arXiv:2303.11559v1 [math.CV] 21 Mar 2023

¨随机凯勒几何：从随机零点到随机度量

伯纳德·希夫曼和史蒂夫·泽尔迪奇

Abstract. 我们综述了关于凯勒流形上全纯线丛的随机截面统计性质的研究成果，重点讨论线丛取越来越高的张量幂时所产生的渐近性。最后，我们简要讨论由这些随机截面诱导的“伯格曼”凯勒度量。

Contents

引言 2 1. 背景 3 1.1. 从度量和测度到内积与高斯测度 3 1.2. 线丛的多项式与全纯截面 4 1.3. 正线丛上伯格曼核的渐近性 5 1.4. Szeg˝o 核的非对角缩放渐近 6 2. 随机零点集 8 2.1. Poincar´e-Lelong 公式 9 2.2. 零点相关性 10 2.3. 零点方差的多重双势 11 2.4. 零点的光滑线性统计量 13 2.5. 零点分布的渐近正态性 14 2.6. 集合中的随机零点计数与空洞概率 16 2.7. 随机零点集的期望局部拓扑 17 3. 随机全纯截面的临界点与临界值 18 3.1. 临界点 18 3.2. 上确界范数与随机超越集 20 3.3. 临界值 22 4. 点过程与 K¨ahler 度量 23 4.1. 零点过程 23 4.2. Berman 的典范 K¨ahler 点过程 23 5. 随机 Bergman 度量 24 5.1. 热核测度 26 5.2. Calabi 模型 28 参考文献 28

第二作者的研究部分得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-1810747 的支持。

Introduction

随机 K¨ahler 几何指的是在 K¨ahler 流形（M^m， J， ω）这一背景下，对任意复维数 m 的复代数几何或复解析几何中的概率问题进行研究。它关注定义在 K¨ahler 流形上的随机场，这些随机场由复结构 J 和 K¨ahler 形式 ω确定。基本的随机场是全纯厄米线丛的幂的全纯截面 $s \in H^0(M, L^k)$（L， h） $\to (M, \omega)$。利用这些全纯场，可以构造随机复子流形 $Z_{\vec{s}}$（一个或多个截面的零点集）、到复射影空间中的随机嵌入 $\mathbb{CP}^N$，以及由这些嵌入诱导的随机“Kähler”或“Fubini-Study” K¨ahler 度量。零点集和¯嵌入都确定正 (1,1) 形式 $\omega = i\partial\partial\varphi$，其中 φ 是一个 psh（多重次调和）函数。尽管高张量幂极限 $k \to \infty$ 下随机零点集的行为是随机 K¨ahler 几何的核心，但同样的技术通常稍加修改便适用于随机 K¨ahler 度量及其他更一般的对象。本综述旨在回顾随机零点集方面的一些主要结果，并简要讨论这些推广在随机 K¨ahler 度量中的应用。

迄今为止，随机 K¨ähler 几何的大多数结果都涉及概率不变量的渐近性，例如零点和临界点的分布函数与关联函数，随着次数 $k \to \infty$ 的变化。这些结果的一项主要成果是，半径为 $k^{-\frac{1}{2}}$ 的小球上经重标度的不变量的极限具有普适性。近年来，这些缩放极限已被用于研究随机零点集的局部拓扑。另一个重点是线性统计量的渐近正态性：研究表明，线性统计量的涨落，即随机截面的零点上对测试形式 ψ 的积分 $\int_{Z_s} \psi$，趋于由方差流决定的高斯随机变量。对随机正 (1,1) 形式 ω 的积分的渐近正态性，等价于 ω 的势 u 的渐近正态性；物理学文献中常以这种方式表述（例如 [CLW15a, CLW15b]）。我们特别指出一些自然的势系综，其渐近正态性目前尚不清楚：临界点的线性统计量，以及余维大于 1 的零点的线性统计量。

正如“势”一词所提示的，贯穿全文的主题是随机拟次调和函数。Kähler 度量定义为局部拟次调和函数的混合 Hessian，该函数称为“Kähler 势”。零点集也定义为：其中 log 为……，且 dim……，……是局部全纯函数。当……时，同一公式可用来定义光滑 Kähler 度量，而……可视为“奇异 Kähler 度量”。由此可见，关于随机零点集的许多结果都有关于随机光滑度量的对应结果。若……，且……是……的基，则……称为次数为……的伯格曼度量。

随机 K¨ahler 几何的主题之一，是概率结果对输入几何变化的响应。这里的“几何”指线丛 $L \to M$、其上的厄米度量 h、曲率形式 Θ_h，以及厄米度量的“量子化” h（连同在 M 上选取的测度 ν），将其视为空间 $H^0(M, L^k)$ 上 h^k， ν 的内积 G。该内积确定一个高斯测度 $\gamma_{h^k,\, \nu}$，其定义了“随机多项式”或更一般地说“随机截面”的概念。几何语言有助于（甚至是必要的）在 $\mathbb{C}$ 上将对数势理论和随机多项式理论推广到紧黎曼曲面或更高维复流形。线丛的全纯截面

是在紧致流形 M 上全纯函数在 $\mathbb{C}^n$ 上的对应物，具体而言$H^0(M,\ L^k)$ 是次数为 $\leq k$ 的多项式的替代物。

我们可以将随机 K¨ahler 几何与研究颇多的一维随机（或称随机）共形几何理论进行对比。随机共形几何是概率论、数学物理和复分析中一个高度发展的领域。它包含诸多子领域，例如数学物理中的 SLE、量子霍尔效应、Hele-Shaw 流和刘维尔量子引力，以及一维复分析中的概率问题。正如“共形”一词所示，它严格来说是一维复理论。关键区别在于，随机共形几何关注具有共形不变性的实对象族，例如高斯自由场（GFF）、SLE 曲线、库仑气体点过程，或刘维尔量子引力中的随机 LQG 面积形式 [AHM11, Du06, KN13]。其关键对象往往是随机分形。在随机 K¨ahler 几何中，重点则是全纯场及其在复几何中诱导的对象。

在这篇综述中，我们仅简要提及复一维情形的结果，尽管这是一个内容非常丰富的领域。此外，许多近期关于高维 K¨ähler 流形的构造，都借鉴了概率研究实代数流形以及随机实函数零点集时提出的思想；特别是源于 Nazarov–Sodin [NS09] 关于计数球谐函数及其他随机实函数的连通分支的工作，以及 Sarnak–Wigman [SW10],Canzani–Sarnak [CS19] 等人关于贝蒂数和组合构型的拓扑应用。由于这些重要结果会使讨论过于偏离主题，我们在此略去。

1. Background

本节介绍有关正厄米线丛的随机全纯截面的背景知识和记号。

设 (M, L) 是一个带有厄米全纯线丛 (L, h) 的 m 维紧致复流形。考虑平凡化图表 U 上的局部全纯标架 e_L。若 $s = fe_L$ 是 U 上 L 的全纯截面，则其厄米范数定义为$\|s(z)\|_h = e^{-\varphi_h}|f(z)|$ 其中

$$\varphi_h(z) := -\log \|e_L(z)\|_h \ . \tag{1}$$

¯(L, h) 的曲率形式在局部由 $\Theta_h = 2\partial\partial\varphi_h$ 给出，而 陈形式 $c_1(L, h)$ 由下式给出

$$c_1(L,h) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\,\partial\bar\partial\varphi_h \ . \tag{2}$$

现在我们假设厄米度量 h 具有严格正曲率，并给出 MK¨ähler 形式

$$\omega_h := i\partial\bar\partial\varphi_h = \pi c_1(L,h) \ . \tag{3}$$

1.1. 从度量和测度到内积和高斯测度。 我们用 $H^0(M, L^k)$ 表示 $L^k = L \otimes \cdots \otimes L$ 的全局全纯截面空间。度量 h 在 L^k 上诱导出厄米度量 h^k，由 $\|s^{\otimes k}\|_{h^k} = \|s\|_h^k$ 给出。

我们令 ν 表示 M 上的一个（有限的正）博雷尔测度。数据 $(h,\ \nu)$ 共同在全局全纯截面空间 $H^0(M,\ L^k)$ 上诱导出厄米内积 $G(h^k,\ \nu)$

给定幂 $L^k \to M$ 的定义如下

$$\langle s_1, \overline{s_2}\rangle_k = \langle s_1, \overline{s_2}\rangle_{G(h^k,\nu)} := \int_M \langle s_1(z), \overline{s_2(z)}\rangle_{h^k}\, d\nu(z), \quad s_1, s_2 \in H^0(M, L^k)\,. \tag{4}$$

反过来， $H^0(M, L^k)$上的每个内积都会诱导出一个标准正交基 $\{S_1^k, \dots, S_{d_k}^k\}$ 以及相应的高斯测度$\gamma_{h^k,\nu}$ ，其定义如下：

$$d\gamma_{h^k,\nu}(s^k) := \frac{1}{\pi^{d_k}} e^{-|c|^2} dc\,, \quad s^k = \sum_{j=1}^{d_k} c_j S_j^k\,, \quad c = (c_1, \dots, c_{d_k}) \in \mathbb{C}^{d_k}\,, \tag{5}$$

其中， dc 表示 $2d_k$维勒贝格测度。测度$\gamma_{h^k,\nu}$ 具有如下性质： $2d_k$ 实变量 $\Re c_j, \Im c_j (j = 1, \dots, d_k)$ 是相互独立的高斯随机变量，其均值为 0，方差为 $1/2$ ；等价地，

$$\mathbf{E}(c_j) = 0 = \mathbf{E}(c_j c_l), \quad \mathbf{E}(c_j \bar{c}_l) = \delta_{jl}.$$

这里，$\mathbf{E}$ 表示期望。

内积 $G(h^k, \nu)$还会在 $H^0(M, L^k)$中的单位球面 $SH^0(M, L^k)$上，诱导出相对于 $G(h^k, \nu)$ 的相应球面测度。本综述将讨论范围限定于 ν 为 M的体积形式的内积。关于更一般的度量和测度下的结果，参见例如 [Be09、BSh07、BeBW11]。

1.2. 线丛的多项式与全纯截面。 次数为 k 的单变量多项式构成一个维数为 $k+1$ 的复向量空间。$Poly_k$ 上的「SU(2)内积」可写成如下形式：

$$\langle f_1, \bar{f}_2\rangle = \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} f_1(z)\overline{f_2(z)} e^{-k\log(1+|z|^2)} \frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = \frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}} f(_1z)\overline{f_2(z)} \frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^{k+2}}\,,$$

$f_1, f_2 \in Poly_k$。

这有一个简单的几何解释：也就是说，我们将次数为 k 的多项式视为线丛 $\mathcal{O}(k) = L^k$ 的全纯截面，其中 $L \to \mathbb{CP}^1$ 是超平面截面丛。我们赋予 L 厄米度量 $\|e_L\|_h = e^{-\frac{1}{2}\log(1+|z|^2)}$，其中 $e_L = 1$。于是，$\omega_h = \frac{i}{2}\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$ 是 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1$ 上通常的面积形式，而 $\langle f_1, \bar{f}_2\rangle = \langle f_1, \bar{f}_2\rangle_{G(h^k,\omega_h)}$。

对于多变量多项式，我们令 $M = \mathbb{CP}^m$ with $L \to \mathbb{CP}^m$ 超平面截面丛 $\mathcal{O}(1)$，使得整体截面空间 $H^0(\mathbb{CP}^m, L)$由 $\mathbb{C}^{m+1}$ 上的线性函数$f(z) = \sum_{j=0}^m c_j z_j$组成。于是， $H^0(\mathbb{CP}^m, L^k)$ 是齐次次数为 k 的多项式向量空间 $Poly_k^m$，定义在 $\mathbb{C}^{m+1}$上；我们将其等同于变量 $z_1, \dots, z_m$ 中的次数为 $\le k$ 的多项式空间，令 $z_0 = 1$。若令 $w_j = z_j/z_0$，$1 \le j \le m$ 为 $\mathbb{CP}^m$ 上的局部坐标，并赋予 $L = \mathcal{O}(1)$ 厄米度量 $\|e_L\|_h = (1 + \|w\|^2)^{-1/2}$，则 $\varphi_h = \frac{1}{2}\log(1 + \|w\|^2)$ 和 $\omega_h = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 + \|w\|^2)$是 $\mathbb{CP}^m$上的 Fubini-Study度量。于是体积形式

$$dV = \frac{1}{m!}\omega_h^m = (1 + \|w\|^2)^{-m-1}\, d_{2m}w\,,$$

其中 $d_{2m}w$ 是欧几里得体积。于是我们得到 SU$(m+1)$-不变内积

$$\langle f_1, \bar{f}_2\rangle_{G(h^k,dV)} = \int_{\mathbb{C}^m} \frac{f_1(z)\,\overline{f_2(z)}}{(1 + \|z\|^2)^{k+m+1}}\, d_{2m}z\,, \quad f_1, f_2 \in Poly_k^m\,.$$

1.3. 正线丛上伯格曼核的渐近性。我们将 $\mathcal{L}^2(M,\ L^k)$ 记作关于内积 $G(h^k,\ dV)$ 的 $\mathcal{L}^2$ 截面，其中$dV = \frac{1}{m\ !}\ \omega_h^m$。

我们将伯格曼核定义为正交投影

$$B_k(z,w) : \mathcal{L}^2(M, L^k) \to H^0(M, L^k)\,.$$

Then

$$B_k(z,w) = \sum_{j=1}^{d_k} S_j^k(z) \otimes \overline{S_j^k(w)}\,, \tag{6}$$

其中，$\{S_1^k, \cdots, S_{d_k}^k\}$是相对于 $G(h^k, dV)$的 $H^0(M, L^k)$的一组标准正交基。沿对角线，伯格曼核的缩并为

$$\|B_k(z,z)\| = \sum_{j=1}^{d_k} \|S_j^k(z)\|_{h^k}^2\,. \tag{7}$$

当厄米特线丛(L, h)的曲率形式 Θ_h 处处为正时，我们有如下田–丘–泽尔迪奇渐近展开 [Ca97, Z97]:

$$\|B_k(z,z)\| \sim \frac{1}{\pi^m}[k^m + a_1(z)k^{m-1} + a_2(z)k^{m-2} + \cdots]\,, \tag{8}$$

其中，每个系数 $a_j(z)$都是曲率及其协变导数的多项式。前三个系数的公式由 Lu 给出 [Lu00]。特别地，$a_1(z)$等于 ω_h的标量曲率的一半。

例：对于$(\mathbb{CP}^m, \omega_{FS})$，其线丛为$(\mathcal{O}(1)\ h_{FS})$时，伯格曼核很容易计算得出：沿对角线它是一个常数 [BShZ00b]:

$$\|B_k(z,z)\| = \frac{(k+m)!}{\pi^m\, k!}\,. \tag{9}$$

回想一下，内积 $G(h^k, dV)$ 诱导出高斯场 $(H^0(M, L^k)\gamma_{h^k,dV})$，其中 $\gamma_{h^k,dV}$ 由 5 给出。事实上，伯格曼核 $B_k(z,w)$ 可以解释为高斯场 $\left(H^0(M, L^k)\ \gamma_{h^k,dV}\right)$的协方差函数:

$$\mathbf{E}\big(s^k(z) \otimes \overline{s^k(w)}\big) = B_k(z,w)\,, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{E}$ 表示相对于 $\gamma_{h^k,dV}$ 的期望值。

证明。 应用 $\mathbf{E}(c_j\bar{c}_l)\ = \delta_{jl}$ 到

$$\mathbf{E}\left(s^k(z) \otimes \overline{s^k(w)}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{d_k} c_j S_j^k(z) \otimes \overline{\sum_{l=1}^{n} c_l S_l^k(w)}\right).$$

□

1.4. Szeg˝o 核的非对角缩放渐近。 为了给出伯格曼核在对角线外的渐近性，将伯格曼核提升到 L 的对偶丛的圆丛 X 上会更方便。为描述提升后的核，令 $L^* \to M$ 表示 $L \to M$ 的对偶线丛，其对偶度量为 h^*，并令 $X := \{\lambda \in L^* : \|\lambda\|_{h^*} = 1\}$。我们将截面 $s^k \in H^0(M, L^k)$ 视为 X 上的函数，定义为

$$s^k(\lambda) = (\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda, s^k(z)), \quad \lambda \in L^*_z .$$

并注意到 s^k 是 k-等变的：$s^k(e^{i\theta}\lambda) = e^{ik\theta}s^k(\lambda)$。我们假设 (L, h) 具有正曲率；那么 X 是严格伪凸圆盘丛 $\{\lambda \in L^* \text{ 的边界：} \ell(\lambda) < 1\}$ 其中 $\ell(\lambda) = \|\lambda\|^2_{h^*}$。我们用 $\Pi : \mathcal{L}^2(X) \to \mathcal{H}^2(X)$ 表示到空间 $\mathcal{H}^2(X)$ 的正交投影，该空间由 X 上的平方可积 CR 函数组成；其中我们赋予 X 体积形式

$$\frac{i}{2\pi\, m!}\bar\partial\ell \wedge (i\partial\bar\partial\ell)^m = \frac{i}{2\pi}\bar\partial\ell \wedge dV_M .$$

于是 $\Pi = \bigoplus_{k=0}^\infty \Pi_k$，其中 $\Pi_k : \mathcal{L}^2(X) \to \mathcal{H}^2_k(X)$ 是到 $\mathcal{H}^2(X)$ 中 k-等变函数 $\mathcal{H}^2_k(X)$ 空间的正交投影。事实上，$\mathcal{H}^2(X) = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathcal{H}^2_k(X)$，其中$\mathcal{H}^2_k(X) \approx H^0(M, L^k)$。我们称 $\Pi_k(x, y)$ 为（第 k 个）Szegő 核；总和 $\Pi(x, y)$ 是严格伪凸边界 X 的经典 Szegő 核。

为了将伯格曼核 $B_k(z, w)$ 与 Szeg˝o 核 $\Pi_k(z, \theta; w, \varphi)$ 联系起来，我们使用局部标架 e_L 来表示 $S^k_j = F^k_j e_L^{\otimes k}$。回顾式 (6)，可得

$$\begin{aligned} B_k(z, w) &= \left(\sum_{j=1}^{d_k} F^k_j(z)\overline{F^k_j(w)}\right) e_L(z)^{\otimes k} \otimes \overline{e_L(w)}^{\otimes k} , \\ \Pi_k(z, \theta_1; w, \theta_2) &= e^{ik(\theta_1-\theta_2)}e^{-k\varphi(z)-k\varphi(w)} \sum_{j=1}^{d_k} F^k_j(z)\overline{F^k_j(w)} . \end{aligned}$$

这里，(z, θ) 表示点 $e^{i\theta}\|e_L(z)\|_h e^*_L(z) \in X$。因此

$$\begin{aligned} |\Pi_k(z, \theta_1; w, \theta_2)| &= \|B_k(z, w)\| , \\ \Pi_k(z, z) := \Pi_k(z, 0; z, 0) &= \|B_k(z, z)\| . \end{aligned}$$

第 2 节利用伯格曼核的渐近性研究随机截面 $s^k \in H^0(M, L^k)$ 的零点分布。特别是，伯格曼核的非对角渐近提供了有关随机零点相关性和方差的信息。为此，[ShZ02] 中给出了一般渐近展开，并在 [ShZ08] 中进一步阐明如下：

THEOREM **1.1.** 设 $(L, h) \to (M, \omega_h)$ 是紧致 *Kähler* 流形上的一个正全纯线丛。设 $z_0 \in M$，并在 z_0 的邻域内选取局部坐标 $\{z^j\}$，使得 $z_0 = 0$ 且 $\Theta_h(z_0) = \sum dz^j \wedge d\bar z^j$。那么

$$\begin{aligned} \frac{\pi^m}{k^m}\Pi_k\left(\frac{z}{\sqrt{k}}, \frac{\theta_1}{k}; \frac{w}{\sqrt{k}}, \frac{\theta_2}{k}\right) &= e^{i(\theta_1-\theta_2)+i\Im(z\cdot\bar w)-\frac{1}{2}|z-w|^2} \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{r=1}^{n} k^{-r/2}p_r(z, w) + k^{-(n+1)/2}R_{kn}(z, w)\right] , \end{aligned}$$

其中 p_r 是关于$(z, \bar z, w, \bar w)$ 且与 r 奇偶性相同的多项式，并且

$$|\nabla^j R_{kn}(z, w)| \le C_{jn\varepsilon b}k^\varepsilon \quad \textit{for } |z| + |w| < b\sqrt{\log k} ,$$

对于 $\varepsilon, b \in \mathbb{R}^+$, $j, k \ge 0$。此外，常数 $C_{jk\varepsilon b}$ 可以独立于 z_0 选取。

这里， ∇^j 表示第 j 阶协变导数。

定理表明，在 K¨ahler 流形上，正线丛的 k 次幂 $L^k \to M$ 对应着一个特征长度尺度：普朗克尺度 $\frac{1}{\sqrt{k}}$。它体现在以下几个方面：

- Szeg˝o 核 $\Pi_k(z, z_0)$ 的量级为 $\simeq k^m$（当 $\operatorname{dist}(z, z_0) < \frac{b}{\sqrt{k}}$），而在该球外则会迅速衰减。
- 在长度尺度 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 上，所有 K¨ahler 流形和正线丛在缩放极限下都呈现相同的面貌：它们都类似于 $\mathbb{C}^m$ 上带有欧几里得凯勒形式的（平凡）线丛 $\mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^m$。
- 在这一长度尺度上，相关性具有普适性。

使用 Bochner 坐标表示非对角展开系数的具体公式由 Lu–Shiffman 在 [LuSh15] 中给出。对于实解析度量， [HLX20] 给出了在更大长度尺度上的渐近结果。Ma–Marinescu 在其著作 [MaMar07] 中使用不同的方法，对非对角渐近进行了详细研究；他们采用的是正规坐标，而非全纯坐标。

远离对角线时，我们有如下衰减估计 [ShZ08]:

THEOREM **1.2.** 设 $(L, h) \to (M, \omega_h)$ 如上。对于 $b > \sqrt{j + 2\alpha + 2m}$, $j, \alpha \geq 0$，有

$$\nabla^j \Pi_k(z, 0; w, 0) = O(k^{-\alpha}) \qquad \textit{uniformly for } \operatorname{dist}(z, w) \geq b \sqrt{\frac{\log k}{k}} .$$

特别地，我们的方差公式用归一化伯格曼核表示

$$P_k(z, w) := \frac{\|B_k(z, w)\|}{\|B_k(z, z)\|^{\frac{1}{2}} \|B_k(w, w)\|^{\frac{1}{2}}} . \tag{11}$$

它是所谓伯*езин*核的平方根。注意，根据柯西-施瓦茨不等式， $0 \leq P_k(z, w) \leq 1$，且 $P_k(z, z) = 1$。

定理 1.1–1.2 给出了归一化核 $P_k(z, w)$ 的以下对应结果：

PROPOSITION **1.3.** 设 $(L, h) \to (M, \omega_h)$ 是一个紧致 ***K¨ahler*** 流形上的正全纯线丛。对于 $b > \sqrt{j + 2\alpha}$, $j, \alpha \geq 0$，归一化伯格曼核满足如下渐近估计

$$\nabla^j P_k(z, w) = O(k^{-\alpha}) \qquad \textit{uniformly for } d(z, w) \geq b \sqrt{\frac{\log k}{k}} .$$

PROPOSITION **1.4.** 利用定理 ***1.1*** 的假设和记号，我们得到归一化伯格曼核在对角线附近的以下渐近性：

对于 ε、 $b > 0$，存在常数 $C_j = C_j(M, \varepsilon, b)$、 $j \geq 2$，它们与点 z_0 无关，使得

$$P_k\left(\frac{z}{\sqrt{k}}, \frac{w}{\sqrt{k}}\right) = e^{-\frac{1}{2}|z-w|^2}[1 + R_k(z, w)] ,$$

其中

$$|R_k(z, w)| \leq \tfrac{C_2}{2} |z - w|^2 k^{-1/2+\varepsilon} , \quad |\nabla R_k(z)| \leq C_2 |z - w| k^{-1/2+\varepsilon} ,$$
$$|\nabla^j R_k(z, w)| \leq C_j k^{-1/2+\varepsilon} \quad j \geq 2 ,$$

对于 $|z| + |w| < b\sqrt{\text{对数}\, k}$。

2. Random zero sets

现在我们考虑零点集

$$Z_s = \{z \in M : s(z) = 0\}$$

高斯随机全纯截面的 $s \in H^0(M,\ L)$。当 M 是紧黎曼曲面 C（复维数为 1）时，零点集 Z_s 是 C中的有限点集 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$。例如，若 $C = \mathbb{CP}^1$ 且 $L = \mathcal{O}(k)$，则 s 是 $\mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$ 上的一个次数为$\leq k$ 的多项式，其零点集由 s 的根组成（若 $\deg s < k$，还包括无穷远点）。

从概率论的角度来看，随机全纯截面的零点定义了 C上的一个点过程，也就是说，它是在构形空间 $\mathrm{Conf}(C)$上的一个测度；该构形空间由 C的有限子集构成（其中的点可以具有正整数重数）。每个全纯截面都对应其零点构成的离散集合，而这个点过程是由向量空间 $H^0(C,\ L)$上的概率测度诱导出的、定义在 $\mathrm{Conf}(C)$上的概率测度。$\mathrm{Conf}(C)$上的概率测度由其 n点相关函数$\mathbf{K}_n(z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n)$（ $n \geq 1$）所确定；这些函数是概率密度（在 $C^n = C \times \cdots \times C$ 中），表示 $z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n \in C$ 是随机截面的（同时）零点。例如，二点相关函数$\mathbf{K}_2(z_1,\ z_2)$可以确定零点是倾向于聚集还是彼此“排斥”。

截面 s 的零点集 $s^{-1}(0) = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} \in \mathrm{Conf}(C)$ 给出归一化经验测度

$$\frac{1}{k} Z_s = \frac{1}{k} \sum_j \delta_{\zeta_j},$$

（同样按重数计数），因此可以将点过程视为定义在 C 上、具有离散支撑的概率测度空间上的一个测度。这里，δ_z 是 z 处的狄拉克δ函数。因此，零点的归一化经验测度，

$$(\frac{1}{k} Z_s, \psi) = \frac{1}{k} \sum_j \psi(\zeta_j), \quad \psi \in \mathcal{C}(C),$$

是 C 上的一个随机概率测度。它的期望是一个称为零点的期望分布。的测度。

对于 $m = \dim M \geq 2$，Z_s 是 s 的零点集上的积分流：

$$(Z_s, \psi) = \int_{Z_s'} \psi, \qquad \psi \in \mathcal{D}^{m-1,m-1}(M)\,, \tag{12}$$

其中，Z_s' 是解析超曲面 $\{\zeta :\ f(\zeta)\ =\ 0\}$ 的光滑点集合（按重数计数）。在第 4.1 节中，我们讨论 M 上 m 全纯截面的同时零点所形成的点过程。

在 [ShZ99], 中，我们证明了如下结论:

Theorem **2.1.** 设 $(L, h) \to (M, \omega_h)$ 是紧致 *Kähler* 流形上的一个正线丛。那么

$$\frac{1}{k} \mathbf{E}(Z_{s^k}) \to \frac{1}{\pi}\, \omega_h$$

在测度意义下弱收敛，其中$\mathbf{E}$ 表示关于高斯测度 $\gamma_{h^k, dV}$ 在 $H^0(M, L^k)$上的期望。事实上，

$$\frac{1}{k}\, \mathbf{E}(Z_{s^k}, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_M \omega_h \wedge \psi \ +\ O\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad \psi \in \mathcal{D}^{m-1,m-1}(M)\,. \tag{13}$$

因此, 如果 $\{s^k \in H^0(M, L^k)\}$ 是一个独立随机截面序列，那么

$$\frac{1}{k} Z_{s^k} \to \frac{1}{\pi}\,\omega_h \quad a.s.$$

具体而言，我们构造概率空间 $\mathcal{S} := \prod_{k=1}^{\infty} H^0(M,\ L^k)$，并赋予乘积测度。其元素是由相互独立的随机截面组成的序列 $\{s^k\}$。（在 [ShZ99], 中，(13) 的余项写作 $O(\frac{1}{k})$，而非 $O(\frac{1}{k^2})$。）

特别地，我们有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}\mathrm{Vol}_{2m-2}(Z_{s^k} \cap U) \to \frac{m}{\pi}\mathrm{Vol}_{2m}(U)\,,$$

对于 U 中开集 M。在黎曼曲面情形下（$m = 1$），

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}\#\{Z_{s^k} \cap U\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Area}(U)\,.$$

我们将在下一节概述定理 2.1 的证明。

2.1. 庞加莱´-勒隆公式。 在复维数为一时，若 $f(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 中某个区域上的全纯函数, 则拉普拉斯算子的基本解 $\Delta \log\ |z|^2 \ = \ 2\pi\delta_0$ 立即给出

$$Z_f = \sum_{f(\zeta)=0} \delta_\zeta = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log|f|^2 = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 \log|f|^2}{\partial z \partial \bar z} dz \wedge d\bar z\,, \tag{14}$$

作为一个奇异的 (1，1)-流。

在高维中，我们类似地有（见[Le67]）

$$Z_f = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log|f|^2\,, \tag{15}$$

其中 $Z_f \in \mathcal{D}'^{1,\ 1}(M)$ 表示式 (12) 中给出的积分流。

对于厄米全纯线丛 $L \to M$ 的截面 $s^k = f e_L^{\otimes k} \in H^0(M,\ L^k)$，由式 (15) 可得庞加莱-勒隆公式,

$$Z_{s^k} = \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial \log|f| = \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial \log\|s^k\|_{h^k} + \frac{k}{\pi}\omega_h\,. \tag{16}$$

对式 (16) 取平均，得到:

THEOREM **2.2.** 设 $\{S_j^k\}$ 是 $H^0(M, L^k)$的标准正交基。记 $S_j^k = f_j^k e_L^{\otimes k}$。那么，

$$\frac{1}{k}\mathbf{E}(Z_{s^k}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}\partial\bar\partial \log \sum_{j=1}^{d_k} |f_j^k|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}\partial\bar\partial \log\|B_k(z,z)\| + \frac{1}{\pi}\omega,$$

其中回顾一下， B_k 是伯格曼核。

证明。 令 $s = \sum_j a_j S_j^k$并将其写作 $s = \langle \vec a, \vec{S^k}\rangle = \langle \vec a, \vec f\rangle e_L^k$。 令 $\psi \in \mathcal{D}^{m-1,\ m-1}(M)$。于是

$$\mathbf{E}\langle \frac{1}{k}[Z_s^k]), \psi\rangle = \frac{\sqrt{-1}}{\pi k}\int_{\mathbb{C}^{d_k}} d\gamma_k(a) \int_M \partial\bar\partial \log|\langle \vec a, \vec f\rangle| \wedge \psi\,.$$

为计算该积分，我们写作 $\vec{f}=|\vec{f}|\vec{u}$，其中 $|\vec{u}|\equiv 1$. 显然，$\log|\langle\vec{a},\vec{f}\rangle| = \log|\vec{f}| + \log|\langle\vec{a},\vec{u}\rangle|$。第一项为

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi k}\int_M \partial\bar{\partial}\log|\vec{f}|\wedge\psi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}\int_M \partial\bar{\partial}\log\|B_k(z,z)\|\wedge\psi + \frac{1}{\pi}\int_M \omega\wedge\psi. \tag{17}$$

现在来看第二项。我们有

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_{\mathbb{C}^{d_k}} d\gamma_k(a)\int_M \partial\bar{\partial}\log|\langle\vec{a},\vec{u}\rangle|\wedge\psi \tag{18}$$
$$= \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_M \partial\bar{\partial}\left[\int_{\mathbb{C}^{d_k}}\log|\langle\vec{a},\vec{u}\rangle|\,d\gamma_k(a)\right]\wedge\psi = 0,$$

因为平均值 $\int\log|\langle\vec{a},\vec{u}\rangle|d\gamma_k(a)$ 是一个与 $\vec{u}$ for $|\vec{u}|=1$ 无关的常数，因此 operator $\partial\bar{\partial}$ 会将其消去。□

组 合引理 2.2 与伯格曼核渐近式 (8)，得到定理 2。 1.

2.2. 零点相关性。 本节讨论正线丛的幂的随机截面 $s^k\in H^0(M,\ L^k)$ 的零点之间的 n 点“相关性”，或“联合强度”。我们首先考虑二点相关函数（$n=2$）：随机零点的对相关流定义为

$$\mathbf{K}_2^k(z,w) := \mathbf{E}\left(Z_{s^k}(z)\otimes Z_{s^k}(w)\right); \tag{19}$$

即，对于测试形式 $\psi_1,\quad \psi_2\in\mathcal{D}^{m-1,\ m-1}(M)$,

$$\left(\mathbf{K}_2^k(z,w),\psi_1(z)\otimes\psi_2(w)\right) := \mathbf{E}\left[(Z_{s^k},\psi_1)\otimes(Z_{s^k},\psi_2)\right]. \tag{20}$$

在复维数为 1 的情形下，零点构成一个点过程，如上所述，而二点相关测度具有如下形式

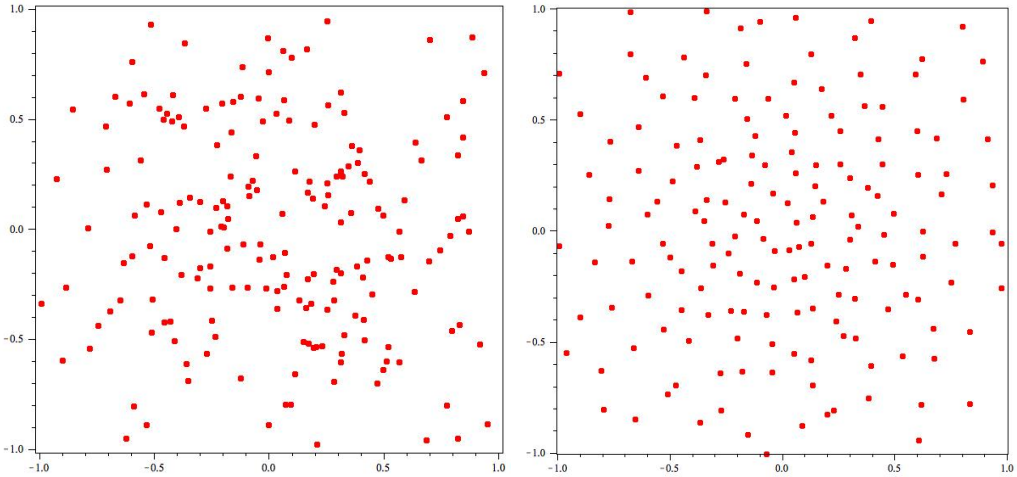
$$\mathbf{K}_2^k(z,w) = [\Delta]\wedge(\mathbf{K}_1^k(z)\otimes 1) + \tilde{K}_2^k(z,w)\,\mathbf{K}_1^k(z)\otimes\mathbf{K}_1^k(w),$$

其中 $[\Delta]$ 表示沿对角线 $\Delta=\{(z,\ z)\}\subset C\times C$的积分流，且当 k较大时，$\mathbf{K}_1^k = \mathbf{E}(Z_{s^k})$ $\approx \frac{k}{\pi}\omega_h$。于是，当 k 足够大时，$\mathbf{K}_2^k\in\mathcal{C}^\infty(C\times C)$。对角线项来自零点与自身的“自相关”。第二项则是有趣之处。在 [BShZ00a], 中，证明了利用第 1.4 节的 $1/\sqrt{k}$尺度，$\mathbf{K}_2^k-$ 具有普适极限：

$$\tilde{K}_2^k\left(\frac{z}{\sqrt{k}},\frac{w}{\sqrt{k}}\right) \to \frac{\left(\sinh^2(r^2/2)+r^4/4\right)\cosh(r^2/2) - r^2\sinh(r^2/2)}{\sinh^3(r^2/2)} \tag{21}$$
$$= \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{36}r^6 + \frac{1}{720}r^{10} - \cdots, \qquad r=|z-w|,$$

使用 $z_0\in M$ 附近满足 $\omega(z_0) = \frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z}$的局部全纯坐标。对于所有黎曼曲面都成立的方程 (21)，在 $\mathbb{CP}^1$ 的情形下由 [Ha96] 给出，在 genus$(C)=1$的情形下由 [NV98]给出。

二点相关函数 $\kappa^k\to 0$ 随距离 $r\to 0$ （其中 k 固定）变化的事实表明，零点会彼此“排斥”，也就是说，它们聚集的程度低于相互独立的随机点，如下图所示：



泊松点过程　　随机多项式的零点

文献 [BShZ00b, 定理 3.6] 证明了，随机零点集的 n点相关函数在所有维数和余维下都具有普适的缩放极限，其形式为

$$\frac{1}{k^{np}}\mathbf{K}^k_{npm}\left(\frac{z^1}{\sqrt{k}},\dots,\frac{z^n}{\sqrt{k}}\right)=\mathbf{K}^\infty_{npm}(z^1,\dots,z^n)+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

其中， p 是同时零点集的余维（ L^k的 p 全纯截面）。 [BShZ00b] 和 [BShZ01]给出了$\mathbf{K}^k_{npm}$ 的公式。特别地，对于点过程情形 $p=m$,

$$\mathbf{K}^\infty_{2pm}(z,w)=\frac{m+1}{4}\,r^{4-2m}+O(r^{8-2m}),\qquad r=\|z-w\|.$$

因此，当 $\dim M\geq 2$ 时， m (M,L^k) 中截面的随机同时零点并不会“互相排斥”；事实上，当 $\dim M\geq 3$ 时，随着 k 增大，它们比泊松过程中相应的零点聚集得更紧密。

2.3. **零点方差的多重双势**。

本节给出高斯随机全纯截面 $s^k\in H^0(M,\ L^k)$ 的零流 Z_{s^k} 的方差 $\mathrm{Var}(Z_{s^k})$ 的公式（定理 2.4）。我们先来描述（一般）随机流的方差:

Definition **2.3.** 设 $X\colon\Omega\to\mathcal{D}'^j(M)$ 是一个取值于流形 M 上次数为 j 的实流空间 $\mathcal{D}'^j_{\mathbb{R}}(M)$中的随机变量。 X 的方差流为

$$\mathbf{Var}(X):=\mathbf{E}(X\boxtimes X)-\mathbf{E}(X)\boxtimes\mathbf{E}(X),\tag{22}$$

其中我们采用以下记号

$$S\boxtimes T=\pi_1^*S\wedge\pi_2^*T\in\mathcal{D}'^{p+q}(M\times M),\qquad for\ \ S\in\mathcal{D}'^p(M),\ T\in\mathcal{D}'^q(M).$$

这里， $\pi_1,\pi_2\colon\ M\times M\to M$ 分别是到第一和第二个因子的投影。用更直观的记号，我们将写作 $(S\boxtimes T)(z,w)\ =\ S(z)\ \wedge T(w)$，其中 (z,w) 表示 $M\times M$ 中的一个点。

定义 2.3 背后的理由是， X 与具有紧支撑的实测试形式 $\psi\in\mathcal{D}^{\dim M-k}_{\mathbb{R}}(M)$ 的配对方差为

$$\mathrm{Var}(X,\psi)=\big(\mathbf{Var}(X),\,\psi\boxtimes\psi\big).\tag{23}$$

现在我们证明，零流的方差 Var(Z_{s^k}) 仅取决于方程(11)中给出的归一化 Szeg˝o 核 P_k：

THEOREM **2.4.** [ShZ08] 设 *{style id='8'>(L, h)* $\to (M, \omega_h)$ 是紧致 *K¨ahler* 流形上的一个正全纯线丛。那么，其全纯截面的零流的方差为L^k

$$\mathbf{Var}\big(Z_{s^k}\big) = -\frac{1}{4\pi^2}\partial_z\bar\partial_z\partial_w\bar\partial_w \mathrm{Li}_2[P_k(z,w)^2] \in \mathcal{D}'^{2,2}(M\times M)\,, \tag{24}$$

其中Li_2 是“对数二重函数”

$$\mathrm{Li}_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2} = -\int_0^t \frac{\log(1-x)}{x}\,dx\,.$$

定理 2.4 通过 (23) 等价于方差公式:

$$\mathrm{Var}\left(\int_{Z_s}\psi\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{M\times M}\mathrm{Li}_2[P_k(z,w)^2]\; i\partial\bar\partial\psi(z)\wedge i\partial\bar\partial\psi(w)\,, \tag{25}$$

对于测试形式 $\psi \in \mathcal{D}^{m-1,m-1}(M)$。（在 [ShZ08，定理 3.1], $\widetilde{G}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Li}_2(t^2)$。）

在黎曼曲面的情形下，(24) 可写为（用局部坐标表示）

$$\mathbf{Var}\big(Z_{s^k}\big) = \frac{1}{4\pi^2}\Delta_z\Delta_w\mathrm{Li}_2[P_k(z,w)^2]\;(idz\wedge d\bar z)\wedge(idw\wedge d\bar w),$$

因此，$\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Li}_2[P_k(z,\ w)^2]$ 是零点方差的双势。在高维中，我们称 $\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Li}_2[P_k(z,\ w)^2]$ 为方差流的多重双势。

为证明定理 2.4，我们首先注意到，只需在 $(z,\ w)$ 的一个平凡化邻域 U 上验证该恒等式。沿用第 1.1 节的记号，我们写作 $s^k = \langle\vec c, \vec S^k\rangle$，其中$\vec S^k = \vec F e_L^{\otimes k}$, $s^k = f e_L^{\otimes k} = \langle\vec c, \vec F\rangle e_L^{\otimes k}$。由定理 2.2,

$$\mathbf{E}(Z_{s^k}) = \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\log\|\vec F\|\,. \tag{26}$$

证明定理 2.4 的第一步是以下引理:

LEMMA **2.5.** 写作 $\tilde f = \|\vec F\|^{-1} f$，我们有

$$\mathbf{Var}(Z_{s^k}) = -\frac{1}{\pi^2}\partial_z\bar\partial_z\partial_w\bar\partial_w\mathbf{E}\left(\log|\tilde f(z)|\,\log|\tilde f(w)|\right)\,.$$

证明。 根据 Poincar´e–Lelong 公式 (15),

$$\mathbf{E}(Z_{s^k}\boxtimes Z_{s^k}) = -\frac{1}{\pi^2}\partial_z\bar\partial_z\partial_w\bar\partial_w\mathbf{E}\left(\log|f(z)|\,\log|f(w)|\right)\,. \tag{27}$$

于是 $\tilde f = \langle\vec c, \vec u\rangle$，其中 $\vec u = \|\vec F\|^{-1}\vec F$，并且

$$\begin{aligned}\log|f(z)|\,\log|f(w)| \;=\;& \log\|\vec F(z)\|\,\log\|\vec F(w)\| + \log\|\vec F(z)\|\,\log|\tilde f(w)|\\ &+\log|\tilde f(z)|\,\log\|\vec F(w)\| + \log|\tilde f(z)|\,\log|\tilde f(w)|\,,\end{aligned} \tag{28}$$

将（27）分解为四项。根据（26），第一项贡献

$$-\frac{1}{\pi^2}\,\partial\bar\partial\log\|\vec F(z)\|\wedge\partial\bar\partial\log\|\vec F(w)\| = \mathbf{E}(Z_f)\boxtimes\mathbf{E}(Z_f)\,.$$

˜由于 $\|\vec{u}\| \equiv 1$，$\mathbf{E}(\log\ |f(w)|)$ 与 w 无关，因此应用 $\partial_w\partial_{\overline{w}}$ 时，第二项消失。应用 $\partial_z\partial_{\overline{z}}$ 时，第三项同样消失。因此，第四项给出方差流 $\mathrm{Var}(Z_{s^k})$。□

接下来我们使用 [ShZ08 中的以下公式，引理 3.3]:

LEMMA **2.6.** 设 (Y_1, Y_2) 为均值为 *0*、方差分别为$\mathbf{E}(|Y_1|^2) = \mathbf{E}(|Y_2|^2) = 1$的联合复高斯随机变量。那么

$$\mathbf{E}\big(\log|Y_1|\ \log|Y_2|\big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Li}_2\big(\,\big|\mathbf{E}(Y_1\overline{Y}_2)\big|^2\,\big) + \frac{\gamma^2}{4} \qquad (\gamma = \textit{Euler's constant})\,.$$

˜ ˜定理 *2.4* 的证明完成：固定点 $z, w \in M$，并令 $Y_1 = f(z)$ $Y_2 = f(w)$。回顾式 (10)，可得

$$|\mathbf{E}(Y_1\overline{Y}_2)| = \frac{\sum_j F_j^k(z)\overline{F_j^k(w)}}{\|\vec{F}(z)\|\,\|\vec{F}(w)\|} = \frac{\|B_k(z,w)\|}{\|B_k(z,z)\|^{\frac{1}{2}}\,\|B_k(w,w)\|^{\frac{1}{2}}} = P_k(z,w)\,.$$

因此，由引理 2.6,

$$\mathbf{E}\left(\log|\tilde{f}(z)|\ \log|\tilde{f}(w)|\right) = \mathbf{E}\big(\log|Y_1|\ \log|Y_2|\big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Li}_2\big(P_k(z,w)^2\big) + \frac{\gamma^2}{4}\,.$$

随后由引理 2.5 得出公式 (24)。 □

2.4. 零点的光滑线性统计量。 对于 $H^0(M,\ L^k)$ 上的线性统计量，我们指的是概率空间 $(H^0(M,\ L^k), \gamma_{h,\ dV})$ 上的随机变量

$$s^k \ \mapsto\ ([Z_{s^k}], \psi) := \int_{Z_{s^k}} \psi(z), \qquad s^k \in H^0(M, L^k), \tag{29}$$

对应于固定的连续测试形式 $\psi \in \mathcal{D}^{m-1,\ m-1}(M)$。特别地，当 M 是黎曼曲面 C 时，我们有

$$([Z_{s^k}], f) = \sum_{z: s^k(z)=0} f(z), \qquad s^k \in H^0(C, L^k),$$

对应于固定的连续测试函数 f。

式 (29) 的期望和方差都有渐近展开。为了确定 $s^k \in H^0(M,\ L^k)$ 上 $\mathbf{E}(Z_{s^k},\ \psi)$ 的渐近展开，我们首先将 (8) 应用于此式，得到

$$\log\|B_k(z,z)\| \sim \log\left(\frac{k^m}{\pi^m}\right) + \frac{\rho_h}{2}k^{-1} + b_2k^{-2} + \cdots\,, \tag{30}$$

其中 ρ_h 是 ω_h 的标量曲率。然后由定理 2.2 和 (8)，我们得到线性统计量的完整渐近展开

$$\frac{1}{k}\,\mathbf{E}(Z_{s^k}, \psi) \sim \frac{1}{\pi}\int_M \omega_h \wedge \psi + \left(\frac{i}{4\pi}\int_M \rho_h\,\partial\bar{\partial}\psi\right)k^{-2} + \cdots\,. \tag{31}$$

同样，方差具有如下完整的渐近展开 :

THEOREM **2.7.** [Sh21] 设$(L,h) \to (M,\omega)$是紧致 K¨ahler 流形上的正全纯线丛，并且 $\psi \in \mathcal{D}^{m-1}{}_{,\mathbb{R}}{}^{m-1}(M)$。线性统计量$(Z_{s^k},\psi)$的方差具有如下形式的渐近展开

$$\mathrm{Var}\big(Z_{s^k},\psi\big) \sim A_0 k^{-m} + A_1 k^{-m-1} + \cdots + A_j k^{-m-j} + \cdots . \tag{32}$$

首项系数和次首项系数为

$$A_0 = \frac{\pi^{m-2}\zeta(m+2)}{4}\,\|\partial\bar\partial\psi\|_2^2\,, \tag{33}$$

$$A_1 = -\pi^{m-2}\zeta(m+3)\left\{\frac{1}{8}\int_M \rho_h|\partial\bar\partial\psi|^2\frac{1}{m!}\omega_h^m + \frac{1}{4}\|\partial^*\partial\bar\partial\psi\|_2^2\right\}, \tag{34}$$

其中 ζ 表示黎曼ζ函数，而 ρ_h 是 ω_h的标量曲率。

展开式 (32) 建立在 [ShZ10], 的方法之上，其中渐近公式 $\mathrm{Var}\big(Z_{s^k},\ \psi\big) = k^{-m}[A_0 + O(k^{-1/2+\varepsilon})]$ 已给出。

在复曲线情形下，(32) 变为

$$\mathrm{Var}\,(Z_{s^k},f) \sim \frac{\zeta(3)}{16\pi}\|\Delta f\|^2 k^{-1} - \frac{\pi^3}{2880}\left\{\int_M \rho_h|\Delta f|^2\,\omega + \|d\Delta f\|_2^2\right\}k^{-2} + \cdots\,, \tag{35}$$

对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$。

因此，光滑线性统计量具有自平均性，即其涨落的量级小于其典型值。方差中出现的是 $\|\Delta f\|_2^2$ 而非$\|\nabla f\|_2^2$，这表明协方差核不是 Δ^{-1}，而是 Δ^{-2}。

2.5. 零点分布的渐近正态性。 以下定理最初由索丁–齐列尔森 [ST04] 针对 $\mathbb{C},\mathbb{CP}^1$ 上的某些模型随机解析函数以及单位圆盘上的情形证明，随后由 [ShZ10] 推广至一般的一维系综以及高维中的余维一零点集：

THEOREM **2.8.** [ShZ10] 设 $(L,h) \to (M,\omega)$ 是紧致 K¨ahler 流形上的一个正全纯线丛，并设 ψ 是定义在 M 上、系数为 $\mathcal{C}^3$ 的实$(m-1,m-1)$形式。那么，对于随机截面 $s^k \in H^0(M,L^k)$，随机变量的分布

$$k^{m/2}\left(Z_{s^k} - \frac{k}{\pi}\,\omega,\psi\right)$$

弱收敛至均值为 0、方差为 $\frac{\pi^{m-2}\zeta(m+2)}{4}\|\partial\bar\partial\psi\|_2^2$ 的高斯分布，其中$k\to\infty$。

定理 2.8 可由索丁–齐列尔森 [ST04] 关于高斯过程非线性泛函渐近正态性的一个一般结果，以及归一化的 Szeg˝o 核（11）的性质推出。为描述 [ST04], 的结果，我们回顾一下：测度空间（T,μ）上的（复）高斯过程是一个随机变量（其取值属于 T 上复可测函数构成的空间），形式为

$$w(t) = \sum c_j g_j(t)\,,$$

其中，c_j 是均值为 0、方差为 1 的独立同分布复高斯随机变量，g_j 是（固定的）复值可测函数。若对于所有 $t\in T$，$w(t)$ 满足归一化条件，即 $\sum|g_j(t)|^2 = 1$；也就是说，若对于所有 $t\in T$，$w(t) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$。

THEOREM **2.9.** [ST04] 设 $w^1, w^2, w^3, \ldots$ 是有限测度空间(T, μ)上的一列归一化复高斯过程。设 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 单调递增且满足 $f(r) \in L^2(\mathbb{R}^+, e^{-r^2/2} r dr)$，并设 $\eta\colon T \to \mathbb{R}$ 有界可测。

令 $\mathcal{C}_k(s\,t) := \mathbf{E}\left(w^k(s)\overline{w^k(t)}\right)$ 为 w^k 的协方差函数，并假设 *th* *at*

i) $\liminf_{k\to\infty} \dfrac{\int_T \int_T |\mathcal{C}_k(s,t)|^2 \eta(s)\eta(t) d\mu(s) d\mu(t)}{\sup_{s\in T} \int_T |\mathcal{C}_k(s,t)| d\mu(t)} > 0\,;$

ii) $\lim_{k\to\infty} \sup_{s\in T} \int_T |\mathcal{C}_k(s,t)| d\mu(t) = 0.$

考虑随机变量

$$Y_k = \int_T f(|w^k(t)|)\eta(t) d\mu(t).$$

那么，随机变量的分布

$$\frac{Y_k - \mathbf{E}Y_k}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_k)}}$$

当 $k \to \infty$ 时，弱收敛到 $\mathcal{N}(0, 1)$。

为证明定理 2.8，我们将定理 2.9 应用于 $f(r) = \log r$ 和 $(T, \mu) = (M, dV)$。为在 M 上定义归一化高斯过程 w^k，取 L 的一个可测截面 $\sigma_L\colon M \to L$，满足对所有 $z \in M$ 均有 $\|\sigma_L(z)\|_h = 1$，并令

$$S_j^k = F_j^k \sigma_L^{\otimes k}, \quad j = 1, \ldots, d_k,$$

为 $H^0(M, L^k)$ 的一组标准正交基。接着令

$$w^k(z) := \sum_{j=1}^{d_k} c_j \frac{F_j^k(z)}{\sqrt{\Pi_k(z,z)}}\,.$$

由于 $|F_j^k| = \|S_j^k\|_{h^k}$，可知 w^k 定义了一个归一化的复高斯过程。事实上，

$$\sqrt{\Pi_k(z,z)}\, w^k \sigma_L^{\otimes k} = \sum c_j S_j^k = s^k\,, \tag{36}$$

其中 s^k 是 $H^0(M, L^k)$ 中的一个随机全纯截面。

现在令 ψ 为 M 上一个固定的实 $(m-1, m-1)$-形式，并记

$$\frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\psi = \eta\, dV\,.$$

由 (36) 可得，

$$Y_k = \int_M \log|w^k| \eta\, dV = \int_M \left(\log\|s^k(z)\|_{h^k} - \log\sqrt{\Pi_k(z,z)}\right) \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\psi(z) = \left(Z_{s^k}, \psi\right) + C_k\,,$$

其中每个 C_k 都是一个与随机截面 s^k 无关的常数。因此， Y_k 与线性统计量 $\left(Z_{s^k},\ \psi\right)$具有相同的方差。事实上，这些高斯过程的协方差函数 $\mathcal{C}_k(z,\ w)$ 满足

$$|\mathcal{C}_k(z,w)| = P_k(z,w)\,.$$

ShZ 10], 利用命题 (1.3)–(1.4) 给出的归一化伯格曼核 P_k 的性质，证明了定理 2.9 的条件 (i)–(ii) 成立。因此，随机变量

$$\frac{(Z_{s^k},\psi)-\mathbf{E}(Z_{s^k},\psi)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z_{s^k},\psi)}}=\frac{Y_k-\mathbf{E}(Y_k)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_k)}}$$

当 $k\to\infty$ 时，弱收敛到标准高斯分布 $\mathcal{N}(0,1)$。

定理 2.8 的结论随即由方程 (31) 和 (32) 给出的期望$\mathbf{E}(Z_{s^k},\psi)$ 与方差 $\mathrm{Var}(Z_{s^k},\psi)$ 的主导渐近项得出。□

纳扎罗夫和索丁 [NS11, NS12] 给出了关于 $\mathbb{C}$ 上线性统计量的方差和渐近正态性的结果，其中测试函数不连续。目前尚不清楚，类似结果是否适用于紧致 K¨ahler 流形上的线丛，以及任意余维的零点线性统计量是否具有渐近正态性。

还可以考虑由 m 个独立随机截面的同时零点构成的点过程的线性统计量，这些随机截面取自 $H^0(M,L^k)$:

$$(s_1^k,\dots,s_m^k)\mapsto\left([Z_{s_1^k,\dots,s_m^k}],f\right)=\sum_{\{s_1^k(z)=\cdots=s_m^k(z)=0\}}f(z), \tag{37}$$

对于固定的连续测试函数 f。文献 [ShZ10], 给出了 (37) 的期望和方差的渐近结果，但 (37) 是否具有渐近正态性仍是一个开放问题。

2.6. 集合中的随机零点计数与空洞概率。如果集合 $U\subset M$满足 $Z_s\cap U=\emptyset$，我们就称它是截面 $s\in H^0(M,L)$ 的零点集 Z_s 中的一个“空洞”。例如，文献 [Kr06、ST05] 给出了单个复变量的函数特殊系综中的空洞概率、过度聚集及其他数目统计量。为了描述这些结果在 $\dim M=1$ 的情形下的框架，即 M 为紧黎曼曲面 C的情形，我们考虑随机变量 $\mathcal{N}_k^U(s^k):=\#(Z_{s^k}\cap U)$，它定义在 $H^0(C,L^k)$ 上，用来统计开集 U 中截面 s^k的零点。因此，空洞概率就是 $\mathcal{N}_k^U(s^k)=0$ 的概率。索丁和齐列尔松 [ST05] 给出了 $\mathcal{N}_k^U$ 的方差在 $M=\mathbb{CP}^1$ 时的渐近公式（以及全纯函数在 $\mathbb{C}$ 上和在圆盘上的类似情形）。利用定理 2.4，这一公式得到了改进和推广，适用于任意紧黎曼曲面以及任意维数的紧凯勒流形，从而得到定理 2.7 的以下类似结果:

THEOREM **2.10.** [ShZ08] 设 $(L,h)\to(M,\omega_h)$ 是紧致凯勒流形上的正全纯线丛。设 U 是 M 中的一个区域，其边界分段光滑且无尖点。则对于 $m=$维 M个相互独立的高斯随机截面 $s_1^k,\dots,s_m^k$，它们属于 $H^0(M,L^k)$，随机变量的方差

$$\mathcal{N}_k^U(s_1^k,\dots,s_m^k):=\#\{z\in U:s_1^k(z)=\cdots=s_m^k(z)=0\}$$

具有如下渐近性

$$\mathrm{Var}(\mathcal{N}_k^U)=k^{m-1/2}[\nu_m\mathrm{Vol}_{2m-1}(\partial U)+O(k^{-1/2+\varepsilon})], \tag{38}$$

其中 ν_m 是仅取决于 m的普适正常数。

对于黎曼曲面的情形，$\nu_1=\zeta(3/2)/(8\pi^{3/2})$。对于单个截面的随机零点集，我们同样有:

THEOREM **2.11.** [ShZ08]在定理 *2.10* 的假设下，

$$\mathrm{Var}(\mathrm{Vol}_{2m-2}Z_{s^k}\cap U)=k^{3/2-m}\left[\tfrac{1}{8}\pi^{m-5/2}\zeta(m+1/2)\,\mathrm{Vol}_{2m-1}(\partial U)+O(k^{-1/2+\varepsilon})\right].$$

定理 2.10 和定理 2.11 是关于 $1\le p\le m$ 上 p全纯截面的同时零点的一般结果的特例。

区域内零点集 Z_{s^k} 的体积也满足如下形式的大偏差界：

THEOREM **2.12.** [ShZZr08] 设 $(L,h)\to(M,\omega_h)$ 如定理 *2.10* 中所述，并设 U 是 M 的一个开子集，使得 ∂U 在 M 中为零测度。那么，对于所有充分小的 $\delta>0$，存在一个常数 $C_{U,\delta}>0$，使得

$$Prob\left\{\left|\mathrm{Vol}_{2m-2}(Z_{s^k}\cap U)-\frac{m}{\pi}\mathrm{Vol}_{2m}(U)\,k\right|>\delta\,k\right\}\le e^{-C_{U,\delta}k^{m+1}}\quad\forall\ k\gg 0\,.$$

这里，$k\gg 0$ 表示对于某个 $k_0\in\mathbb{Z}^+$，有 $k\ge k_0$。特别地，当 $\dim M=1$ 时，我们有：

COROLLARY **2.13.** 设 $(L,h)\to(C,\omega_h)$ 是紧黎曼曲面上的正厄米线丛。设 $U\subset C$ 是 C 中的一个开集，使得 ∂U 在 C 中为零测度。那么，对所有 $\delta>0$，存在一个常数 $c_{U,\delta}>0$，使得

$$Prob\left\{s^k:\ \left|\mathcal{N}_k^U(s^k)-\frac{k}{\pi}\mathrm{Area}(U)\right|>\delta\,k\right\}\le e^{-c_{U,\delta}k^2}\quad\forall\ k\gg 0\,.$$

我们还得到了“空穴概率”的上界估计和下界估计：

THEOREM **2.14.** [ShZZr08] 设$(L,h)\to(M,\omega_h)$和 $U\subset M$如上所述，并假设存在一个截面 $s\in H^0(M,L)$，它在 U 上处处不为零。那么存在常数 $c'_U>\overline{c_U}>0$ 使得

$$e^{-c'_Uk^{m+1}}\le Prob\{s^k:Z_{s^k}\cap U=\emptyset\}\le e^{-c_Uk^{m+1}}\quad\forall\ k\gg 0\,. \tag{39}$$

(39) 中的上界是定理 2.12 在 $\delta<\frac{m}{\pi}\mathrm{Vol}_{2m}(U)$ 情形下的直接推论。单变量随机整函数对应的 (39) 的类似结果见 [ST05]。

一个开放问题是，是否

$$\log(Prob\{s^k:Z_{s^k}\cap U=\emptyset\})\sim-\tilde{c}(U)k^{m+1}$$

对某个常数 $\tilde{c}(U)$ 成立。[Zhu14] 证明了当 $M=\mathbb{CP}^m$ 和 $U=\Delta_r^m$ 时此结论成立，其中 $\Delta_r=\{z\in\mathbb{C}:\,|z|<r\}$，并给出了 $\tilde{c}(\Delta_r^m)$ 的具体公式。当 $r\ge 1$ 时，

$$\tilde{c}(\Delta_r^m)=\frac{2m\log r}{(m+1)!}+\frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j+1}\,.$$

2.7. 随机零点集的期望局部拓扑。随机实代数几何近期的一个活跃研究主题，是由一个或多个固定次数的独立实多项式的零点集所定义的随机实代数簇的随机拓扑：连通分支的数量、贝蒂数以及各分支的组合结构。Gayet 和 Welschinger [GaW14、GaW15、GaW17]等人的研究解决了这一领域的许多问题。对于这篇综述，问题在于复情形中是否存在此类问题。就整体而言，答案是否定的：所有这些拓扑不变量都是确定的。最近，D. Gayet [Ga22b]研究了这些问题的局部对应形式

在开集 $U \subset M$中的情形，而 $Z_{s^k} \cap U$ 的局部拓扑具有很强的随机性。这里陈述的 [Ga22b],主要结果针对秩 1 情形，内容如下：

THEOREM **2.15.** 设$(L, h) \to (M, \omega_h)$ 是紧致 ***Kähler*** 流形上的正全纯线丛。设 U 是 M 中的一个具有光滑边界的开集。那么对于随机全纯截面 $s^k \in H^0(M, L^k)$，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^m} \mathbf{E}\, b_j(Z_{s^k} \cap U) = \begin{cases} 0, & \text{for } \ 0 \le j \le 2m-2,\ j \neq m-1 \\ \frac{m!}{\pi^m} \operatorname{Vol}_{2m}(U), & \text{for } \ j = m-1 \end{cases}.$$

相比之下，在实域中，所有贝蒂数都按 λ^m 的量级增长，其中 $1/\lambda$ 是模型的自然尺度。在复情形中，$\lambda = \frac{1}{\sqrt{k}}$。然而，$(m-1)$ 阶贝蒂数（且仅有这个贝蒂数）按 k^m的量级增长。

在 [Au97], Auroux 证明，定量横截的（确定性）Donaldson 超曲面是截面的零点；这些截面以受控的导数横截地消失，并且满足关于 $(m-1)$ 阶贝蒂数的局部拓扑估计。在复情形中，Donaldson 超曲面与定理 2.15 中的随机超曲面具有共同特征。例如，在这两种情形下，当次数 k较大时，积分流 Z_s 均匀地充满 M。

Gayet 如下解释了定理 2.15 背后的直觉：根据最大值原理，如果一条复曲线 $C \subset \mathbb{C}^2$ 与实超平面 H 相接，且局部位于 H 的一侧，那么 $C \subset H$。设 $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数，对于 $r > 0$，令 $u_r(z) = u(r^{-1}z)$。随着 r 增大，u_r 的水平集在局部变得越来越接近平面，因此从内部与其相接的随机曲线越来越少；也就是说，$u|Z_{s^k}$ 的指标为 0 的临界点数量相较于指标为 1 的临界点更少。由此，结论可通过莫尔斯理论得出。

正如这一直觉所示，定理 2.15 的证明涉及强莫尔斯不等式，以及通过 Kac–Rice 公式对临界点进行的统计研究。

3. CRITICAL POINTS AND VALUES OF RANDOM HOLOMORPHIC SECTIONS

本节回顾关于 $H^0(M, L^k)$ 的高斯随机全纯截面的随机临界点、临界值和超越集及其渐近性的一些结果。

3.1. 临界点。全纯截面 $s \in H^0(M, L)$ 的临界点集 $\mathrm{Crit}(s, h)$ 定义为

$$\mathrm{Crit}(s,h) := \{z \in M : d(\|s\|_h^2)\big|_z = 0,\ s(z) \neq 0\} = \{z \in M : (\nabla_h s)(z) = 0,\ s(z) \neq 0\}, \tag{40}$$

其中 ∇_h 是厄米全纯线丛 (L, h) 的陈联络。

除了零点的期望分布（黎曼曲面上线丛随机截面的零点，或高维中的同时零点），我们也关注随机全纯截面的临界点期望分布

$$\mathbf{K}_1^{k\,\mathrm{Crit}} := \mathbf{E}\left[\sum_{z\in \mathrm{Crit}(s^k,h^k)} \delta_z\right] \tag{41}$$

$s^k \in H^0(M, L^k)$。

此外，临界点的总数 $\#\mathrm{Crit}(s, h)$ 是一个（非常数）随机变量，这与 $L \to M$ 上 m 全纯截面的零点总数不同，后者

等于拓扑不变量 $c_1(L)^m$。尽管每个莫尔斯指标对应的临界点交错和是拓扑不变量，但总数 #Crit(s, h) 以及给定莫尔斯指标的临界点数量都是非常数。因此，我们关注临界点的平均数量，

$$\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}(L,h) := \mathbf{E}\left(\#\mathrm{Crit}(s^k,h^k)\right) = \int_M d\mathbf{K}_1^{k\,\mathrm{Crit}}\,, \tag{42}$$

随机截面 $s^k \in H^0(M,\ L^k)$ 的。我们还考虑莫尔斯指标为 q 的临界点平均数，记为 $\mathcal{N}_{k,\ q}^{\mathrm{Crit}}(L,\ h)$，其中 $m \le q \le 2m$。（[DShZ04] 中指出，所有临界点的莫尔斯指标均为 $\ge m$。）

期望数量 $\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}(L,\ h)$ 及临界点的期望分布可表示为涉及伯格曼核的公式（见 [DShZ04，定理 1 和 6]）。这些公式可用于求得配备 Fubini-Study度量的超平面截面丛 $\mathcal{O}(1)\to\mathbb{CP}^m$ 的显式表达式。事实上，平均值 $\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}(\mathcal{O}(1)\to\mathbb{CP}^m)$ 是关于 k 的有理函数。在维数 1 和 2 的情形下，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}\left(\mathcal{O}(1)\to\mathbb{CP}^1\right) &= \frac{5k^2-8k+4}{3k-2}\,,\\ \mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}\left(\mathcal{O}(1)\to\mathbb{CP}^2\right) &= \frac{59\,k^5-231\,k^4+375\,k^3-310\,k^2+132\,k-24}{(3\,k-2)^3}\,.\end{aligned}$$

各莫尔斯指标 $q(m\le q\le 2m)$ 下，$\mathcal{O}(k)\to\mathbb{CP}^m$ 的截面临界点平均数同样是关于 k 的有理函数，其中 $m\ge 1$。一些显式公式见 [DShZ06，附录 1]。

临界点的期望数量取决于度量 h，但令人惊讶的是，其主导渐近项与 h 无关。这可以从以下关于 $\mathcal{N}_{\mathrm{Crit}k}(L,\ h)$ 和 $\mathcal{N}_{k,\ q}^{\mathrm{Crit}}(L,\ h)$ 的渐近公式中看出：

THEOREM **3.1.** ([DShZ06，推论 1。4]) 设 $(L,h)\ \to\ (M,\omega_h)$ 是紧致 *K¨ahler* 流形上的正全纯线丛。那么对于 $m\le q\le 2m$,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{k,q}^{\mathrm{Crit}}(L,h) \sim\ & \left[\beta_{0qm}\,c_1(L)^m\right]k^m + \left[\beta_{1qm}\,c_1(M)\cdot c_1(L)^{m-1}\right]k^{m-1}\\ &+\left[\beta_{2qm}\int_M \rho_h^2\,dV_h + \beta'_{2qm}\,c_1(M)^2\cdot c_1(L)^{m-2} + \beta''_{2qm}\,c_2(M)\cdot c_1(L)^{m-2}\right]k^{m-2}+\cdots\,,\end{aligned} \tag{43}$$

其中 ρ_h 是 ω_h 的标量曲率，而 β_{0qm}、β_{1qm}、β_{2qm}、β'_{2qm}、β''_{2qm} 是仅依赖于 q 和 m 的普适常数。

将 q 从 m 到 $2m$ 求和，可得到 $\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}(L,\ h)$ 的类似渐近展开。

事实上，展开式的主导项和次主导项都不依赖于 L 上度量的选择。注意，第三项中的非拓扑部分是卡拉比泛函的 β_{2qm} 倍

$$Cal(\omega_h) := \int_M \rho_h^2\,dV_h\,.$$

已在 [Bau10] 中证明，对于所有 $m\ge 1$，$\sum_{q=m}^{2m}\beta_{2qm}$ 都是正的，因此我们有：

COROLLARY **3.2.** 设 h 和 h' 是 L 上的正曲率度量。若 $Cal(h')>Cal(h)$，则存在 k_0 使得对所有 $k\ge k_0$，$\mathcal{N}_k^{\mathrm{Crit}}(L,h')\ >\mathcal{N}_{\mathrm{Crit}k}(L,h)$。

已知，在 $c_1(L)$ 中的 K¨ahler 度量空间上，常标量曲率 K¨ahler 度量是泛函 Cal 的临界度量，而且所有临界度量都是该空间上 Cal 的全局最小值 [Ca85, Hw95]。此外，如果 $c_1(L)$ 包含一个常标量曲率 K¨ahler 度量，那么每个临界度量都具有常标量曲率[Ca 85]。因此，常标量曲率度量具有“渐近最小的临界数”，其含义是：若 h 和 h' 是 L 上的两个正度量，满足 ω_h ，但 $\omega_{h'}$不具有常标量曲率，那么推论 3.2 的结论成立。

已知，对于所有 m [， $\beta_{2mm} > 0$ Bau10] ；并且在低维情形下， $\beta_{2qm} > 0$ DShZ06]。然而，对于所有 q， $\beta_{2qm} > 0$ 是否成立仍是一个开放问题， m。

与黎曼曲面上随机截面的零点（或 M 上 m-截面的同时零点）一样， M 上随机截面的临界点构成一个点过程。其单点函数（或期望密度）具有渐近展开 [DShZ06]

$$\frac{1}{k^m}\mathbf{K}_1^{k\,\mathrm{Crit}}(z) \sim \left[b_0 + b_1(z)k^{-1} + b_2(z)k^{-2} + \cdots\right]\frac{1}{m!}\omega_h^m\,. \tag{44}$$

常数 b_0 仅取决于维数 m；其取值见 [DShZ06]。据我们所知，关于 H^0（M， L^k）中截面临界点二点相关函数的唯一结果，是 [Bab12] 中黎曼曲面情形的渐近公式：

THEOREM **3.3.** 设 $(L, h) \to (C, \omega_h)$ 是紧黎曼曲面 C 上的一个正线丛。那么，临界点 $\tilde{K}_2^{k\,\mathrm{Crit}}(z, w)$ 的二点相关函数具有如下缩放极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\,\tilde{K}_2^{k\,\mathrm{Crit}}\left(\frac{z}{\sqrt{k}}, \frac{w}{\sqrt{k}}\right) = \frac{2}{3\pi^2} + O(r^2)\,,$$

其中 $r = \mathrm{dist}(z, w)$。

因此，黎曼曲面上临界点的聚集与泊松点过程的聚集相似。复维数大于一时的临界点二点相关函数公式仍是一个待解决的问题。

3.2. 上确界范数与随机超越集。本节讨论越阈集

$$\{z \in M : \|s(z)\|_h > r\}$$

以及正全纯线丛 (L, h) 的随机全纯截面 s 的上确界范数。实高斯场的随机超越集已被广泛研究三十余年；有关背景及该主题的参考文献，请参见 [Ga22a, TA03]。

研究相对于单位 $(2d_k - 1)$-球面上的 Haar概率测度 ν_k 而言，范数为单位 $\mathcal{L}^2$的随机截面的上确界范数和越阈集，最为有用；

$$SH^0(M, L^k) = \{s^k \in H^0(M, L^k) : \|s^k\|_{G(h^k, dV)} = 1\}, \tag{45}$$

我们将这个概率空间称为球面系综。一个众所周知的问题是确定越阈集的期望欧拉示性数，

$$\mathbf{E}_{\nu_k}\left[\chi\{\|s^k(z)\|_{h^k} > r\}\right] = \int_{H^0(M,L^k)} \chi\{\|s^k(z)\|_{h^k} > r\}\, d\nu_k(s),$$

以及越阈集非空的概率。（此处及下文中， χ表示欧拉示性数。）

注意，对于所有的 $s^k = \sum c_j S_j^k \in SH^0(M, L^k)$，由 (6)–(8) 可得，

$$|s^k(z)|^2_{h^k} \le \sum_{l=1}^{d_k} |c_l|^2 \sum_{j=1}^{d_k} \|S_j^k(z)\|^2_{h^k} = 1 \cdot \|B_k(z,z)\| = \left(\frac{1}{\pi^m} + o(1)\right) k^m, \tag{46}$$

因此，越阈集 $\{z : \|s^k(z)\|_{h^k} > (\pi^{m/2} + \varepsilon)k^{m/2}\}$ 对于所有 $s^k \in H^0(M, L^k)$，当 k 充分大时均为空。此外，通常还成立一个精度高得多的渐近上界：

THEOREM **3.4.** [ShZ03，定理 1。1] 对于所有 $n > 0$，存在一个正常数 C_n，使得概率

$$Prob\left\{\sup_{z\in M} \|s^k(z)\|_{h^k} > C_n \sqrt{\log k}\right\} < O\left(\frac{1}{k^n}\right), \qquad s^k \in H^0(M, L^k).$$

因此，对于几乎所有随机序列 $\{s^k\} \in \prod_{k=1}^{\infty} SH^0(M, L^k)$，

$$\|s^k\|_\infty = O\left(\sqrt{\log k}\right). \tag{47}$$

据我们所知，唯一一篇研究全纯情形下超越集的文章是孙景舟（Jingzhou Sun） [Sun 12], 的论文，下面我们总结孙的结果。

THEOREM **3.5.** 设 $(L, h) \to (M, \omega_h)$ 是紧致 ***K¨ahler*** 流形上的正全纯线丛，并设 k_0 充分大，使得对所有 $k \ge k_0$，L^k 都非常丰。则存在一个与 k无关的 $u_0 < 1$，使得对于 $1 \ge u > u_0$ 和 $k \ge k_0$,

i) 越阈集

$$\mathcal{E}_u^k(s^k) := \left\{z \in M : \|s^k(z)\|_{h^k} > u \, \|B_k(z,z)\|^{1/2}\right\}$$

要么为空，要么是可缩的，并且

ii)
$$\begin{aligned} Prob\big[\mathcal{E}_u^k(s^k) \ne \emptyset\big] &= Prob\left\{\sup_{z\in M} \|s^k(z)\|_{h^k} > u \, \|B_k(z,z)\|^{1/2}\right\} \\ &= \int_M c(M)(1 - kc_1(L)) \wedge (ku^2 \, c_1(L) - u^2 + 1)^{d_k - 1}, \end{aligned}$$

其中 $c(M)(1 - kc_1(L))$ 是取值于 $1 - kc_1(L)$的陈多项式。

COROLLARY **3.6.** 在定理 *3.5* 的假设和记号下，对 $1 \ge u > u_0$，期望欧拉示性数

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,\chi\big[\mathcal{E}_u^k(s^k)\big] &= \int_M c(M)(1 - kc_1(L)) \wedge (ku^2 \, c_1(L) - u^2 + 1)^{d_k - 1} \\ &= (1 + o(1)) d_k^{m+1} (1 - u^2)^{d_k - m - 1} u^{2m}. \end{aligned}$$

回忆

$$d_k = \dim H^0(M, L^k) = \frac{k^m}{m!} \int_M c_1^m(L) + O(k^{m-1}),$$

根据希策布鲁赫–黎曼–罗赫公式和小平消失定理（或参见例如 [ShS85，引理 7.6]）。

当 $\dim M = 1$ 时，定理 3.5 得出如下结果：

COROLLARY **3.7.** 设(L,h) 是紧黎曼曲面(M,ω_h) 上的一个次数为 δ 的正线丛，其亏格为 g。那么，采用定理 *3.5* 中的记号，存在一个与 k 无关的 $u_0<1$，使得对于 $1\geq u>u_0$，期望欧拉示性数

$$\mathbf{E}\,\chi\big[\mathcal{E}^k_u(s^k)\big]=(1-u^2)^{k\delta-g-1}\left[k^2\delta^2u^2-k\delta(gu^2-1+u^2)+(2-2g)(1-u^2)\right],$$

对于 $k\delta>2g-2$。

为证明定理 3.5，J. Sun 证明了一个本身也很有意义的嵌入定理:

THEOREM **3.8.** 设 $(L,h)\to(M,\omega_h)$ 是紧致 ***Kähler*** 流形上的正全纯线丛，并设 $k_0\in\mathbb{Z}^+$，使得对所有 $k\geq k_0$，L^k 都非常丰。设 $\Phi_k:M\to\mathbb{CP}^{d_k-1}$ 是由 $H^0(M,L^k)$ 关于厄米内积 $G(h^k,dV)$的标准正交基所给出的嵌入，其中 $k\geq k_0$。设 r_k 为$\Phi_k(M)\subset\mathbb{CP}^{d_k-1}$ 的临界半径，其中 $\mathbb{CP}^{d_k-1}$ 配备 ***Fubini–Study*** 度量。则 $\inf_{k\geq k_0}r_k>0$。

定理 3.5 的证明在 [Gr85], 情形下使用管状邻域体积公式 $u_0=\cos r_0$，其中 $r_0=\inf_{k\geq k_0}r_k$。

3.3. 临界值。 现在我们来研究 $L\to M$ 的幂的随机全纯截面的临界值分布。所谓 $s^k(z)\in H^0(M,\ L^k)$ 的"值"，是指其范数$\|s^k(z)\|_{h^k}\in\mathbb{R}^+$。我们研究范数，因为各个值 $s^k(z)$ 位于 L^k 的不同纤维 L^k_z 中。因此，我们令

$$\mathrm{CV}(s^k):=\{\|s^k(z)\|_{h^k}:z\in\mathrm{Crit}(s^k,h^k)\}=\{\|s^k(z)\|_{h^k}:z\in M\,,\nabla s^k(z)=0\,,s^k(z)\neq0\}\tag{48}$$

表示截面 $s^k\in H^0(M,\ L^k)$ 的临界值集合。

由于 $\mathrm{CV}(\lambda s^k)=|\lambda|\mathrm{CV}(s^k)$，研究相对于单位球面上的 Haar概率测度 ν_k 的单位范数随机截面的临界值分布最为有用

$$SH^0(M,L^k)=\{s^k\in H^0(M,L^k):\|s^k\|_{\mathcal{L}^2}=1\},\tag{49}$$

这个概率空间称为球面系综。（显然，在球面系综中，s^k 的临界点的期望分布与高斯系综中的相同，而且两种系综具有相同的期望数量 $\mathcal{N}_{k,\,q}^{\mathrm{Crit}}(L,\ h)$。）

我们回顾一下，由 (46) 可知，我们有确定性界 $\mathrm{CV}(s^k)\subset(0,\ Ck^{m/2})$，并且由 (47) 可知，几乎必然有 $\mathrm{CV}(s^k)\subset(0,\ C\sqrt{\log\ k})$。

我们令

$$[\mathrm{CV}(s^k)]=\textstyle\sum_{z\in\mathrm{Crit}(s^k,h^k)}\delta_{|s^k(z)|_{h^k}}\tag{50}$$

表示截面 $s^k\in SH^0(M,\ L^k)$ 的临界值分布。为描述球面平均 $\mathbf{E}_{\nu_k}[\mathrm{CV}(s^k)]$, 的渐近行为，我们使用以下记号：用 $\mathrm{Sym}(m,\ \mathbb{C})\cong\mathbb{C}^{\frac{m^2}{2}+m}$ 表示复对称矩阵的空间，并定义特殊的（正定）算子

$$Q=(Q^{j'q'}_{jq}):=\left(\delta_{jj'}\delta_{qq'}+\delta_{jq'}\delta_{qj'}\right),\quad 1\leq j\leq q\leq m,\ 1\leq j'\leq q'\leq m.\tag{51}$$

我们定义通用函数（仅依赖于维数 m）

$$f_m(t)=\frac{2}{\pi^{m(m+3)}}\int_{\mathrm{Sym}(m,\mathbb{C})}e^{-|\xi|^2}\left|\det\left(\left|\sqrt{Q}\,\Xi\right|^2-t^2I\right)\right|d\Xi,$$

wh其中 $d\Xi$ 表示 Sym$(m,\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{m^2+m}$ 上的勒贝格测度。于是我们有 :

THEOREM **3.9.** ([FZ14]) 设 $(L,h) \to (M,\omega_h)$ 是紧凯勒流形上的一个正全纯线丛。球面系综 $SH^0(M,L^k)$ 中临界值的归一化期望密度具有如下渐近性

$$\frac{1}{k^m}\mathbf{E}_{\nu_k}[\mathrm{CV}(s^k)] \to \mathrm{Vol}(M)\, f_m(t)\, te^{-t^2}\, dt\,.$$

对于复曲线， $f_1(t) = \frac{1}{\pi}(2t^2 - 4 + 8e^{-t^2/2})$。

4. POINT PROCESSES AND KÄHLER METRICS

本节给出两个示例，说明如何利用点过程构造凯勒度量。

4.1. 零点过程。 设紧黎曼曲面 C上有一个正线丛（L， h），我们可以构造线丛幂 L^k 的随机截面零点所形成的点过程 Z_{s^k} 。回顾定理 2.1，期望测度 $\frac{1}{k}\mathbf{E}Z_{s^k}$ 收敛到$\frac{1}{\pi}\omega_h$。在高维情形下，取线丛 $L \to M$的全纯截面 s_1， $\cdots$， s_m，使得它们的公共零点集

$$Z_{s_1,\ldots,s_m} = \{z \in M : s_1(z) = \cdots = s_m(z) = 0\} = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_p\}$$

有限时，我们定义经验概率测度

$$\frac{1}{p}[Z_{s_1,\ldots,s_m}] = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\delta_{\zeta_j}\,.$$

给定正线丛 $L^k \to M$ 的随机全纯截面，概率测度 $\gamma_{h^k,\ dV}$ 在 $H^0(M,\ L^k)$ 上诱导出点过程 $Z_{s_1^k,\ldots,s_m^k}$ （当 k 足够大时，公共零点集几乎必然是 0 维的）。于是我们有

THEOREM **4.1.** [ShZ99，命题 4。4] 设 $(L,h) \to (M,\omega_h)$ 是紧致 ***K¨ahler*** 流形上的正全纯线丛。那么

$$\frac{1}{k^m}\,\mathbf{E}[Z_{s_1^k,\ldots,s_m^k}] \to \frac{1}{\pi^m}\omega_h^m = \frac{m!}{\pi^m}\,d\mathrm{Vol}_M\,.$$

4.2. Berman 的典范 K¨ahler 点过程。在一系列文章中， [Be11、Be14、Be17、Be18、Be20、Be21], R. Berman 研究了定义在 K¨ahler 流形上的行列式点过程，这些点过程由伯格曼核及相关几何不变量定义。

设 M 是紧致 K¨ahler 流形，并假设典范线丛 $K_M = \bigwedge_m T_M^*$ 是丰沛的。Aubin [Aub78] 和 Yau [Yau78] 证明了 M 带有一个 K¨ahler–Einstein 度量 ω_{KE}；即该度量具有常标量曲率：Ric$\,\omega_{KE} = -\omega_{KE}$。Berman 构造了行列式点过程 $[\mathbf{z}_k]$ ，并利用其期望经验概率测度，在 M 上获得收敛到 ω_{KE} 的 K¨ahler 度量，其中 $k \to \infty$。

虽然上述零点过程取决于度量的选择（即取决于测度 $\gamma_{h^k,\ dV}$），Berman 的典范点过程却不依赖于度量的选择。与之前一样（取 $L = K_M$），设 $\{S_1^k, \ldots, S_{d_k}^k\}$ 是多重典范系$H^0(M,\ K_M^k)$ 的一组基，其中 $d_k = \dim\ H^0(M,\ K_M^k)$。Berman 的典范概率测度（或点

过程）是构形空间 M^{d_k} 上 M 中 d_k 个点的概率测度 μ_k^B，定义如下:

$$\mu_k^B := \frac{1}{\lambda_k} \left|\det S^{(k)}(z_1, \dots, z_{d_k})\right|^{\frac{2}{k}},$$

其中 λ_k 是归一化常数，且

$$\det S^{(k)}(z_1, \dots, z_{d_k}) := \det \left(S_j^k(z_l)\right)_{1\le j,l\le d_k}$$

是多重典范丛 $K^k_{M^{d_k}} \to M^{d_k} = M \times \cdots \times M$ 的全纯截面。因此，$|\det\, S^{(k)}|^{2/k}$ 是 $K_{M^{d_k}} \wedge K_{M^{d_k}}$ 的半正截面，也就是 M^{d_k} 上的正测度。改变基会使 $|\det\, S^{(k)}|^{2/k}$ 乘上一个常数因子，我们再除以 λ_k，从而使 μ_k^B 成为定义良好的概率测度。

如第 2 节开头所述，点 $\mathbf{z}_k = (z_1, \dots, z_{d_k}) \in M^{d_k}$ 对应于 M 上的经验概率测度，

$$[\mathbf{z}_k] := \frac{1}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} \delta_{z_j}.$$

因此（除去对称群的作用后），我们可以将 μ_k^B 视为 M 上离散概率测度空间上的概率测度。

随后，Berman 得到一列典范的 K¨ahler 形式和体积形式，它们在 M 上收敛到 K¨ahler-Einstein 度量和体积:

THEOREM **4.2.** [伯17]设 M 是紧致 ***K¨ahler*** 流形，且 K_M 是充足的 $e.$

i) $$\mathbf{E}_{\mu_k^B}[\mathbf{z}_k] \to c\,\omega_{KE}^m, \quad as \;\; k \to \infty,$$

其中 c是归一化常数;

ii) 在开集 U上写作 $\mathbf{E}_{\mu_k^B}[\mathbf{z}_k] = f_k\,(i^{m^2}\eta \wedge \bar{\eta})$，其中 η 是一个处处不为零的全纯 m-形式，***K¨ahler*** 形式

$$\omega_k := \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log f_k \to \omega_{KE}, \quad as \;\; k \to \infty.$$

注意，K¨ahler 形式 ω_k 是全局定义的，且与 η的选取无关。部分 (i) 是定理 4.1 的一个类似结果。常数 c 的选取使得 $\int_M c\,\omega_{KE}^m = c\,m!\mathrm{Vol}_{KE}(M) = 1$。

5. RANDOM BERGMAN METRICS

本节讨论随机 K¨ahler 几何的一个新近方向：研究固定上同调类 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 中的随机 K¨ahler 度量，以及由 Ferrari、Klevtsov 和 Zelditch [FKZ13、FKZ12、KZ16]给出的随机 Bergman 度量对它们的逼近。这里，$\omega_0 = \omega_h = \pi c_1(L,\ h)$ 是正线丛 $(L,\ h) \to (M,\ \omega_h)$ 的 K¨ahler 度量，而 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 是 K¨ahler 度量 $\omega \in [\omega_0]$构成的无限维空间，$\omega \in [\omega_0]$属于 ω_0的上同调类。M 上属于 K¨ahler 类 $[\omega_0]$ 的所有 K¨ahler 度量 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 参数化为

$$\mathcal{K}_{[\omega_0]} = \{\varphi \in C^\infty(M)/\mathbb{R} : \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0\}. \tag{52}$$

研究相当一般的随机 K¨ahler 度量，其动机在某种意义上源于 Polyakov 的量子引力方法。在复维数为一时，这引发了

大量关于 LQG（刘维尔量子引力）的论文。鉴于我们着重研究高维 K¨ahler 流形，本文不回顾有关 LQG 的浩瀚文献，而只讨论 [FKZ13、FKZ12、KZ16] 中研究的随机 K¨ahler 度量。由于（52）具有无限维性，为其赋予有趣的概率测度非常困难。在 LQG 中，研究了一种特定的测度，它由一个研究充分的高斯场——高斯自由场——诱导而来。更确切地说，它是 GFF 指数的一个重整化版本，称为高斯乘法混沌。在高维情形下，没有与之对应的构造，因此必须从头开始。主要思路是先在 Bergman 度量的有限维空间 $\mathcal{B}_k$ 上定义一列概率测度 μ_k，然后研究它们的极限。

我们先描述空间 $\mathcal{B}_k$，然后聚焦于一种特定的概率测度：该测度由对称空间黎曼度量下 $\mathcal{B}_k$ 上的布朗运动诱导。次数为 k 的伯格曼度量空间 $\mathcal{B}_k$，由小平映射针对 $H^0(M, L^k)$ 所拉回的富比尼-施图迪度量构成。也就是说，设 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{d_k}\}$ 为 $H^0(M, L^k)$ 的一组基，并令

$$\iota_\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_{d_k}] : M \to \mathbb{CP}^{d_k-1} . \tag{53}$$

由于正线丛是丰沛的，我们可以选取足够大的 k，使得 (53) 是一个嵌入（对 $H^0(M, L^k)$ 的所有基 $\{\sigma_j\}$ 均成立）。相应的伯格曼度量为

$$\frac{1}{k}\iota_\sigma^*\omega_{FS} = \frac{i}{2k}\,\partial\bar\partial \log \sum_{j=1}^{d_k} |f_j|^2 , \tag{54}$$

其中，对于一个局部标架 e_L，有 $\sigma_j = f_j e_L^{\otimes k}$。于是，次数为 k 的伯格曼度量空间 $\mathcal{B}_k$ 由所有形如 (54) 的度量构成。

空间 $\mathcal{B}_k$ 可以用对称空间 SU(d_k)\SL(d_k, $\mathbb{C}$) 参数化，具体如下：设 $\{S_1^k, \dots, S_{d_k}^k\}$ 为关于由 h 和 ω_0 诱导的内积 (4) 的一组固定标准正交基，并按上文所述写出 $S_j^k = F_j^k e_L^{\otimes k}$。对于矩阵 $A = (A_{jl}) \in \mathrm{SL}(d_k, \mathbb{C})$，令 $\sigma_j^A = \sum_l A_{jl} S_l^k$。那么 $\sigma^A = \{\sigma_1^A, \dots \sigma_{d_k}^A\}$ 是 $H^0(M, L^k)$ 的一组基，相应的伯格曼度量为

$$\frac{1}{k}(\iota_{\sigma^A})^*\omega_{FS} = \frac{i}{2k}\,\partial\bar\partial \log \sum_{jl} \bar F_j^k P_{jl} F_l^k = \omega_0 + \frac{i}{2k}\,\partial\bar\partial \log \sum_{jl} \left\| \bar S_j^k P_{jl} S_l^k \right\|_{h^k} , \tag{55}$$

其中 $P = A^*A$ 属于行列式为 1 的正定厄米 $d_k \times d_k$ 矩阵空间。我们将该空间记为 $\mathcal{P}_{d_k}$，并注意到 SU(d_k)\SL(d_k, $\mathbb{C}$) $\cong \mathcal{P}_{d_k}$ 通过映射$A \mapsto A^*A$。

对于矩阵 $P = A^*A \in \mathcal{P}_{d_k}$，我们定义伯格曼势

$$\varphi_P := \frac{1}{2k} \log \sum_{jl} \bar F_j^k P_{jl} F_l^k , \tag{56}$$

并令

$$\omega_P := \frac{1}{2k}(\iota_{\sigma^A})^*\omega_{FS} = i\,\partial\bar\partial\varphi_P \tag{57}$$

表示相应的 应的伯格曼度量。[1] 特别地， $\varphi_{\mathbf{I}_k} = \varphi_h + \frac{1}{k}\log \|B_k(z, z)\|$，且

$$\omega_{\mathbf{I}_k} = \omega_0 + \frac{i}{2k}\partial\bar{\partial}\log\|B_k(z,z)\| = \omega_0 + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{58}$$

由 (8)，其中 $\mathbf{I}_k$ 是 $d_k \times d_k$ 单位矩阵。

5.1. 热核测度。给定一个关于 h 和 $\omega_0 = \omega_h$的 $H^0(M, L^k)$的标准正交基 $\{S_j^k\}$，空间 $\mathcal{B}_k$ 可通过方程 (55)–(57) 与对称空间 $\mathcal{P}_{d_k}$ 相对应。一般问题是寻找 $\mathcal{B}_k$ 上的测度序列 $\{d\mu_k\}$，使其独立于基 $\{S_j^k\}$ 的选取，并且在参考点 $\omega_0 \in \mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 改变时以简单的方式变化，同时当 $k \to \infty$时具有良好的渐近性质。此类测度可以取为热核测度

$$d\mu_k^t(P) := p_k(t, \mathbf{I}_k, P)\, dP, \tag{59}$$

其中 dP是 $\mathcal{P}_{d_k}$上的哈尔测度，而 $p_k(t, P_1, P_2)$是对称空间 $\mathcal{P}_{d_k}$的热核。该测度在酉群 $\mathrm{U}(d_k)$ 的作用下保持不变，因此与在 (55) 中用于矩阵—度量对应的截面标准正交基 $\{S_j^k\}$ 的选取无关。于是，(59) 是由从时刻 $t = 0$起、在时刻 $\mathcal{P}_{d_k}$ 从单位矩阵 $\mathbf{I}_k$ 开始的布朗运动所诱导的 $\mathcal{B}_k$ 上的概率测度。

本节回顾 [KZ16] 关于 $\mathcal{B}_k$ 上热核测度（59）在 $k \to \infty$ 时的性质。热核测度只是众多可供研究的测度之一；我们选择它，是因为它具有简单的几何和概率论解释，而且我们得到了其相关函数出人意料地显式的公式。然而，它与正定厄米矩阵的对称空间几何紧密相连，因此无法反映 $\mathcal{B}_k$ 更深层的几何方面。本节末尾，我们提出一种更深入的模型，即 $\mathcal{B}_k$ 上的 Calabi 度量测度。然而，要为这个 Calabi 模型的关键概率对象求得解析表达式并不容易。

文献 [FKZ12], 已证明，对于 $\mathcal{P}_{d_k}$ 上由 d_k 作用 $P \mapsto U^*PU$ 保持不变的 $\mathcal{P}_{d_k}$ 上的所有概率测度 ν，都有

$$\mathbf{E}_\nu \varphi_P = \varphi_{\mathbf{I}_k} = \frac{1}{2k}\log\|B_k(z,z)\| - \log\|e_L(z)\|, \tag{60}$$

因此由（8）可得

$$\mathbf{E}_\nu \omega_P = \omega_{\mathbf{I}_k} = \omega_0 + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{61}$$

特别地，（61）对热核测度成立。

然而，二点相关取决于不变测度的选择。热核测度 (59) 的二点相关见于 [KZ16], ，其中证明了相关性具有如下形式

$$\mathbf{E}_{\mu_k^t}\, \varphi_P(z)\varphi_P(w) = \varphi_{\mathbf{I}_k}(z)\varphi_{\mathbf{I}_k}(w) + \frac{1}{4k^2} I_2(t, \beta_k(z,w)), \tag{62}$$

[1]这里，我们采用如下约定： $\pi\omega_{\mathrm{FS}}$ 属于超平面截面丛的陈类$\mathcal{O}(1) \to \mathbb{CP}^m$，因此对于 $\omega_P \in \mathcal{B}_k$，$[\pi\omega_P] = c_1(M, L)$。因此，在本文中， ω_P和 φ_P等于1 2 FKZ12、KZ16]中的相应项 [。

其中

$$\beta_k(z,w)=\frac{\|B_k(z,w)\|^2}{\|B_k(z,z)\|\,\|B_k(w,w)\|}=P_k(z,w)^2 \tag{63}$$

是伯*езин*核，并且

$$\frac{\partial}{\partial x}I_2(t,x)=\frac{2t}{x}-\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\frac{\sqrt{1-x}}{x}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\frac{e^{-\frac{1}{2t}\lambda^2}\cosh\lambda}{\sqrt{\coth^2\lambda-x}}\log\frac{\sqrt{\coth^2\lambda-x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{\coth^2\lambda-x}-\sqrt{1-x}}. \tag{64}$$

由 (60) 和 (62) 可得

$$\mathbf{Var}(\varphi_P)=\frac{1}{4k^2}I_2(t,\beta_k)\,, \tag{65}$$

其中 **方差** =**方差**μ_k^t 由定义 2.3 给出。注意

$$\big(\mathbf{Var}(\varphi_P)\big)(z,w)=\mathrm{Cov}\big(\varphi_P(z),\varphi_P(w)\big)\,.$$

此外，对 (65) 求导可得

$$\mathbf{Var}\big(\omega_P\big)=\frac{1}{4k^2}(i\partial\bar\partial)_z\,(i\partial\bar\partial)_w\,I_2(t,\beta_k(z,w))\,. \tag{66}$$

公式 (66) 表明， I_2(*t*， β_k) 是时刻 t 热核测度下 K¨ahler 度量方差的多重双势。在黎曼曲面情形（dim $M=1$），区域 $U\subset M$ 面积的方差由下式给出

$$\mathrm{Var}\left(\int_U\omega_P\right)=\int_{U\times U}\mathbf{Var}(\omega_P)=-\frac{1}{4k^2}\int_{\partial U\times\partial U}\partial_z\,\partial_w\,I_2(t,\beta_k(z,w))\,.$$

若固定 k 并令 $t\to\infty$。则

$$\frac{\partial}{\partial x}I_2(\infty,x):=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}I_2(t,x)=-\frac{\log(1-x)}{x}\,, \tag{67}$$

（见 [KZ16]），因此

$$I_2(\infty,x)=\mathrm{Li}_2(x)\,.$$

因此，对于固定的 k，空间 $\mathcal{B}_k\cong\mathcal{P}_{d_k}$ 上相对于热核测度 μ_k^t 的随机 K¨ahler 度量的方差，随着$t\to\infty$趋于随机截面 $s^k=fe_L^{\otimes k}\in H^0$（$M$， L^k）的缩放零流$\frac{\pi}{k}Z_{s^k}=\frac{i}{k}\partial\bar\partial\log|f|$的方差（见定理 2.4）。事实上，在 $t\to\infty$ 极限下，随机度量收敛到被视为奇异度量的随机零除子，其意义如 [KZ16, §5.1]中所述。

由于 (66) 给出了任意 t， k的精确公式，因此也可以考虑各种极限，使$t\to\infty$， $k\to\infty$ 满足某种关系。受 $\mathcal{B}_k$的度量渐近性启发，一种自然的选择是取耦合极限。若将 $\mathcal{P}_{d_k}\approx\mathcal{B}_k\subset\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 上的 Cartan–Killing (CK) 度量 $g_{CK,\,k}$ 按如下方式缩放：$g_k=\epsilon_k^2 g_{CK,\,k}$，其中 $\epsilon_k=k^{-1}d_k^{-1/2}$，则 $T\mathcal{B}_k$上的 $g_k\to g_M$。这里， g_M 是 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$上的马布奇度量，即在 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 上由 $||\delta\varphi||^2_{\varphi_0}=\int_M(\delta\varphi)^2\omega_\varphi^m/m!$ 定义的黎曼度量，其中 $\omega_\varphi=\omega_0+i\partial\bar\partial\varphi$。因此，相对于通常的 CK 度量$g_{CK,\,k}$，半径为一的球相对于马布奇距离的半径约为 ϵ_k。按$g_k=\epsilon_k^2 g_{CK,\,k}$缩放后，相应的拉普拉斯算子按 $\Delta_{g_k}\mapsto\epsilon_k^{-2}\Delta_{g_{CK,\,k}}$缩放。因此，热算子按如下方式缩放：

$$\exp t\Delta_{g_k}=\exp t\epsilon_k^{-2}\Delta_{g_{CK,k}}.$$

实际上，它是 o 只有时间经过了缩放，缩放后的热核为 p_k(*ϵ*$_k^{-2}t$， $\mathbf{I}_k$， P).

因此，我们研究 $t \mapsto t\epsilon_k^{-2}$ 下的度量缩放极限，并渐近地计算 $I_2(\epsilon_k^{-2}t,\ \beta_k)$，其中 $k \to \infty$。这种缩放使得相对于极限 Mabuchi度量， d_k-球在 $k \to \infty$ 下保持大小一致。因此，随着 k 变化，相对于 g_k的布朗运动会从初始度量 ω_0 出发，探测大小为 t 的距离，对所有 k均如此。结果发现

$$\lim_{k\to\infty} I_2\left(\epsilon_k^{-2}t, \beta_k(z, z+u/\sqrt{k})\right) = \mathrm{Li}_2(e^{-|u|^2})\,. \tag{68}$$

5.2. **Calabi 模型**。 Calabi度量是在 $\mathcal{K}_{[\omega_0]}$ 或 $\mathcal{B}_k$上的自然（与背景无关） $\mathcal{L}^2$度量。如果 $\dot\omega = \delta\omega \in T_\omega\mathcal{K}_{[\omega_0]}$,

$$||\delta\omega||_C^2 = \int_M ||\delta\omega(z)||_\omega^2 dV_\omega.$$

它是度量张量 [E70, ¯DeW67]上的 deWitt-Ebin度量在一个 K¨ahler 类上的限制。用相对 K¨ahler 势 $\dot\omega = i\partial\bar\partial\dot\varphi$ 表示时，Calabi 度量的内积为,

$$||\Delta_\omega\dot\varphi||_{C,\omega}^2 = \int_M |\Delta_\omega\dot\varphi|^2\, dV_\omega. \tag{69}$$

众所周知，$(\mathcal{K}_{[\omega_0]},\ g_C)$的截面曲率都等于 1，也就是说，这个黎曼流形是常曲率为 1 的无限维球面的一个开子集（参见[Cal12]）。Calabi度量的有限维近似应当近似有限维球面中的区域。因此,

Conjecture **5.1.** 相对于 $G|_{\mathcal{B}_k}$， *Calabi*体积$\mathrm{Vol_k}(\mathcal{B}_\mathrm{k})$ 对每个 k都是有限的。

如果该猜想成立，就能得到一列纯几何的概率测度。这或许可以为度量空间上的 Polyakov路径积分提供一个严格定义；该积分使用了 Calabi度量来定义其体积形式。Polyakov 还使用了拉普拉斯算子的行列式的某个幂，这也可以通过 Bergman近似实现。

References

[AHM11] Y. Ameur、H. Hedenmalm 和 N. Makarov，随机正规矩阵特征值的涨落，Duke Math. J. **159** 第 1 期（2011），31–81，arXiv:0807.0375 [math.PR].[Aub78] T. Aubin，《紧致卡勒流形上的 Monge-Ampère 型方程》。《数学科学通报》（第 2 辑）102（1978），第 1 期，63–95。[Au97] D. Auroux，辛子流形的渐近全纯族。《几何与泛函分析》7（1997），第 6 期，971–995。[Bab12] J. Baber，黎曼曲面上随机截面临界点的尺度化相关性，《统计物理杂志》148（2012），250–279。[Bau 10] B. Baugher，随机全纯截面临界点期望数量的度量依赖性与渐近极小化。《美国数学会汇刊》362（2010），第 9 期，4537–4555。[Be09] R. J. Berman，射影流形上线丛的伯格曼核与平衡测度。《美国数学杂志》131（2009），第 5 期，1485–1524。[Be11] R. J. Berman，从自由费米子与统计力学中涌现的卡勒-爱因斯坦度量。《高能物理杂志》2011，第 10 期，106，31 页。[Be14] R. J. Berman，复流形上的行列式点过程与费米子：大偏差与玻色化。《数学物理通讯》327（2014），第 1 期，1–47。[Be17] R. J. Berman，具有奇异哈密顿量的 Gibbs 测度的大偏差与卡勒-爱因斯坦度量的涌现。《数学物理通讯》，第 354 卷（2017），第 3 期，1133–1172。

[Be18] R. J. Berman，卡勒-爱因斯坦度量、典范随机点过程与双有理几何。代数几何：盐湖城 2015，29–73，纯数学专题讨论会论文集，97.1，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018年。arXiv:1307.3634[Be20] R.J. Berman，卡勒-爱因斯坦度量与随机点过程入门。微分几何综述 2018。微分几何、卡拉比-丘理论与广义相对论，35–87，《微分几何综述》，23，国际出版社，马萨诸塞州波士顿，2020年。[Be21] R.J. Berman，卡勒-爱因斯坦几何的概率方法与量子化方法，arXiv:2109.06575。¨BeBW[R. J. Berman、S. Boucksom 和 D. Witt Nyström，复流形上的费克特点与向平衡测度的收敛。《数学学报》207（2011），第 1 期，1–27。¨BShZ00a[P. Bleher、B. Shiffman 和 S. Zelditch，零点相关性的普适性与尺度律的 Poincaré-Lelong 方法。《数学物理通讯》208（2000），第 3 期，771–785。´BShZ00b[P. Bleher、B. Shiffman 和 S. Zelditch，复流形上零点相关性的普适性与尺度律。《数学发明》142（2000），351–395。] BShZ[P. Bleher、B. Shiffman 和 S. Zelditch，零点相关性与超对称性。《数学物理通讯》224（2001），255–269。01] BSh[T. Bloom 和 B. Shiffman，$\mathbb{C}^m$上的随机多项式零点。《数学研究快报》14（2007），第 3 期，469–479。[Ca85] E. Calabi，极值卡勒度量 II，载于《微分几何与复分析》，I. Chavel 和 H. M. Farkas 编，施普林格，柏林，1985，95–114。[Cal12] S. Calamai，卡勒度量空间上的 Calabi 度量。《数学年刊》353（2012），第 2 期，373–402。¨CLW15a[T. Can、M. Laskin 和 P. Wiegmann，量子霍尔态的集体场论，《物理评论 B》，2015。] CLW15b[T. Can、M. Laskin 和 P. Wiegmann，量子霍尔态的几何：引力反常与输运系数，《物理年鉴》（2015）。arXiv:1411.3105。] Ca[D. Catlin，伯格曼核与田刚定理。载于《多复变量分析与几何》（片田，1997），1–23，《数学趋势》，Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1999。¨CS[Y. Canzani 和 P. Sarnak，单色随机波零点集连通分支的拓扑与嵌套。《纯粹与应用数学通讯》72（2019），第 2 期，343–374。19] DeW[B. S. DeWitt，《引力的量子理论。1. 正则理论》，《物理评论》160，1113（1967）。67] DShZ[M. R. Douglas、B. Shiffman 和 S. Zelditch，临界点与超对称真空 I，《数学物理通讯》252（2004），325–358。04] DShZ[M. R. Douglas、B. Shiffman 和 S. Zelditch，临界点与超对称真空 II：渐近与极值度量，《微分几何杂志》72(3)（2006），381–427。06] Du[B. Duplantier，共形随机几何。数理统计物理，101–217，爱思唯尔，阿姆斯特丹，2006。06] E[D. Ebin，黎曼度量流形，纯数学专题讨论会论文集 15，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1970），第 11–40 页。70] FZ[R. Feng 和 S. Zelditch，复流形上随机解析函数的临界值。《印第安纳大学数学杂志》63（2014），第 3 期，651–686。14] FKZ[F. Ferrari、S. Klevtsov 和 S. Zelditch，随机 Bergman 度量的简单矩阵模型，《统计力学：理论与实验》2012，第 4 期，P04012，24 页。arXiv:1112.4382] [hep-th].[FKZ13] F. Ferrari、S. Klevtsov 和 S. Zelditch，随机卡勒度量，《核物理 B》869（2013），第 1 期，89–110，arXiv:1107.4575 [hep-th].[Ga22a] D. Gayet，高斯随机场超越集与节点集的渐近拓扑，《纯粹与应用数学杂志》790（2022），149–195，arXiv:2104.05276。[Ga22b] D. Gayet，随机复子流形的期望局部拓扑，arXiv:2202.10247。[GaW14] D. Gayet 和 J.Y. Welschinger，随机实超曲面期望贝蒂数的下界估计。《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）90（2014），第 1 期，105–120。[GaW15] D. Gayet 和 J.Y. Welschinger，随机实代数子流形的期望拓扑。《朱西厄数学研究所杂志》14（2015），第 4 期，673–702。

[GaW17] D. Gayet 和 J.Y. Welschinger，随机实超曲面的贝蒂数与随机对称矩阵的行列式。《欧洲数学会杂志》18（2016），第4期，733–772。[Gr85] A. Gray，复射影空间中复子流形周围的管状邻域体积。《美国数学会汇刊》291（1985），第2期，437–449。[Ha96] J. Hannay，混沌解析零点：随机自旋态零点的精确统计。《物理学杂志 A：数学与一般》29（1996），L101–L105。[HLX20] H. Hezari、Z. Lu 和 H. Xu，与解析 K¨ahler 势相关的伯格曼核的非对角渐近性质。《国际数学研究通报》2020（2020），第8期，2241–2286。[Hw95] A. D. Hwang，关于极值 K¨ahler 度量的卡拉比能量。《国际数学杂志》6（1995），第6期，825–830。[KN13] N.-G. Kang 和 N. G. Makarov，高斯自由场与共形场论，Ast´erisque 第353卷（2013），共136页。[KZ16] S. Klevtsov 和 S. Zelditch，随机曲面上的热核测度。《理论与数学物理进展》20（2016），第1期，135–164。[Kr06] M. Krishnapur，平面与双曲高斯解析函数零点的过度拥挤估计。《统计物理杂志》124（2006），1399–1423。[Le67] P. Lelong，复解析集上的积分。《法国数学会通报》87（1967），239–262。[Lu00] Z. Lu，关于田—丘—泽尔迪奇渐近展开的低阶项。《美国数学杂志》122（2000），第2期，235–273。[LuSh15] Z. Lu 和 B. Shiffman，紧致 K¨ahler 流形上非对角伯格曼核的渐近展开。《几何分析杂志》25（2015），第2期，761–782。[MaMar07] X. Ma 和 G. Marinescu，全纯莫尔斯不等式与伯格曼核。数学进展，第254卷。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，2007。[NS09] F. Nazarov 和 M. Sodin，关于随机球谐函数的节点域数目。《美国数学杂志》131（2009），第5期，1337–1357。[NS11] F. Nazarov 和 M. Sodin，随机复零点的涨落。《国际数学研究通报》2011（2011），第24期，5720–5759。[NS12] F. Nazarov 和 M. Sodin，随机复零点的关联函数：强聚集与局部普适性。《数学物理通讯》310（2012），75–98。[NV98] S. Nonnemacher 和 A. Voros，相空间中的混沌特征函数。《统计物理杂志》92，431–518（1998）。[SW10] P. Sarnak 和 I. Wigman，随机带限函数节点集的拓扑。《纯粹与应用数学通讯》72（2019），第2期，275–342。[Sh21] B. Shiffman，复流形上随机零点方差的渐近展开。《几何分析杂志》（2021），8607–8631。[ShS85] B. Shiffman 和 A. J. Sommese，复流形上的消失定理。数学进展，第56卷。Birkh¨auser 波士顿，马萨诸塞州波士顿，1985。[ShZ99] B. Shiffman 和 S. Zelditch，正线丛的随机截面与量子混沌截面的零点分布。《数学物理通讯》200（1999），第3期，661–683。[ShZ02] B. Shiffman 和 S. Zelditch，辛流形上丰线丛近全纯截面的渐近性。《纯粹与应用数学杂志》544（2002），181–222。[ShZ03] B. Shiffman 和 S. Zelditch，高次数随机多项式与列维测度集中。《亚洲数学杂志》7（2003），第4期，627–646。[ShZ08] B. Shiffman 和 S. Zelditch，复流形上随机零点的数目方差。《几何泛函分析》18（2008）第4期，1422–1475，arXiv:math/0608743 [数学.CV]。[ShZ10] B. Shiffman 和 S. Zelditch，复流形上随机零点的数目方差，II：光滑统计量。《纯粹与应用数学季刊》6（2010）第4期，1145–1167，专辑：纪念 Joseph J. Kohn，第2部分。[ShZZr08] B. Shiffman、S. Zelditch 和 S. Zrebiec，复流形上随机零点的过度拥挤与空洞概率。《印第安纳大学数学杂志》57（2008），第5期，1977–1997。

[ST04] M. Sodin 和 B. Tsirelson，随机复零点，I：渐近正态性。《以色列数学杂志》144（2004）125–149，arXiv:math/0210090 [数学.CV][ST05] M. Sodin 和 B. Tsirelson，随机复零点，III：空洞概率的衰减。《以色列数学杂志》147（2005），371–379。[Sun12] J. Sun，复流形上随机全纯截面越阈集的期望欧拉示性数。《印第安纳大学数学杂志》61（2012），第3期，1157–1174[TA03] J. Taylor 和 R. J. Adler，流形上高斯场的欧拉示性数。《概率年刊》31（2003），第2期，533–563。[Yau78] 丘成桐，关于紧致 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp`ere 方程。I。《纯粹与应用数学通讯》31（1978），第3期，339–411。[Z97] S. Zelditch，Szeg˝ő 核与田刚定理。《国际数学研究通报》1998（1998），第6期，317–331。[Zhu14] J. Zhu，SU(m+1) 高斯随机多项式的空洞概率。《偏微分方程分析》7（2014），第8期，1923–1968。

Department of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA电子邮箱地址: bshiffman@jhu.edu

Department of Mathematics, Northwestern University, Evanston, IL 60208, USA