arXiv:2303.11542v1 [math.CA] 21 Mar 2023

分数阶 k 维测度的定义：弥合分数阶长度与分数阶面积之间的鸿沟

Cornelia Mihaila 和 Brian Seguin

2023年3月22日

目录

1 引言 1 2 符号与数学预备知识 5 3 圆盘集 9 4 分数阶测度 11 5 未来方向 21 A 附录 23

摘要

这里我们引入一种分数阶 k维测度 $0 \leq k < n$，它取决于参数 σ，该参数介于0和1之间。当 $k = n - 1$ 时，它与分数阶面积和周长概念相同；当 $k = 1$ 时，它与分数长度概念相同。研究表明，乘以因子 $1 - \sigma$后，这种 σ测度会收敛到 k维豪斯多夫测度，二者相差一个可精确计算的乘法常数。我们还提及若干可利用所引入的分数阶测度开展的未来研究方向。

谨以此文纪念*David Seguin*。他的兄弟将永远怀念那充满整个房间的笑声。

1 引言

给定满足 $0 < \sigma < 1$ 的参数 σ，考虑泛函

$$J_\sigma(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+\sigma}} dxdy$$

它定义在形如 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的函数上，且等于分数阶 Sobolev 半范数 $|u|_{H^{\sigma/2}}$ 的平方。当 u 是开集 E 的特征函数 χ_E 时，

$$J_\sigma(\chi_E)=2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_E(x)\chi_{E^c}(y)}{|x-y|^{n+\sigma}}dxdy,$$

其中， E^c 是 E的补集。这促使人们考虑如下定义的分数阶周长

$$\mathrm{Per}_\sigma(E):=\frac{1}{\alpha_{n-1}}\int_E\int_{E^c}|x-y|^{-n-\sigma}dxdy,$$

其中， α_{n-1} 是 $\mathbb{R}^{n-1}$中的单位球体积。Visintin [Vis91]最初研究了不带前置因子的这一泛函，其动机是研究广义表面张力。当 E 无界时，这一泛函通常为无穷大。为处理这种情形，可以引入一个有界开集 Ω，并讨论 E 相对于 Ω 的分数阶周长，正如 Caffarelli、Roquejoffre 和 Savin [CRS10]所做的那样。其定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}_\sigma(E,\Omega):=&\frac{1}{\alpha_{n-1}}\Big(\int_{E\cap\Omega}\int_{E^c}+\int_{E\cap\Omega^c}\int_{E^c\cap\Omega}\Big)|x-y|^{-n-\sigma}dxdy\\=&\frac{1}{\alpha_{n-1}}\int_E\int_{E^c}\frac{\max\{\chi_\Omega(x),\chi_\Omega(y)\}}{|x-y|^{n+\sigma}}dxdy.\end{aligned}\tag{1}$$

分数阶周长的极小化者称为 σ-极小曲面，定义为满足以下条件的集合 E：对于任意满足 $E\setminus\Omega=F\setminus\Omega$的其他集合 $F\subseteq\mathbb{R}^n$，都有

$$\mathrm{Per}_\sigma(E,\Omega)\le\mathrm{Per}_\sigma(F,\Omega).$$

Caffarelli 及其合作者 [Caf09, CS10, CV11] 通过研究非局部扩散和相变问题，探讨了分数阶周长的动机。此外，它还有其他应用。例如，Lombardini [Lom19] 发现，对于给定参数 σ，分数阶周长有限这一性质与 ∂E的分形维数之间存在联系。

已有大量研究探讨 Per_σ 的极小化者。例见 [CV13、DV18、FV17、SV13]。其中已知，当 σ 接近 1 时， σ-极小曲面除去一个维数至多为 $n-8$ 的集合外都是光滑的。这与关于经典极小曲面的一个著名结果一致 [Giu84]。然而， σ-极小曲面确实具有不同于经典极小曲面的特征，例如它们可能会黏附在边界上。参见 Dipierro、Savin 和 Valdinoci 的工作 [DSV17]，以及 Sipierro 和 Valdinoci 的工作 [DV18]。如果 E 是一个 σ-极小曲面，那么 Caffarelli、Roquejoffre 和 Savin [CRS10] 证明了 ∂E 上必须满足一个逐点条件。Abatangelo 和 Valdinoci[AV14] 利用这一条件定义了平均曲率和方向曲率的一个非局部类比。人们已使用水平集方法研究这种非局部平均曲率驱动的运动。参见 Imbert 的工作 [Imb09]，以及 Chambelle、Marini 和 Ponsiglione 的工作 [CMP12、CMP13、CMP15]。

Per$_\sigma$ 这一名称的由来，以及其定义中出现的因子 α_{n-1}^{-1}，是因为在适当的极限下，分数阶周长会收敛到经典周长概念。Caffarelli 和 Valdinoci [CV11] 证明，如果 E 具有光滑边界，那么

$$\lim_{\sigma\uparrow 1}(1-\sigma)\mathrm{Per}_\sigma(E,B_r)=\mathcal{H}^{n-1}(\partial E\cap B_r)$$

对于几乎所有的 $r>0$，其中 B_r 是以原点为中心、半径为 r的球。Am- brosio、Philippis 和 Martinazi [APM11] 证明了，当 σ 趋于 1 时，分数阶周长Γ-收敛到经典周长概念。人们也研究了 σ 趋于 0 时分数阶周长的渐近行为。Dipierro、Figalli、Palatucci 和 Valdinoci [DFPV13]证明了

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}\sigma\mathrm{Per}_\sigma(E,\Omega)=\frac{1}{\alpha_{n-1}}[(1-a(E))\mathcal{H}^n(E\cap\Omega)+a(E)\mathcal{H}^n(\Omega\setminus E)],$$

其中 $a(E):=\lim_{\sigma\downarrow 0}\frac{\sigma}{\omega_{n-1}}\int_{E\setminus B_1}|y|^{-n-\sigma}dy$，而 ω_{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$中单位球的表面积。

分数阶周长是衡量作为某个集合边界的曲面面积的一种测度。当然，许多曲面并非某个集合的边界。Paroni、Podio-Guidugli 和 Seguin[PPGS18] 注意到，当 ∂E 光滑时，分数阶周长 (1) 可以写成

$$\mathrm{Per}_\sigma(E,\Omega)=\frac{1}{2\alpha_{n-1}}\int_{\mathcal{X}(\partial E)}\frac{\max\{\chi_\Omega(x),\chi_\Omega(y)\}}{|x-y|^{n+\sigma}}dxdy,$$

其中，$\mathcal{X}(\partial E)$表示满足以下条件的数对集合（x,y）：$\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ x 与 y 之间的线段与 ∂E 相交奇数次。由于前一个方程的右侧仅通过曲面 ∂E依赖集合 E，因此可以定义分数面积概念。具体而言，若 $\mathcal{S}$ 是光滑曲面，则相对于 Ω，$\mathcal{S}$的分数阶面积定义为

$$\mathrm{Area}_\sigma(\mathcal{S},\Omega):=\frac{1}{2\alpha_{n-1}}\int_{\mathcal{X}(\mathcal{S})}\frac{\max\{\chi_\Omega(x),\chi_\Omega(y)\}}{|x-y|^{n+\sigma}}dxdy. \tag{2}$$

在假设 $\mathcal{S}\subseteq$Ω的条件下，分数阶面积收敛到通常的面积概念，即

$$\lim_{\sigma\uparrow 1}(1-\sigma)\mathrm{Area}_\sigma(\mathcal{S},\Omega)=\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{S}). \tag{3}$$

在 Seguin [Seg20 的工作中，Seg] 上述思路被用于为 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线定义分数长度概念。要了解其原理，考虑 $n=2$ 的情形，此时 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线。在这种情况下，

$$\mathrm{Area}_\sigma(\mathcal{S},\Omega)=\frac{1}{4}\int_{\mathcal{X}(\mathcal{S})}\frac{\max\{\chi_\Omega(x),\chi_\Omega(y)\}}{|x-y|^{n+\sigma}}dxdy. \tag{4}$$

这个表达式涉及对一组线段进行积分，这些线段由其端点描述，并与 $\mathcal{S}$ 相交奇数次。与其用端点 x 和 y 来描述一条给定的线段，不如将其视为一个一维圆盘，它有一个中心 p、一个垂直于圆盘的单位向量 $\mathbf{u}$，以及一个半径 r。这样一来，这些对象之间的关系为

$$(x, y) = (p - r\mathbf{u}', p + r\mathbf{u}'),$$

其中，$\mathbf{u}'$ 是将 $\mathbf{u}$ 顺时针旋转 90° 后得到的。通过变量替换，得到 (4)

$$\mathrm{Area}_\sigma(\mathcal{S}, \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}(\mathcal{S})} \frac{\max\{\chi_\Omega(p + r\mathbf{u}'), \chi_\Omega(p - r\mathbf{u}')\}}{(2r)^{1+\sigma}} d\mathcal{H}^4(p, \mathbf{u}, r),$$

其中，$\mathcal{D}(\mathcal{S})$由所有与 $\mathcal{S}$ 相交奇数次的一维圆盘组成。由于此处 $\mathcal{S}$ 是一维的，这启发了分数长度概念。具体而言，若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一条光滑曲线，则其分数阶长度定义为

$$\mathrm{Len}_\sigma(\mathcal{C}, \Omega) \coloneqq \int_{\mathcal{D}(\mathcal{C})} \frac{\sup\{\chi_\Omega(p + r\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\{\mathbf{u}\}^\perp)\}}{r^{1+\sigma}} d\mathcal{H}^{2n}(p, \mathbf{u}, r). \tag{5}$$

这里，$\{\mathbf{u}\}^\perp$ 是与 $\mathbf{u}$ 正交的向量集合，$\mathcal{U}(\{\mathbf{u}\}^\perp)$ 是 $\{\mathbf{u}\}^\perp$ 中单位向量的集合，而 $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ 是由满足以下条件的三元组 $(p,\mathbf{u}\ r)$ 构成的集合：对应的圆盘

$$D(p, \mathbf{u}, r) \coloneqq \{p + \xi\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\{\mathbf{u}\}^\perp), \xi \in [0, r)\}$$

与曲线 $\mathcal{C}$ 相交奇数次。(5) 中上确界的出现与 (4) 中最大值的作用类似。该项的含义是，只有边界与 Ω 相交的圆盘才会对积分作出贡献。Seguin [Seg20、Seg] 证明，在假设 $\mathcal{C} \subseteq\Omega$ 的条件下，

$$\lim_{\sigma\uparrow 1}(1 - \sigma)\mathrm{Len}_\sigma(\mathcal{C}, \Omega) = \frac{4\pi^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})(n-1)} \mathcal{H}^1(\mathcal{C}). \tag{6}$$

定义 (2) 和 (5) 为 $n-1$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的一维流形提供了分数测度概念。本工作的目标是弥合这些结果之间的差距，为 k 维流形定义分数测度概念，并建立与 (3) 和 (6) 类似的结果。为了阐明我们引入的定义，首先注意到，分数阶面积涉及考察一组与曲面相交奇数次的线段或一维圆盘，而分数阶长度则涉及一组 $(n-1)$ 维圆盘。与之对应，我们考察与给定的 k 维流形相交奇数次的 $(n-k)$ 维圆盘。请注意，在每种情况下，被测量几何对象的维数与所涉及圆盘的维数之和均为 n。此外，一个 k 维流形与

一个 $(n-k)$ 维圆盘的交集通常是一组点，而不是高维集合。因此，询问交集中点的数量是偶数还是奇数是有意义的。类似于定义 (2) 和 (5)，分数阶 k 维测度的定义将涉及对所有与该流形相交奇数次的圆盘进行积分。

为了定义所用的圆盘并进行各种计算，我们使用 k-向量。有关 k-向量的详细介绍，请参见 Rosén [Ros19]。为使本文内容完整自足，我们在第2节中加入了关于 k-向量的介绍。这里我们也规定符号，并介绍一些关于伽马函数和贝塔函数的事实，后文将会用到。第3节讨论用于定义分数阶 k-维测度的圆盘集，并证明相关子集维数的一些初步结果。第4节介绍一种分数阶 k-维测度，并证明在适当的极限下，它收敛到 $\mathcal{H}^k$ 测度。第5节介绍若干涉及分数阶测度、值得进一步研究的方向。最后，附录包含变量替换公式以及证明第3节和第4节结果所需的其他计算。

2 符号与数学预备知识

令 $\mathbb{R}^+ := (0,\infty)$ 表示不含零的正数集，令 $\mathbb{R}_0^+ := [0,\infty)$ 表示包含零的非负数集。给定一个内积空间 $\mathcal{V}$，令 $\mathcal{U}(\mathcal{V})$ 表示 $\mathcal{V}$ 中所有单位向量构成的集合。若 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子集，令 $\mathcal{Z}^\perp$ 表示 $\mathcal{V}$ 中与 $\mathcal{Z}$ 的每个向量都正交的那些向量。

回顾一下，伽马函数 Γ 对所有正数 x 定义为

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$$

它可以视为阶乘的推广，因为它满足

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

众所周知，

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

贝塔函数 B 与伽马函数密切相关。虽然它有许多等价表达式，但本文中最有用的表达式是

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta. \tag{8}$$

贝塔函数和伽马函数通过以下恒等式相关联

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积 α_n 和表面积 ω_{n-1} 可用伽马函数表示:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},\\ \omega_{n-1} &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.\end{aligned} \tag{9}$$

令 SO(n) 表示 $\mathbb{R}^n$ 的所有旋转构成的集合。回顾一下，这是一个 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维流形。将 SO(n) 视为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子集，并采用该空间的自然度量，我们有

$$\mathcal{H}^{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathrm{SO}(n)) = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{j=1}^{n-1} \omega_j = \frac{2^{\frac{(n+4)(n-1)}{4}} \pi^{\frac{(n+2)(n-1)}{4}}}{\prod_{j=2}^{n} \Gamma(\frac{j}{2})}. \tag{10}$$

例如，参见 Zhou 和 Shi [SZ14]。

定义多向量有不同的方法。这里，我们采用将它们视为斜对称多重线性映射的方法。虽然这并非 Rosén [Ros19], 所著书中使用的定义，但两者是等价的。参见 Federer [Fed69]。固定一个自然数 k，使得$1 \le k \le n$。给定 k 个向量 $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1,\dots,k\}$，定义 k-向量 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ 为从 k 重积 $(\mathbb{R}^n)^k$ 到 $\mathbb{R}$ 的多重线性映射，其定义为

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k)(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k) \coloneqq \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{a}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{v}_k\cdot\mathbf{a}_k \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k) \in (\mathbb{R}^n)^k. \tag{11}$$

注意，这个映射具有斜对称性，即交换任意一对 $\mathbf{a}_i$ 都会使输出的符号改变。所有 k-向量构成的集合记为 $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$，它是所有形如 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ 的线性映射的线性张成。我们有 $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$。

形如 (11) 的 k-向量集合称为简单 k-向量，记作 $\hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$。虽然 $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ 是一个向量空间，但 $\hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$ 不是。不过，它是一个流形。此外，简单 k- 向量张成所有 k- 向量的集合。对于简单 k- 向量 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$，我们用 $[\boldsymbol{\omega}]$ 表示由 $\mathbf{v}_i$ 张成的 $\mathbb{R}^n$ 子空间。设 $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}^{\perp}$ 是将 $\mathbb{R}^n$ 中的元素分别投影到 $[\boldsymbol{\omega}]$ 和 $[\boldsymbol{\omega}]^{\perp}$ 的函数，因此 $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}^{\perp} = \mathbf{1}_n$。

我们在 k-向量以及 k-向量对上定义若干线性映射。为此，我们先在简单的 k-向量上定义这些映射，再利用线性将其扩展到所有 k-向量上。之所以这一过程可行，是因为 k-向量具有泛性质。详情请参见 Rosén [Ros19] 。作为第一个例子，考虑一个线性映射

$\mathbf{L}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。这会诱导出一个从 $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的线性映射，我们仍记为 $\mathbf{L}$，使其作用于简单的 k-向量 $\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k \in \hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$ 时满足

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) \coloneqq \mathbf{L}\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{L}\mathbf{u}_k.$$

给定两个简单的 k-向量 $\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k$、$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \in \hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$，定义它们的内积为

$$(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) \cdot (\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) \coloneqq \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{pmatrix}. \tag{12}$$

正交的简单 k-向量有如下几何解释：给定 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu} \in \hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$，使得 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$，那么存在一个 $\mathbf{a} \in [\boldsymbol{\omega}]$ 使得 $\mathbf{a} \in [\boldsymbol{\nu}]^\perp$。

我们将单位长度的简单 k-向量集合记作 $\hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n) \coloneqq \mathcal{U}(\hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n))$。$\hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n)$ 中的元素可视为 $\mathbb{R}^n$ 中定向的 k 维子空间。因此，$\hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n)$ 可用作格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ 的双覆盖。由此可得 $\dim \hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n)$ k $n-k$ $\mathcal{V}$ $\mathbb{R}^n$ Λ^k_u $\mathcal{V}$ ()。

给定一个子空间，我们将用符号 $\hat{}$ () 表示满足 $[\boldsymbol{\omega}] \subseteq \mathcal{V}$ 的那些单位简单k-向量 $\boldsymbol{\omega}$。

外积 $\wedge$： $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ 是满足以下条件的双线性映射：给定简单向量 $\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k \in \hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_l \in \hat{\Lambda}^l(\mathbb{R}^n)$，有

$$(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) \wedge (\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_l) \coloneqq \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_l.$$

我们还将用到多向量的内积。对于 $k \geq l$，左内积 $\lrcorner$： $\Lambda^l(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k-l}(\mathbb{R}^n)$ 是满足以下条件的双线性映射：对于 $\boldsymbol{\nu} \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 和$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$， $\boldsymbol{\nu} \lrcorner \boldsymbol{\lambda}$ 是满足下式的唯一 $(k-l)$-向量

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} \lrcorner \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\omega} \in \Lambda^{k-l}(\mathbb{R}^n). \tag{13}$$

一个涉及内积的有用恒等式是

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\lambda}) \lrcorner \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda} \lrcorner (\boldsymbol{\omega} \lrcorner \boldsymbol{\mu}) \tag{14}$$

对于所有 $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$、 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 和 $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$，其中 $k+l \leq m$。此外，拉格朗日恒等式还有一个变体：若 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$，则

$$|\mathbf{a}|^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 = |\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega}|^2 + |\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\omega}|^2. \tag{15}$$

另一个有用的恒等式是反对易关系

$$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \boldsymbol{\omega}, \tag{16}$$

这对所有 $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$都成立。可以证明，对于一个简单的 k-向量$\boldsymbol{\omega}$,

$$[\boldsymbol{\omega}] = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \ :\ \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}\} \quad \text{and} \quad [\boldsymbol{\omega}]^\perp = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \ :\ \mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}\}.$$

引理 2.1。 如果 $\boldsymbol{\mu} \in \hat{\Lambda}^k(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$，那么

$$|\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}| = |\boldsymbol{\mu}||\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{a}| \qquad and \qquad |\mathbf{a}||\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\mu}| = |\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\perp}\mathbf{a}|. \tag{17}$$

证明。 我们先证明当 k-向量和向量的模均为单位模时的 (17)$_1$ 。令$\boldsymbol{\mu} \in \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$，并令 $\mathbf{a} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$。由于 $\boldsymbol{\mu} \in \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$，我们可以写成 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{t}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{t}_k$，其中$\{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_k\}$ 是 $[\boldsymbol{\mu}]$的标准正交基。展开 $|\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}|^2$，得到

$$|\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}|^2 = |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{t}_k) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{t}_k) + ... + (-1)^{k+1}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_k)(\mathbf{t}_1 \wedge .... \wedge \mathbf{t}_{k-1})|^2.$$

由于和中的每一项都相互正交且长度为单位长度，因此

$$|\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}|^2 = |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{t}_k)|^2 + |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_2)(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{t}_k)|^2 + ... + |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_k)(\mathbf{t}_1 \wedge .... \wedge \mathbf{t}_{k-1})|^2$$

$$= |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_1)|^2 + \cdots + |(\mathbf{a}\cdot\mathbf{t}_k)|^2 = |\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{a}|^2.$$

若要将结果推广到模不为单位模的 $\boldsymbol{\mu}$和 $\mathbf{a}$，注意到

$$|\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}| = |\boldsymbol{\mu}||\mathbf{a}|\Big|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \lrcorner \frac{\boldsymbol{\mu}}{|\boldsymbol{\mu}|}\Big| = |\boldsymbol{\mu}||\mathbf{a}||\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}| = |\boldsymbol{\mu}||\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{a}|. \tag{18}$$

为证明 (17)$_2$, ，我们首先用 $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu})$ 表示投影到与 $\mathbf{a}$ 垂直的空间上的投影；参见[Ros19]。因此，由 (13) 可得

$$|\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\mu}|^2 = \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu})) \cdot \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu}. \tag{19}$$

根据 (16)，又由于 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$，且 $\mathbf{a}$ 是单位向量，因此

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu})) \cdot \mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu} = \left[|\mathbf{a}|^2 \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu})\right] \cdot \mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu} = |\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu}|^2.$$

接下来，由 (15) 可得

$$|\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\mu}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\boldsymbol{\mu}|^2 - |\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}|^2 = 1 - |\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\mu}|^2. \tag{20}$$

结合式 (19)–(20)，并利用 (17)$_1$ ，我们得到

$$|\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\mu}|^2 = 1 - |\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}}^{\perp}\mathbf{a}|^2.$$

将结果推广到 $\mathbf{a}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 不具有单位模的情形，可通过类似于 (18) 中的缩放论证得出。

□

我们通过提及一个稍后会用到的事实来说明内积。令 $\boldsymbol{\omega} \in \hat{\Lambda}_u^4(\mathbb{R}^n)$。由此可知，存在正交归一向量 $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$,$\mathbf{u}_3$ 和 $\mathbf{u}_4$ ，使得$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4$。根据上述定义，对于一个 $\in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_4)\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3$$

因此，

$$\mathbf{u}_2 \lrcorner \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4,$$

且对于 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathbf{b} \wedge (\mathbf{u}_2 \lrcorner \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4.$$

这种恒等式可以推广。具体而言，若 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k \in \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，则 $\mathbf{b} \wedge (\mathbf{u}_i \lrcorner \boldsymbol{\omega})$ 是将 $\boldsymbol{\omega}$ 中的 $\mathbf{u}_i$ 替换为 $\mathbf{b}$ 后得到的 k-向量，也就是说，

$$\mathbf{b} \wedge (\mathbf{u}_i \lrcorner \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i-1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_{i+1} \wedge \ldots \mathbf{u}_k. \tag{21}$$

3 圆盘集

本节讨论 $\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-k)$ 维圆盘集。这些圆盘将用于定义分数阶 k 维测度。我们将建立这些圆盘的若干测度论性质，以阐明定义分数阶测度时所积分的圆盘子集。我们发现，使用定向圆盘更为方便，因此本文其余部分中，圆盘均指定向圆盘。

每个 $(n-k)$ 维圆盘都可以用其中心 p、半径 $r > 0$，以及由 $\boldsymbol{\omega} \in \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$ 表示的垂直 k 维（定向）子空间来表示，使得

$$D(p, \boldsymbol{\omega}, r) \coloneqq \{p + \xi \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \in \mathcal{U}([\boldsymbol{\omega}]^\perp), \xi \in [0, r)\} \tag{22}$$

是这样一个圆盘。我们将这些圆盘之一的边界 $\partial D(p, \boldsymbol{\omega}, r)$ 定义为 $(n-2)$ 维流形

$$\partial D(p, \boldsymbol{\omega}, r) \coloneqq \{p + r\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \in \mathcal{U}([\boldsymbol{\omega}]^\perp)\}.$$

因此，所有圆盘的集合可以用集合来描述

$$\mathcal{D} \coloneqq \mathbb{R}^n \times \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^+.$$

注意，该集合的豪斯多夫维数为 $n + k(n-k) + 1$。

固定一个有界的 k 维流形 $\mathcal{M}$，使其边界 $\partial\mathcal{M}$ 是一个 $(k-1)$ 维流形，因此 $\overline{\mathcal{M}}$ 是带边界的流形。令 $\mathbf{vol}_\mathcal{M}$ 表示 $\overline{\mathcal{M}}$ 的一个体积形式，使得对于每个 $z \in \overline{\mathcal{M}}$，$\mathbf{vol}_\mathcal{M}(z) \in \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$ 且 $[\mathbf{vol}_\mathcal{M}] = T_z\overline{\mathcal{M}}$。请记住，我们并未假设 $\mathcal{M}$ 是可定向的，因此 $\mathbf{vol}_\mathcal{M}$ 可能不连续。我们定义 $\mathcal{D}$ 的以下子集：

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\partial\mathcal{M}} &\coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^0(\overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \partial\mathcal{M}) \neq 0\},\\
\mathcal{D}_{\tan} &\coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D} : \text{there is } z \in \overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \overline{\mathcal{M}} \text{ such that } \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{vol}_\mathcal{M}(z) = 0\},\\
\mathcal{D}_{\infty} &\coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^0(\overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \mathcal{M}) = \infty\},\\
\mathcal{D}_{\partial D} &\coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^0(\partial D(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \mathcal{M}) \geq 1\}.
\end{aligned}$$

粗略地说，这些集合可解释如下： $\mathcal{D}_{\partial\mathcal{M}}$ 由与 $\mathcal{M}$ 的边界相交的圆盘组成， $\mathcal{D}_{\tan}$ 由与流形相切的圆盘组成， $\mathcal{D}_{\infty}$ 是与 $\mathcal{M}$ 相交无穷多次的圆盘的集合，而 $\mathcal{D}_{\partial D}$ 由其边界与 $\mathcal{M}$ 相交的圆盘组成。

在下面的引理中，我们将证明这些集合的维数至多为 $n+k(n-k)$，比 $\mathcal{D}$ 的维数少一。为此，我们将使用集合

$$\mathcal{W} \coloneqq \{(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n) \times \hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n) : \mathbf{a} \in [\boldsymbol{\omega}]^{\perp}\}. \tag{23}$$

$\mathcal{W}$ 中的每个元素都给出一个方向 $\mathbf{a}$ 和一个单位模简单 k-向量 $\boldsymbol{\omega}$，后者确定一个垂直于 $\mathbf{a}$ 的子空间。换句话说， $\boldsymbol{\omega}$ 是 $(n-1)$ 维空间 $[\mathbf{a}]^{\perp}$中的一个 k-向量。因此， $\mathcal{W}$ 的维数为 $n-1+k(n-k-1)$。

引理 3.1。 给定一个有界开集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$，以下结论成立：

1. $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(\mathcal{D}_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathcal{E}) < \infty$,
2. $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(\mathcal{D}_{\tan} \cap \mathcal{E}) < \infty$,
3. $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(\mathcal{D}_{\partial D} \cap \mathcal{E}) < \infty$,
4. $\mathcal{D}_{\infty} \subseteq \mathcal{D}_{\tan}$.

证明。 证明本引理第一部分时，我们将使用附录中公式 (44) 定义的函数 Ξ。令 $\mathcal{E}_{\Xi} = \Xi^{-1}(\mathcal{E})$，并选取 $R > 0$，使得若 $(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{E}$，则$r \in (0, R]$。

项目 *1*。 考虑集合

$$A_{\partial\mathcal{M}} \coloneqq \partial\mathcal{M} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

注意， $A_{\partial\mathcal{M}}$ 的豪斯多夫维数为 $n+k(n-k)$ 和 $\mathcal{D}_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathcal{E} \subseteq \Xi(A_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathcal{E}_{\Xi})$。由于 Ξ在 $A_{\partial\mathcal{M}}$上是利普希茨的，若有 $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(A_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathcal{E}_{\Xi}) < \infty$，则意味着 $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(\mathcal{D}_{\partial\mathcal{M}} \cap \mathcal{E}) < \infty$。项目 *2*。 考虑集合

$$A_{\tan} \coloneqq \bigcup_{z \in \mathcal{M}} \big(\{z\} \times \{(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{W} : \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{vol}_{\mathcal{M}}(z) = 0\}\big) \times \{(\xi, r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : 0 \le \xi \le r \le R\}.$$

此处的论证与项目 1 中的类似，只需将 $A_{\partial\mathcal{M}}$ 替换为 $A_{\tan}$，但我们需要计算 $A_{\tan}$的维数。对于 z，有 k 个维度；（$\mathbf{a}$ $\boldsymbol{\omega}$）有$n-1+k(n-k-1)$个维度，但由于约束条件$\boldsymbol{\omega}$ **体积** $_{\mathcal{M}}(z) = 0$，需要减去一个维度；而且 ξ 和 r 还包含另外两个维度。将这些相加，可得 $A_{\tan}$ 的豪斯多夫维数为 $n+k(n-k)$。

条目 *3*。为了描述 $\mathcal{D}_{\partial D}$ 中的圆盘，我们定义一个映射

$$\Psi : \mathcal{M} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \times \hat{\Lambda}^k_u(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^+$$

by

$$\Psi(z, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, r) \coloneqq (z + r\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, r), \qquad (z, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{M} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+.$$

令 $\mathcal{E}_\Psi \coloneqq \Psi^{-1}(\mathcal{E})$，并考虑

$$A_{\partial D} \coloneqq \mathcal{M} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+.$$

与前面部分一样，可以看出 $\mathcal{D}_{\partial D} \cap \mathcal{E} \subseteq \Psi(A_{\partial D} \cap \mathcal{E}_\Psi)$。由于 Ψ 是利普希茨函数，且 $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(A_{\partial D} \cap \mathcal{E}_\Psi) < \infty$，因此可得 $\mathcal{H}^{n+k(n-k)}(\mathcal{D}_{\partial D} \cap \mathcal{E}) < \infty$.

第 4 项。考虑 $(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D}_\infty$，使得 $\mathcal{H}^0(\overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \mathcal{M}) = \infty$.。由于 $\overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \overline{\mathcal{M}}$ 是紧集，因此它有一个聚点，我们将其记为 $z \in \overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \overline{\mathcal{M}}$。假设 $(p, \boldsymbol{\omega}, r) \notin \mathcal{D}_{\tan}$，使得 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{vol}_{\mathcal{M}}(z) \neq 0$。这意味着 $T_z\overline{\mathcal{M}}$ 和 $[\boldsymbol{\omega}]^\perp$ 没有共同方向。在 z 的足够小的邻域内，我们可以用它的切平面对 $\overline{\mathcal{M}}$ 作局部近似。由于切平面中的方向与张成圆盘的方向均不相同，因此在 z 的一个足够小的邻域内，$\overline{D}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \overline{\mathcal{M}}$ 中除 z之外没有其他点，这与 z是聚点相矛盾。因此，我们必须有 $(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D}_{\tan}$。

□

我们还需要圆盘集

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) \coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^0(D(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \mathcal{M}) \text{ is odd}\},$$

它由与 $\mathcal{M}$ 相交奇数次的圆盘组成。为了定义分数阶测度的概念，我们将对这个圆盘集积分，其豪斯多夫维数为 $n + k(n-k) + 1$。由引理 3.1 可知，在计算圆盘与 $\mathcal{M}$的交点时，是否计入位于 $\mathcal{M}$ 边界或圆盘边界上的交点并不重要。此外，计算交点时可以忽略曲面与圆盘相切的点。

4 分数阶测度

本节定义一种 k维测度的分数阶概念，并说明在适当的极限下，它会收敛到 $\mathcal{H}^k$测度，二者相差一个乘法常数。

设 Ω 是一个开有界集。我们定义相对于 Ω 的 $\mathcal{M}$ 的 k 维 σ 测度如下：

$$\mathrm{Meas}_\sigma^k(\mathcal{M}, \Omega) \coloneqq \int_{\mathcal{D}(\mathcal{M})} r^{k-n-\sigma} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}([\boldsymbol{\omega}]^\perp)} \chi_\Omega(p + r\mathbf{u})\, d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(p, \boldsymbol{\omega}, r). \tag{24}$$

为简单起见，假设 $\mathcal{M} \subseteq \Omega$。定义

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M}) \coloneqq \{(p, \boldsymbol{\omega}, r) \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) : \partial D(p, \boldsymbol{\omega}, r) \cap \Omega \neq \emptyset)\},$$

我们有

$$\mathrm{Meas}_\sigma^k(\mathcal{M},\Omega)=\int_{\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M})} r^{k-n-\sigma}\,d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(p,\boldsymbol{\omega},r).$$

首先，我们验证这个积分是有限的。下文用 $\mathrm{diam}(\Omega)$ 表示 Ω 的直径；由于 Ω 有界，因此该值有限。利用 (44) 中定义的函数，可以得到

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M})\subseteq \Xi\Big(\bigcup_{\xi\in\mathbb{R}_0^+}\mathcal{M}\times\mathcal{W}\times\{\xi\}\times[\xi,\xi+\mathrm{diam}(\Omega)]\Big). \tag{25}$$

事实上，若 $(p,\boldsymbol{\omega},r)\in\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M})$，则 $D(p,\boldsymbol{\omega},r)$ 与 $\mathcal{M}$ 相交有限次，因此我们可以找到与 p 之间的最小距离为 $z\in\mathcal{M}\cap D(p,\boldsymbol{\omega},r)$，使得 $(p-z)\in[\boldsymbol{\omega}]^\perp$。令 $\xi=|p-z|$，并取一个 $=(p-z)/\xi$（若 $z\neq p$）；若 $z=p$，则 $\mathbf{a}$ 可以任意取值。由此可得 $\Xi(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},\xi,r)=(p,\boldsymbol{\omega},r)$。此外，由于 $z\in D(p,\boldsymbol{\omega},r)$，我们知道 $\xi\le r$，而 $\partial D(p,\boldsymbol{\omega},r)\cap\Omega\neq\emptyset$ 蕴含 $r\le\xi+\mathrm{diam}(\Omega)$。为验证最后这个结论，令 $q\in\partial D(p,\boldsymbol{\omega},r)\cap\Omega$，并注意到

$$r=|p-q|\le|p-z|+|z-q|\le\xi+\mathrm{diam}(\Omega)$$

因为 $z\in\mathcal{M}\subseteq\Omega$。因此 $(p,\boldsymbol{\omega},r)\in\mathcal{M}\times\mathcal{W}\times\cup_{\xi\in\mathbb{R}_0^+}(\{\xi\}\times[\xi,\xi+\mathrm{diam}(\Omega)])$，所以 (25) 成立。

现在，我们可以利用引理 A.1 中的变量替换来证明 σ-测度是有限的。首先，令 $m=\dim\mathcal{W}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Meas}_\sigma^k(\mathcal{M},\Omega)\le&\int_{\mathcal{M}}\int_0^\infty\int_{\mathcal{W}}\int_\xi^{\xi+\mathrm{diam}(\Omega)} r^{k-n-\sigma}\frac{\xi^{n-k-1}}{2^{k/2}}|\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}(z)\cdot\boldsymbol{\omega}|dr d\mathcal{H}^m(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})d\xi dz\\ \le&\mathcal{H}^k(\mathcal{M})2^{-k/2}\mathcal{H}^m(\mathcal{W})\int_0^\infty\int_\xi^{\xi+\mathrm{diam}(\Omega)} r^{k-n-\sigma}\xi^{n-k-1}dr d\xi\\ =&\frac{\mathcal{H}^k(\mathcal{M})2^{-k/2}\mathcal{H}^m(\mathcal{W})}{n-k+\sigma-1}\int_0^\infty \xi^{-\sigma}-\frac{\xi^{n-k-1}}{(\xi+\mathrm{diam}(\Omega))^{n-k+\sigma-1}}d\xi.\end{aligned}$$

为了说明这个积分为何有限，固定 $\varepsilon\in(0,\infty)$。我们将积分分解为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \xi^{-\sigma}-\frac{\xi^{n-k-1}}{(\xi+\mathrm{diam}(\Omega))^{n-k+\sigma-1}}d\xi=&\int_0^\varepsilon \xi^{-\sigma}-\frac{\xi^{n-k-1}}{(\xi+\mathrm{diam}(\Omega))^{n-k+\sigma-1}}d\xi\\ &+\int_\varepsilon^\infty \xi^{-\sigma}-\frac{\xi^{n-k-1}}{(\xi+\mathrm{diam}(\Omega))^{n-k+\sigma-1}}d\xi.\end{aligned}$$

第一个积分是有限的，因为 $\sigma\in(0,1)$，且被积函数中的第二项有界。对于后一个积分，我们对其应用中值定理

$$h_\xi(x)\coloneqq\xi^{n-k-1}(\xi+x)^{1+k-n-\sigma},\qquad x\in(0,\mathrm{diam}(\Omega)).$$

对于每个 $\xi \in (\varepsilon, \infty)$，都存在 $c_\xi \in (0, \mathrm{diam}(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned} h_\xi(0) - h_\xi(\mathrm{diam}(\Omega)) &= h'_\xi(c_\xi)(0 - \mathrm{diam}(\Omega)) \\ &= \mathrm{diam}(\Omega)(n-k-1+\sigma)\xi^{n-k-1}(\xi + c_\xi)^{k-n-\sigma} \\ &\le \mathrm{diam}(\Omega)(n-k-1+\sigma)\xi^{-\sigma-1}. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \xi^{-\sigma} - \frac{\xi^{n-k-1}}{(\xi + \mathrm{diam}(\Omega))^{n-k+\sigma-1}} d\xi &\le \int_\varepsilon^\infty \mathrm{diam}(\Omega)(n-k-1+\sigma)\xi^{-\sigma-1} d\xi \\ &= \frac{\mathrm{diam}(\Omega)(n-k-1+\sigma)\varepsilon^{-\sigma}}{\sigma}. \end{aligned} \tag{26}$$

因此， σ-测度是有限的。

注 4.1。 Meas_σ^k 的定义不仅在 $1 \le k < n$ 时有意义，在适当解释的情况下， $k = 0$ 也同样有意义。根据定义，0-向量的集合就是数，因此 $\hat{\Lambda}_u^0(\mathbb{R}^n) = \{-1, 1\}$。此外，按照惯例， $[\pm 1] = \{\mathbf{0}\}$，所以 $[\pm 1]^\perp = \mathbb{R}^n$。因此，按 (22) 定义的 n 维圆盘是一个定向球，其定向取决于 $\boldsymbol{\omega} \in \hat{\Lambda}_u^0(\mathbb{R}^n) = \{-1, 1\}$ 的符号。

当 $\Lambda_u^n(\mathbb{R}^n) = n$ 时，(24) 中定义的 σ-测度是有用处。在这种情况下，$\mathcal{U}([\mathbf{体积}_n]^\perp) = \mathcal{U}(\{\mathbf{0}\}) = \emptyset$，(22) 中的每个圆盘都是空集。因此，不存在与 $\mathcal{M}$ 相交奇数次的圆盘，所以 (24) 中的积分始终为零。

我们的下一个目标是证明，在适当的极限下，分数 k 维测度会收敛到一个乘法常数倍的 k 维豪斯多夫测度。为计算这个常数，我们使用两个预备结果；这两个结果都会用到位于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{X}$ 中的 k 个正交单位向量：

$$\mathcal{U}_\perp^k(\mathcal{X}) := \{(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k) : \mathbf{u}_i \in \mathcal{U}(\mathcal{X}), \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, 1 \le i < j \le k\}.$$

引理 4.2。 设 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 q 维子空间， $\boldsymbol{\mu} \in \hat{\Lambda}^k(\mathcal{Z})$，且 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $p \le k$ 和 $p \le q$。则

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}_\perp^p(\mathcal{Z})} |(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) \lrcorner \boldsymbol{\mu}| d\mathcal{H}^{\frac{p(2q-p-1)}{2}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p) \\ &\qquad = \frac{2^{\frac{p+1}{2}} \pi^{\frac{q-p+1}{2}} \Gamma(\frac{k-p+2}{2})}{\Gamma(\frac{k-p+1}{2})\Gamma(\frac{q-p+2}{2})} \int_{\mathcal{U}_\perp^{p-1}(\mathcal{Z})} |(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{p-1}) \lrcorner \boldsymbol{\mu}| d\mathcal{H}^{\frac{(p-1)(2q-p)}{2}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p-1}). \end{aligned}$$

证明。 思路是利用余面积公式将积分 $\mathcal{U}_\perp^p(\mathcal{Z})$ 写成迭代积分，然后使用引理 A.2 计算内层积分；该积分是在单位向量构成的集合上进行的。

引理 A.2。为此，定义 $H\colon \mathcal{U}_{\perp}^{p}(\mathcal{Z}) \to \mathcal{U}(\mathcal{Z})$，使其满足 $H(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p) = \mathbf{u}_p$。考虑一个固定的 $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p) \in \mathcal{U}_{\perp}^{p}(\mathcal{Z})$，以及一组向量 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q-p}\}$，使得$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q-p}\}$ 构成 $\mathcal{Z}$ 的标准正交基。因此，$T_{(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)}\mathcal{U}_{\perp}^{p}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}^p$ 的一组标准正交基由以下两组向量的并集构成：

1. $\{\mathbf{E}_{ij}\colon \ 1 \le i \le p, 1 \le j \le q-p\}$，其中 $\mathbf{E}_{ij} := (0, ..., \mathbf{e}_j, ..., 0)$ 是一个由 p 个向量组成的列表，$\mathbf{e}_j$ 位于第 i 个位置。该集合包含 $p(q-p)$ 个向量。

2. $\{\mathbf{F}_{ij}\colon \ 1 \le i < j \le p\}$，其中 $\mathbf{F}_{ij} := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, .., \mathbf{u}_j, ..., -\mathbf{u}_i, ..., 0)$ 是一个由 p 个向量组成的列表，$\mathbf{u}_j$ 位于第 i 个位置，$-\mathbf{u}_i$ 位于第 j 个位置。该集合包含 $p(p-1)/2$ 个向量。

$T_{\mathbf{u}_p}\mathcal{U}(\mathcal{Z})$ 的一组标准正交基为 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q-p}\}$。注意，

1. $\nabla H(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)\mathbf{E}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{若 } i \ne p \\ \mathbf{e}_j, & \text{若 } i = p, \end{cases}$ 对于 $1 \le j \le q-p$；2. $\nabla H(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)\mathbf{F}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{若 } j \ne p, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ i & j = p \ \mathbf{u}, \text{若对于 } 1 \le i \le p-1。 \end{cases}$

因此，相对于这些基底的矩阵 $[\nabla H]$ of ∇H 为

$$[\nabla H] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{E}_{ij} & \mathbf{E}_{ij} & \mathbf{F}_{ij} & \mathbf{F}_{ij} \\ i \ne j & i = p & j \ne p & j = p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{p-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{q-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p-1 \\ q-p \end{array}$$

因此，

$$\det(\nabla H \nabla H^T) = 2^{1-p}.$$

因此，余面积公式结合式 (14) 得出

$$\int_{\mathcal{U}_{\perp}^{p}(\mathcal{Z})} |(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) \lrcorner \boldsymbol{\mu}| d\mathcal{H}^{\frac{p(2q-p-1)}{2}}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p) =$$
$$2^{\frac{p-1}{2}} \int_{\mathcal{U}_{\perp}^{p-1}(\mathcal{Z})} \int_{\mathcal{U}(\mathcal{Z} \cap \{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{p-1}\}^{\perp})} |\mathbf{u}_p \lrcorner ((\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_{p-1}) \lrcorner \boldsymbol{\mu})| \, d\mathbf{u}_p d\mathcal{H}^{\frac{(p-1)(2q-p)}{2}}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{p-1}) \quad (27)$$

令 $\mathcal{X} = \mathcal{Z} \cap \{\mathbf{u}_1, ... \mathbf{u}_{p-1}\}^{\perp}$ 以及 $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_{p-1}) \lrcorner \boldsymbol{\mu}$，则 (27) 右侧的内层积分可写为

$$\int_{\mathcal{U}(\mathcal{X})} |\mathbf{u}_p \lrcorner \boldsymbol{\lambda}| \, d\mathbf{u}_p.$$

为计算此积分，我们对 $\mathcal{Y}=[\boldsymbol{\lambda}]$ 使用引理 A.2。利用 (17)$_1$, , 令$d=\dim(\mathcal{X})$ 和 $\ell=\dim(\mathcal{X}\cap[\boldsymbol{\lambda}])$，并使用 (8) 和 (9)，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}(\mathcal{X})}|\mathbf{u}_p\lrcorner\boldsymbol{\lambda}|\,d\mathbf{u}_p &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{X}\cap[\boldsymbol{\lambda}])}\int_{\mathcal{U}(\mathcal{X}\cap[\boldsymbol{\lambda}]^\perp)}\int_0^{\pi/2}|\boldsymbol{\lambda}|\cos\theta\cos^{\ell-1}\theta\sin^{d-\ell-1}\theta\,d\theta\,d\mathbf{y}'\,d\mathbf{y}\\ &= \omega_{\ell-1}\omega_{d-\ell-1}|\boldsymbol{\lambda}|\frac{1}{2}B(\frac{d-\ell}{2},\frac{\ell+1}{2})\\ &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{\ell+1}{2})}{\Gamma(\frac{\ell}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})}|\boldsymbol{\lambda}|. \end{aligned}\tag{28}$$

由于 $\mathcal{X}$和 $\boldsymbol{\lambda}$取决于 $(\mathbf{u}_1,\dots\mathbf{u}_{p-1})$， d和 ℓ也可能取决于它们。可以看出$d=q-p+1$。要分析 ℓ，首先注意到 $[\boldsymbol{\lambda}]\subseteq\mathcal{X}$，因此 $\ell=\dim([\boldsymbol{\lambda}])$。此外，对于几乎所有的 $(\mathbf{u}_1,\dots\mathbf{u}_p)\in\mathcal{U}_\perp^p$，子空间 $[\mathbf{u}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{u}_p]$与 $[\boldsymbol{\mu}]$不正交，因此，$\boldsymbol{\lambda}=(\mathbf{u}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{u}_{p-1})\lrcorner\boldsymbol{\mu}$是一个非零的 $(k-p+1)$-向量。因此，一般而言， $\ell=k-p+1$。利用 d和 ℓ的这些取值，我们可以将 (28) 代入 (27)，得到所需结果。

□

引理 4.3。 给定一个简单的单位 k-向量 $\boldsymbol{\nu}\in\hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$，对于 $0\le k<n$，有

$$\int_{\mathcal{W}}|\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}|d\mathcal{H}^m(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\omega})=\frac{2^{\frac{k+4}{2}}\pi^{\frac{(n+2)(k+1)}{2}}\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}\prod_{i=1}^{k+1}\frac{\Gamma(\frac{i}{2})}{\pi^i\Gamma(\frac{n-i+1}{2})},\tag{29}$$

其中 $m=$维数$\mathcal{W}=n-1+k(n-k-1)$。

证明。 首先处理 $k=0$ 情形。如注 4.1 所述，根据定义 $\hat{\Lambda}_u^0(\mathbb{R}^n)=\{-1,1\}$ 和 $[\pm1]^\perp=\mathbb{R}^n$。因此

$$\mathcal{W}=\{(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega}):\mathbf{a}\in\mathcal{U}(\mathbb{R}^n),\boldsymbol{\omega}=\{-1,1\}\}.$$

因此，

$$\int_{\mathcal{W}}|\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}|d\mathcal{H}^m(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})=2\int_{\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)}d\mathcal{H}^{n-1}=2\omega_{n-1}.$$

当 $k=0$时，这就是 (29)。

为了建立 $1\le k<n$ 的公式，我们将反复使用余面积公式。首先，将对 $\mathcal{W}$ 的积分转换为在 $\in\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^\perp)$ 上的迭代积分。接着利用这样一个事实：$\hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^\perp)$ 中的每个元素都是 $\mathcal{U}([\mathrm{a}]^\perp)$ 中 k 个正交向量的楔积，从而将对 $\hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^\perp)$ 的积分与对 $\mathcal{U}_\perp^k([\mathrm{a}]^\perp)$ 的积分联系起来。随后可利用引理 4.2 反复计算该积分。最后，使用引理 A.2 计算在 $\in\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ 上的积分。

步骤 *1*： 我们将把在 $\mathcal{W}$ 上的积分转换为累次积分。令 $F\colon\ \mathcal{W}\to\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ 由 $F(\mathrm{a}\ \boldsymbol{\omega})=\mathrm{a}$ 对所有 $(\mathrm{a}\ \boldsymbol{\omega})\in\mathcal{W}$ 定义。固定某个 $(\mathrm{a}\ \boldsymbol{\omega})\in\mathcal{W}$，并注意到由于$\boldsymbol{\omega}\in\hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n)$，我们可以写成 $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{u}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{u}_k$，其中 $\{\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k\}$ 是一组标准正交基

对于 $[\boldsymbol{\omega}]$。由此可知，由于 $\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$，我们可以通过添加 $n-k-1$ 个向量，将集合 $\{\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$ 扩展为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基：$\{\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n-k-1}\}$.。利用这组基，我们可以构造 $T_{(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})}\mathcal{W}$ 的一组标准正交基。使用 (21) 中的符号，该基可以写成以下集合的并集

1. $\{(\mathbf{e}_i, \mathbf{0}) : 1 \le i \le n-k-1\}$,
2. $\{(\mathbf{0}, \mathbf{e}_i \wedge (\mathbf{u}_j \lrcorner \boldsymbol{\omega})) : 1 \le i \le n-k-1, 1 \le j \le k\}$,
3. $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_j, -\mathbf{a} \wedge (\mathbf{u}_j \lrcorner \boldsymbol{\omega})) : 1 \le j \le k\}$.

注意到

1. $\nabla F(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{e}_i, \mathbf{0}) = \mathbf{e}_i$,
2. $\nabla F(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{0}, \mathbf{e}_i \wedge (\mathbf{u}_j \lrcorner \boldsymbol{\omega})) = \mathbf{0}$,
3. $\nabla F(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_j, -\mathbf{a} \wedge (\mathbf{u}_j \lrcorner \boldsymbol{\omega}))\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_j$.

由于 $T_{\mathbf{a}}\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ 的一组标准正交基为 $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_{n-k-1}\}$，我们可以按照上述列表中的顺序，计算相对于这些基的 $[\nabla F]$ 的矩阵 ∇F，得到

$$[\nabla F] = \begin{array}{c} \\ n-k-1 \\ \\ k \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} n-k-1 & k(n-k-1) & k \end{array}}{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_k \\ \mathbf{1}_{n-k-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \\ k \\ \\ n-k-1 \end{array}.$$

因此,

$$[\nabla F][\nabla F]^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{1}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-k-1} \end{pmatrix} \quad \text{and so} \quad \det(\nabla F \nabla F^T) = \frac{1}{2^k}.$$

回忆一下，$\mathrm{P}_{\mathbf{a}}$ 是到 $[\mathbf{a}]$ 上的投影，而 $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}$ 是到 $[\mathbf{a}]^{\perp}$ 上的投影。注意，$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathrm{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}$, 因为 $\mathbf{a} \lrcorner \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.。利用 F 和余面积公式，我们有

$$\int_{\mathcal{W}} |\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}| d\mathcal{H}^m(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = 2^{\frac{k}{2}} \int_{\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)} \int_{\hat{\Lambda}_u^k([\mathbf{a}]^{\perp})} |\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^{\perp}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}| d\mathcal{H}^{k(n-k-1)}(\boldsymbol{\omega}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{a}). \tag{30}$$

步骤 *2*：我们利用这样一个事实：$\hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^{\perp})$ 中的每个元素都是 $\mathcal{U}([\mathrm{a}]^{\perp})$ 中 k 个正交向量的楔积，从而将 $\hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^{\perp})$ 上的积分与 $\mathcal{U}_{\perp}^k([\mathrm{a}]^{\perp})$ 上的积分联系起来。定义 $G: \mathcal{U}_{\perp}^k([\mathrm{a}]^{\perp}) \to \hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^{\perp})$ 为

$$G(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k, \qquad (\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_k) \in \mathcal{U}_{\perp}^k([\mathbf{a}]^{\perp}).$$

对于 $\boldsymbol{\omega} \in \hat{\Lambda}_u^k([\mathrm{a}]^{\perp})$，固定 $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \in \mathcal{U}_{\perp}^k([\mathrm{a}]^{\perp})$，使得 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k$。将集合 $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$ 扩充为 $[\mathrm{a}]^{\perp}$ 的标准正交基：$\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n-k-1}\}$.。那么

$T_{(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)}\mathcal{U}^k_\perp([\mathrm{a}]^\perp)$的标准正交基与引理 4.2 中的构造相同，其中 $p = k$ 和$q = n-1$。可以计算得

$$\nabla G(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k)\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_j \wedge (\mathbf{u}_i \lrcorner \boldsymbol{\omega}) \quad \text{and} \quad \nabla G(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k)\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}.$$

事实上，后一项为零，因为沿 $\mathbf{F}_{ij}$ 方向调整 $(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k)$ 相当于一次旋转，因此调整后向量的楔积保持不变。

此外，集合 $\{\mathbf{e}_j \wedge (\mathbf{u}_i \lrcorner \boldsymbol{\omega}) : 1 \le i \le k, 1 \le j \le n-k-1\}$ 由 $k(n-k-1)$ 个 $T_{\boldsymbol{\omega}}\hat{}\Lambda^k_u([\mathrm{a}]^\perp)$ 中的元素组成，因此构成该集合的标准正交基。相对于这些基， ∇G 的矩阵$[\nabla G]$ 为

$$[\nabla G] = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{c} k(n-k-1) \quad k(k-1)/2 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{k(n-k-1)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{and so} \qquad \det(\nabla G \nabla G^T) = 1.$$

原像 $G^{-1}(\boldsymbol{\omega})$ 是 $\mathcal{U}^k_\perp([\mathrm{a}]^\perp)$ 中与我们固定的 $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ 通过旋转相关联的元素集合。因此 $\mathcal{H}^{\frac{k}{(k-1)^2}}(G^{-1}(\boldsymbol{\omega})) = \mathcal{H}^{\frac{k}{(k-1)^2}}(\mathrm{SO}(k))$。于是，根据余面积公式，(30) 右端的内层积分变为

$$\int_{\hat{\Lambda}^k_u([\mathbf{a}]^\perp)} |\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}| \, d\mathcal{H}^{k(n-k-1)}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\mathcal{H}^{\frac{k(k-1)}{2}}(\mathrm{SO}(k))} \int_{\mathcal{U}^k_\perp([\mathbf{a}]^\perp)} |\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k| \, d\mathcal{H}^{\frac{k(2n-k-3)}{2}}(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k). \quad (31)$$

步骤 *3*：我们通过计算来简化 (31) 的右端

$$\int_{\mathcal{U}^k_\perp([\mathbf{a}]^\perp)} |\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k| \, d\mathcal{H}^{\frac{k(2n-k-3)}{2}}(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k)$$

利用引理 4.2。为此，首先注意到

$$\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k = (\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) \lrcorner \mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}.$$

因此，我们可以将引理 4.2 应用于 $\mathcal{Z} = [\mathrm{a}]^\perp$、 $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}$ 和 $p = k$ ，从而得到

$$\int_{\mathcal{U}^k_\perp([\mathbf{a}]^\perp)} |\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k| \, d\mathcal{H}^{\frac{k(2n-k-3)}{2}}(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k) = C(n,k,k) \int_{\mathcal{U}^{k-1}_\perp([\mathbf{a}]^\perp)} |(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{k-1}) \lrcorner \mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}| \, d\mathcal{H}^{\frac{(k-1)(2n-k-2)}{2}}(\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_{k-1}),$$

其中

$$C(n,k,i) = \frac{2^{\frac{i+1}{2}}\pi^{\frac{n-i}{2}}\Gamma(\frac{k-i+2}{2})}{\Gamma(\frac{k-i+1}{2})\Gamma(\frac{n-i+1}{2})}.$$

我们可以继续应用引理 4.2，得到

$$\int_{\mathcal{U}^k_\perp([\mathbf{a}]^\perp)} |\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{u}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{u}_k|\,d\mathcal{H}^{\frac{k(2n-k-3)}{2}}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)=\prod_{i=1}^{k}C(n,k,i)|\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}|. \tag{32}$$

利用式 (7) 计算可得

$$K:=\prod_{i=1}^{k}C(n,k,i)=\frac{2^{\frac{k(k+3)}{4}}\pi^{\frac{k(2n-k-1)-2}{4}}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(\frac{n-i+1}{2})}. \tag{33}$$

综合式 (30)、(31) 和 (32)，可得

$$\int_{\mathcal{W}}|\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}|d\mathcal{H}^m(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})=\frac{2^{\frac{k}{2}}K}{\mathcal{H}^{\frac{k(k-1)}{2}}(\mathrm{SO}(k))}\int_{\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)}|\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}|d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{a}). \tag{34}$$

步骤四： 通过引理 A.2 将 $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ 分解为 $\mathcal{U}([\boldsymbol{\nu}])$ 和$\mathcal{U}([\boldsymbol{\nu}]^\perp)$，从而完成积分计算。由式 $(17)_2$ 和引理 A.2，可得:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)}|\mathbf{P}^\perp_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\nu}|d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{a})&=\int_{\mathcal{U}([\boldsymbol{\nu}])}\int_{\mathcal{U}([\boldsymbol{\nu}]^\perp)}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^{k-1}\theta\sin^{n-k-1}\theta\,d\theta d\mathcal{H}^{n-k-1}d\mathcal{H}^{k-1}\\&=\omega_{k-1}\omega_{n-k-1}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-k+1}{2},\frac{k}{2}\right)\\&=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n-k}{2})}.\end{aligned} \tag{35}$$

将式 (35) 和 (33) 代入式 (34)，可得

$$\int_{\mathcal{W}}|\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}|d\mathcal{H}^m(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})=\frac{2^{\frac{(k+4)(k+1)}{4}}\pi^{\frac{2kn-k^2+2n-k-2}{4}}\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n-k}{2})\mathcal{H}^{\frac{k(k-1)}{2}}(\mathrm{SO}(k))\prod_{i=1}^{k}\Gamma(\frac{n-i+1}{2})}.$$

现在代入式 (10)，即可得到所需结果。 □

定理 4.4. 若Ω 是一个开有界集，且满足 $\mathcal{M}\subseteq\Omega$，则

$$\lim_{\sigma\uparrow1}(1-\sigma)\mathrm{Meas}^k_\sigma(\mathcal{M},\Omega)=\frac{4\pi^{\frac{(n+2)(k+1)}{2}}\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})(n-k)}\prod_{i=1}^{k+1}\frac{\Gamma(\frac{i}{2})}{\pi^i\Gamma(\frac{n-i+1}{2})}\mathcal{H}^k(\mathcal{M}).$$

证明。令 $\varepsilon:=(1-\sigma)^{1/n}$ 并且

$$\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M}):=\{(p,\boldsymbol{\omega},r)\in\mathcal{D}(\mathcal{M}):r\le\varepsilon\}.$$

注意，对于足够小的 ε,

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M}) \setminus \mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M}) \subseteq \Xi\Big(\bigcup_{\xi\in\mathbb{R}^+} \mathcal{M}\times\mathcal{W}\times\{\xi\}\times[\max\{\xi,\varepsilon\}, \xi+\operatorname{diam}(\Omega)]\Big)$$

通过与证明（25）类似的论证。因此，利用引理 A.1 中的变量代换公式，我们知道存在一个取决于 $\mathcal{M}$ 和 n 的常数 C_n，使得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M})\setminus\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M})} r^{k-n-\sigma} d\mathcal{H}^{2n}(p,\boldsymbol{\omega},r) &\le C_n \int_0^\infty \int_{\max\{\xi,\varepsilon\}}^{\xi+\operatorname{diam}(\Omega)} r^{k-n-\sigma}\xi^{n-k-1} dr d\xi \\ &= \frac{C_n}{n+\sigma-k-1}\left[\int_0^\varepsilon \xi^{n-k-1}(\varepsilon^{k-n-\sigma+1} - (\xi+\operatorname{diam}(\Omega))^{k-n-\sigma+1})d\xi \right. \\ &\qquad \left. + \int_\varepsilon^\infty \xi^{-\sigma} - \xi^{n-k-1}(\xi+\operatorname{diam}(\Omega))^{k-n-\sigma+1} d\xi\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

观察（36）右侧的第一个积分，我们发现

$$\int_0^\varepsilon \xi^{n-k-1}(\varepsilon^{k-n-\sigma+1} - (\xi+\operatorname{diam}(\Omega))^{k-n-\sigma+1})d\xi \le \frac{\varepsilon^{1-\sigma}}{n-k},$$

当 $\sigma\uparrow 1.$ 时，它趋于 $1/(n-k)$。由（26）我们还可看到，当 $\sigma\uparrow 1.$ 时，（36）中的第二个积分乘以 $1-\sigma$ 后趋于零。因此

$$\lim_{\sigma\uparrow 1}(1-\sigma)\int_{\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{M})\setminus\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M})} r^{k-n-\sigma} d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(p,\boldsymbol{\omega},r) = 0. \tag{37}$$

对于每个 $(p,\ \boldsymbol{\omega},\ r)\ \in \mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M})$，我们知道至少存在一个 $z\in\mathcal{M}$，使得 $D(p,\ \boldsymbol{\omega},\ r)$ 与 $\mathcal{M}$ 在 z 处相交。定义 $f(p,\ \boldsymbol{\omega},\ r)\in\mathcal{M}$，令其为每个 $(p,\ \boldsymbol{\omega},\ r)\ \in\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M})$ 对应的一个这样选定的点。对于 $z\in\mathcal{M}$ 和 $(\mathbf{a}\ \boldsymbol{\omega})\ \in\mathcal{W}$，令

$$R_\varepsilon(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega}) \coloneqq \{(\xi,r)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ : (z+\xi\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},r)\in\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M}) \text{ and } f(z+\xi\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},r)=z\}.$$

我们定义了 f，使得 Ξ 在以下集合上是单射

$$\bigcup_{(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})\in\mathcal{M}\times\mathcal{W}} \{z\}\times\{\mathbf{a}\}\times\{\boldsymbol{\omega}\}\times R_\varepsilon(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega}).$$

要了解为何会如此，请考虑该集合中的两个点 $(z_1,\mathbf{a}_1,\boldsymbol{\omega}_1,\xi_1,r_1)$ 和 $(z_2,\mathbf{a}_2,\boldsymbol{\omega}_2,\xi_2,r_2)$，满足

$$\Xi(z_1,\mathbf{a}_1,\boldsymbol{\omega}_1,\xi_1,r_1) = \Xi(z_2,\mathbf{a}_2,\boldsymbol{\omega}_2,\xi_2,r_2).$$

由此可得

$$(z_1+\xi_1\mathbf{a}_1,\boldsymbol{\omega}_1,r_1) = (z_2+\xi_2\mathbf{a}_2,\boldsymbol{\omega}_2,r_2). \tag{38}$$

由此我们可以得出， $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$ 且 $r_1 = r_2$。还可得出

$$f(z_1 + \xi_1 \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\omega}_1, r_1) = f(z_2 + \xi_2 \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\omega}_1, r_2) =: z.$$

根据 f的定义，这意味着 $z = z_1 = z_2$。因此，由（38）可得$\xi_1 \mathsf{a}_1 = \xi_2 \mathsf{a}_2$。由于 ξ_1 和 ξ_2 均为正数，且 a_1 和 a_2 是单位向量，因此只有在 $\xi_1 = \xi_2$ 且 $\mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_2$时才可能成立。

再次应用引理 A.1 中的变量代换公式，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}_\varepsilon(\mathcal{M})} r^{k-n-\sigma}\, d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(p, \boldsymbol{\omega}, r) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{W}} \int_{R_\varepsilon(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})} r^{k-n-\sigma} \frac{\xi^{n-k-1}}{2^{k/2}} |\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}(z) \cdot \boldsymbol{\omega}|\, d\mathcal{H}^2(\xi, r) d\mathcal{H}^{n-1+k(n-k-1)}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) dz. \quad (39)
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{M}$ 是光滑流形，若（z, a $\boldsymbol{\omega}$）满足 $\mathsf{a} \notin [\textbf{体积}_{\mathcal{M}}(z)]$ 且 $\boldsymbol{\omega} \cdot \textbf{体积}_{\mathcal{M}}(z) \neq 0$，那么对于任意 ξ, $r > 0$，圆盘 $D(z + \xi \mathsf{a}\ \boldsymbol{\omega}, r)$在 z处不与 $\mathcal{M}$ 相切。由此可知，存在 ε_0，使得对于 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$，任意圆盘 $D(z + \xi \mathsf{a}\ \boldsymbol{\omega}, r)$（其中 $\xi \in [0, \varepsilon]$ 且 $r \in [\xi, \varepsilon]$）仅在 z处与$\mathcal{M}$ 相交。因此，对于这样的 ε，我们有

$$R_\varepsilon(z, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = \{(\xi, r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \xi \in [0, \varepsilon], r \in [\xi, \varepsilon]\}.$$

然后，进行积分并利用 $\lim\limits_{\sigma \uparrow 1} \varepsilon^{1-\sigma} = 1$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma \uparrow 1} (1 - \sigma) \int_{R_\varepsilon(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})} r^{k-n-\sigma} \xi^{n-k-1} d\mathcal{H}^2(\xi, r) &= \lim_{\sigma \uparrow 1} (1 - \sigma) \int_0^\varepsilon \int_\xi^\varepsilon r^{k-n-\sigma} \xi^{n-k-1} dr d\xi \\
&= \frac{1}{n-k}.
\end{aligned}$$

根据引理 3.1 中的第 2 项，我们知道与 $\mathcal{M}$ 相切的圆盘集的测度可以忽略。因此，结合前一个方程中的计算以及式 (37) 和 (39)，我们得到

$$\lim_{\sigma \uparrow 1} \mathrm{Meas}_\sigma^k(\mathcal{M}, \Omega) = \frac{2^{-k/2}}{n-k} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{W}} |\mathbf{vol}_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\omega}|\, d\mathcal{H}^{n-1+k(n-k-1)}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) dz.$$

结合引理 4.3，我们便得到了所需结果。 □

我们将 Meas_σ^k 称为“分数阶测度”，因为它概括了文献中出现的分数阶周长、分数阶面积和分数阶长度等概念。不过，必须牢记，相对于有界集 Ω 的 σ-测度并不是测度，因为它不具有可加性。为此，我们将在 $n = 1, k = 0$ 情形下，明确计算几个集合的 σ-测度。令 $\Omega = (-2, 2)$，我们将证明

$$\mathrm{Meas}_\sigma^0(\{-1, 1\}, \Omega) < \mathrm{Meas}_\sigma^0(\{-1\}, \Omega) + \mathrm{Meas}_\sigma^0(\{1\}, \Omega). \quad (40)$$

在 $n=1, k=0$ 情形下，圆盘就是定向开区间。若要使一个圆盘与$\{-1,1\}$ 相交奇数次，它必须包含 -1 或 1，但不能两者兼有。如果区间 p 的中心满足 $p<0$，那么只有当其半径 r 满足$|p+1|<r\le|1-p|$时，该区间才只包含 -1；而如果 $p>0$，那么只有当 $|1-p|<r\le|p+1|$时，该区间才只包含 1。此外，满足这些条件的任一区间，其端点都位于 Ω 内。因此，我们有

$$\mathrm{Meas}^0_\sigma(\{-1,1\},\Omega)=2\Big(\int_{-\infty}^{0}\int_{|p+1|}^{|1-p|}+\int_{0}^{\infty}\int_{|1-p|}^{|p+1|}\Big)r^{-1-\sigma}drdp=\frac{8}{\sigma(1-\sigma)}. \tag{41}$$

积分前的系数 2 源于这样一个事实：我们必须对两种定向的区间分别进行计算。接下来，我们计算 $\mathrm{Meas}^0_\sigma(\{1\},\Omega)$。如果 $p>0$，则以 p为中心、半径为 r 的区间将包含 1，且当 $|1-p|<r<|p+2|$时其边界点位于 Ω 中；而如果 $p<0$，则此类区间的半径必须满足 $|1-p|<r\lhd|2-p|$。因此，

$$\mathrm{Meas}^0_\sigma(\{1\},\Omega)=2\Big(\int_{-\infty}^{0}\int_{|1-p|}^{|2-p|}+\int_{0}^{\infty}\int_{|p-1|}^{|p+2|}\Big)r^{-1-\sigma}drdp=\frac{2^{3-\sigma}}{\sigma(1-\sigma)}.$$

根据对称性可得

$$\mathrm{Meas}^0_\sigma(\{-1\},\Omega)=\mathrm{Meas}^0_\sigma(\{1\},\Omega). \tag{42}$$

将 (41)–(42) 合并，即得 (40)。

5 未来方向

这里引入的分数阶测度概念开启了众多研究方向。下面我们概述其中几个。

几何测度论中的经典问题之一是 Plateau 问题。事实上，数十年来，这个问题一直推动着该领域的发展。关于这一问题的历史概述，参见 Harrison 和 Pugh [HP16]。在最经典的形式中，这个问题受肥皂膜研究的启发：给定三维空间中的一条空间曲线，是否存在一个面积最小的张成曲面[1]？将问题推广到 n维后，可以表述为：给定一个具有空边界的 $(n-2)$ 维流形 $\mathcal{N}$，是否存在一个 $(n-1)$ 维曲面 $\mathcal{M}$，使其 $\partial\mathcal{M}=\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{H}^{n-1}$ 测度最小？Caffarelli、Roquejoffre 和 Savin [CRS10]研究了这一问题的分数阶版本，并由此催生了大量关于非局部极小曲面的研究，正如引言中所提到的。还可以进一步推广 Plateau 问题，将 $\mathcal{N}$ 的维数设为 $k-1$，并寻找一个维数为 k、具有最小

[1]本节中，“曲面”和“流形”等术语的使用较为宽泛。这是因为最小面积对象未必是严格意义上的流形，也可能具有三重点等奇异点。

$\mathcal{H}^k$-测度的张成流形。相应的分数阶版本可以表述如下：给定一个具有空边界的 k 维流形 $\mathcal{N}$，以及一个包含 $\mathcal{N}$ 的开集 Ω，证明存在该泛函的一个极小化者

$$J_\sigma(\mathcal{M}) = \mathrm{Meas}_\sigma^k(\mathcal{M}, \Omega) \tag{43}$$

对所有满足 $\partial\mathcal{M} = \mathcal{N}$ 的 $\mathcal{M}$ 而言。除了证明极小化者存在之外，还可以研究其正则性。

另一个经典问题是等周不等式。最基本的形式表明，若一条长度为 L 的平面曲线围成一个面积为 A 的区域，那么

$$4\pi A \leq L^2,$$

等号仅当曲线是圆时成立。在 n 维空间中，对于具有有限 $\mathcal{H}^n$-测度的集合 E，相应的不等式为

$$n^n \alpha_n \mathcal{H}^n(E)^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)^n,$$

等号成立当且仅当 E 是一个球。Frank 和 Seiringer [FS08] 证明了该结果的一个分数阶周长版本。与 Plateau 问题类似，等周不等式也可以推广到任意余维。正如 Almgren [Alm86], 所证明的，对于每个 $k \leq n$，都存在一个带边界的 k 维流形 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$，使得

$$k^k \alpha_k \mathcal{H}^k(\mathcal{M})^{k-1} \leq \mathcal{H}^{k-1}(\partial\mathcal{M})^k$$

等号成立当且仅当 $\mathcal{M}$ 是一个 k 维圆盘。对于本文引入的分数阶测度概念，这一结果是否仍然成立，或许需要作出某种修改，值得进一步研究。

Plateau 问题和等周不等式的大部分分析都涉及使用比流形更一般的对象，例如平坦链、积分流和变分流形。因此，研究这些命题的分数阶版本，可能需要将 Meas_σ^k 的定义扩展到这类对象。这本身就是一个值得探究的课题。

最后，分数阶测度应能够为非局部平均曲率向量提供依据。正如引言中所述，σ-极小曲面必须在其边界上满足一个逐点条件；Abatangelo 和 Valdinoci [AV14] 曾利用该条件为曲面定义非局部平均曲率和方向曲率。除此之外，非局部方向曲率概念还为曲面上的非局部曲率张量（或第二基本形式）提供了依据，Paroni、Podio-Guidugli 和 Seguin [PPGS]对此作了阐述。Seguin [Seg20, Seg]引入分数长度概念后发现，在固定边界点的条件下，使该长度达到极小的曲线必须满足一个逐点条件；他利用该条件定义了曲线的非局部曲率概念。同理，式（43）的任何极小化者很可能都满足一个逐点条件，而该条件可用于定义流形的非局部平均曲率向量。

A 附录

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界 k维流形，其边界是一个（$k-1$）维流形。回顾式（23）中 $\mathcal{W}$ 的定义，并注意到**体积**$_{\mathcal{M}}$ 是 $\overline{\mathcal{M}}$的体积形式。为描述与 $\overline{\mathcal{M}}$ 相交的圆盘，我们考虑函数

$$\Xi : \overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \times \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$$

定义为

$$\Xi(z, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, \xi, r) \coloneqq (z + \xi\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, r), \qquad (z, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, \xi, r) \in \overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{44}$$

注意， $\Xi(z, \mathbf{a}\ \boldsymbol{\omega}, \xi, r)$ 是以 $z+\xi\mathbf{a}$ 为中心的圆盘，其法向 k-向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\mathbf{a}$ 正交，且半径为 r。

引理 A.1. 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 的子集，且 $f\colon \Xi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ 是可积函数，则

$$\begin{aligned}\int_{\Xi(\mathcal{A})} \Big[\sum_{(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},\xi,r)\in\Xi^{-1}(p,\boldsymbol{\omega},r)} f(p,\boldsymbol{\omega},r) \Big]\, d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(p,\boldsymbol{\omega},r) \\ = \int_{\mathcal{A}} f(z+\xi\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},r) \frac{\xi^{n-k-1}}{2^{k/2}} |\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}(z)\cdot\boldsymbol{\omega}|\, d\mathcal{H}^{n+k(n-k)+1}(z,\mathbf{a},\boldsymbol{\omega},\xi,r).\end{aligned} \tag{45}$$

证明. 只需证明该结论对形如 $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{I}_A$ 的集合成立，其中 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{M}$、$\mathcal{W}_A \subseteq \mathcal{W}$ 和 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^+$。此外，利用单位分解，我们可以将问题归结为 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathcal{A}}$ 各自仅由一个坐标图覆盖的情形。也就是说，存在 $M_A \subseteq \mathbb{R}^k$ 和 $W_A \subseteq \mathbb{R}^m$，其中 $m \coloneqq \dim \mathcal{W} = n-1+k(n-k-1)$，以及微分同胚 $\phi\colon M_A \to \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{\chi}\colon W_A \to \mathcal{W}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$。由于 $\mathcal{W}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{W}$，我们可以用其分量函数表示 $\boldsymbol{\chi}$： $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2)$，其中 $\boldsymbol{\chi}_1\colon \mathbb{R}^m \to \mathcal{U}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^n$，且 $\boldsymbol{\chi}_2 : \mathbb{R}^m \to \hat{\Lambda}_u^k(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$。

回忆一下，若 g 是定义在 $\mathcal{W}_{\mathcal{A}}$ 上的可积函数，则

$$\int_{\mathcal{W}_{\mathcal{A}}} g(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega}) d\mathcal{H}^m(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega}) = \int_{W_A} g(\boldsymbol{\chi}_1(w), \boldsymbol{\chi}_2(w)) J_{\boldsymbol{\chi}}(w) dw, \tag{46}$$

其中 $J_{\boldsymbol{\chi}} = \sqrt{\det(\nabla\boldsymbol{\chi}^T \nabla\boldsymbol{\chi})}$ 是 $\boldsymbol{\chi}$. 的雅可比行列式。此外，若 h 是定义在 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$上的可积函数，则

$$\int_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} h(z) d\mathcal{H}^k(z) = \int_{M_A} h(\phi(x)) J_\phi(x) dx. \tag{47}$$

设 $A \coloneqq M_A \times W_A \times \mathcal{I}_A \times \mathbb{R}^+$，并定义 $F\colon A \to \Xi(\mathcal{A})$ 如下：

$$F(x, w, \xi, r) \coloneqq (\phi(x) + \xi\boldsymbol{\chi}_1(w), \boldsymbol{\chi}_2(w), r), \qquad (x, w, \xi, r) \in A.$$

To e利用面积公式建立式 (45)，我们需要计算 $J_F = \sqrt{|\det(\nabla F^T \nabla F)|}$.

步骤 *1*：利用分块矩阵简化 J_F。为此，首先注意到

$$\nabla F = \begin{array}{c} \begin{matrix} k & m & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \nabla\phi & \xi\nabla\boldsymbol{\chi}_1 & \boldsymbol{\chi}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla\boldsymbol{\chi}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} n \\ \binom{n}{k} \\ 1 \end{matrix} \qquad \nabla F^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} n & \binom{n}{k} & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \nabla\phi^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \xi\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T & \nabla\boldsymbol{\chi}_2^T & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}_1^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} k \\ m \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

并且，由于 $\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\boldsymbol{\chi}_1 = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_1^T\boldsymbol{\chi}_1 = 1$,

$$\nabla F^T \nabla F = \begin{array}{c} \begin{matrix} k & m & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \nabla\phi^T\nabla\phi & \xi\nabla\phi^T\nabla\boldsymbol{\chi}_1 & \nabla\phi^T\boldsymbol{\chi}_1 & \mathbf{0} \\ \xi\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\phi & \xi^2\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\boldsymbol{\chi}_1 + \nabla\boldsymbol{\chi}_2^T\nabla\boldsymbol{\chi}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\phi & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} k \\ m \\ 1 \\ 1 \end{matrix}.$$

要计算这个矩阵行列式的绝对值，我们将行和列重新排列成分块矩阵，并应用舒尔公式:

$$\begin{aligned} |\det(\nabla F^T \nabla F)| &= \left| \det \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\begin{matrix} k & 1 \end{matrix}} & \multicolumn{1}{c}{m} \\ \nabla\phi^T\nabla\phi & \nabla\phi^T\boldsymbol{\chi}_1 & \xi\nabla\phi^T\nabla\boldsymbol{\chi}_1 \\ \boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\phi & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \xi\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\phi & \mathbf{0} & \xi^2\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\boldsymbol{\chi}_1 + \nabla\boldsymbol{\chi}_2^T\nabla\boldsymbol{\chi}_2 \end{array} \right) \begin{matrix} k \\ 1 \\ m \end{matrix} \right| \\ &= \left| \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{array} \right) \right| \\ &= |\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})|. \end{aligned} \tag{48}$$

步骤 *2*：计算 det A。为此，我们引入一些符号。回顾一下，$\nabla\phi(x) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$，但其值域为 $T_{\phi(x)}\mathcal{M}$。令 $\mathrm{P}^{\phi(x)}$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到$T_{\phi(x)}\mathcal{M}$ 的投影，使得 $\boldsymbol{\Phi}(x) = \mathrm{P}_{\phi(x)}\nabla\phi(x)$ 是从 $\mathbb{R}^k$ 到 $T_{\phi(x)}\mathcal{M}$的线性同构。由于我们经常省略参数 x，因此记作 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, T\mathcal{M})$, 这里默认其切空间是在哪一点处考察的。继续沿用这种符号简写，我们用 $\mathbf{1}_{T\mathcal{M}} \in \mathrm{Lin}(T\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ 表示切空间上的恒等映射

对于适当的 x，空间 $T_{\phi(x)}\mathcal{M}$，而不显式写出它。利用这些符号及分块矩阵行列式的性质，我们有

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det \begin{pmatrix} \nabla\phi^T\nabla\phi & \nabla\phi^T\boldsymbol{\chi}_1 \\ \boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\phi & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \\ (\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\boldsymbol{\Phi}) \\ &= \det(\boldsymbol{\Phi}^T[\mathbf{1}_{T\mathcal{M}} - \mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T]\boldsymbol{\Phi}) \\ &= \det(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})\det(\mathbf{1}_{T\mathcal{M}} - \mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T).\end{aligned}$$

为完成此计算，我们需要求出 N 的行列式，其定义为

$$\mathbf{N} \coloneqq \mathbf{1}_{T\mathcal{M}} - \mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T = \mathbf{1}_{T\mathcal{M}} - \mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \otimes \mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1. \tag{49}$$

为求此行列式，我们按如下方式构造 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。首先考虑 $T\mathcal{M}$（在适当的点）的标准正交基 $\{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_k\}$，然后用向量 $\{\mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ 将其扩展为整个空间的标准正交基。不失一般性，我们假设 $\boldsymbol{\chi}_1$ 属于 $\mathbf{t}_k$ 和 $\mathbf{e}_{k+1}$ 张成的空间。N 关于此基的矩阵表示[N]为：

$$[\mathbf{N}] = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & ... & \mathbf{t}_{k-1} & \mathbf{t}_k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1-(\mathbf{t}_k\cdot\boldsymbol{\chi}_1)^2 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{50}$$

令 $J \coloneqq 1-(\mathbf{t}_k\cdot\boldsymbol{\chi}_1)^2 = 1-|\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1|^2 = \det(\mathbf{N})$，则有

$$\det \mathbf{A} = \det(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})J. \tag{51}$$

步骤 *3*：计算 $\det(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$。作为此计算的一部分，我们需要 $\mathbf{A}^{-1}$，这需要用到 $\mathbf{N}^{-1}$ 的公式。从式 (50) 可知

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_1 + ... + \mathbf{t}_{k-1}\otimes\mathbf{t}_{k-1} + \frac{1}{J}\mathbf{t}_k\otimes\mathbf{t}_k.$$

但是 $\frac{1}{J} = \frac{1}{J}(J + (\mathbf{t}_k\cdot\boldsymbol{\chi}_1)^2) = 1 + \frac{(\mathbf{t}_k\cdot\boldsymbol{\chi}_1)^2}{J}$，因此 $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{1}_{T\mathcal{M}} + \frac{1}{J}\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1\otimes\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1$. 因此 e,

使用 [LS0 中定理 2.1(ii) 的分块矩阵求逆公式 2],

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}\mathbf{\Phi})^{-1} & -(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \\ -(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}\mathbf{\Phi})^{-1} & 1+(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{\Phi}^{-T} & -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \\ -(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{\Phi}^{-T} & 1+(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J}\begin{pmatrix} J\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{\Phi}^{-T} & -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \\ -(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{\Phi}^{-T} & J+|\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1|^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J}\begin{pmatrix} J\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{\Phi}^{-T} & -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1 \\ -(\mathbf{P}_\phi\boldsymbol{\chi}_1)^T\mathbf{\Phi}^{-T} & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

沿用之前对符号的同样简化记法，令 $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\chi}} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}, T\mathcal{W})$ 为到 $\nabla\boldsymbol{\chi}$ 的值域上的投影，令 $\mathrm{I}_{\boldsymbol{\chi}} = \mathrm{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T \in \mathrm{Lin}\big(T\mathcal{W}, \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}\big)$ 为从 $T\mathcal{W}$ 到 $\mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$ 的嵌入。利用分块矩阵行列式的性质，我们得到

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}-\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) &= \det(\xi^2\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\nabla\boldsymbol{\chi}_1 + \nabla\boldsymbol{\chi}_2^T\nabla\boldsymbol{\chi}_2 - \xi^2\nabla\boldsymbol{\chi}_1^T\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi\nabla\boldsymbol{\chi}_1) \\ &= \det\left[\nabla\boldsymbol{\chi}^T\begin{pmatrix}\xi^2(\mathbf{1}_n-\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\binom{n}{k}}\end{pmatrix}\nabla\boldsymbol{\chi}\right] \\ &= \det(\nabla\boldsymbol{\chi}^T\nabla\boldsymbol{\chi})\det\left[\mathbf{I}_{\boldsymbol{\chi}}^T\begin{pmatrix}\xi^2(\mathbf{1}_n-\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\binom{n}{k}}\end{pmatrix}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\chi}}\right]. \quad (52)\end{aligned}$$

继续进行计算，我们需要计算以下矩阵的行列式

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &\coloneqq \mathbf{I}_{\boldsymbol{\chi}}^T\begin{pmatrix}\xi^2(\mathbf{1}_n-\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\phi}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\binom{n}{k}}\end{pmatrix}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\chi}} \\ &= \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}\begin{pmatrix}\xi^2\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\binom{n}{k}}\end{pmatrix}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T - \xi^2\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n \\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}_\phi(\mathbf{1}_n\ \mathbf{0})\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T.\end{aligned}$$

步骤 *4*：计算 det M。为进行这项计算，我们为 $\mathbb{R}^n$ 引入一个标准正交基，记作 $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$，使得 $\mathbf{e}_1 \coloneqq \boldsymbol{\chi}_1$ 且 $\mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k+1} = \boldsymbol{\chi}_2$.。我们可以将 $\mathrm{Rng}\,\nabla\boldsymbol{\chi}$ 分解为三个子空间，使用 (21) 中的符号，它们如下：

1. $\mathrm{Lsp}\{(\mathbf{e}_i, 0) : \ k+2 \le i \le n\}$，含有 $n-k-1$ 个元素，
2. $\mathrm{Lsp}\{(0, \mathbf{e}_i \wedge (\mathbf{e}_{j-1}\boldsymbol{\chi}_2)) : \ 2 \le j \le k+1, k+2 \le i \le n\}$，含有 $k(n-k-1)$ 个元素；
3. $\mathrm{Lsp}\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_i, -\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_{i-1}\boldsymbol{\chi}_2)) : \ 2 \le i \le k+1\}$，含有 k 个元素。

注意，这些子空间的维数之和为 $m = \dim \mathrm{Rng}\,\nabla\boldsymbol{\chi}$，正如预期的那样。令 P_1，P_2，和 P_3 分别表示 $\mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$在实 n 维空间 $\mathrm{Rng}\,\nabla\boldsymbol{\chi}$中向这三个子空间的投影，使得

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3. \quad (53)$$

M 中的第一项由以下部分组成

$$\mathbf{E} \coloneqq \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}} \begin{pmatrix} \xi^2 \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\binom{n}{k}} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T.$$

以基底 $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ 表示的矩阵 $[\mathrm{E}]$ 为

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \xi^2 \mathbf{1}_{n-k-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{k(n-k-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\xi^2+1}{2} \mathbf{1}_k \end{pmatrix}, \tag{54}$$

由此可得 $\det \mathrm{E} = \xi^{2(n-k-1)}(\xi^2+1)^k 2^{-k}$。现在，为了计算 M 的行列式，我们使用 [Har97]，中的矩阵行列式引理，该引理指出

$$\det(\mathbf{X} + \mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{V}^T) = (\det \mathbf{X})(\det \mathbf{Y}) \det(\mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{V}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{U}),$$

取 $\mathrm{X} \coloneqq \mathrm{E}$、$\mathrm{Y} \coloneqq \mathrm{N}^{-1}$，以及 $\mathrm{U} = \mathrm{V} \coloneqq \xi \mathrm{P}_\phi \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathrm{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T$，即可得到

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} =& (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{N}^{-1}) \det \left(\mathbf{N} - \xi^2 \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \right) \\ =& \frac{\xi^{2(n-k-1)}(\xi^2+1)^k}{2^k J} \det \left(\mathbf{N} - \xi^2 \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \right). \end{aligned}$$

由 (53) 及与 P_2 相关的空间结构可得

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

利用这一结果和式 (54)，我们可以继续计算 M 的行列式：

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= \frac{\xi^{2(n-k-1)}(\xi^2+1)^k}{2^k J} \det \left(\mathbf{N} - \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T - \frac{2\xi^2}{\xi^2+1} \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \right) \\ &= \frac{\xi^{2(n-k-1)}}{2^k J} \det \left((\xi^2+1)\mathbf{N} - (\xi^2+1) \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T - 2\xi^2 \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \right) \\ &= \frac{\xi^{2(n-k-1)}}{2^k J} \det \Bigg(\xi^2 \Big(\mathbf{N} - \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T - 2\mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \Big) \\ &\quad + \Big(\mathbf{N} - \mathbf{P}_\phi (\mathbf{1}_n \ \mathbf{0}) \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi^T \Big) \Bigg). \end{aligned} \tag{55}$$

考虑上面行列式中的两项:

$$\mathbf{P}^{\perp}_{\boldsymbol{\chi}_1\wedge\boldsymbol{\chi}_2} \coloneqq (\mathbf{1}_n\ \mathbf{0})\mathbf{P}_1\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2} \coloneqq 2(\mathbf{1}_n\ \mathbf{0})\mathbf{P}_3\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),$$

它们分别是到 $[\boldsymbol{\chi}_1\wedge\boldsymbol{\chi}_2]^{\perp}$ 和 $[\boldsymbol{\chi}_2]$ 上的投影。由于根据 (49)，$\mathbf{N} = \mathrm{P}\phi(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{\chi}_1\otimes\boldsymbol{\chi}_1)\mathrm{P}_\phi^T$，因此可得

$$\mathbf{N} - \mathbf{P}_\phi\mathbf{P}^{\perp}_{\boldsymbol{\chi}_1\wedge\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T - \mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\chi_2}\mathbf{P}_\phi^T = \mathbf{P}_\phi(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{\chi}_1\otimes\boldsymbol{\chi}_1 - \mathbf{P}^{\perp}_{\boldsymbol{\chi}_1\wedge\boldsymbol{\chi}_2} - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2})\mathbf{P}_\phi^T = \mathbf{0} \tag{56}$$

and

$$\mathbf{N} - \mathbf{P}_\phi(\mathbf{1}_n\ \mathbf{0})\mathbf{P}_1\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{P}_\phi^T = \mathbf{P}_\phi(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{\chi}_1\otimes\boldsymbol{\chi}_1 - \mathbf{P}^{\perp}_{\boldsymbol{\chi}_1\wedge\boldsymbol{\chi}_2})\mathbf{P}_\phi^T = \mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T. \tag{57}$$

将 (56) 和 (57) 代入 (55)，得到

$$\det\mathbf{M} = \frac{\xi^{2(n-k-1)}}{2^k J}\det(\mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T).$$

为计算这个最终的行列式，令 $\mathrm{t}_1, ..., \mathrm{t}_k$ 为 $T\mathcal{M}$ 的一组标准正交基，使得$\mathbf{vol}_{\mathcal{M}} = \mathrm{t}_1\wedge ....\wedge \mathrm{t}_k$，则 $\mathrm{P}\phi\mathrm{P}\chi_2\mathrm{P}_\phi^T$ 相对于该基的矩阵 $[\mathrm{P}\phi\mathrm{P}\chi_2\mathrm{P}_\phi^T]$ 的分量为

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T]_{ij} &= \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T\mathbf{t}_j\\
&= \mathbf{t}_i\cdot\Big(\sum_{\ell=2}^{k+1}\mathbf{e}_\ell\otimes\mathbf{e}_\ell\Big)\mathbf{t}_j\\
&= \sum_{\ell=2}^{k+1}(\mathbf{t}_i\cdot\mathbf{e}_\ell)(\mathbf{e}_\ell\cdot\mathbf{t}_j)\\
&= \sum_{\ell=1}^{k}B_{i\ell}B_{\ell j},
\end{aligned}$$

其中 $B_{ij} \coloneqq \mathbf{e}^{i+1}\cdot\mathrm{t}^j$。设 B 为其矩阵分量为 B_{ij} 的线性映射。由 (12) 可得 $\det(\mathrm{B}) = \mathbf{vol}_{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\chi}_2$，因此

$$\det(\mathbf{P}_\phi\mathbf{P}_{\boldsymbol{\chi}_2}\mathbf{P}_\phi^T) = \det(\mathbf{BB}) = (\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\chi}_2)^2.$$

因此,

$$\det\mathbf{M} = \frac{\xi^{2(n-k-1)}}{2^k J}(\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\chi}_2)^2. \tag{58}$$

*S*步骤 *5*：整合各项。合并 (48)、(51)、(52) 和 (58) 得到 s

$$|\det(\nabla F^T\nabla F)| = \det(\nabla\phi^T\nabla\phi)\det(\nabla\boldsymbol{\chi}^T\nabla\boldsymbol{\chi})\frac{\xi^{2(n-k-1)}}{2^k}(\mathbf{vol}_{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\chi}_2)^2.$$

将其与 (46) 和 (47) 结合，面积公式便给出所需结果。 □

引理 A.2。 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间，且 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是可积函数。若 维数$\mathcal{X} = d$ 且 维数 $(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \ell$，则

$$\int_{\mathcal{U}(\mathcal{X})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})} \int_{\mathcal{U}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}^\perp)} \int_0^{\pi/2} g(\cos\theta \mathbf{y} + \sin\theta \mathbf{y}') \cos^{\ell-1}\theta \sin^{d-\ell-1}\theta d\theta d\mathbf{y}' d\mathbf{y}. \tag{59}$$

证明。 设 $\boldsymbol{\phi}\colon \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^\ell \to \mathcal{U}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \subseteq \mathbb{R}^n$和 $\boldsymbol{\psi}\colon \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^{d-\ell} \to \mathcal{U}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^\perp) \subseteq \mathbb{R}^n$为坐标图。由此可知，函数 $\mathbf{F}: \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times (0, \pi/2) \to \mathcal{U}(\mathcal{X})$ 定义为

$$\mathbf{F}(u, v, \theta) = \boldsymbol{\phi}(u)\cos\theta + \boldsymbol{\psi}(v)\sin\theta, \qquad (u, v, \theta) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times (0, \pi/2)$$

是 $\mathcal{U}(\mathcal{X})$ 的一个坐标图。这种形式的 $\mathcal{U}(\mathcal{X})$ 坐标图几乎覆盖了整个 $\mathcal{U}(\mathcal{X})$。因此，只需在左端是这种坐标图的值域时证明（59）。计算可得

$$\nabla\mathbf{F} = \begin{matrix} \ell-1 & d-\ell-1 & 1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} \nabla\boldsymbol{\phi}\cos\theta & \nabla\boldsymbol{\psi}\sin\theta & -\boldsymbol{\phi}\sin\theta + \boldsymbol{\psi}\cos\theta \end{pmatrix} \quad n$$

并且，考虑 $\nabla\boldsymbol{\phi}^T$ 和 $\nabla\boldsymbol{\phi}^T$ 的零空间，我们得到

$$\nabla\mathbf{F}^T\nabla\mathbf{F} = \begin{matrix} \ell-1 & \mathrm{d}-\ell-1 & 1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta\nabla\boldsymbol{\phi}^T\nabla\boldsymbol{\phi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sin^2\theta\nabla\boldsymbol{\psi}^T\nabla\boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，$\det(\nabla\mathrm{F}^T\nabla\mathrm{F}) = (\cos^2\theta)^{\ell-1}(\sin^2\theta)^{d-\ell-1}\det(\nabla\boldsymbol{\phi}^T\nabla\boldsymbol{\phi})\det(\nabla\boldsymbol{\psi}^T\nabla\boldsymbol{\psi})$。由此即可得到所需结果，这由面积公式得出。 □

参考文献

[Alm86] F. J. Almgren. 最优等周不等式。《印第安纳大学数学杂志》，35 (3):451–547, 1986.[APM11] L Ambrosio, G De Philippis, and L Martinazzi. 非局部周长泛函的伽马收敛。《数学手稿》，134:377–403, 2011.[AV14] A Abatangelo and E Valdinoci. 一种非局部曲率的概念。《数值泛函分析与优化》，35:793–815, 2014.[Caf09] L Caffarelli. 极小化非局部能量的曲面。《伦契科学院纪事——数学与应用》，20:281–299, 2009.

[CMP12] A Chambolle, M Morini, and M Ponsiglione. 非局部平均曲率流及其半隐式时间离散近似。*SIAM* 数学分析杂志，44:4048–4077, 2012.[CMP13] A Chambolle, M Morini, and M Ponsiglione. 非局部变分几何流的极小化运动与水平集方法。载于 Antonin Chambolle, Matteo Novaga, and Enrico Valdinoci 编，几何偏微分方程论文集，第 93–104 页。比萨高等师范学校，比萨，2013。ISBN 978-88-7642-473-1.[CMP15] A Chambolle, M Marini, and M Ponsiglione. 非局部曲率流。《理性力学与分析档案》，218:1263–1329, 2015.[CRS10] L Caffarelli, J M Roquejoffre, and O Savin. 非局部极小曲面。《纯粹与应用数学通讯》，63:1111–1144, 2010.[CS10] L Caffarelli and P Souganidis. 非局部阈值动力学近似向前沿传播的收敛。《理性力学与分析档案》，195:1–23, 2010.[CV11] L Caffarelli and E Valdinoci. 非局部极小曲面的一致估计与极限论证。《变分学与偏微分方程》，41:203–240, 2011.[CV13] L Caffarelli and E Valdinoci. 通过极限论证得到的非局部极小曲面正则性。《数学进展》，248:843–871, 2013.[DFPV13] S Dipierro, A Figalli, G Palatucci, and E Valdinoci. s-周长的渐近行为（当 $s \downarrow 0$ 时）。《离散与连续动力系统》，33:2777–2790, 2013.[DSV17] S Dipierro, O Savin, and E Valdinoci. 非局部极小曲面的边界行为。《泛函分析杂志》，272:1791–1851, 2017.[DV18] S Dipierro and E Valdinoci. 非局部极小曲面：内部正则性、定量估计与边界黏滞性。载于非局部理论的最新进展，第 165–209 页。德格鲁伊特出版社，柏林，2018.[Fed69] H Federer. 几何测度论。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1969.[FS08] R L Frank and R Seiringer. 非线性基态表示与尖锐 Hardy 不等式。《泛函分析杂志》，255:3407–3430, 2008.

[FV17] A Figalli 和 E Valdinoci。《非局部极小曲面的正则性与伯恩斯坦型结果》。《纯粹与应用数学杂志》，729：263–273，2017 年。[Giu84] E Giusti。《极小曲面与有界变差函数》。Birkhüser Verlag，巴塞尔，1984 年。[Har97] D Harville。《统计学家的矩阵代数视角》。Springer-Verlag New York，1997 年。[HP16] J Harrison 和 H Pugh。《Plateau 问题》，第 273–302 页。Springer International Publishing，2016 年。[Imb09] C Imbert。《分数阶平均曲率流的水平集方法》。《界面与自由边界》，11：153–176，2009 年。[Lom19] L Lombardini。《分形视角下的分数阶周长》。Advanced Nonlinear Studies，19：165–196，2019 年。[LS02] T Lu 和 S Shiou。《分块矩阵的逆》。《计算机与应用数学》，43：119–129，2002 年。[PPGS] R Paroni、P Podio-Guidugli 和 B Seguin。《关于非局部曲率张量的一种概念》。《弹性学杂志》。网址：https://doi.org/10.1007/s10659-023-09985-w。[PPGS18] R Paroni、P Podio-Guidugli 和 B Seguin。《开曲面的非局部曲率》。《纯粹与应用分析通讯》，17：709–727，2018 年。[Ros19] A Rosén。《几何多向量分析：从格拉斯曼到狄拉克》。Birkhäuser，查姆，2019 年。[Seg] B Seguin。《分数长度概念及其相关的非局部曲率》。arXiv:1808.08654。[Seg20] B Seguin。《分数长度概念及其相关的非局部曲率》。《几何分析杂志》，30：161–181，2020 年。[SV13] O Savin 和 E Valdinoci。《二维非局部极小锥的正则性》。《变分法与偏微分方程》，48：33–39，2013 年。[SZ14] J Shi 和 J Zhou。《格拉斯曼流形上的特征类》。《土耳其数学杂志》，38(3)：492–523，2014 年。[Vis91] A Visintin。《广义余面积公式与分形集》。《日本工业与应用数学杂志》，8：175–201，1991 年。