X \cong \omega^* X$。然后，将 $\mathbb{Z}X$ 分成左半部分和右半部分，我们得到 $\mathbb{Z}X \cong \omega^* X + \omega X$，由此得到$\mathbb{Z}X \cong 2X$，进而得到$X \cong 2X$。反复应用最后这个恒等式，也可得到 $n \geq 3$ 对应的$X \cong nX$。

恒等式 $X \cong \mathbb{Z}X \cong \omega X \cong \omega^* X \cong nX$ 使我们能够证明，对于任意开区间 I，都有$X \cong X \cap I$；方法是证明 $X \cap I$可以写成有限个项的和，其中每一项都同构于这些序之一。为此，我们根据端点分析 $\mathbb{Z}^\omega$ 中开区间的形式，并记住这些端点可能位于 $\mathbb{Z}^{<\omega}$中。我们先分析无界区间，因为它们由单个端点决定。

假设 I 是在 $\mathbb{Z}^\omega$中向右无界的开区间，因此 I 是 $\mathbb{Z}^\omega$的末段。我们假设 I 也不是初始段，即 $I \neq \mathbb{Z}^\omega$。有两种可能。要么对于某个 $u \in \mathbb{Z}^\omega$，$I = (u, \infty)$；要么对于某个 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，$I = (r, \infty)$。假设我们处于第二种情形，且 $r = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$。那么 I 由所有按字典序大于 r 的无限序列组成；对于这些序列 $v \in \mathbb{Z}^\omega$，存在一个 $k \leq n$ 使得 $v_k \neq u_k$，并且对最小的此类 k，有 $v_k > u_k$。根据它们首次与 r不同的坐标$k \leq n$，这些序列可分门别类。如果 $v_0 > u_0$，那么 v 属于区间 I_m中的一个，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 且 $m > u_0$。这些区间的集合是 ω和

$$\sum_{i=1}^{\infty} I_{u_0+i} = I_{u_0+1} + I_{u_0+2} + \ldots.$$

这个和是 I（也是 $\mathbb{Z}^\omega$）的一个末段。

如果改为 $v_0 = u_0$，使得 v 属于 I_{u_0}，但我们有 $v_1 > u_1$，那么 v 属于区间$I_{(u_0,m)}$中的一个，其中 $m > u_1$。这些构成了 ω-和

$$\sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1+i)} = I_{(u_0,u_1+1)} + I_{(u_0,u_1+1)} + \ldots$$

它是 I_{u_0}的一个末段。以此类推，我们可以看到，v 属于区间 $I_{(u_0,\ldots,u_{k-1},m)}$ 中的一个，其中 $k \leq n$ 且 $m > u_k$。对于固定的 $k \leq n$，这些区间构成一个 ω-和，而这些和都紧邻前一个和的左侧，因此我们可以将 I 分解如下：

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1,\ldots,u_n+i)} + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1+i)} + \sum_{i=1}^{\infty} I_{u_0+i} \\ &= \sum_{j=n}^{0} \sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1,\ldots,u_j+i)}. \end{aligned}$$

这表示 I 是由 ω 个标准区间的和组成的一个 $(n+1)$-和。由此可得

$$X \cap I = \sum_{j=n}^{0} \sum_{i=1}^{\infty} X \cap I_{(u_0,u_1,\ldots,u_j+i)}.$$

但 X 同构于其在每个标准区间上的限制，因此我们有

$$X \cap I \cong \sum_{j=n}^{0} \sum_{i=1}^{\infty} X = \sum_{j=n}^{0} \omega X \cong \sum_{j=n}^{0} X = (n+1)X \cong X,$$

如所需。

现在假设，对于 $\mathbb{Z}^\omega$中的某个点 $u = (u_0, u_1, \ldots)$，有 $I = (u, \infty)$。像上面那样逐个坐标进行，我们可以类似地分解 I，但不是将其表示为标准区间的 ω-和的有限和，而是表示为标准区间的 ω-和的 ω^*-和：

$$I = \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1+i)} + \sum_{i=1}^{\infty} I_{u_0+i}.$$

滥用记号，我们写作

$$I = \sum_{j=\infty}^{0} \sum_{i=1}^{\infty} I_{(u_0,u_1,\ldots,u_j+i)}.$$

于是我们有

$$X \cap I \cong \sum_{j=\infty}^{0} \sum_{i=1}^{\infty} X = \sum_{j=\infty}^{0} \omega X \cong \sum_{j=\infty}^{0} X = \omega^* X \cong X.$$

现在假设 I 向左无界，因此 I 是$\mathbb{Z}^\omega$的一个初始段。那么，要么对于某个 $u \in \mathbb{Z}^\omega$，有 $I = (-\infty, u)$；要么对于某个 $r \in \mathbb{Z}^{<\omega}$，有 $I = (-\infty, r)$。这两种情况都与上面相应的情况类似。如果 $I = (-\infty, r)$，那么 I 可以分解为标准区间的 ω^*-和的有限和，从而 $X \cap I$ 可以分解为 X的副本的 ω^*-和的有限和，而这与X同构。如果 $I = (-\infty, u)$，那么 I 可以分解为标准区间的 ω^*-和的 ω-和，从而 $X \cap I$ 可以分解为 X的副本的 ω^*-和的 ω-和，这也与 X同构。

最后，I 也可能两侧都有界，因此对某些 x、$y \in \mathbb{Z}^\omega \cup \mathbb{Z}^{<\omega}$，有 $I = (x, y)$。我们刚才证明了，对于任意 $z \in \mathbb{Z}^\omega \cup \mathbb{Z}^{<\omega}$，都有$X \cap (-\infty, z) \cong X$。换一种说法就是：$X$ 中任何没有最大点的初始段都同构于 X。但是，$X \cap I$ 是$X \cap (x, \infty)$中一个没有最大点的初始段，而我们知道后一个序同构于X。因此，$X \cap I$ 同构于 X。□

注意，由断言可知，对于任意无限基数$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$，都存在一个大小为 κ 的齐次序 $X \subseteq \mathbb{R}$：取 X 为任意 κ 个互不相同的尾等价类的并。这样的 X 是作为 $\mathbb{Z}^\omega$ 的齐次子序构造出来的；但由于 $\mathbb{Z}^\omega$ 同构于无理数集，X 同构于 $\mathbb{R}$的一个齐次子序。

在定义定理 2 中的集合 A 和 B 之前，我们需要细化上面的断言，以处理这样的情形：我们面对的不是一个，而是两个不相交子序 A、$B \subseteq \mathbb{Z}^\omega$，且它们各自都在尾等价下封闭。在这种情况下，我们希望得出这样的结论：对于每个开区间，我们不仅有

I，使得 $A \cong A \cap I$ 和 $B \cong B \cap I$，而且实际上存在一个同构 $f_I\colon \mathbb{Z}^\omega \to I$，使得 $f_I[A] = A \cap I$ 和 $f_I[B] = B \cap I$。正如我们所观察到的，这就将证明每个 I 上的 $A \cap I \cong B \cap I$，归结为找到一个同构 $g\colon A \to B$。这样的同构 f_I 存在，这一点隐含在上面断言的证明中。我们现在将其明确写出。

我们需要林登鲍姆定理的以下加强形式。

引理: 设 X 和 Y 为线性序，且 $X_0 \subseteq X$ 和 $Y_0 \subseteq Y$ 分别是 X 和 Y 的子序。设 $f\colon X \to Y$ 是一个嵌入，将 X映到 Y的一个初始段上，使得 $f[X_0] = Y_0 \cap f[X]$；又设 $g\colon Y \to X$ 是一个嵌入，将 Y映到 X的一个末段上，使得 $g[Y_0] = X_0 \cap g[Y]$。那么存在一个同构 $h\colon X \to Y$，使得 $h[X_0] = Y_0$。

证明。令 h 为按照施罗德–伯恩斯坦定理的标准证明，由 f 和 g 构造出的双射。注意，假设 f 映满 Y 的一个初始段，且 g 映满 X 的一个末段，保证了 h 保序，也就是说，它是 X 与 Y之间的同构。还要注意，由于同样的假设也适用于 f 对 X_0 的限制以及 g 对 Y_0的限制，因此我们有 $h[X_0] = Y_0$。□

现在，假设 $X = \mathbb{Z}^\omega$。应用上面的断言可得，对于任意开区间 I，都有 $\mathbb{Z}^\omega \cong \mathbb{Z}^\omega \cap I$。（由于我们的所有映射都取值于 $\mathbb{Z}^\omega$，因此下面通常将 $\mathbb{Z}^\omega \cap I$ 简写为 I。）不过，断言的证明还隐含地说明了更多内容。见证恒等式 $\mathbb{Z}^\omega \cong \mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega \cong \omega\mathbb{Z}^\omega \cong \omega^*\mathbb{Z}^\omega \cong n\mathbb{Z}^\omega$ 的自然同构都是由投影映射 f_r 组合而成的。由于这些映射保持尾等价，且具有更强的性质：对于任意在尾等价下封闭的 $A \subseteq \mathbb{Z}^\omega$，都有 $f_r[A] = A \cap I_r$，因此，由这些恒等式得到的同构 $f_I\colon \mathbb{Z}^\omega \to I$ 将具有如下性质：对于任意这样的 A，都有 $f_I[A] = A \cap I$。

让我们明确地证明这一点。固定一个尾等价 A（因此对于任意 $u \in A$，都有 $A = [u]$）。恒等式 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega \cong \mathbb{Z}^\omega$ 可由展平映射 $fl\colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega \to \mathbb{Z}^\omega$ 自然地见证，该映射定义为 $fl(z,u) = zu$。容易验证，这是 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega$ 与 $\mathbb{Z}^\omega$ 之间的序同构；此外，我们还有 $fl[\mathbb{Z}A] = A$，其中$\mathbb{Z}A = \{(z,u) \in \mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega\colon u \in A\}$。

$\mathbb{Z}^\omega$ 在序 $\omega\mathbb{Z}^\omega$ 中的初始副本是区间 $I = \{(0,u)\colon u \in \mathbb{Z}^\omega\}$，由第一坐标为 0 的点组成。（这个 I 本质上就是区间I_0。）这个 $\mathbb{Z}^\omega$ 与自身的这个初始副本同构，可由映射$f\colon \mathbb{Z}^\omega \to \omega\mathbb{Z}^\omega$ 见证，该映射定义为 $f(u) = (0,u)$。（这个 f 本质上就是投影映射 f_0。）显然，我们有 $f[A] = \omega A \cap I = \omega A \cap f[\mathbb{Z}^\omega]$。另一方面，见证 $\omega\mathbb{Z}^\omega$ 与$\mathbb{Z}^\omega$ 的一个末段同构的自然映射，就是将展平映射 fl 限制在 $\omega\mathbb{Z}^\omega$ 上。容易验证 $fl[\omega A] = A \cap fl[\omega\mathbb{Z}^\omega]$。于是，引理给出一个同构 $f_\omega\colon \mathbb{Z}^\omega \to \omega\mathbb{Z}^\omega$，它将 A 映到 ωA。

由对称性论证可得同构 $f_{\omega^*}\colon \mathbb{Z}^\omega \to \omega^*\mathbb{Z}^\omega$ that 将 A 映射到 $\omega^* A$。现在，将 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega$ 视为由初始段 $\omega^*\mathbb{Z}^\omega$ 和其后的末段 $\omega\mathbb{Z}^\omega$ 组成，按规则 $(k,u) \mapsto (0, f_{\omega^*}^{-1}((k,u))$（若 $k < 0$）以及 $(k,u) \mapsto (1, f_\omega^{-1}((k,u))$（若 $k \geq 0$），可得从 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega$ 到 $2\mathbb{Z}^\omega$ 的同构。（这里，我们将 2 与 $\{0,1\}$ 等同，并为方便起见，将 ω^* 与 $\{\ldots,-3,-2,-1\}$等同。）此映射将 $\mathbb{Z}A$ 映射到 $2A$。将其与 fl^{-1}复合，可得同构 $f_2\colon \mathbb{Z}^\omega \to 2\mathbb{Z}^\omega$，它将 A 映射到 $2A$。若要得到一个映射到 $3\mathbb{Z}^\omega$ 的映射，我们可以对

$2\mathbb{Z}^\omega$ 中 $\mathbb{Z}^\omega$ 的右侧副本。具体而言，令 $3'\mathbb{Z}^\omega$ 表示所有形如 $(0,u)$、$(1,(0,u))$ 和 $(1,(1,u))$ 的元组构成的集合，其中 $u\in\mathbb{Z}^\omega$。将 $3'\mathbb{Z}^\omega$ 视为按自然方式按字典序排列。定义同构 $g_{3'}\colon 2\mathbb{Z}^\omega\to 3'\mathbb{Z}^\omega$，其规则为 $g_{3'}((0,u))=(0,u)$，以及 $g_{3'}((1,u))=(1,f_2(u))$。将 $g_{3'}$ 与由以下规则定义的映射复合：$(0,u)\mapsto(0,u)$；$(1,(0,u))\mapsto(1,u)$；$(1,(1,u))\mapsto(2,u)$，从而得到一个将 $2\mathbb{Z}^\omega$ 映射到 $3\mathbb{Z}^\omega$ 的同构 g_3。（这里，$3=\{0,1,2\}$。）最后，令 $f_3=g_3\circ f_2$。那么 $f_3\colon\mathbb{Z}^\omega\to 3\mathbb{Z}^\omega$ 是一个同构，它将 A 映射到 $3A$。类似地，对于每个 $n\in\omega$，我们都能得到将 A 映射到 nA 的同构 $f_n\colon\mathbb{Z}^\omega\to n\mathbb{Z}^\omega$。

因此，我们已经证明，见证 $\mathbb{Z}^\omega\cong\mathbb{Z}\mathbb{Z}^\omega\cong\omega\mathbb{Z}^\omega\cong\omega^*\mathbb{Z}^\omega\cong n\mathbb{Z}^\omega$ 的映射也见证 $A\cong\mathbb{Z}A\cong\omega A\cong\omega^*A\cong nA$。利用这些映射，我们可以构造同构 $f_I\colon\mathbb{Z}^\omega\to I$，将 A 映到 $A\cap I$，对每个开区间 I 都成立。

例如，当 $I=(r,\infty)$ 对某个 $r\in\mathbb{Z}^{<\omega}$ 成立时，我们按照断言的证明中那样分解 I：

$$I=\sum_{j=n}^{0}\sum_{i=1}^{\infty}I_{(u_0,u_1,\dots,u_j+i)}.$$

固定 j、$0\le j\le n$、i 和 $1\le i<\infty$，令 $r(j,i)$ 表示有限序列 $(u_0,\dots,u_j+i)$。每个直和项 $I_{(u_0,\dots,u_j+i)}=I_{r(j,i)}$ 都通过映射 ${f_r^{-1}}_{(j,i)}$ 自然同构于 $\mathbb{Z}^\omega$。其和

$$\sum_{i=1}^{\infty}I_{(u_0,u_1,\dots,u_j+i)}$$

与 $\omega\mathbb{Z}^\omega$ 同构，其同构映射 g 定义如下：对每个 i、$1\le i<\infty$，若 $u\in I_{r(j,i)}$，则 $g(u)=(i-1,{f_r^{-1}}_{(j,i)}(u))$。（我们平移到 $i-1$ 只是为了表述准确，因为 ω 从 0 开始。）由于 ${f_r^{-1}}_{(j,i)}$ 将 $A\cap I_{r(j,i)}$ 映射到 A 上，因此我们有

$$g\left[A\cap\sum_{i=1}^{\infty}I_{(u_0,u_1,\dots,u_j+i)}\right]=\omega A.$$

接着，由于见证 $\omega\mathbb{Z}^\omega\cong\mathbb{Z}^\omega$ 和 $(n+1)\mathbb{Z}^\omega\cong\mathbb{Z}^\omega$ 的映射分别将 ωA 映射到 A，并将 $(n+1)A$ 映射到 A，因此见证下列关系的同构也满足

$$I=\sum_{j=n}^{0}\sum_{i=1}^{\infty}I_{(u_0,u_1,\dots,u_j+i)}\cong\sum_{j=n}^{0}\omega\mathbb{Z}^\omega\cong\sum_{j=n}^{0}\mathbb{Z}^\omega=(n+1)\mathbb{Z}^\omega\cong\mathbb{Z}^\omega$$

也见证

$$A\cap I=\sum_{j=n}^{0}\sum_{i=1}^{\infty}A\cap I_{(u_0,u_1,\dots,u_j+i)}\cong\sum_{j=n}^{0}\omega A\cong\sum_{j=n}^{0}A=(n+1)A\cong A.$$

因此存在一个同构 $f_I\colon\mathbb{Z}^\omega\to I$，使得 $f_I[A]=A\cap I$。

当 I 的左端点是某个 $u\in\mathbb{Z}^\omega$ 时，也可以用类似的论证；当 I 向左无界时，两个对称情形也同样成立。

因此，假设我们处于最后一种情形，即对于点 x、$y\in\mathbb{Z}^\omega\cup\mathbb{Z}^{<\omega}$，$I=(x,y)$。令 $J=(x,\infty)$。我们知道存在一个同构 $f_J\colon\mathbb{Z}^\omega\to J$，使得 $f[A]=A\cap J$。令 $I'=f_J^{-1}[I]$。由于 I 是 J的一个初始段，因此 I' 是 $\mathbb{Z}^\omega$的一个初始段，并且 $f_J^{-1}[A\cap I]=A\cap I'$。我们还有一个同构 $f_I'\colon\mathbb{Z}^\omega\to I'$，使得 $f_I'[A]=A\cap I'$。但此时，映射 $f_I=f_J\circ f_I'$是 $\mathbb{Z}^\omega$到 I 的一个同构，且满足 $f_I[A]=A\cap I$。

因此，对于每个开区间 I，我们都有一个同构 $f_I\colon \mathbb{Z}^\omega \to I$，使得 $f_I[A] = A \cap I$。由于 A 是任意一个尾等价类，而且我们对 f_I 的构造并不依赖于所固定的特定等价类，因此当 A 是尾等价类的任意并时，同样的结论也成立。我们已经证明了对先前断言的如下加强。

断言：对于每个开区间 $I \subseteq \mathbb{Z}^\omega$，都存在一个同构 $f_I\colon \mathbb{Z}^\omega \to I$，使得对于每个关于尾等价封闭的子序 $A \subseteq \mathbb{Z}^\omega$，我们都有 $f_I[A] = A \cap I$。

我们几乎可以定义定理 2 中的集合 A 和 B 了。A 和 B 都将是尾等价类的并。根据我们改进后的断言，这保证了对于每个开 I，都存在一个同构 $f_I\colon \mathbb{Z}^\omega \to I$，它将 A 映到 $A \cap I$，并将 B 映到 $B \cap I$。因此，为了确保 A 和 B 处处同构，我们只需证明存在一个全局同构 $g\colon A \to B$。我们的 g 实际上将是 $\mathbb{Z}^\omega$ 的一个序自同构，使得 $g[A] = B$ 和 $g[B] = A$。我们先定义 g，然后构造 A 和 B，使它们满足这些恒等式，同时仍关于尾等价封闭。

为了定义 g，我们利用 $\mathbb{Z}^\omega$ 的有序群结构。对于序列 $u = (u_0, u_1, \ldots)$ 和 $v = (v_0, v_1, \ldots)$，我们将序列 $(u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$ 记作 $u + v$。对于任意固定的 $v \in \mathbb{Z}^\omega$，映射 $u \mapsto u + v$ 定义了 $\mathbb{Z}^\omega$ 的一个序自同构。我们选取其中一个特定的自同构。对于 $n \in \mathbb{Z}$，将序列 $(n, n, n, \ldots)$ 记作 $\overline{n}$。定义 $g\colon \mathbb{Z}^\omega \to \mathbb{Z}^\omega$，其规则为 $g(u) = u + \overline{1}$。

特别地，g 是平移 $\overline{1}$，这一点并不重要；重要的是，$\mathbf{1}$ 与恒等元 $\overline{0}$ 不尾等价。要使构造成立，我们需要对于除至多可数多个 u 之外的所有情况，都有 $g(u) \not\sim u$。

注意，g 以较弱的意义保持尾等价，即 $u \sim v$ 当且仅当 $g(u) \sim g(v)$。因此，g 在尾等价类上诱导出一个置换。具体而言，对于每个 $u \in \mathbb{Z}^\omega$，都有 $g[[u]] = [g(u)] = [u + \overline{1}]$。

对于固定的 u，考虑 u 的尾等价类在 g 下的迭代像。这些集合为 $g^k[[u]] = [u + \overline{k}]$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。我们将并集 $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[u + \overline{k}]$ 称为 u 的轨道，并记为 $O(u)$。注意，每个轨道都是可数的。

对于大多数 u，只要 $k \neq l$，就有 $[u + \overline{k}] \cap [u + \overline{l}] = \emptyset$。但并非对所有 u 都如此。令 C 表示所有轨道 $O(u)$ 的并集，其中类 $[u + \overline{k}]$、$k \in \mathbb{Z}$ 并非两两不相交。不难看出，C 恰好是满足以下条件的所有 u 的集合：存在 $k \neq 0$ 使得 $u \sim u + \overline{k}$。

我们断言，C 是可数的。固定 $u \in C$，并找出 $k \neq 0$ 使得 $u \sim u + \overline{k}$。于是，对于某些 r、$s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 和 $u' \in \mathbb{Z}^\omega$，有 $u = ru'$ 和 $u + \overline{k} = su'$。我们分别用 $|r|$ 和 $|s|$ 表示序列 r 和 s 的长度。不可能有 $|r| = |s|$，因为若果真如此，尾序列 u' 就会在 u 和 $u + \overline{k}$ 中从同一坐标开始，从而得到错误的等式 $u' = u' + \overline{k}$。因此，设 $|r| > |s|$。$|r| < |s|$ 的情形是对称的。将 r 写成 $r't$，其中 $|r'| = |s|$，而 t 是剩余序列。于是有 $u = r'tu'$ 和 $u + \overline{k} = su'$。通过写成 $u' = q_0q_1q_2\ldots$，我们将 u' 分解为有限块 q_i，其中每个块 q_i 的长度为 $|t|$。于是有 $u = r'tq_0q_1\ldots$ 和 $u + \overline{k} = sq_0q_1\ldots$。对于有限块 q，我们用 $q + \overline{k}$ 表示一个与 q 长度相同的有限块，其中每个元素都加上了 k。我们将 u 和 $u + \overline{k}$ 分解成若干块，使得 u 中的每个块都与 $u + \overline{k}$ 中对应块的长度相同。因此得到等式 $s = r' + \overline{k}$，

$q_0 = t + \overline{k}$、 $q_1 = q_0 + \overline{k}$、 $q_2 = q_1 + \overline{k}$，等等。但这样一来， $u = r't\ (t + \overline{k})\ (t + \overline{2k})$ .....这样的u 由初始序列 r、块 t和差值 k唯一确定。 r、 $t \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ 只有可数多个，而 $k \in \mathbb{Z}$也只有可数多个。因此， C 是可数的，断言得证。

我们构造 A 和 B。考虑 $\mathbb{Z}^\omega \setminus C$。这个集合由不属于 C的轨道 $O(u)$组成，而这些轨道划分了 $\mathbb{Z}^\omega \setminus C$。由于它们有 $2^{\aleph_0}$多个，我们将它们枚举为 $\{O_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$。为每个 $\alpha < 2^{\aleph_0}$选取一个代表元 $u_\alpha \in O_\alpha$，使得 $O_\alpha = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [u_\alpha + \overline{k}]$。根据 C的选择，集合 $[u_\alpha + \overline{k}]$和 $[u_\alpha + \overline{l}]$ 对 $k \neq l$两两不相交。对每个 α，令 A_α 表示 $[u_\alpha]$ 在 g 作用下的偶数次迭代之并，并令 B_α 表示奇数次迭代之并：

$$A_\alpha = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [u_\alpha + \overline{2k}]$$
$$B_\alpha = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [u_\alpha + \overline{2k+1}].$$

注意到 A_α 和 B_α 不相交，且各自对尾等价封闭，并且对每个 α都有$g[A_\alpha] = B_\alpha$。令 $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ 和 $B = \bigcup_\alpha B_\alpha$。同样， A 和 B不相交，对尾等价封闭，并且 $g[A] = B$。因此， $\mathbb{Z}^\omega \setminus C = A \cup B$将 $\mathbb{Z}^\omega \setminus C$划分为两个同构子序；由于映射 $f_I \circ g \circ f_I^{-1}$，它们处处同构。因为 $\mathbb{Z}^\omega \setminus C \cong \mathbb{I}$，证毕。□

注意到，同一构造可得到任意无限基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 的齐次、处处同构集 A、 B。只需取 $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ 和 $B = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$。

*　　*　　*

最后，我们进一步讨论 $\mathbb{R}$ 的齐次性、处处同构以及二集划分。

如果 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是齐次的，那么在 A 中添加有限多个点，不会改变 A 的序型。为此，固定 $x \in \mathbb{R}$。我们断言 $A \cup \{x\} \cong A$。若 $x \in A$，则无需证明。若 $x \notin A$，那么由于 A 是齐次的且至少缺少一个点，它在每个区间中都至少缺少一个点。也就是说， $\mathbb{R} \setminus A$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密（我们称 A 余稠密）。由于 A 是齐次的，它在 $\mathbb{R}$ 中也稠密。因此，我们可以选取一个实数序列 $\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$，使得对所有 $i > 0$， $x_0 = x$、 $x_i \in A$，并且对所有 $i < 0$， $x_i \in \mathbb{R} \setminus A$。我们不妨假设该序列从右侧收敛到 ∞，从左侧收敛到 $-\infty$，因为可以如此安排。令 J_n 表示对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 的开区间 (x_n, x_{n+1})。对每个 n，都有 $A \cap J_n \cong A$；特别地，对每个 n，都有 $A \cap J_n \cong A \cap J_{n+1}$。固定一个同构 f_n：对每个 n， $A \cap J_n \to A \cap J_{n+1}$。定义映射 f： $A \cup \{x\} \to A$，规定对所有 $y \in J_n$ 和所有 n， $f(y) = f_n(y)$，并且对所有 n， $f(x_n) = x_{n+1}$。根据构造， f 是一个序同构。由此可知，对任意有限点集 $X \subseteq \mathbb{R}$， $A \cup X \cong A$。通过类似论证可以证明，若 A 是齐次的且 $A \neq \mathbb{R}$，那么对任意有限点集 X， $A \setminus X \cong A$。

对于任意可数集 $X \subseteq \mathbb{R}$，我们是否有 $A \cup X \cong A$? 如果 A 是可数且齐次的，这一结论成立，因为此时 A 和 $A \cup X$ 都是可数、稠密且无端点的，因此同构于 $\mathbb{Q}$。但对于不可数的齐次 A，一般而言这一结论并不成立。

推论 3. 存在一个齐次子序 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和可数集 $X \subseteq \mathbb{R} \setminus A$，使得 $A \cup X \supsetneq A$。

证明。设 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = A \cup B$ 为我们对无理数集所作的划分，将其分成处处同构的齐次集。结合这一分解，对于每个开区间 I，我们都有一个同构 $f\colon \mathbb{R} \to I$，使得 $f_I[A] = A \cap I$ 且 $f_I[B] = B \cap I$，此外还有一个全局同构 $g\colon A \to B$。由此可得 $f_I[\mathbb{Q}] = \mathbb{Q} \cap I$，因此对于每个 I，$f_I[A \cup \mathbb{Q}] = (A \cup \mathbb{Q}) \cap I$ 也成立。若存在一个同构$h\colon A \cup \mathbb{Q} \to A$，我们就会得到同构 $f_I \circ g \circ h \circ f_I^{-1}\colon (A \cup \mathbb{Q}) \cap I \to B \cap I$，对于每个 I 都成立。但这样一来，$(A \cup \mathbb{Q})$ 和 B 就构成了 $\mathbb{R}$ 的一个划分，且这些集合处处同构，这就产生了矛盾。取 $X = \mathbb{Q}$。□

定理 1 和定理 2 以及推论告诉我们，$\mathbb{R}$ 的哪些子集可以与其补集序同构。假设 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集，且其补集 $B = \mathbb{R} \setminus A$ 也稠密。那么，如果存在一个同构 $f\colon A \to B$，它可以唯一地扩展为一个序自同构$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。由于这个自同构将一个集合与其补集互换，因此它没有不动点。对于给定的 x，如果有 $f(x) > x$，则迭代序列 $x < f(x) < f^2(x) < \dots$ 在 $\mathbb{R}$ 中向右无界，而负迭代序列 $\dots < f^{-2}(x) < f^{-1}(x) < x$向左无界，因此对每个 $x \in \mathbb{R}$也都如此。如果 $f(x) < x$，情形则对称。我们称 $\mathbb{R}$ 的这种自同构为不可约自同构。

设我们有 $f(x) > x$ 对所有 x都成立，因为否则我们可以将 f 替换为其逆映射，而它仍然能够证明 A 与 B同构。对于任意给定的 x，迭代序列 $\dots < f^{-1}(x) < x < f(x) < f^2(x) < \dots$ 中的点交替属于 A 或 B。例如，考虑区间 $[0, f(0))$ 及其划分所得的两个稠密子集 $A \cap [0, f(0))$ 和 $B \cap [0, f(0))$，则 $[f(0)\ f^2(0))$ 按相反的方式划分为：$A \cap [f(0)\ f^2(0)) = f[B \cap [0, f(0))]$以及 $B \cap [f(0)\ f^2(0)) = f[A \cap [0, f(0))]$。沿着这一思路继续推想，我们可以看出，全局划分 $\mathbb{R} = A \cup B$ 由其在区间$[0, f(0))$上的限制以及自同构 f所决定。

因此，与其补集$B = \mathbb{R} \setminus A$ 同构的稠密/余稠密子集 $A \subseteq \mathbb{R}$，与配有 $[0, f(0)$的稠密/余稠密划分的 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的递增不可约自同构 f一一对应。由于 $\mathbb{R}$ 的任何自同构都由其在有理数集上的限制决定，而有理数集是可数集，因此不可约自同构至多有 $2^{\aleph_0}$个。恰好有 $2^{\aleph_0}$个并不难验证。通过对所有这类自同构进行归纳对角化，可以构造出许多稠密且余稠密的子序$A \subseteq \mathbb{R}$，它们并不同构于自己的补集 B。

然而，对于任意稠密且余稠密的 $A \subseteq \mathbb{R}$，通常似乎很难判断 A 是否与 $B = \mathbb{R} \setminus A$同构，至少在不了解 A的构造过程时是如此。但定理 1 告诉我们，如果知道 A 是齐次的，判断就很容易。在这种情况下，我们总有$A \supsetneq B$。因为如果 A 与 B同构，那么凭借 A 和 B的齐次性，我们就能得到处处同构，从而将 $\mathbb{R}$ 划分成两个处处同构的集合。换言之，如果 A 与其补集同构，那么 A 就不是齐次的：必定存在某个开区间 I，使得$A \supsetneq A \cap I$。

另一方面，定理 2 告诉我们，$\mathbb{R}$ 的一个齐次子序可以在可数集内，以两种不同的意义与其补集同构。设 $\mathbb{I} = A \cup B$ 是我们将无理数分解为两个齐次

处处同构集的分解，并设 $X = A \cup \mathbb{Q}$是 $\mathbb{R}$中 B的补集。那么X 是齐次的，因此必定不同构于 B，正如我们在推论中所观察到的。

如果我们希望保持齐次性并获得同构，可以通过从 X 中删除可数集 $\mathbb{Q}$ 来得到 A。但这样一来， $A \cup B$ 就不再是 $\mathbb{R}$的划分。

如果我们希望获得同构，同时保持 $\mathbb{R}$的完整划分，也可以做到这一点。令 g：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为我们在定理 2 的证明中得到的、介于 A 与 B 之间的全局同构，并将其视为 $\mathbb{R}$的序自同构。由该证明可知， g 是不可约自同构。将 $\mathbb{Q}$ 划分为 g-轨道，也就是说，划分为形如 $\{\ldots, g^{-1}(x)\ x、\ g(x)\ g^2(x)\ \ldots\}$的集合。从每个轨道中选取一个点，将它的偶数次迭代加入 A，将它的奇数次迭代加入 B。这样一来，根据构造，所得集合 A' 和 B' （整体上）同构， g可作为见证；并且二者距离齐次性都至多只差一个可数集。此外，$A' \cup B'$ 是$\mathbb{R}$的一个划分。（由推论前的讨论可知，我们无法只做更小幅度的修改，因为在 X 与 B 之间进行任何有限次的点交换，都不会改变任一集合的序型。）

但是，在从 $A \cup B$ $\mathbb{R}$ 的近似划分过渡到实际划分的过程中，我们必然会失去集合的齐次性：现在必定存在一个开区间 I，使得 $A' \cap I \neq\supseteq A'$ 和 $B' \cap I \neq\supseteq B'$。

References

[1] G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover Publications，第 45 卷（1915）。[2] A. Lindenbaum 和 A. Tarski, *Communication sur les recherches de le théorie des ensembles*, 《波兰数学会纪要》，华沙分部《波兰数学会年刊》，（1926）：299–330。[3] W. Sierpi ´nski, *Cardinal and ordinal numbers*, 第 34 卷。Pa ´nstwowe Wydawn. Naukowe，1958。