arXiv:2303.11581v2 [math.KT] 4 Jan 2024

高阶 K-群上的 λ-模结构

Sourayan Banerjee 和 Vivek Sadhu

Abstract. 本文证明，对于拟紧概形 X 和 $n>0$，第 n 个 K-群 $K_n(X)$ 按照 Hesselholt 的意义，是一个 λ-环 $K_0(X)$ 上的 λ-模。

1. introduction

在 [4], L. Hesselholt 引入了 λ-环上的模的概念，即 λ-模。我们先回顾其定义（见 [4] 的定义 2.5 和注记 2.6）。

定义 1.1. 设 (R,λ_R) 是一个 λ-环。(R,λ_R)-模 (M,λ_M) 是一个 R-模 M以及一列加法映射

$$\lambda_{M,n} : M \to M \ (n \geq 1)$$

满足以下公理:

(1) $\lambda_{M,\,1} = \mathrm{id}_M$；(2) $\lambda_{M,\,n}\lambda_{M,\,m} = \lambda_{M,\,nm}$ 对所有 $m,n \geq 1$ 均成立；(3) $\lambda_{M,\,n}(ax) = \psi^n(a)\lambda_{M,\,n}(x)$ 对所有 $a \in R$ 和 $x \in M.$ 均成立。这里 ψ^n 是与 (R,λ_R) 相关联的第 n 个 Adams 运算。

若令 $M = R$ 和 $\lambda_{M,\,n} = \psi^n$，其中 ψ^n 是与 (R,λ_R) 相关联的 Adams 运算，则 (R,ψ^n) 是一个 (R,λ_R)-模。对于拟紧概形 X，$K_0(X)$ 是一个 λ-环，其 λ-运算由向量丛上的通常外幂定义。多位作者利用同伦论将这些外幂运算推广到高阶 K-群（见 [3], [6], [7] 和 [8]）。最近，文献 [2] 利用 Grayson 对高阶 K-群的描述（即将其表述为二元复形），给出了任意拟紧概形上高阶 K-群的外幂运算的纯代数构造。本文利用文献 [2] 中构造的外幂运算，为任意 $n>0$ 和拟紧概形 $X.$ 上的 $K_n(X)$ 构造一个以 $K_0(X)$ 为基环的 λ-模结构。下面给出精确结论:

定理 1.2. 对于任意拟紧概形 X 和 $n>0$，每个 $K_n(X)$ 都是一个 λ-模，其底环为 $K_0(X)$。

日期：2024年1月5日。2020年数学主题分类：14C35、19D35、19E08。关键词和短语： K-群、Lambda 环、Lambda 模。

致谢：作者感谢 Lars Hesselholt 提出的宝贵意见和建议。作者也感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。

2. Preliminaries

2.1. 对称函数。设 R 为一个环，令 $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 表示 R 上以 n 个独立变量 x_1、x_2、.....、x_n. 为变量的多项式环。若多项式 $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 对 $\{1, 2, \ldots, n\}$. 上的每个置换 π 都满足 $\pi f = f(x_{\pi(1)}$、$x_{\pi(2)}$、.....、$x_{\pi(n)})$，则称其为对称函数。对于 $1 \leq k \leq n$，变量 x_1、x_2、.....、x_n 中的第 k 个初等对称函数为 $s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$.。对称函数的基本定理指出，每个对称函数 $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 都可以唯一地表示为一个初等对称函数的多项式，其系数属于 R 。

例 **2.1.** r次幂和 $x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r$ 是一个对称函数，其中$r > 0$. 因此，存在唯一一个关于 n 个变量的整数系数多项式 Q_r ，使得

$$x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r = Q_r(s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{2.1}$$

设 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是另一组变量$y_1, y_2, \ldots, y_n$. 对应的初等对称函数。若多项式 $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 满足以下条件，则称其为对称函数：

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}; y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$$

对于 $\{1, 2, \ldots, n\}$. 上的任意一对置换 π和 σ，均有 $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n]$ 都可以唯一地表示为一个以 R 为系数、由初等对称函数 $s_1, s_2, \ldots, s_n$和 $t_1, t_2, \ldots, t_n$. 构成的多项式

2.2. 多项式 $P_{n,m}$ 和 P_n。考虑对称函数

$$g(t) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq nm} (1 + x_{i_1} \ldots x_{i_m} t)$$

关于 nm 个变量。 $g(t)$ 中 t^n 的系数是一个对称函数，可以表示为初等对称函数 s_1、s_2、.....、s_{nm}. 的整数系数多项式。事实上，存在一个泛多项式 $P_{n,\,m}$，其系数为整数，使得 $g(t)$ 中 t^n 的系数为 $P_{n,\,m}(s_1$、s_2、.....、$s_{nm})$。类似地，存在一个系数为整数的泛多项式 P_n ，使得 $h(t)$ 中 t^n 的系数为 $= \prod_{i\,,\,j=1}^{n}(1 +$

x_iy_jt) 是 P_n(s_1、 s_2、 ……、 s_n; t_1、 t_2、 ……、 t_n)。我们可以将多项式 P_n 视为下式中 t^n 的系数

$$\tilde{h}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_it_1t + x_i^2t_2t^2 + \cdots + x_i^nt_nt^n). \tag{2.2}$$

举例来说，对于 $n = 3$, $P_3(s_1, s_2, s_3; t_1, t_2, t_3)$ 是 t^3 在

$$(1+x_1y_1t)(1+x_1y_2t)(1+x_1y_3t)(1+x_2y_1t)(1+x_2y_2t)(1+x_2y_3t)(1+x_3y_1t)(1+x_3y_2t)(1+x_3y_3t)$$

$$= (1 + x_1t_1t + x_1^2t_2t^2 + x_1^3t_3t^3)(1 + x_2t_1t + x_2^2t_2t^2 + x_2^3t_3t^3)(1 + x_3t_1t + x_3^2t_2t^2 + x_3^3t_3t^3).$$

这两个多项式 $P_{n,m}$ 和 P_n 都将在 λ-环的定义中出现。

读者可以暂时跳过下面的引理，因为它只会在命题 4.1 中用到。

引理 2.2。设 $t_i^m = 0$ 和 $t_it_j = 0$ 对于 $m > 1$ 和 $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ 满足 (2.2)。那么 $P_n(s_1, s_2, \ldots, s_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = Q_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)t_n$，其中多项式 Q_n 如 (2.1) 所示。

证明。注意，在 (2.2) 中， t^n 的系数为 $(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n)t_n$，因为所有其他项都必须包含 t_i^m或 $t_i^kt_j^l$，其中 $m > 1$ 和 k、 $l > 0$. 。因此由例 2.1 得到结论。□

一般来说，很难写出$P_{n、\ m}$ 和 $P_{n.}$ 的显式公式。然而，已有文献 [5] 对较小的 m 和 n 进行了若干计算。文献 [5] 也计算了 $P_{n、\ m}$ 和 P_n 中系数的和。更明确地说，

引理 2.3。 P_n 中系数的和在 $n > 1$ 时为零，在 $n = 1$.时为 1。

证明。参见 [5] 的定理 2.2。 □

引理 2.4。$P_{n、\ m}$ 中系数的和在 m 为奇数或 $n = 1$ 时为 1，在 m为偶数且 $n > 1$.时为 0。

证明。参见 [5]中的定理 2.3。 □

在下面的引理中，我们确定 s_{nm} 在 $P_{n,\ m}$.中的系数。

引理 2.5。设 c 为 s_{nm} 在$P_{n,\ m}$. 中的系数。那么，如果 n和 m 均为偶数，则 $c = -1$ ；否则为 1。

证明。参见注 4.2。更具体地说，参见第 4 节中命题 4.1(2) 的证明。□

2.3. λ-环。 一个 λ-环是一个交换含幺环 R，并配有一列映射 s

$$\lambda^n : R \to R \ (n \geq 0),$$

call出 λ-运算，使得对所有 $x, y \in R$，满足以下条件 :

(1) $\lambda^0(x) = 1$, (2) $\lambda^1(x) = x$, (3) $\lambda^n(1) = 0$ 对 $n \geq 2$, (4) $\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$, (5) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x) \ldots, \lambda^n(x); \lambda^1(y) \ldots, \lambda^n(y))$, (6) $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x) \ldots, \lambda^{nm}(x))$, 其中 P_n 和 $P_{n,m}$ 是在第 2.2 小节中定义的具有整数系数的泛多项式。

我们始终将 λ-环 R 视为一对 $(R, \lambda_R := \{\lambda^n_R\})$。
以下结果由定义直接推出。

引理 2.6. 若 R 是一个 λ-环，则

(1) $\lambda^n(0) = 0$ 对于 $n \geq 1$;
(2) $\lambda^n(-1) = (-1)^n$ 对于 $n \geq 0$.

2.4. Adams 运算。给定任意 λ-环 R，可以关联一个函数序列 s

$$\psi^n : R \to R \ (n \geq 1),$$

称为 Adams 运算，它们满足以下性质:

(1) 每个 ψ^n 都是一个 λ-环同态，即满足 $\psi^n\lambda^k = \lambda^k\psi^n$的环同态，其中 $k \geq 0$.(2) $\psi^1 =$id；(3) 对于 $m, n \geq 1$，我们有 $\psi^n\psi^m = \psi^{mn} = \psi^m\psi^n$；(4) 对于每个素数 p 和 $a \in R$, $\psi^p(a) = a^p(mod\ pR)$。

下一个引理说明，Adams运算可以用 λ-运算来表示。此外，它阐明了相关 Adams 运算ψ^n的唯一性。

引理 2.7. 对于一个 λ-环 R，我们有

$$\psi^n(x) = Q_n(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \ldots, \lambda^n(x))$$

对于每个 $x \in R$ 和 $n \geq 1$，其中多项式 Q_n 定义于 (2.1) 中。

证明。参见 [9]的定理 3.9。 □

我们在此记录牛顿公式，以备后用。

引理 2.8. 对于任意 λ-环 R，关系

$$\psi^k(x) - \lambda^1(x)\psi^{k-1}(x) + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda^{k-1}(x)\psi^1(x) = (-1)^{k+1}k\lambda^k(x)$$

对 $x \in R$ 和 $k \geq 1$.成立

证明。参见 [9]中的定理3.10。 □

3. λ-ring structure on $K_*(X)$

设 X 是一个拟紧概形。张量积在格罗滕迪克环 $K_0(X)$上诱导乘法。环 $K_0(X)$ 是一个带有 λ-运算的 λ-环

$$\lambda^r : K_0(X) \to K_0(X),\ (r \geq 0),$$

其中运算 λ^r 由 X. 上向量丛的通常外幂运算定义。在 [2], 中，Harris、Kock 和 Taelman 使用 Grayson二元复形技术，将外幂运算扩展到 $K_n(X)$ 上的高阶 K群。我们将简要回顾高阶 K 群上外幂运算的构造（见下文）。为此，我们需要以下 Grayson 对 K群的描述。

Grayson 的 K-群。关于更全面的讨论，请参见 [1] 和 [2] 的第 1 节。先固定一些记号。给定一个正合范畴 $\mathcal{N}$,

- $C\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$中集中于非负次数的链复形范畴。换言之， $C\mathcal{N}$ 的对象都是 $\mathcal{N}$中的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次对象。
- $C_b\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$.中由有界链复形构成的 $C\mathcal{N}$的正合子范畴
- $C^q\mathcal{N}$： $C\mathcal{N}$.中由无环链复形构成的全子范畴
- $C_b^q\mathcal{N}$： $C\mathcal{N}$.中的有界无环链复形范畴

范畴 $C\mathcal{N}$、 $C_b\mathcal{N}$和 $C_b^q\mathcal{N}$都是正合范畴。因此，我们可以迭代其构造，以定义 $\mathcal{N}$中的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$-分次对象，并称之为 n维多重复形。 $\mathcal{N}$ 中的 n维多重复形范畴记为 $C^n\mathcal{N}$. 。类似地，正合范畴 $(C_b)^n\mathcal{N}$、$(C^q)^n\mathcal{N}$和 $(C_b^q)^n\mathcal{N}$分别表示 n维有界、无环和有界无环多重复形的范畴。

正合范畴 $\mathcal{N}$ 上的二元复形是一个三元组 $(N_\bullet, d, d')$，其中 $N_\bullet$ 是 $\mathcal{N}$ 中的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次对象，并带有两个微分 d 和 d'，使得 $(N_\bullet, d)$ 和 $(N_\bullet, d')$ 属于 $C\mathcal{N}$。和之前一样，我们固定以下记号。

- $B\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$. 中二元链复形的范畴
- $B_b\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$. 中有界二元链复形的范畴
- $B^q\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$. 中无挠二元链复形的范畴
- $B_b^q\mathcal{N}$： $\mathcal{N}$.中有界无挠二元链复形的范畴

请注意，这些二元复形范畴都是正合的。类似地，正合范畴 $(B_b)^n\mathcal{N}$、$(B^q)^n\mathcal{N}$ 和 $(B_b^q)^n\mathcal{N}$ 分别表示 n 维有界、无挠和有界无挠二元多重链复形的范畴。 n 维二元多重链复形是在 $\mathcal{N}$ 中的一组 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 分次对象，在每个方向 $1 \leq i \leq n$ 上都有微分 (d^i, d^i)，并且这些微分在 $i \neq j$ 时满足以下交换律：

$$
\begin{aligned}
d^i d^j &= d^j d^i \\
\tilde{d^i} d^j &= d^j \tilde{d^i} \\
d^i \tilde{d^j} &= \tilde{d^j} d^i \\
\tilde{d^i} \tilde{d^j} &= \tilde{d^j} \tilde{d^i}.
\end{aligned}
$$

我们称一个 n 维二元多重复形为对角的，如果某个方向上的一对微分~相等，即对于某个 $1 \leq i \leq n.$，有 $d^i = d^i$。由于范畴 $(B_b^q)^n\mathcal{N}$ 是正合范畴，我们可以定义 $K_0((B_b^q)^n\mathcal{N})$。令 $\mathcal{D}$ 为 $K_0((B_b^q)^n\mathcal{N})$ 的子群，它由对角有界无挠二元多重复形的类生成。Grayson 的一个结果表明，对于 $n \geq 1$， $K_n(\mathcal{N})$ 同构于 $K_0((B_b^q)^n\mathcal{N})/\mathcal{D}$；在本文余下部分，我们将以此作为 K-群的定义。更准确地说，我们有如下定义（参见 [1] 的推论 7.4 和 [2] 的定义 1.3）：

定义 3.1. 设 $\mathcal{N}$ 是一个正合范畴。对于 $n \geq 0$， $K_n\mathcal{N}$ 是由生成元 $[N]$ 生成的阿贝尔群，每个对象 N（属于 $(B_b^q)^n\mathcal{N}$）对应一个生成元，其关系如下：

(1) $[N'] + [N''] = [N]$ 对于 $(B_b^q)^n\mathcal{N}$ 中的每个短正合列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$；
(2) $[D] = 0$ 若 D 是一个对角有界无环二元多复形。

上述定义与 Grayson 的原始定义略有不同。不过， [2] 的命题 1.4 表明，采用定义 3.1 并无妨碍。

高阶 K-群上的外幂运算。令 $\mathcal{P}(X)$ 表示 $X.$ 上的向量丛范畴。在 [2], 中，Harris、Kock 和 Taelman 归纳地构造函子

$$\Lambda^r_n : (B_b^q)^n\mathcal{P}(X) \to (B_b^q)^n\mathcal{P}(X) \ for\ all\ r > 0\ and\ n \geq 0$$

来自 $\mathcal{P}(X)$ 上通常的外幂自函子。构造思路如下：从 $\mathcal{P}(X)$ 上通常的外幂自函子 Λ^r 开始。令 $\mathcal{P}(X)^{\Delta^{op}}$ 表示 $\mathcal{P}(X)$ 中单纯对象构成的范畴。范畴 $C_b^q\mathcal{P}(X)$ 上有界无挠复形的自函子 Λ^r_1 定义如下：

$$\Lambda^r_1 := N\Lambda^r\Gamma : C_b^q\mathcal{P}(X) \to C_b^q\mathcal{P}(X) \ for\ all\ r > 0,$$

其中， $\Gamma: C\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)^{\Delta^{op}}$ 和 $N: \mathcal{P}(X)^{\Delta^{op}} \to C\mathcal{P}(X)$ 由 Dold-Kan 对应给出（参见 [2] 的第 2 节）。注意， N 在自然同构意义下是 Γ 的逆。递归地，我们可以定义（参见 [2] 的推论 3.5）

$$\Lambda_n^r := N\Lambda_{n-1}^r\Gamma : (C_b^q)^n\mathcal{P}(X) \to (C_b^q)^n\mathcal{P}(X) \ for\ all\ r, n > 0.$$

给定 $B_b^q\mathcal{P}(X)$ $\Lambda_n^r(P_\bullet)$ 中的一个对象 $(P_\bullet, d, d')$，它与微分 d 和 d' 无关。因此，我们可以分别将 Λ_n^r 应用于 $(P_\bullet, d) \in C_b^q\mathcal{P}(X)$ 和 $(P_\bullet, d') \in C_b^q\mathcal{P}(X)$，从而得到 $B_b^q\mathcal{P}(X)$ 中的一个对象（参见 [2] 的引理 4.2）。因此，$(C_b^q)^n\mathcal{P}(X)$ 上的自函子 Λ_n^r 可以提升为二元多重链复形上的自函子。

$$\Lambda_n^r : (B_b^q)^n\mathcal{P}(X) \to (B_b^q)^n\mathcal{P}(X) \ for\ all\ r > 0\ and\ n \geq 0.$$

引理 3.2. 函子 Λ_n^r 诱导出定义良好的同态

$$\lambda^r : K_n(X) \to K_n(X) \ for\ r, n > 0. \tag{3.1}$$

证明. 参见 [2] 的定理 6.2。 □

注 3.3. 由于 $\Lambda^1 = id$ 和 N 是 Γ 的逆，因此 $\Lambda_1^1 = N\Lambda^1\Gamma$ 是恒等映射。通过迭代可以看出， $\Lambda_n^1 = N\Lambda_{n-1}^1\Gamma$ 是恒等映射，因为 $\Lambda_{n-1}^1 = id$ 和 N、Γ 都是由在每个给定方向上互为逆的函子复合而成的。例如， $\Lambda_2^1 := \mathbf{N}_h\mathbf{N}_v\Lambda^1\ \Gamma_v\Gamma_h = id$（参见 [2] 的注 3.6）。这里的指标 h 和 v 分别表示水平方向和垂直方向。因此， $\lambda^1 = id.$

分次阿贝尔群 $K_*(X) := \bigoplus_{n\geq 0} K_n(X)$ 是一个交换环，其乘法

$$(a_0, a_1, a_2, \dots,) \bullet (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_2b_0, \dots).$$

注意，$\bigoplus_{n\geq 1} K_n(X)$ 中任意两个元素的乘积都为零。每个 $K_n(X)$ 都是一个 $K_0(X)$-模，其模结构由 $[P].[Q_\bullet] := [P \otimes Q_\bullet]$ 给出，其中 P 属于 $\mathcal{P}(X)$，而 $Q_\bullet$ 属于 $(B_b^q)^n\mathcal{P}(X)$。此外，由公式定义的外幂运算 $\lambda^r: K_*(X) \to K_*(X)\ r \geq 0$

$$\lambda^r((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (\lambda^r(a_0), \sum_{i=0}^{r-1} \lambda^i(a_0)\lambda^{r-i}(a_1), \sum_{i=0}^{r-1} \lambda^i(a_0)\lambda^{r-i}(a_2), \dots). \tag{3.2}$$

引理 3.4。式 (3.2) 中定义的运算 λ^r 满足 λ-环的公理。换句话说， $K_*(X)$ 是一个 λ-环。

证明。参见 [2]的定理 7.1 和 8.18。 □

4. λ-MODULE STRUCTURE ON HIGHER K-GROUPS

命题 4.1。设 $a \in K_0(X)$ 和 $x \in K_n(X)$ 对于 $n > 0.$，由 (3.1) 定义的群同态$\lambda^r : K_n(X) \to K_n(X)$ 对于 $r, n > 0$ 满足以下条件:

(1) $\lambda^r(a.x) = \psi^r(a)\lambda^r(x)$。这里，$\psi^r$ 是作用于 $K_0(X)$上的第 r个Adams运算。(2) $\lambda^r\lambda^s = c\lambda^{rs}$，其中 c 在 r为偶数时是 -1，否则为 1。

证明。(1) 令 $\underline{a} = (a, 0, \dots) \in K_*(X)$，且 $\underline{x} = (0, 0, \dots, x, 0, \dots) \in K_*(X)$。由于$K_*(X)$是一个 λ-环（见引理 3.4），

$$\lambda^r(\underline{a} \bullet \underline{x}) = P_r(\lambda^1(\underline{a}), \dots, \lambda^r(\underline{a}); \lambda^1(\underline{x}), \dots, \lambda^r(\underline{x})).$$

将$\underline{ax}$ 记作$(0, 0, \dots, ax, 0, \dots)$，将 $\underline{\lambda^i(a)}$记作$(\lambda^i(a)\ 0, \dots)$，将 $\underline{\lambda^i(x)}$记作$(0, 0, \dots, \lambda^i(x)\ 0, \dots)$。利用 $K_*(X)$上的乘法规则，我们得到

$$\begin{aligned}
(0, \dots, \lambda^r(ax), 0, \dots) = \lambda^r(\underline{ax}) &= P_r(\underline{\lambda^1(a)}, \dots, \underline{\lambda^r(a)}; \underline{\lambda^1(x)}, \dots, \underline{\lambda^r(x)}) \\
&= Q_r(\underline{\lambda^1(a)}, \dots, \underline{\lambda^r(a)})\underline{\lambda^r(x)} \ (by\ Lemma\ 2.2) \\
&= (Q_r(\lambda^1(a), \dots, \lambda^r(a)), 0, \dots)\underline{\lambda^r(x)} \\
&= (0, \dots, Q_r(\lambda^1(a), \dots, \lambda^r(a))\lambda^r(x), 0, \dots).
\end{aligned}$$

因此，$\lambda^r(ax) = Q_r(\lambda^1(a) \dots, \lambda^r(a))\lambda^r(x)$。由引理 2.7 可得所需结论。

(2) 注意，$\lambda^r\lambda^s(\underline{x}) = P_{r,s}(\lambda^1(\underline{x}) \dots, \lambda^{rs}(\underline{x})) = c\lambda^{rs}(\underline{x})$，因为多项式 $P_{r,s}$ 中出现的所有乘积都是平凡的。对 λ-环 $K_*(X)$ 和 Adams运算 ψ^*应用牛顿公式（见引理 2.8），得到 $\psi^{rs}(\underline{x}) = (-1)^{rs+1}rs\lambda^{rs}(\underline{x})$。由于每个 ψ^r 都是环同态，因此还有 $\psi^r\psi^s(\underline{x}) = (-1)^{r+1}(-1)^{s+1}rs\lambda^r\lambda^s(\underline{x})$。我们知道 $\psi^{rs} = \psi^r\psi^s.$ 因此，$(-1)^{rs+1} = (-1)^{r+1}(-1)^{s+1}c$，因为 $K_*(X)$ 的特征为零（见 [9] 的命题 1.29）。于是得证。□

注 4.2. 命题 4.1(2) 的证明基本上确定了多项式 $P_{n,m}(s_1, s_2, \dots, s_{nm})$ 中 s_{nm} 的系数。

定理 1.2 的证明：对于 $r, n > 0$，我们定义 $\lambda_{K_n(X)\,r} := (-1)^{r-1}\lambda^r : K_n(X) \to K_n(X)$，其中 λ^r 如 (3.2) 所示。结论现在由注 3.3 和命题 4.1 得出。□

REFERENCES

[1] D. R. Grayson，《通过二元复形构造代数 K-理论》，美国数学会杂志，第25卷第4期（2012年），1149–1167页。[2] T. Harris、B. Kock 和 L. Taelman，《通过二元复形对高阶 K-群的外幂运算》，《 K-理论年刊》，第2卷第3期（2017年），409–449页。

[3] H. L. Hiller, 《 λ-环与代数 K-理论》, 《纯数学与应用代数杂志》, 20(3)（1981年）, 241–266页。[4] L. Hesselholt, 《大 de Rham-Witt 复形》, 《数学学报》, 214（2015年）, 135–207页。[5] John R. Hopkinson, 《λ-环中的泛多项式与无限环空间 tmf 的 K-理论》, 博士论文, 麻省理工学院, 2006年。[6] C. Kratzer, 《代数 K-理论中的 λ-结构》, 《赫尔维数学评论》 55(2)（1980年）, 233–254页。[7] M. Levine, 《λ-运算、 K-理论与动机上同调》, 载于《代数 K-理论》（安大略省多伦多, 1996年）, 第131–184页, V. P. Snaith 编, Field Institute 通讯丛书第16卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1997年。[8] C. Soule, 《代数 K-理论中的运算》, 《加拿大数学杂志》37(3)（1985年）, 488–550页。[9] D. Yau, 《λ-环》, 世界科学出版社, 新泽西州哈肯萨克, 2010年。

Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal Bypass Road, Bhauri, Bhopal-462066, Madhya Pradesh, India电子邮箱地址: sourayan16@iiserb.ac.in, vsadhu@iiserb.ac.in