arXiv:2303.11578v1 [math.DG] 21 Mar 2023

F-调和性、浸没与上同调之间的一些联系

BANG-YEN CHEN 和 SHIHSHU WALTER W EI

Abstract. 通过研究与 p-调和态射、 F-调和映射和 f-调和映射相关的上同调类，我们将此前关于黎曼浸没和 p-调和态射的若干结果推广到 F-调和映射，以及作为浸没的 f-调和映射。

1. Introduction

在研究黎曼流形之间的 p-调和映射时，我们注意到以下两者之间存在对偶关系：(A) 共形浸入与 (B) 水平共形浸没：

(A) 定理（[24]）设 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个共形浸入，且 $\dim M = p$。那么 u 是 p-调和映射，当且仅当 $u(M)$ 是 N 中的一个（参数化）极小子流形。

(B) 定理（[3]）设 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个水平共形浸没，且 $\dim N = p$。那么 u 是一个 p-调和映射，当且仅当 u 的所有纤维都是 M中的（参数）极小子流形。

(A) 与 (B) 之间的这种对偶性将 p-调和映射与（参数）极小子流形联系起来。

另一方面，欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 (C)（非参数）极小超曲面与闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{n,\,1}$ 中具有洛伦兹度量 $ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 - dt^2$的 (D) 极大类空（非参数）超曲面之间也存在一种对偶性，其中

(C) 欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小超曲面由欧几里得区域上的函数 u 的图给出，该函数满足微分方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0; \tag{1.1}$$

and

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 58E20；次要分类号 31B35、53C40。
Key words and phrases. F-调和映射， p-调和态射，上同调类，极小子流形，浸没。

(D) Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中的极大类空超曲面由欧几里得区域上的函数 v 的图给出，该函数满足一个对偶微分方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right)=0, \quad |\nabla v|^2<1. \tag{1.2}$$

E. Calabi 在 [5] 中证明，方程 (1.1) 和 (1.2) 在 $\mathbb{R}^2$中的任意单连通区域上等价。此外， F-调和映射的概念统一了极小超曲面和极大类空超曲面；也就是说，解 u和 v分别是从 $\mathbb{R}^{n+1}$中的区域到 $\mathbb{R}$的 F-调和映射，其满足 $F(t)=\sqrt{1+2t}-1$和 $F(t)=1-\sqrt{1-2t}$（见 [27, 12]）。因此，可以通过 F-调和映射统一调和映射、 p-调和映射、 α-调和映射、指数调和映射、欧几里得空间中的（非参数）极小超曲面以及闵可夫斯基空间中的（非参数）极大类空超曲面 $\mathbb{R}^{n,1}$（见[1, 27]）。此外，“F”思想还可推广至规范理论（见 [12]）。这里

$$F:[0,\infty)\to[0,\infty) \quad \text{with} \quad F(0)=0 \quad \text{is } C^2 \text{ strictly increasing}. \tag{1.3}$$

回顾紧黎曼流形 M上的拓扑学研究，众所周知，非平凡基本群 $\pi_1(M)$、同调群和上同调类，分别可由 M上的稳定闭测地线、稳定极小可求 rectifiable 链流和调和形式表示；这分别由嘉当定理（[6]）、Federer-Fleming 定理（[14]）和霍奇定理（[15]）得出。类似地， [26] 中证明了同伦类可由p-调和映射表示（关于 p-调和映射的定义和示例，参见例如 [27]）：

定理 A. 若 N是一个紧黎曼流形，那么对于任意正整数i，第 i 个同伦群 $\pi_i(N)$中的每个类，都可以由一个 $C^{1,\alpha}$ p-调和映射 u_0 表示，该映射从一个 i维球面 S^i 映入 N，并且对于任意 $p>i$，在其同伦类中使 p-能量最小。

进一步的应用以及同伦消失定理由[26, 28], 借助稳定的 p-调和映射作为催化剂进行了探讨，而 [19, 25, 16], 则借助稳定可求 rectifiable 链流作为催化剂，给出了同调消失定理。

另一方面，B.-Y. CHEN 在 [8] 建立了以下涉及黎曼浸没、极小浸入和上同调类的结果。

定理 B. ([8]) 设 $b=\dim B$，且 $\pi:(M,g_M)\to(B,g_B)$ 是一个具有极小纤维且底流形 B 可定向的黎曼浸没。若 M 是一个闭流形，其上调和类 $H^b(M,\mathbb{R})=0$, 则该黎曼浸没的水平分布 $\mathcal{H}$ 永远不可积。因此，浸没 π 永远是非平凡的。

虽然 p-调和映射代表同伦类，但 B.-Y. CHEN 和 S. W. WEI 在下文中将看似毫不相关的 p-调和态射与上调和类联系起来。

定理 C.（[10, 11]）设 u:（M, g_M） →（N, g_N）是一个 n-调和态射，且为浸没，其中 dim $N = n$。若 N 可定向，且 M 是一个闭流形，其 n 阶上同调类 H^n（M, R） $= 0$，那么 u的水平分布$\mathcal{H}$ 永远不可积。因此，浸没 u 总是非平凡的。

当 π 时，这重新得到定理 B： $M \to B$ 是一个纤维极小且底流形 B 可定向的黎曼浸没。尽管水平弱共形的 p-调和映射是一个 p-调和态射（见定理 2.5），p-调和态射也与上同调类有关，如下所示。

定理 D. ([10, 11]) 设 $u:(M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个 n-调和态射，且 $n =$ 维数为 N，并且是一个浸没。那么， N 的体积元的拉回是一个调和 n-形式，当且仅当 $\mathcal{H}$ 的水平分布 u 完全可积。

按照 [10, 11], 中给出的证明，并应用 p-调和态射的一个刻画定理（见定理 2.5）和定理 2.6，我们得到定理 D 的对偶版本。特别地， [27] 中的 p-调和映射与上同调类之间存在如下相互联系。

定理 E. 设 M 是一个闭流形，且 $u: M \to N$ 是一个维数为 $n = \dim N$ 的 n-调和映射，并且是一个浸没。假设 u 的水平分布 $\mathcal{H}$可积，且 u 是一个 n-调和态射。那么我们有 $H^n(M, \mathrm{R}) \neq 0$。

定理 F. ([27]) 设 $u: M \to N$ 是一个维数为 $n = \dim N$ 的 n-调和映射，并且是一个浸没。设 u 的水平分布 $\mathcal{H}$ 可积。若 M 是一个闭流形，且其上同调类为 $H^n(M, \mathrm{R}) = 0$，则 u 不是一个 n-调和态射。因此，浸没 u始终是非平凡的。

2. 预备知识

我们回顾一些关于极小子流形、浸没、 p-调和态射、 F-调和映射和 f-调和映射的基本事实、记号、定义和公式，以备后用（详情参见例如[7, 8, 9, 10] ）。

2.1. 基本公式与方程。设 M 为黎曼流形，其列维-奇维塔联络为 $\widetilde{\nabla}$。 M的切丛记为 TM，光滑向量丛 E的光滑截面所构成的（无限维）向量空间记为 $\Gamma(E)$。设 M 是 M中的一个维数为 $n \geq 2$ 的子流形。分别用∇ 和 D表示 M的列维-奇维塔联络和法联络。对于每个法向量 $\xi \in T_x^{\perp} M$， $x \in M$，形算子 A_ξ是一个对称的

切空间 T_xM 上的自同态，其中 x。形算子与第二基本形式 h 的关系为

$$\langle \mathsf{h}(X,Y),\xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle \tag{2.1}$$

对于切于 M 的 X,Y，以及垂直于 M 的 ξ。

Gauss 公式和 Weingarten 公式分别为（参见 [7]）：

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathsf{h}(X,Y), \tag{2.2}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.3}$$

对于 M 上的切向量场 X,Y 以及法向量场 ξ。

子流形 M 的平均曲率向量场定义为 $H = \frac{1}{n}\text{trace h.}\widetilde{\ }$ 若子流形 M 位于 M 中，且其第二基本形式 h （相应地，其平均曲率向量场 H ）恒等于零，则称其为全测地（相应地，极小）。

2.2. 能量与调和映射。设 $u\colon (M,g_M)\to(N,g_N)$ 是两个黎曼流形 M 和 N 之间的微分映射。记 e_u 为 u 的能量密度，其定义为

$$e_u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} g_N\big(du(e_i),du(e_i)\big) = \frac{1}{2}|du|^2, \tag{2.4}$$

其中，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 M 上的局部标准正交标架场，$|du|$ 是 du 的希尔伯特-施密特范数，由 M 上的度量 g_M 和 N 上的度量 g_N 确定。u 的能量记为 $E(u)$，定义为

$$E(u) = \int_M e_u\, dv_g.$$

若光滑映射 $u:\ M\to N$ 在任意紧支变分下都是能量泛函 E 的临界点，则称其为调和映射。

2.3. 浸没。两个黎曼流形之间的微分映射 $u\colon (M,g_M)\to(N,g_N)$ 若在点 $x\in M$ 处的微分映射 $du_x\colon T_x(M)\to T_{u(x)}(N)$ 是满射线性映射，则称其在该点处为浸没。若可微映射 u 在每个点 $x\in M$ 处都是浸没，则称其为浸没。对于每个点 $x\in N$，$u^{-1}(x)$ 称为纤维。对于浸没 $u:\ M\to N$，令 $\mathcal{H}_x$ 表示在 $x\in M$ 处 $T_x(M)$ 中核 $\big(du_x\colon T_x(M)\to T_{u(x)}(N)\big)$ 的正交补。令 $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_x:\ x\in M\}$ 表示 u 的水平分布。若浸没 $u\colon (M,g_M)\to(N,g_N)$ 在 $\mathcal{H}_x$ 上的限制是共形的，则称其为水平弱共形，即存在定义在 M 上的光滑函数 λ，使得

$$u^*g_N = \lambda^2 g_{M|_{\mathcal{H}}} \quad\text{or}\quad g_N\big(du_x(X),du_x(Y)\big) = \lambda^2(x) g_M(X,Y) \tag{2.5}$$

对所有 X、$Y\in\mathcal{H}_x$ 和 $x\in M$。若式（2.5）中的函数 λ 为正，则称 u 为水平共形，并称 λ 为 u 的膨胀因子。对于一个水平共形

浸没 u ，其膨胀因子为 λ，能量密度为 $e_u = \frac{1}{2}n\lambda^2.$ 。膨胀因子为 $\lambda \equiv 1$ 的水平共形浸没称为黎曼浸没。对于黎曼浸没，我们有以下结果。

定理 2.1（[8], 定理 2）。设 $\pi : (M, g_M) \to (B, g_B)$ 是从闭流形 M 到可定向底流形 B的黎曼浸没。那么， B 的体积元的拉回是调和的，当且仅当水平分布 $\mathcal{H}$ 可积且纤维是极小的。

定理 2.2（[27], 定理 2.5）。设 $\pi : (M, g_M) \to (B, g_B)$ 是一个黎曼浸没。那么，对于每个 $p > 1$ ， π 都是一个 p-调和映射，当且仅当所有纤维$\pi^{-1}(y)$ $y \in B$都是 M中的极小子流形。

2.4. 调和态射。若 C^2–映射 $u : (M, g_M) \to (N, g_N)$ 满足：对于定义在 N的开集 V上的任意调和函数 f，复合函数 $f \circ u$ 在 $u^{-1}(V)$上是调和的，则称其为调和态射。

P. Baird 和 J. Eells 利用应力-能量张量证明了以下结果。

定理 2.3（[2]）。设 $u : (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个在 M 上处处为浸没的调和态射。那么 $(\text{令 } n = \dim N$，并且 e_u如式 (2.4) 所示$)$

(a) 若 $n = 2$，则纤维是极小子流形；(b) 若 $n > 2$，则以下性质等价：

(i) 纤维是极小子流形；(ii) $\operatorname{grad}(e_u)$ 是垂直场；(iii) 水平分布的平均曲率向量为 $\operatorname{grad}(e_u)$ $2e_u$ 。

2.5. p-调和态射。若一个 C^2–映射 $u : (M, g_M) \to (N, g_N)$ 满足：对于定义在 N 的开集 V 上的任意 p-调和函数 f，复合映射 $f \circ u$ 在 $u^{-1}(V)$ 上是 p-调和的，则称其为 p-调和态射。对于每个 $p > 1$，我们有如下关于 p-调和态射与极小纤维之间的联系：

定理 2.4（[27], 命题 2.4）。若 $\pi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是黎曼浸没，则对于每个 $p > 1$， π 都是一个 p-调和态射，当且仅当所有纤维 $\pi^{-1}(y)$ $y \in N$ 都是 M 的极小子流形。

E. Loubeau [18] 和 J. M. Burel 与 E. Loubeau [4] 得到了以下关于 p-调和态射的刻画。

定理 2.5（[18, 4]）。一个 C^2 映射 $u : (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个 p-调和态射，且 $p \in (1, \infty)$，当且仅当它是一个 p-调和的水平共形映射。

定理 2.4（[27], 命题 2.4）指出，在黎曼浸没的条件下，对于每个 $p > 1$， p-调和映射都与极小纤维相关。这与如下情形互为对偶：对于每个 $p > 1$，在等距浸入的条件下，由一个 p-调和映射得到一个极小子流形。

（参见 [26] ）。在 [3], P. Baird 和 S. Gudmundsson 将 n-调和映射与极小纤维联系起来，具体如下。

定理 2.6. ([3]) 若 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是从流形 M 到流形 N 的水平共形淹没，且 $n =$ 维数为 N，那么 u 是 n-调和的，当且仅当 u 的纤维在 M 中是极小的。

2.6. F-调和映射。设 F 如 (1.3) 中所述，并设 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是两个紧黎曼流形之间的光滑映射。那么映射 $u\colon M \to N$ 称为 F-调和的，如果它是 F-能量泛函的临界点：$E_F(u) = \int_M F\left(\frac{|du|^2}{2}\right) dv_g$. 特别地，当

$$F(t) = t,\ \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}},\ (1+2t)^{\alpha} - 1\ \ (\alpha > 1, \dim M = 2),$$
$$e^t - 1,\ \sqrt{1+2t} - 1,\ 1 - \sqrt{1-2t},\ \text{respectively},$$

F-能量 $E_F(u)$ 变为能量、 p-能量、（归一化） α-能量、（归一化）指数能量、欧几里得空间中的（归一化）面积泛函，以及闵可夫斯基空间中的（归一化）面积泛函。因此，其临界点 u 或其图分别是调和的、 p-调和的、 α-调和的、指数调和的、欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小超曲面，以及闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的极大类空超曲面。

对于水平共形的 F-调和映射，M. Ara 证明了以下结论。

定理 2.7（参见 [1]）。设 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$， $m > n$ 是一个 F-调和映射，且为水平共形映射，其膨胀因子为 λ。假设 $(n-2)F'(t) - 2tF''(t)$ 的零点是孤立的。那么以下三个性质等价：

(1) u 的纤维是极小子流形。(2) $\operatorname{grad}(\lambda^2)$ 是垂直的。(3) u 的水平分布的平均曲率向量为 $\operatorname{grad}(\lambda^2)$ $2\lambda^2$ 。

2.7. f-调和映射。设 $f\colon (M, g) \to (0, \infty)$ 是一个光滑函数。 f-调和映射的概念最早由 A. Lichnerowicz 于 1970年 引入并研究（见 [17]）。两个黎曼流形之间的映射 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 称为 f-调和映射，如果对于任意紧支变分， u 都是 f-能量泛函 E_f 的临界点（参见 [13, 17]），其中

$$E_f(u) = \frac{1}{2}\int_M f|du|^2\, dv_g\,. \tag{2.6}$$

f-调和映射的例子包括具有 $f \equiv C$ （一个正常数）的调和映射，以及具有 $f = |du|^{p-2}$ 的浸没 p-调和映射。

下一个结果归功于 Y.-L. Ou。

定理 2.8（[21]）。设 $u\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个膨胀因子为 λ 的水平弱共形映射。那么，以下任意两个条件都蕴含另一个条件：

(a) u 是一个 f-调和映射;
(b) grad($f\lambda^{2-n}$) 是垂直的;
(c) u 具有极小纤维。

3. 定理

下文假设 dim $M = m > n =$ dim N。本文旨在拓展 [10, 27] 中的思想，并将看似毫不相关的领域联系起来： F-调和映射、 f-调和映射以及上同调类。更确切地说，我们证明以下结论

定理 1. 设 $u: M \to N$ 是一个 F-调和映射，且为膨胀因子为 λ的水平共形浸没。再设 grad λ^2 为垂直的，且 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点是孤立的。若 $H^n(M,$ R) $= 0$，则 u的水平分布$\mathcal{H}$ 不可积。因此，该浸没总是非平凡的。

注 3.1. (i) 定理 1 推广了定理 B。根据假设，在定理 2.4 中， u 是膨胀因子为 $\lambda = 1$的水平共形浸没，且对每个 $p > 1$， u 都是 p-调和映射。若取 $p \neq n$, 则 grad $\lambda^2 = 0$,$F(t) = \frac{1}{p}(2t)^{\frac{p}{2}}$，于是 F-调和映射变为 p-调和映射， $p \neq n$，且 ($n-2)F'(t) - 2tF''(t)$ 的零点是孤立的。

(ii) 定理 1 补充了定理 C，但并未推广定理 C，因为当 $F(t) = \frac{1}{n}(2t)^{\frac{n}{2}}$时， F-调和映射 u变为 n-调和映射，而 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点并非孤立。因此， n-调和映射不适用于定理 1。

（iii）定理 1 等价于以下定理 2，这由定理 2.7 中的等价关系可知。

定理 2. 设 $u: M \to N$ 是一个 F-调和映射，且为膨胀因子为 λ 的水平共形浸没。假设水平分布的平均曲率向量为 $\mathrm{grad}(\lambda^2)\ 2\lambda^2$，且 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点是孤立的。若 $H^n(M,$ ~~R) $= 0$~~，则 u 的水平分布 $\mathcal{H}$ 不可积。因此，该浸没总是非平凡的。

定理 3. 设 $u: M \to N$ 是一个 F-调和映射，且为膨胀因子为 λ 的水平共形浸没。假设水平分布的平均曲率向量为 $\mathrm{grad}(\lambda^2)\ 2\lambda^2$，且 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点是孤立的。那么， N 的~~体积元~~的拉回是一个调和 n-形式，当且仅当 u的水平分布 $\mathcal{H}$ 完全可积。

注 3.2. 由与注 3.1 中类似的论证可知，(i) 定理 2 推广了定理 2.1；(ii) 定理 2 扩充了定理 D，但并未推广定理 D；且 (iii) 定理 2 等价于下述定理 4。

定理 4. 设 $u: M \to N$ 是一个 F-调和映射，且为膨胀因子为 λ 的水平共形浸没。假设 grad λ^2 为垂直的，且 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点是孤立的。那么， N 的体积元的拉回是一个调和 n-形式，当且仅当 u 的水平分布 $\mathcal{H}$ 完全可积。

接下来，我们研究 f-调和映射。这类映射最初由 A. Lichnerowicz 于 1970 年 引入并研究（见 [17]），其中 $f: (M, g) \to (0, \infty)$ 是一个光滑函数。。 f-调和映射的例子包括具有 $f \equiv C$（一个正常数）的调和映射，以及具有 $f = |du|^{p-2}$ 的浸没 p- 调和映射（参见 §4 ）。我们有以下结果。

定理 5. 设 $u: M \to N$ 是一个 f-调和映射，它是水平共形浸没，膨胀因子为 λ ，且 grad$(f\lambda^{2-n})$ 垂直。若 M 是一个闭流形，且其上同调类 $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$，则 u 的水平分布 $\mathcal{H}$ 从不可能可积。因此，浸没 u 总是非平凡的。

这就重新得到定理 B：当 f-调和映射是一个 n-调和映射时，$f = |du|^{n-2}$。

定理 6. 设 $u: M \to N$ 是一个 f-调和映射，且为水平共形浸没，膨胀因子为 λ ，并且 grad$(f\lambda^{2-n})$ 是垂直的。那么， N 的体积元的拉回是调和的 n-形式，当且仅当水平分布完全可积。

这就重新得到定理D：当 f-调和映射是一个 n-调和映射时。

4. 定理 1-6 的证明

证明。定理 3 的证明：设 $u: (M, g_M) \to (N, g_N)$ 是一个 F-调和映射，且为膨胀因子为 λ 的水平共形浸没，并且 $n =$维 N。假设水平分布的平均曲率向量为 $\frac{\text{grad}(\lambda^2)}{2\lambda^2}$ ，且 $(n-2)F'(t)-2tF''(t)$ 的零点是孤立的。根据定理 2.7, ~~浸没~~ u 具有极小纤维。

令 $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ 为底流形（N, g_N）上的定向局部标准正交标架，并令 $\bar{\omega}^1, \ldots, \bar{\omega}^n$ 表示 $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ 在 N 上的对偶 1- 形式。那么

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^1 \wedge \cdots \bar{\omega}^n$$

是（N, g_N）的体积形式，它是 N上的闭 n-形式。

考虑通过 u将 N 的体积形式 $\bar{\omega}$ 拉回，记为$u^*(\bar{\omega})$。那么 $u^*(\bar{\omega})$是 M 上的一个简单 n-形式，满足

$$d\big(u^*(\bar{\omega})\big) = u^*(d\bar{\omega}) = 0, \tag{4.1}$$

因为外微分 d 与拉回 u^* 可交换。

假设 dim $M = m = n + k$，且 $e_1, \ldots, e_{n+k}$ 是 M 上的局部标准正交标架场，其对偶余标架场为 $\omega^1, \ldots, \omega^{n+k}$，使得

(i) $e_1, \ldots, e_n$ 是基本水平向量场，满足 $du(e_i) = \lambda \bar{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$，并且 $du(e_1) \ldots, du(e_n)$ 给出 N 的正定向；并且
(ii) $e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}$ 是垂直向量场。

于是有

$$\omega^j(e_s) = 0, \quad \omega^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n;\ n+1 \le s \le n+k\,. \tag{4.2}$$

此外，由 (i) 可得

$$u^*\bar{\omega}^i = \frac{1}{\lambda}\omega^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

若令

$$\omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n \quad \text{and} \quad \omega^\perp = \omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega^{n+k}\,, \tag{4.4}$$

then

$$d\omega^\perp = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge d\omega^{n+i} \wedge \cdots \wedge \omega^{n+k}. \tag{4.5}$$

$d\omega^\perp = 0$ 恒等成立，当且仅当以下两个条件满足；这一点可由 (4.2) 和 (4.5) 得出:

$$d\omega^\perp(e_i, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}) = 0 \tag{4.6}$$

对 $i = 1, \ldots, n$；并且

$$d\omega^\perp(X, Y, V_1, \ldots, V_{k-1}) = 0. \tag{4.7}$$

对于任意水平向量场 X, Y 和垂直向量场 $V_1, \ldots, V_{k-1}$。

由于 u 的纤维在 M 中是极小的，对于每个 $1 \le i \le n$，我们得到

$$\begin{aligned} & d\omega^\perp(e_i, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \omega^\perp([e_i, e_{n+j}], e_{n+1}, \ldots, \hat{e}_{n+j}, \ldots, e_{n+k}) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \big(\omega^{n+j}(\nabla_{e_i} e_{n+j}) - \omega^{n+j}(\nabla_{e_{n+j}} e_i)\big) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{k} -\langle \nabla_{e_{n+j}} e_i, e_{n+j} \rangle \\ &\quad = \sum_{j=1}^{k} \langle h(e_{n+j}, e_{n+j}), e_i \rangle \\ &\quad = 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中“?”表示缺失项，这证明条件 (4.6) 成立。

接下来，我们假设水平分布 $\mathcal{H}$ 是可积的。如果 X、Y 是水平向量场，那么根据弗罗贝尼乌斯定理， $[X, Y]$ 也必为水平的。因此，

对于垂直向量场 V_1，.....，V_k，我们得到（参见 [8, 公式 (6.7)] 或 [27, 公式 (3.5)]）

$$d\omega^{\perp}(X,Y,V_1,\ldots,V_{k-1}) = \omega^{\perp}([X,Y],V_1,\ldots,V_{k-1}) = 0. \tag{4.9}$$

因此，由 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$d\omega^{\perp} = 0. \tag{4.10}$$

接下来，我们证明若 $\mathcal{H}$ 可积，则有 $d(u^*\bar{\omega})^{\perp} = 0$.。由于 u 是膨胀因子为 λ 的水平共形浸没，它保持正交性，这对水平分布和垂直分布至关重要；而拉回 u^* 在每个方向上都会将 1-形式的长度放大 $\frac{1}{\lambda}$ 倍。由此，结合 (4.3) 和 (4.10)，可得

$$\begin{aligned} d(u^*\bar{\omega})^{\perp} &= d(u^*\bar{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge u^*\bar{\omega}^n)^{\perp} \\ &= d\left(\frac{1}{\lambda}\omega^1 \wedge \cdots \wedge \frac{1}{\lambda}\omega^n\right)^{\perp} \\ &= d\left(\frac{1}{\lambda}\omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge \frac{1}{\lambda}\omega^{n+k}\right) \\ &= d\left(\frac{1}{\lambda^k}\omega^{\perp}\right) \\ &= -\frac{k}{2}\lambda^{-k-2}d(\lambda^2)\wedge\omega^{\perp} + \frac{1}{\lambda^k}d\omega^{\perp} \\ &= -\frac{k}{2}\lambda^{-k-2}d(\lambda^2)\wedge\omega^{\perp} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.11) 中最后一个等式源于 grad(λ^2) 是垂直的这一事实以及定理 2.7。因此，grad(λ^2)、e_{n+1}、$\cdots$、e_{n+k} 线性相关。于是，我们得到$d(\lambda^2) \wedge \omega^{\perp} = 0$。由于 $d(u^*\omega)^{\perp} = 0$ 等价于 $u^*\omega$ 是余闭的，因此由 $d(u^*\omega) = 0$ 和 $d(u^*\omega)^{\perp} = 0$ 可知，只要 $\mathcal{H}$ 完全可积，体积形式的拉回 $u^*\omega$ 就是 M 上的调和 n-形式。

反过来，由上述证明可知，若 M 上的 $u^*\omega$ 是调和 n-形式，则水平分布 $\mathcal{H}$ 完全可积。这就证明了定理 3。

定理 1 的证明：根据霍奇定理（[15]），每个非零调和形式都代表一个非平凡的上同调类；又由于在闭流形上，微分形式是调和的当且仅当它是闭的且余闭的，因此定理 1 可由定理 3 得出。

定理 2 和定理 4 的证明：定理 2 和定理 4 分别由定理 1 结合备注 3.1 和 3.2 得出。

定理 5 和定理 6 的证明：根据定理 2.8，定理 5 和定理 6 中的浸没u 具有极小纤维，我们像之前一样继续，u 根据定理 2.6 是一个n-调和映射，因此 u 是一个 n-调和态射

根据定理 2.5。于是，我们可以分别应用定理 C 和定理 D，完成定理 5 和定理 6 的证明。□

References

[1] M. Ara, *Geometry of F-harmonic maps*. Kodai 数学杂志 22(2) (1999), 243–263.[2] P. Baird and J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*. Geometry Symposium, 乌得勒支 1980 (乌得勒支, 1980), 1–25, 数学讲义 894 施普林格, 柏林-New York, 1981.[3] P. Baird and S. Gudmundsson, *p-harmonic maps and minimal submanifolds*.《数学年刊》294(4) (1992), 611–624.[4] J. M. Burel and E. Loubeau,
p-harmonic morphisms: the $1 < p < 2$ *case and a non-trivialexample*. 当代数学 308 (2002), 21–37.[5] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*. 整体分析, Proc. Sympos. Pure Math. 15 (1970年), 223–230.[6] E. Cartan,
Lecons sur la Geométrie des Espaces de Riemann, 第2版。Gauthier-Villars, 巴黎, 1951.[7] B.-Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*. Marcer Dekker, 纽约, NY, 1973.[8] B.-Y. Chen,
Riemannian submersions, minimal immersions and cohomology class. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 81(10) (2005), 162–167.[9] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry,*
δ-invariants and Applications. 世界科学出版社, 哈肯萨克, NJ, 2011.[10] B.-Y. Chen and S. W. Wei, *p-harmonic morphisms, cohomology classes and submersions*. Tamkang J. Math. 40(4) (2009), 377–382.[11]B.-Y. Chen and S. W. Wei, *n-Harmonicity, minimality,*
conformality and cohomology, https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.14019 (2023).[12] Y. X. Dong and S. W. Wei, *On vanishing theorems for vector bundle valued p-forms and their applications*.《数学物理通讯》304 (2011), 329–368.[13] J. Eells and L. Lemaire,
A report on harmonic maps. Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1–68.[14] H. Federer and W. H. Fleming, *Normal and integral currents*. Ann. Math. 72(1960), 458–520.[15] W.V.D. Hodge,
The theory and application of harmonic intergrals. 剑桥大学出版社, 纽约, NY, 1941（第2版, 1952）[16] R. Howard and S. W. Wei,
On the existence and nonexistence of stable submanifolds and currents in positively curved manifolds and the topology of submanifolds in Euclidean spaces. 子流形与流的几何和拓扑。127–167, 当代数学 646 Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, RI, 2015.[17] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques et variétés Kähleriennes*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 39 (1969), 186–195.[18] E. Loubeau, *On p-harmonic morphisms*. Differential Geom. Appl. 12 (2000), 219–229.[19] H. B. Lawson and J. Simons,
On stable currents and their application to global problems inreal and complex geometry. Ann. of Math. 98 (1973), 427–450.[20] B. O'Neill,
Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. 学术出版社, 纽约, NY, 1982.[21] Y.-L. Ou, *f-harmonic morphisms between Riemannian manifolds*.《中国数学年刊》Ser. B 35(2) (2014), 225–236.[22] A. V. Pogorelov, *On the stability of minimal surfaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 260, 293–295 (1981, Zbl. 495.53005), 英译本：《苏联数学文献》24, (1981), 274–276.[23] S.-I. Tachibana, *On harmonic simple forms*, Tensor (N.S.) 27 (1973), 123–130.

[24] H. Takeuchi, *Some conformal properties of p-harmonic maps and a regularity for sphere-valued p-harmonic maps*. 日本数学会杂志 46(2) (1994), 217–234.[25] S. W. Wei, *On topological vanishing theorems and the stability of Yang-Mills fields*. 印第安纳大学数学杂志 33(4) (1984), 511–529.[26] S. W. Wei, *Representing Homotopy Groups and Spaces of Maps by p-harmonic maps*. 印第安纳大学数学杂志 47(2) (1998), 625–670.[27] S. W. Wei, *The unity of p-harmonic geometry*. Recent developments ingeometry and analysis, 439–483, 高级数学讲义（ALM）23, 国际出版社, 马萨诸塞州萨默维尔, 2012.[28] S. W. Wei and L. Wu, *Homotopy groups and p-harmonic maps*. 数学分析通讯, Conference 1 (2008), 40–45.

Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, Michigan48824–1027, U.S.A.*Email address*: chenb@msu.eduDepartment of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma 73019-0315, U.S.A.*Email address*: wwei@ou.edu