arXiv:2303.11618v1 [math.AT] 21 Mar 2023

欧拉数为6的六维几乎复环面流形

DONGHOON JANG 和 JIYUN PARK

ABSTRACT. 近复环面流形是一个 $2n$维紧致连通近复流形，配备了一个实 n维环面 $T^n \simeq (S^1)^n$ 的有效作用，且具有不动点。对于近复环面流形，存在一个带标记的有向图，其中包含不动点处的权和各向同性球面的信息。

设 M 是一个欧拉数为6的6 维近复环面流形。我们证明，对于 M会出现两种类型的图，并且针对每种图构造出这样的流形 M，从而证明其存在性。利用这些图，我们确定 M的陈数和 Hirzebruch χ_y 属。

CONTENTS

1. 引言 12. 背景与预备知识 63. 存在性：例子 114. 爆破 135. Hirzebruch 属 146. 图——六维与欧拉数6 187. 定理的证明 1.1 228. 不变量 26参考文献 29

1. INTRODUCTION

对于近复环面流形，存在一个（有向带标记的）图，其中包含不动点处的权和各向同性球面的信息；图的顶点对应一个不动点，边对应一个各向同性球面，而边的标记给出

Donghoon Jang 获得了韩国国家研究基金会（NRF）由韩国政府（科学技术信息通信部）资助的项目经费（2021R1C1C1004158）。

与其顶点对应的不动点处的一个权；参见定义2.1 和2.2 以及命题 2.6。

假设两个近复环面流形具有相同的关联图。那么它们在不动点处具有相同的权，因此陈数也相同（进而具有相同的 Hirzebruchχ_y-属、指标、Todd 属和欧拉数。）此外，若它们的作用都是等变形式的，那么它们具有相同的等变上同调，因为如果忽略每条边的方向，该图就是一个 GKM（Goresky-Kottwitz-MacPherson）图[J5，推论 2。4]；此外，它们还具有相同的陈类。

在[J6], 中，第一作者证明了一个 $2n$维的近复环面流形，其欧拉数为 $n+1$，且为极小的，与复射影空间 $\mathbb{CP}^n$上的某个线性作用所对应的关联图相同。这意味着上述不变量对于这两个流形是一致的。Li 研究了类似的问题，即辛流形上的 Hamilton S^1作用具有（几乎）极小的不动点集；这样的流形与复射影空间或格拉斯曼流形具有某些相同的不变量[L1，L2]。

本文研究欧拉数为 6（即有 6 个不动点）的六维几乎复环面流形，这是六维中下一个最小的欧拉数；由于环面在一个（$4m+2$）维紧致近复流形上的任何作用都不可能有奇数个不动点，因此 6 是下一个可能的不动点数。

对于欧拉数为 6 的六维几乎复环面流形，我们证明，与该流形相关联的图仅有两种类型。

定理 1.1。 设 M 是一个欧拉数为 6 的六维几乎复环面流形。那么，图 *1* 中的某一个图会出现，作为描述 M的图，其中 a， b，以及 c 属于 $\mathbb{Z}^3$ 且张成 $\mathbb{Z}^3$ 的某些向量，以及某些整数 k （对于图 l 1b 则为）。

此外，对于每一种图类型，我们都构造出这样的流形 M，从而证明其存在性。

定理 1.2。 图 1 中的每个图都描述了某个欧拉数为6的 6 维几乎复环面流形；图 1a 描述例 *1.3* ，图 *1b* 描述例 *1.4*。

例 1.3。 (更多细节见例 *3.1*。) 固定一个整数 k。令 $M_1(k)$ 为一个（实）六维紧复流形

$$M_1(k) = \{([z_0 : z_1 : z_2 : z_3], [w_0 : w_1 : w_2]) \in \mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^2 \mid z_0 w_1^k = z_1 w_0^k, z_1 w_2^k = z_2 w_1^k\}.$$

令 T^3 按如下方式作用于 $M_1(k)$

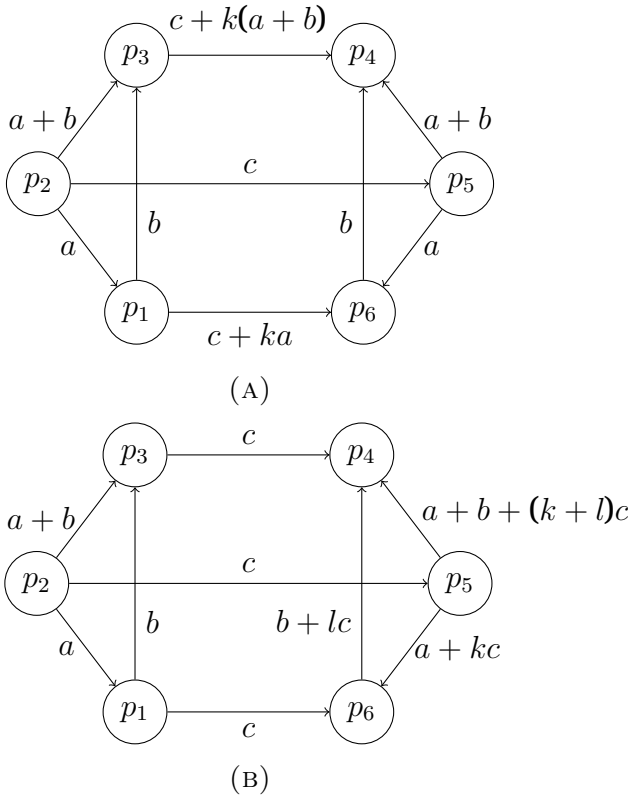


FIGURE 1. 欧拉数为 6 的六维近复环面流形的图

$$g \cdot ([z_0 : z_1 : z_2 : z_3], [w_0 : w_1 : w_2]) = ([z_0 : g^{ka} z_1 : g^{k(a+b)} z_2 : g^{-c} z_3], [w_0 : g^a w_1 : g^{a+b} w_2])$$

对所有 $g \in T^3 \subset \mathbb{C}^3$，其中 a、b 和 c 构成 $\mathbb{Z}^3$ 的一组基。图 *1a* 是描述 $M_1(k)$ 在此作用下的图。

例 1.4。(更多细节见例 *3.2*。) 固定整数 k 和l。设 $M_2(k,\ l)$ 为一个（实）六维紧复流形

$$M_2(k,l) = \{([z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4], [w_0 : w_1]) \in \mathbb{CP}^4 \times \mathbb{CP}^1 \mid z_0 w_1^k = z_3 w_0^k, z_2 w_1^{k+l} = z_4 w_0^{k+l}\}.$$

令 T^3 通过以下方式作用于 $M_2(k,l)$

$$g \cdot ([z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4], [w_0 : w_1]) = ([z_0 : g^{-a} z_1 : g^b z_2 : g^{kc} z_3 : g^{b+(k+l)c} z_4], [w_0 : g^c w_1])$$

对所有 $g \in T^3 \subset \mathbb{C}^3$，其中 a，b，且 c 构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基。图 *1b* 是描述 $M_2(k,\ l)$ 具有此作用的图。

作为定理 1.1的推论，对于欧拉数为6的6 维几乎复环面流形，我们确定其陈数和赫尔维茨 χ_y-属。

定理 1.5. 设 M 是一个欧拉数为 6 的 6 维近复环面流形。那么，Hirzebruch χ_y-亏格为 $\chi_y(M) = 1 - 2y + 2y^2 - y^3$。

(1) 假设图 *1a* 描述了 M。那么M 的陈数为 $\int_M c_1c_2 = 24$, $\int_M c_3 = 6$和 $\int_M c_1^3 = 2(k^2 + 27)$ 其中某个整数为 k。(2) 假设图 *1b* 描述了 M。那么M 的陈数为 $\int_M c_1c_2 = 24$, $\int_M c_3 = 6$和 $\int_M c_1^3 = 54$。

注意，对于流形 $M_1(k)$，如果 $|k|$ 很大，那么陈数 $\int_M c_1^3 = 2(k^2 + 27)$ 也很大。

对于一个 4 维几乎复环面流形 M， $a_0(M) \le a_1(M)$ 未必成立，其中 $\chi_y(M) = a_0(M) - a_1(M)y + a_2(M)y^2$ 是 χ 的 Hirzebruch M- 属；参见 [J3 、 M]。

设 M 是一个欧拉数为 6 的 6 维几乎复环面流形。从理论上说， M 的 Hirzebruch χ_y-属可能为 $2 - y + y^2 - 2y^3$；参见命题 5.5。另一方面，定理 1.5 表明这是不可能的。可以推测，对于一个 6 维几乎复环面流形 M，若令 $\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{3} a_i(M) \cdot (-y)^i$表示 M的 Hirzebruch χ_y-属，那么 $a_0(M)$存在一个上界，该上界是 $a_1(M)$的某个递增函数。

问题 1.6. 设 M 是一个 6 维近复环面流形。那么对于某个递增函数 $f(x)$，是否有 $a_0(M) \le f(a_1(M))$ 成立? 这里， $\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{3} a_i(M) \cdot (-y)^i$ 是 M 的 Hirzebruch χ_y- 属。

用多重扇理论的语言来说， [M], 我们可以将这个问题重新表述为：能否用 $2(a_0(M) + a_1(M))$ 个扇覆盖 $\mathbb{R}^3$ $a_0(M$ 次，其中 $a_0(M)$ 是 M的 Todd 属，而 $2(a_0(M) + a_1(M))$ 是不动点总数。

设 M 是一个6维紧致几乎复流形。在例 1.3 和 1.4中，我们构造了配备 M 的 T^3-作用且具有6个不动点的例子。另一方面，如果一个维数更低的环面作用于 M 且具有6个不动点，则还有更多例子。在[J4], 中，第一作者证明了若圆群 S^1 作用于 M且具有4个不动点，则不动点处的权有6种情形，并讨论了每种情形下此类流形的存在性。特别地，存在这样一个 M Todd 属为0的流形。若对 M的一个不动点进行爆破，则可得到另一个具有6个不动点的 S^1-流形

，其 Todd 属为0。这样的流形不同于定理 1.1中的流形；如定理 1.5所示，后者的 Todd 属为1。

我们讨论定理1.1的证明思路。第一个要素是各向同性子流形，它是给定近复环面流形中被环面的某个子群作用固定的点集。第二个要素是 Hirzebruch χ_y-属和 Kosniowski 公式（定理5.1）。第三个要素是子图描述一个几乎复环面子流形（命题2.4）。第四个要素是各向同性子流形中不动点处的权之间的关系（引理2.10）。

定理1.1 的证明如下。设 M 是一个欧拉数为 6 的 6 维近复环面流形。定理1.1 旨在确定描述 M的图。

首先，在引理5.6 中，我们利用各向同性子流形的 Hirzebruch χ_y-属和 Kosniowski 公式（定理5.1）来获取有关四维几乎复环面子流形的信息。

其次，在命题 6.1 中，我们证明图 6a 或图6b描述了 M。假设图 6b描述了 M。利用命题2.4 和引理 2.10，我们在命题 6.2 中证明图6b 并不描述 M。因此，图 6a描述了 M。

接下来需要确定图 6a的标记。在引理 6.3中，我们利用命题 2.4 和引理 5.6，找出描述 4 维几乎复环面子流形的子图。在引理 7.1中，我们确定了一个图，它描述了一个具有 3 个或 4 个不动点的 4 维几乎复环面流形。随后，根据引理 6.3 和 7.1 ，我们在引理 7.2 中证明，子图标记之间的关系存在若干种情形。接下来，我们要确定每种情形下的标记，并在第 1.1 节定理 7的证明中完成这项工作。

本文结构如下。

在第 2 节中，我们回顾背景与预备知识。在第 3 节中，我们构造两个六维几乎复环面流形，分别由图 1a （例 3.1）和图 1b（例 3.2）描述。在第 4 节中，我们讨论近复环面流形的（等变）爆破，并证明对复射影空间上的线性 T^3-作用进行（等变）爆破后，得到的流形 $\mathbb{CP}^3$ 是我们在例 $M_1(k)$ 中构造的、具有 $k=1$ 的流形 3.1。

设 M 是一个欧拉数为 6 的 6 维几乎复环面流形。在第 5节中，我们研究几乎复环面流形的 Hirzebruch χ_y-亏格。在第 6节中，我们证明图 6a

描述了 M （命题 6.1和 6.2），并找到了描述 M 的四维几乎复环面子流形的子图（引理6.3）。基于上述结果，我们在第 7 节证明定理 1.1。在第8节中，我们证明定理 1.5；我们确定了 χ_y-亏格及 M的陈数。

2. Background and preliminaries

设 M 是一个流形。 M 上的几乎复结构是定义在 M 的切丛上的丛映射 $J\colon TM \to TM$，其在每个切空间上的限制都是线性复结构。流形 M 与其上的几乎复结构 J 构成的二元组（M, J）称为近复流形。根据定义，任何近复流形的维数都是偶数。对于群 G 在近复流形（M, J）上的作用，若对群 G 中所有元素 g 都有 $dg \circ J = J \circ dg$，则称该群作用保持几乎复结构。本文中，我们假设近复流形上的任何群作用都保持几乎复结构。

设（M, J）是一个 $2n$ 维近复流形，且一个 k 维环面 T^k 作用于 M。设 F 是一个不动分支， p 是 F 中的一点。 F 在 p 处的法空间 N_pF 可分解为复一维向量空间 L_1、 $\cdots$、 L_m 之和，其中环面 T^k 在每个 L_i 上都通过乘以 $g^{w_{p,i}}$ 的方式作用，其中对所有 $g \in T^k$ 均成立，且某个非零元素 $w_{p,i}$ 属于 $\mathbb{Z}^k$, $1 \le i \le m$。这里， $2m$ 是 F 在 M 中的余维。这些元素 $w_{p,1}, \cdots, w_{p,m}$ 对所有 $p \in F$ 都相同，称为 F 的权。

对于紧致几乎复流形上的环面作用，若其不动点是孤立的，则存在一个带标号有向多重图，其中包含不动点处的权以及各向同性子流形的信息[J5], ，这是圆群作用结果的推广 [GS, JT]。该多重图的顶点集就是流形的不动点集。如果多重图的一条边 e 的标记为 w，那么，与 e 的初始顶点对应的不动点具有权 w，与 e的终端顶点对应的不动点具有权 $-w$，且这两个不动点属于同一个各向同性子流形的连通分支。

定义2.1. 带标号有向k-多重图 Γ 是顶点的集合 V、边的集合 E、映射 $i: E \to V$ 和 $t: E \to V$，它们分别给出每条边的初始顶点和终端顶点，以及映射 $w: E \to \mathbb{Z}^k$，给出每条边的标记。

对于 $\mathbb{Z}^k$ 中的元素 $w = (w_1, \cdots, w_k)$，$\ker w$ 表示 T^k 的子群，其元素固定 w。也就是说，

$$\ker w = \{g = (g_1, \cdots, g_k) \in T^k \subset \mathbb{C}^k | g^w := g_1^{w_1} \cdots g_k^{w_k} = 1\}.$$

如果群 G 作用于流形 M，我们用 M^G 表示其不动点集，也就是说，

$$M^G = \{m \in M | g \cdot m = m, \forall g \in G\}.$$

定义 2.2. 设一个 k 维环面 T^k 作用于一个具有孤立不动点的紧致近复流形 M。若一个（带标记的有向 k）多重图 $\Gamma = (V, E)$ 满足以下条件，我们称其描述了 M：

(i) 顶点集 V 等于不动点集 M^{T^k}。(ii) 对所有 $p \in M^{T^k}$，p 处的权多重集为 $\{w(e)|i(e) = p\} \cup \{-w(e)|t(e) = p\}$。(iii) 对每条边 e，其两个端点 $i(e)$ 和 $t(e)$ 位于各向同性子流形 $M^{\ker w_{(e)}}$ 的同一连通分支中。

命题 2.3. [J5] 设一个 k维环面 T^k 作用于一个具有孤立不动点的紧致近复流形 M。那么存在一个描述 k 的（带标记的有向 Γ）多重图 M，且该图没有自环。

此外，多重图的子多重图描述了 M 的一个各向同性子流形，该子流形带有环面 T^k 的作用。

命题 2.4. 设一个 k 维环面 T^k 作用在紧致的、几乎复流形 M 上，且其不动点是孤立的。设 Γ 是描述 M 的一个没有自环的多重图。设 S 是 T^k 的一个闭子群，并设 F 是各向同性子流形 M^S 的一个连通分支。设 Γ_F 是按以下方式从 Γ 得到的一个子多重图：

(1) Γ_F 的顶点集为 $F \cap M^{T^k}$。(2) 对于 $p \in \Gamma_F$，p 中位于 Γ_F 的边 e_i'，就是 Γ 中位于 p 的边 e_i，其标记 w_i 对所有 $g \in S$ 均满足 $g^{w_i} = 1$。

那么，Γ_F 描述了 F，T^k 对 M 的作用限制后作用于其上。此外，$\dim F = 2m$ 当且仅当 Γ_F 是 m 正则的；Γ_F 的每个顶点都有 m 条边。

证明。环面 T^k作用于 F，它是 T^k-作用在M上的限制 F。因此，$F^{T^k} = F \cap M^{T^k}$并且由此 Γ_F满足定义2.2中关于 T^k-作用在 F上的条件 (i)。

设 e 是 p到 q 的图 Γ_F 中一条标记为 w的边。由于 Γ_F 是 Γ 的子多重图，p 的权重为 w，而 q 的权重为 $-w$。由 (2)，对于所有 $g \in S$，$g^w = 1$，因此权重 w 是 p处 F的切空间 T_pF 的一个权重。反过来，对于 $p \in F^{T^k}$，若 M 的切空间 T_pM 中的一个权重 w' 对所有 $g \in S$ 都满足 $g^{w'} = 1$，则它是 F的切空间 T_pF 的一个权重；根据 (2)，这样的权重 w' 是

某条边的标记 Γ_F 处 p。因此， Γ_F 满足定义2.2中关于 T^k在 F上的作用的 (ii) 条件。

设 e 是 Γ_F 中一条从 p 到 q、标记为 w 的边。由于 e 是 Γ 中的一条边，根据定义 2.2 的 (iii)， p 和 q 属于 $M^{\ker w}$ 的同一个连通分支 G。由 (2)，对所有 $g \in S$， $g^w = 1$。因此， $S \subset \ker w$，从而 $G \subset M^{\ker w} \subset M^S$。由于 F 是 M^S 中包含 p 和 q 的一个连通分支，而 G 是 $M^{\ker w} \subset M^S$ 中包含 p 和 q 的一个连通分支，这意味着 $G \subset F$。对于任意 $x \in G$， T_xG 中的每个权 w' 对 $g \in \ker w$ 都满足 $g^{w'} = 1$。因此可得 $G \subset F^{\ker w}$。故 Γ_F 对 F 上的 T^k-作用满足定义 2.2 的 (iii)。

由于 Γ_F描述了 F，维数 $F = 2m$ 当且仅当 Γ_F是 m价的，根据定义 2.2 的 (ii)。 □

下面的例子说明了命题2.4。

例 2.5。设二维环面 T^2 通过以下方式作用于 $\mathbb{CP}^3$

$$(g_1, g_2) \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [z_0 : g_1 z_1 : g_1^2 z_2 : g_2 z_3]$$

对所有 $(g_1, g_2) \in T^2$ 以及所有 $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3$。该作用有 4 个不动点，$p_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$, 和 $p_4 = [0 : 0 : 0 : 1]$，它们的权为 $\{(1, 0), (2, 0), (0, 1)\}$,$\{(-1, 0), (1, 0), (-1, 1)\}$, $\{(-2, 0), (-1, 0), (-2, 1)\}$, 以及 $\{(-2, 0), (1, -1), (2, -1)\}$，分别如此。图 2a 描述了该作用在 $\mathbb{CP}^3$ 上的情况。

考虑 T^2 的子群 $\{1\} \times S^1$。其不动点集为 $\{[z_0 : z_1 : z_2 : 0]\} \cup [0 : 0 : 0 : 1]$。二维环面 T^2 作用于前一个不动分支 $F_0 := \{[z_0 : z_1 : z_2 : 0]\}$，其作用为

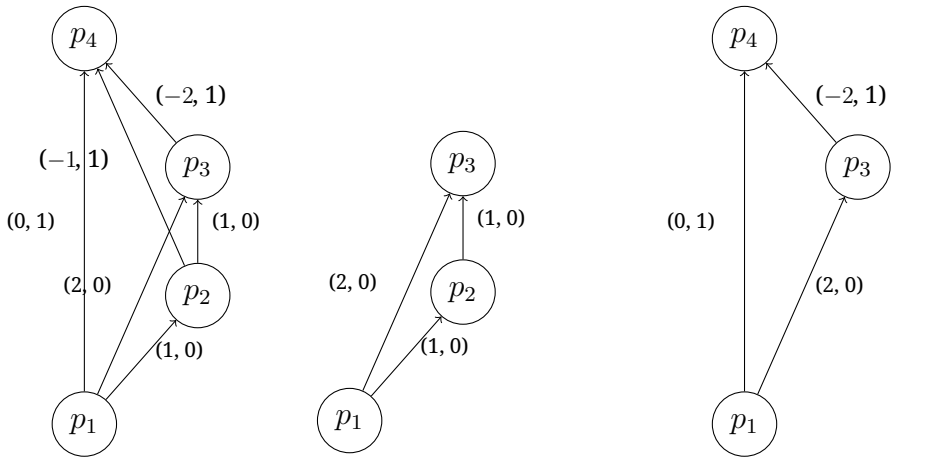
$$(g_1, g_2) \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : 0] = [z_0 : g_1 z_1 : g_1^2 z_2 : 0]$$

对所有 $(g_1, g_2) \in T^2$，其不动点为 $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$, 和 $p_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$，相应的权分别为 {(1,0),(2,0)}、{(−1, 0),(1,0)} 和 {(−2,0),(−1,0)}。因此，图 2b 描述了 T^2 在 F_0 上的作用。

接下来，考虑 T^2 的子群 $\mathbb{Z}_2 \times \{1\}$，其中 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$。其不动点集为 $\{[z_0 : 0 : z_2 : z_3]\} \cup [0 : 1 : 0 : 0]$。二维环面 T^2 通过以下方式作用于前一个不动分支 $F_1 := \{[z_0 : 0 : z_2 : z_3]\}$

$$(g_1, g_2) \cdot [z_0 : 0 : z_2 : z_3] = [z_0 : 0 : g_1^2 z_2 : g_2 z_3]$$

对于所有 $(g_1, g_2) \in T^2$，其不动点为 $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$, 和 $p_4 = [0 : 0 : 0 : 1]$，相应的权分别为 $\{(2, 0), (0, 1)\}$,$\{(-2, 0), (-2, 1)\}$ 和 $\{(0, -1), (2, -1)\}$。因此，图 2c 描述了 F_1 上的 T^2-作用。



(A) 多重图描述 $\mathbb{CP}^3$

(B) 一个子多重图描述 F_0

(C) 一个子多重图描述 F_1

FIGURE 2

对于近复环面流形，描述它的多重图是不含任何自环的图。

命题 2.6。 [J5] 设 M 是一个近复环面流形。那么存在一个描述 M 且没有重边和自环的多重图。

此外，每条边都对应一个各向同性球面。

命题 2.7。[J5] 设 M 是一个 $2n$维近复环面流形。那么对于每个不动点 p，存在 n 2个球面，每个球面上环面 T^n对 M 的作用限制为作用，并且这些球面都以 p 为一个共同的不动点，其权为$w_{p,\ i}$，但任意两个球面除了这个不动点外没有其他共同不动点。这里，$w_{p,\ 1}$，$\cdots$，$w_{p,\ n}$是 p处的权。

一个近复流形 M至少有 1 2 维 $M+1$ 个不动点[D，M]。换言之，近复环面流形的欧拉数 M 至少为 1 2 维 $M+1$，因为 M 有有限个不动点，M 的欧拉数等于不动点的欧拉数之和（定理 5.4），而一点的欧拉数为 1。命题 2.6 说明，描述 M 的图至少有 1 2 维 $M+1$ 个顶点，从而证明了相同的结果。

命题 2.8。 [D,J5, M] 设 M 是一个近复环面流形。那么它至少有1 2 $\dim M+1$ 个不动点。或者说，M 的欧拉数至少为1 2 $\dim M+1$。

设一个 k 维环面 T^k 作用在流形 M 上。 M 的等变上同调为

$$H^*_{T^k}(M) = H^*(M \times_{T^k} ET^k),$$

其中 ET^k 是一个可缩空间， T^k 在其上自由作用。假设 M 是紧致且定向的。那么投影映射 $\pi\colon M\times_{T^k} ET^k \to BT^k$ 诱导一个推前映射

$$\pi_* : H^i_{T^k}(M;\mathbb{Z}) \to H^{i-\dim M}(BT^k;\mathbb{Z})$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立，其中 BT^k 是 T^k 的分类空间。投影映射 π_* 也记作 $\int_M$，并由沿纤维积分 M 给出。

定理 2.9 （Atiyah-Bott-Berline-Vergne 定位定理）。[AB] 设 k 维环面 T^k 作用于紧致定向流形 M。设 $\alpha \in H^*_{T^k}$ （ M ； $\mathbb{Q}$ ）。作为 $\mathbb{Q}$ （ t ），

$$\int_M \alpha = \sum_{F\subset M^{T^k}} \int_F \frac{\alpha|_F}{e_{T^k}(NF)},$$

其中求和遍历所有不动分支，且 $e_{T^k}(NF)$ 是 M 中 F 的法丛的等变欧拉类。

酉流形是指在某个 $k \geq 0$ 的丛 $TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^k$ 上具有复结构的流形，其中 $\underline{\mathbb{R}}^k$ 表示 M 上的 k 维平凡丛。根据定义，任何近复流形都是酉流形。

对于酉流形上的环面作用，在每个不动分支处，法丛的权都是良定义的。此外，各向同性子流形中不动点处的权之间有着密切关系。

引理 2.10. [J5] 固定元素 w 于 $\mathbb{Z}^k$。令一个 k 维环面T^k作用于紧致酉流形 M。设 p和 p'是位于 $M^{\ker w}$的同一连通分支中的不动点。那么， T^k处的权与 p处的权 p' 模 w相等。

由于任意近复流形都是酉流形，引理 2.10对近复流形成立。

不动点较少的近复流形上的圆群作用已得到分类。

定理 2.11. 设圆群作用于紧致近复流形 M。

(1) 如果恰有一个不动点 p，那么 M 就是该点本身，即 $M = \{p\}$。

(2) [Kos2, J2] 如果恰有两个不动点，那么要么 M 是二维球面，要么 维数 $M=6$，且不动点处的权为$\{-a-b,a,b\}$ 和 $\{-a,-b,a+b\}$，其中 a和 b是正整数。(3) [J2] 如果恰有三个不动点，那么 维数 $M=4$，且不动点处的权为 $\{a+b,a\}$、 $\{-a,b\}$ 和 $\{-b,-a-b\}$，其中 a 和 b是正整数。

对于 [J2] 中不动点为3的情形，其证明是对 [J1] 中辛作用证明的细致修改。

3. Existence: examples

根据定理 1.1，任何欧拉数为6的 6 维近复环面流形都由图 1a 或图 1b 描述。本节中，我们构造两个近复环面流形的例子，一个由图 1a 描述，另一个由图 1b描述。

注意，例 3.1 在 $k=0$ 下与例 3.2在 $k=l=0$ 下相同。我们还注意到， [J5 中构造的流形，即例 7.1]，是本文构造的例 3.2 在 $k=0$ 下的一个特例。此外，例 3.1 在 $k=1$ 下也可由 T^3-作用在 $\mathbb{CP}^3$ 上的线性作用在一个不动点处吹起得到；详见例4.1 。

第一个例子是一个由图 1a 描述的近复环面流形。

例 3.1。固定一个整数 k。我们用 $M_1(k)$ 表示一个紧复流形

$$M_1(k)=\{([z_0:z_1:z_2:z_3],[w_0:w_1:w_2])\in\mathbb{CP}^3\times\mathbb{CP}^2 \mid z_0w_1^k=z_1w_0^k, z_1w_2^k=z_2w_1^k\}.$$

注意， $z_0w_1^k=z_1w_0^k$ 和 $z_1w_2^k=z_2w_1^k$ 蕴含 $z_0w_2^k=z_2w_0^k$。

令 a、 b 和 c 构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基。令 T^3 按如下方式作用于 $M_1(k)$:

$$g\cdot([z_0:z_1:z_2:z_3],[w_0:w_1:w_2])$$
$$=([z_0:g^{ka}z_1:g^{k(a+b)}z_2:g^{-c}z_3],[w_0:g^aw_1:g^{a+b}w_2])$$

对所有 $g\in T^3\subset\mathbb{C}^3$均成立。该作用有 6 个不动点： $p_1=([1:0:0:0],[1:0:0])$、 $p_2=([0:1:0:0],[0:1:0])$、 $p_3=([0:0:1:0],[0:0:1])$、 $p_4=([0:0:0:1],[1:0:0])$、 $p_5=([0:0:0:1],[0:1:0])$ 和 $p_6=([0:0:0:1],[0:0:1])$，其权分别为 $\{-c,a,a+b\}$、$\{-c-ka,-a,b\}$、 $\{-c-k(a+b)\ -a-b、\ -b\}$、$\{c,a,a+b\}$、 $\{c+ka,-a,b\}$ 和 $\{c+k(a+b)\ -a-b、\ -b\}$。

例如，在 p_1 附近，我们有 $z_0\neq0$, $w_0\neq0$, $\frac{z_1}{z_0}=(\frac{w_1}{w_0})^k$，以及$\frac{z_2}{z_0}=(\frac{w_2}{w_0})^k$。因此，$(\frac{z_3}{z_0},\frac{w_1}{w_0},\frac{w_2}{w_0})$ 是 p_1 处的局部坐标。然后 T^3 在 p_1 的一个邻域上作用为

$$g\cdot\left(\frac{z_3}{z_0},\frac{w_1}{w_0},\frac{w_2}{w_0}\right)=\left(\frac{g^{-c}z_3}{z_0},\frac{g^a w_1}{w_0},\frac{g^{a+b}w_2}{w_0}\right)=\left(g^{-c}\frac{z_3}{z_0},g^a\frac{w_1}{w_0},g^{a+b}\frac{w_2}{w_0}\right).$$

因此， p_1 处的权为 $\{-c,a,a+b\}$。

我们有 p_1 的权重为 a， p_2 的权重为 $-a$，且 p_1 和 p_2 位于同一个二维球面 $F_{1,\ 2}:=\{([z_0:\ z_1:0:\ 0],[w_0:\ w_1:\ 0])|z_0w_1^k=z_1w_0^k\}$之中。因此，在描述具有此作用的 $M_1(k)$ 的图中，有一条从 p_1 到 p_2 、标记为 a的边。

通过类似的计算可以看出，图 1a 描述了 $M_1(k)$在此作用下的情形。

第二个例子是一个由图 1b描述的近复环面流形。

例 3.2. 固定整数 k 和 l。记 $M_2(k,l)$ 为一个紧复流形

$$M_2(k,l)=\{([z_0:z_1:z_2:z_3:z_4],[w_0:w_1])\in\mathbb{CP}^4\times\mathbb{CP}^1\mid z_0w_1^k=z_3w_0^k,z_2w_1^{k+l}=z_4w_0^{k+l}\}.$$

令 a、 b和 c构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基。令 T^3通过以下方式作用于 $M_2(k,l)$:

$$g\cdot([z_0:z_1:z_2:z_3:z_4],[w_0:w_1])$$
$$=([z_0:g^{-a}z_1:g^bz_2:g^{kc}z_3:g^{b+(k+l)c}z_4],[w_0:g^cw_1])$$

对所有 $g\in T^3\subset\mathbb{C}^3$ 均成立。该作用有 6 个不动点： $p_1=([1:0:0:0:0],[1:\ 0])$、 $p_2=([0:1:0:0:\ 0],[1:\ 0])$、 $p_3=([0:1:0:0:\ 0],[0:\ 1])$、 $p_4=([0:0:1:0:\ 0],[1:\ 0])$、 $p_5=([0:0:0:1:\ 0],[0:\ 1])$ 和 $p_6=([0:0:0:0:\ 1],[0:\ 1])$，它们的权分别为 $\{-a,b,c\}$, $\{a,a+b,c\}$,$\{a+kc,a+b+(k+l)c,-c\}$, $\{-b,-a-b,c\}$, $\{-a-kc,b+lc,-c\}$ 和 $\{-a-b-(k+l)c,-b-lc,-c\}$。

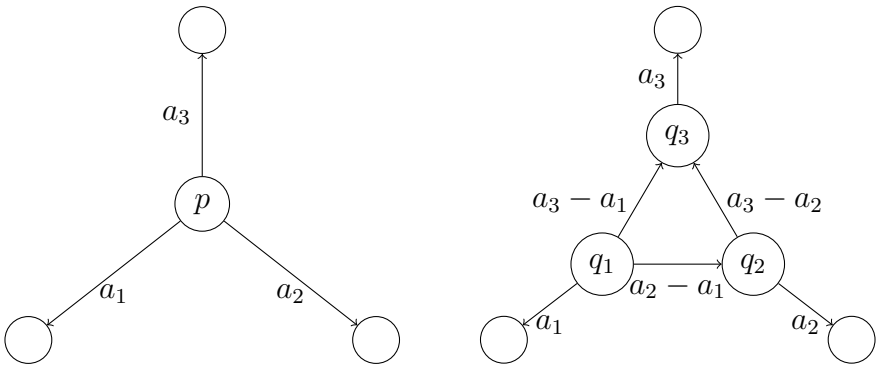
例如，在 p_3 附近，我们有 $z_1\neq0$, $w_1\neq0$, $\frac{z_0}{z_1}=\frac{z_3}{z_1}(\frac{w_0}{w_1})^k$，以及 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_4}{z_1}(\frac{w_0}{w_1})^{k+l}$。因此，$(\frac{z_3}{z_1},\frac{z_4}{z_1},\frac{w_0}{w_1})$ 是 p_3 处的局部坐标。于是， T^3 在 p_3 的一个邻域上作用如下:

$$g\cdot\left(\frac{z_3}{z_1},\frac{z_4}{z_1},\frac{w_0}{w_1}\right)=\left(\frac{g^{kc}z_3}{g^{-a}z_1},\frac{g^{b+(k+l)c}z_4}{g^{-a}z_1},\frac{w_0}{g^cw_1}\right)=$$
$$\left(g^{a+kc}\frac{z_3}{z_1},g^{a+b+(k+l)c}\frac{z_4}{z_1},g^{-c}\frac{w_0}{w_1}\right).$$

因此， p_3 处的权为 $\{a+kc,a+b+(k+l)c,-c\}$。

我们知道， p_3 的权为 $a+b+(k+l)c$， p_6 的权为 $-a-b-(k+l)c$，而 p_3 与 p_6 位于同一个二维球面 $F'_{3,\ 6}:=\{([0:\ z_1:0:0:\ z_4],[0:\ 1])\}$，它属于 $M^{\ker a+b+(k+l)c}$。因此，在描述具有此作用的 $M_2(k,l)$ 的图中，存在一条从 p_3 到 p_6 的边，其标记为 $a+b+(k+l)c$。

通过类似的计算可以看出，图1b 描述了 $M_2(k,l)$在此作用下的情形。



(A) (B) p的爆破

FIGURE 3. M 的爆破及其图

4. BLOW UP

本节讨论近复环面流形在一个不动点处的爆破，以及描述该爆破的图。我们将重点讨论六维情形。

设 M 是一个 6 维几乎复环面流形。设 p是一个不动点，并设 a_1, a_2和 a_3 是 p处的权。于是图3a描述了 M 在 p附近的情形。现在我们将爆破 p。我们可以将 p 的一个邻域与 $\mathbb{C}^3$中原点的一个邻域等同，其中环面 T^3 的作用为

$$g \cdot (z_1, z_2, z_3) = (g^{a_1} z_1, g^{a_2} z_2, g^{a_3} z_3)$$

对所有的 $g \in T^3$ 以及 $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$。在此描述中，吹起$p$ 对应于在 $\mathbb{C}^3$中爆破原点，也就是用所有经过原点的复直线替换 $\mathbb{C}^3$ 中的原点。在 p附近，爆破空间可描述为

$$\{((z_1, z_2, z_3), [w_1, w_2, w_3]) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{CP}^2 | z_i w_j = z_j w_i, \forall i, j\}.$$

T^3 在 p 附近的作用自然延拓为对爆破空间的作用:

$$g \cdot ((z_1, z_2, z_3), [w_1, w_2, w_3]) = ((g^{a_1} z_1, g^{a_2} z_2, g^{a_3} z_3), [g^{a_1} w_1, g^{a_2} w_2, g^{a_3} w_3]),$$

它有 3 个不动点 $q_1 = ((0, 0, 0), [1 : 0 : 0])$、$q_2 = ((0, 0, 0), [0 : 1 : 0])$和 $q_3 = ((0, 0, 0), [0 : 0 : 1])$，其权分别为 $\{a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1\}$、$\{a_2, a_1 - a_2, a_3 - a_2\}$ 和 $\{a_3, a_1 - a_3, a_2 - a_3\}$。令 $\widetilde{M}$ 表示吹起流形。那么，图3b 描述了 M 在 p的爆破附近的情形。

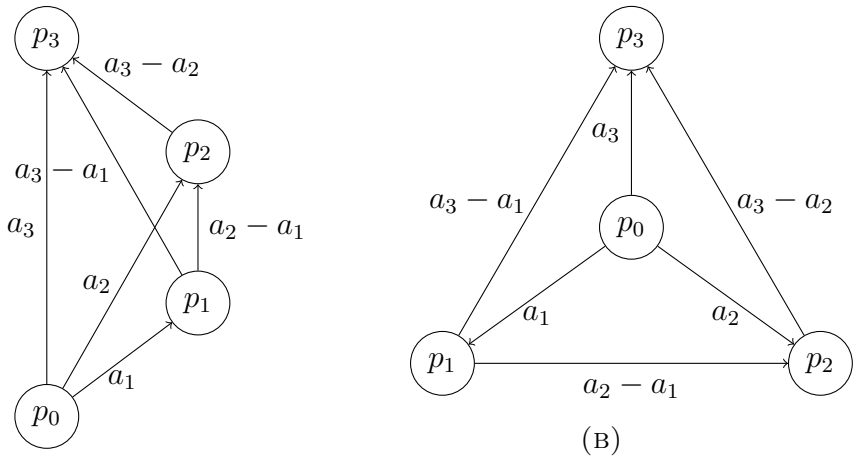


FIGURE 4. 描述标准 T^3-作用的图$\mathbb{CP}^3$

例 4.1. 令 a_1、 a_2 和 a_3 构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基。令 T^3 按如下方式作用于 $\mathbb{CP}^3$ ：

$$g \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [z_0 : g^{a_1} z_1 : g^{a_2} z_2 : g^{a_3} z_3]$$

对所有 $g \in T^3 \subset \mathbb{C}^3$ 以及所有 $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3$。那么，图4a和图4b都描述了这个线性标准 T^3-作用于 $\mathbb{CP}^3$ ，因为它们是仅顶点位置不同的同一张图。不动点 $p_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$ 的权为 $\{a_1, a_2, a_3\}$。令 $\mathbb{CP}^3$ 表示在 p_0处对 $\mathbb{CP}^3$ 进行吹起。如上所述，在吹起流形$\mathbb{CP}^3$ 中，不动点 p_0 被替换为三个不动点 p_4、 p_5和p_6，它们的权分别为 $\{a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1\}$、 $\{a_2, a_1 - a_2, a_3 - a_2\}$和$\{a_3, a_1 - a_3, a_2 - a_3\}$。因此，图5描述了 $\mathbb{CP}^3$。

如果我们分别用 $a_2 - a_1$、 $a_3 - a_2$和 a_1 替换为 a、 b和 c， 那么 T^3对 $\mathbb{CP}^3$ 的作用与示例 M_1（k）中$k = 1$ 的作用相同*3.1*，图 *5* 与图*1a* 中$k = 1$相同。

5. Hirzebruch 属

对于紧致酉流形，Hirzebruch χ_y 属、欧拉类、Todd 属和 L 属分别是幂级数 $\frac{x}{(1+ye^{-x(1+y)})1-e^{-x(1+y)}}$、 $1 + x$、 $\frac{x}{1-e^{-x}}$ 和 $\sqrt{x}$双曲正切 $\sqrt{x}$对应的属；后三个幂级数由第一个幂级数分别在 $y = -1$、 $y = 0$ 和 $y = 1$处取值得到。因此，Hirzebruch

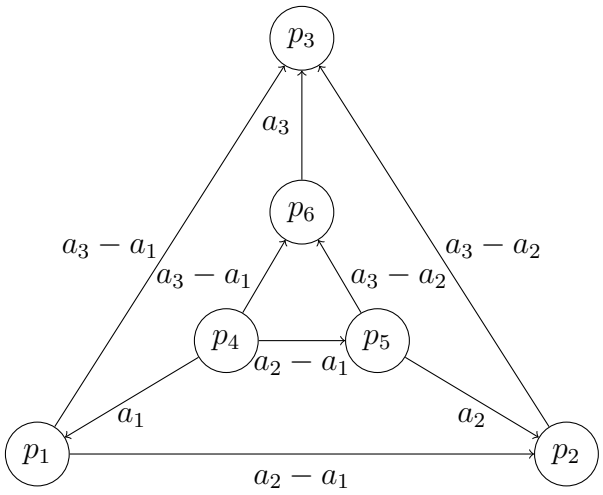


FIGURE 5

χ_y 属包含有关欧拉数、Todd 属和 L 属的信息。

设圆群 S^1 作用于一个酉流形上。对于一个不动连通分支 F, 我们用 $d(-,F)$（$d(+,F)$）表示 F 的法丛中负（正）权的个数。

定理 5.1 (Kosniowski 公式)。[HT, KY, Kos1] 设圆群作用于紧致酉流形 M上。则 Hirzebruch χ_y-属$\chi_y(M)$ 的 M 满足

$$\chi_y(M) = \sum_{F\subset M^{S^1}} (-y)^{d(-,F)} \cdot \chi_y(F) = \sum_{F\subset M^{S^1}} (-y)^{d(+,F)} \cdot \chi_y(F),$$

其中，求和遍及所有不动连通分支。

再次，由于任何近复流形都是酉流形，定理 5.1适用于任意紧致近复 S^1流形。下面的引理是 Kownioswki 公式的一个简单应用。

引理 5.2。 [J5] 设一个 k维环面 T^k 作用于一个 $2n$维紧致近复流形 M 上，且其不动点均为孤立点。设$\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i(M) \cdot (-y)^i$为 χ_y的 Hirzebruch -属 M。则有以下结论：

(1) $a_i(M) \geq 0$ 对于 $0 \leq i \leq n$。(2) 不动点总数为 $\sum_{i=0}^{n} a_i(M)$。(3) 对于 $0 \leq i \leq n$, $a_i(M) = a_{n-i}(M)$。

在 [J5], 第一作者使用 Kosniowski 公式证明，对于一个近复环面流形，其 Hirzebruch 属的系数均非零。

定理 5.3. [J5] 设 M 是一个 $2n$维近复环面流形。那么 $a_i(M) > 0$对于 $0 \le i \le n$，其中 $\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i(M) \cdot (-y)^i$ 是 χ_y 的 Hirzebruch 属 M。特别地， M 的 Todd 属为正。

对于配备环面作用的紧流形，其欧拉数等于其不动点集的欧拉数。

定理 5.4. [Kob] 设环面 T^k作用于紧流形 M。那么欧拉数 $\chi(M)$ 的 M 等于其各不动分支欧拉数之和。也就是说，

$$\chi(M) = \sum_{F \subset M^{T^k}} \chi(F).$$

为了证明定理 1.1，我们首先确定欧拉数为 6 的 6 维几乎复环面流形的 Hirzebruch χ_y属。

命题 5.5. 设 M 是一个欧拉数为6的 6 维几乎复环面流形。那么 M 恰有 6 个不动点，且 M 的 Hirzebruch χ_y- 属 $\chi_y(M)$ 不是 $\chi_y(M) = 1-2y+2y^2-y^3$，就是 $\chi_y(M) = 2 - y + y^2 - 2y^3$。

证明。由于不动点只有有限个，且一点的欧拉数为 1，由定理 5.4， M 恰有 6 个不动点。

令 $\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{3} a_i(M) \cdot (-y)^i$。由引理 5.2 和定理 5.3 可得 $a_0(M) + \cdots + a_3(M) = 6$， $a_0(M) = a_3(M) > 0$，以及$a_1(M) = a_2(M) > 0$。由此可知，要么 $a_0(M) = a_3(M) = 1$且$a_1(M) = a_2(M) = 2$，要么 $a_0(M) = a_3(M) = 2$且 $a_1(M) = a_2(M) = 1$.□

稍后，在第 8 节中，我们将证明实际上 $\chi_y(M) = 1 - 2y + 2y^2 - y^3$。结合以上结果，证明定理 1.1的一个重要步骤是证明：对于一个欧拉数为 6 的 6 维几乎复环面流形，4 维各向同性子流形至多包含 4 个不动点。

引理 5.6. 设 M 是一个欧拉数为6的6 维几乎复环面流形。设 p 是不动点，且 a、b、 c 是 p处的权。设 $S = \ker a \cap \ker b$，并设 F_0是包含 M^S的一个连通分支

p。那么 F_0 是一个四维几乎复环面子流形，且至多有4个不动点。

证明。根据命题 5.5， M 恰有 6 个不动点。由于 p 处的权构成 $\mathbb{Z}^3$的基，S 是 T^3的一个一维子环面，也就是说， S 是 T^3的一个子圆。由于 S 在 a 和 b 处的权中仅固定 p，因此 F_0 是四维的。二维环面 T^3/S 有效地作用于 F_0，且 p 是不动点。因此， F_0是一个几乎复环面子流形[1]。

反设 F_0 至少有 5 个不动点。T^3 在 M 上的作用限制后作用于 F_0。由于 T^3 在 F_0 上的作用至少有 5 个不动点，将引理 5.2 应用于 T^3 在 F_0 上的作用，可得 $a_0(F_0)$、 $a_1(F_0)$、 $a_2(F_0) \geq 0$、 $a_0(F_0)+a_1(F_0)+a_2(F_0) \geq 5$，以及 $a_0(F_0) = a_2(F_0)$，其中 $\chi_y(F_0) = a_0(F_0) - a_1(F_0) \cdot y + a_2(F_0) \cdot y^2$。特别地，以下情况至少有一种成立：

(1) $a_0(F_0) = a_2(F_0)$大于或等于 2。(2) $a_1(F_0)$大于或等于 3。

设 F 是集合 M^S 的任意一个不动分支。由于其不动点集为 $F \cap M^{T^3}$，T^3 在 F 上的作用具有孤立不动点。将引理 5.2 应用于 F 上的 T^3 作用，可得对于 $0 \leq i \leq \frac{1}{2}$，若 dim F，则 $a_i(F) \geq 0$；其中 $\chi_y(F) = \sum_{i=0}^{F\text{维数}\frac{1}{2}} a_i(F) \cdot (-y)^i$。

将定理 5.1 应用于 S 在 M 上的作用，可得

$$\chi_y(M) = \sum_{F \subset M^S} (-y)^{d(-,F)} \cdot \chi_y(F), \tag{5.1}$$

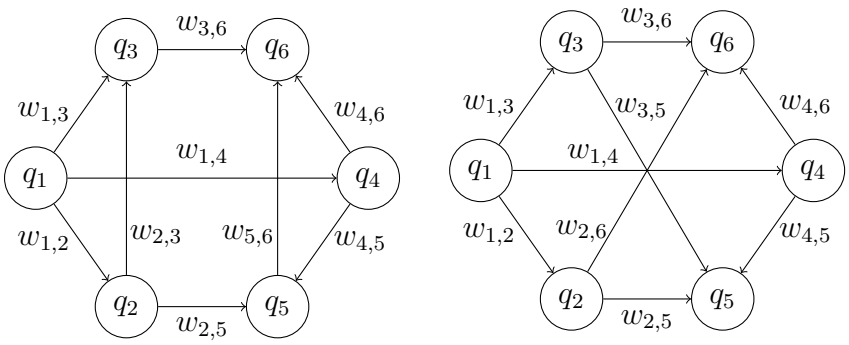
其中，对于每个不动分支 $F \subset M^S$， $d(-,F)$ 是 F 的法丛中负 S 权的数量。

由于 F_0 是 6 维流形 M 中的一个 4 维子流形，其法丛 NF_0 恰有一个权。因此，以下两种情况必居其一：(a) $d(-,F_0) = 0$，或 (b) $d(-,F_0) = 1$。

假设情形（1）成立，即 $a_0(F_0) = a_2(F_0) \geq 2$。假设 (a) $d(-,F_0) = 0$。由命题 5.5，M的 Hirzebruch χ_y-属要么为 (i) $\chi_y(M) = 1-2y+2y^2-y^3$，要么为 (ii) $\chi_y(M) = 2-y+y^2-2y^3$。情形 (i) 不成立，因为 $a_0(F_0) \geq 2$ 和 $d(-,F_0) = 0$ 根据方程（5.1）推出$a_0(M) \geq 2$；其他不动分支 F 对 $\chi_y(M)$ 常数项系数的贡献均为非负整数。类似地，情形 (ii) 不成立，因为 $a_2(F_0) \geq 2$ 和 $d(-,F_0) = 0$根据方程（5.1）推出 $a_2(M) \geq 2$。

接下来，假设 (b) $d(-,F_0) = 1$。我们不可能有 (i) $\chi_y(M) = 1 - 2y + 2y^2 - y^3$，因为 $a_2(F_0) \geq 2$ 和 $d(-,F_0) = 1$ 意味着

[1]根据定理 2.11， F_0 至少有 3 个不动点。



(A) (B)

FIGURE 6. 可能的图

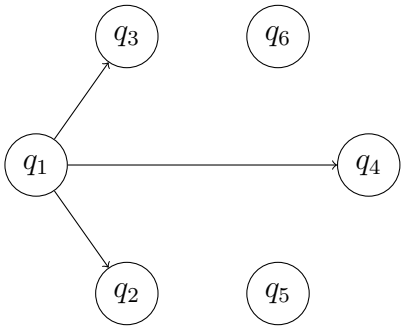


FIGURE 7

$a_3(M) \geq 2$，并且我们不可能有 (ii) $\chi_y(M) = 2 - y + y^2 - 2y^3$，因为$a_0(F_0) \geq 2$和 $d(-, F_0) = 1$意味着 $a_1(M) \geq 2$。

最后，情形（2）不可能成立；由方程（5.1），$a_1(F_0) \geq 3$可知，$a_1(M)$或 $a_2(M)$必须至少为 3，但 $\chi_y(M) = 1-2y+2y^2-y^3$或 $\chi_y(M) = 2 - y + y^2 - 2y^3$。
□

6. GRAPHS - DIMENSION 6 AND EULER NUMBER 6

我们确定了描述欧拉数为6的 6 维几乎复环面流形的可能图；存在两种可能的图类型。

命题 6.1。设 M 是一个欧拉数为6的 6 维近复环面流形。则图 *6* 所示的某个图描述了 M。

证明。 根据命题 5.5， M 恰好有6个不动点。我们将这些不动点标记为 q_1、 $\cdots$、 q_6。根据命题 2.6，存在一个多重图Γ描述 M ，且该图没有重边和自环。对于每个不动点 q_i ，我们赋予一个顶点，该顶点也记为 q_i。不妨通过重新标记顶点，假设对于每个 $i \in\{2,3,4\}$，在 q_1 和 q_i之间存在一条边，如图 7所示。

假设存在一条边 e ，从 q_i 指向 q_j ，其标记为 w。设 Γ' 是由 Γ通过反转边 e的方向，并将边 e 的标记 w 替换为其相反数 $-w$而得到的多重图。那么 Γ'也描述 M。因此，通过反转一条边的方向并将该边的标记替换为其相反数，我们可以假设：若存在一条从 q_i 指向 q_j的边，则 $i<j$（指标递增）。若存在一条, $_j$从 q_i指向 q_j的边，则设, $_j$为边$e_{i,\ j}$的标记。

我们有以下两种情形。
(A) q_2、 q_3和 q_4之间存在一条边。(B) q_2、 q_3 和 q_4之间不存在边。

假设情形 (A) 成立。不失一般性，通过重新标记 q_2、 q_3和 q_4，我们可以假设存在一条从 q_2 指向 q_3的边。接下来证明 q_2 和 q_4之间不存在边。为此，反设q_2 和 q_4之间存在一条边。由于 Γ 没有自环，也没有重边，因此与 q_5 相连的三条边必须分别连接到 q_3、 q_4和 q_6。但这样一来，q_6 必定有一个自环，矛盾。

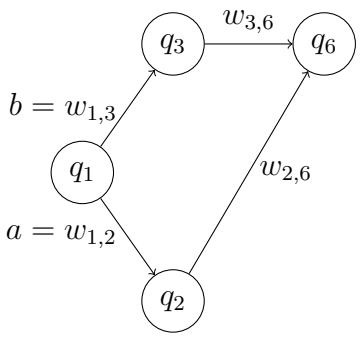
同样，由于 Γ 的对称性， q_3 与 q_4之间没有边。因此， p_4 与 p_5 之间必有一条边，且p_4 与 p_6之间也必有一条边。因此， q_2 剩下的那条边连接到 q_5 或q_6。不失一般性，假设q_2 与 q_5之间有一条边。若按要求补全多重图，则得到的多重图 Γ 如图6a所示。

假设情形 (B)成立。那么，对每个 $i \in\{2,3,4\}$ 以及每个 $j \in\{5,6\}$， q_i与 q_j之间必有一条边。得到的多重图Γ如图6b所示。□

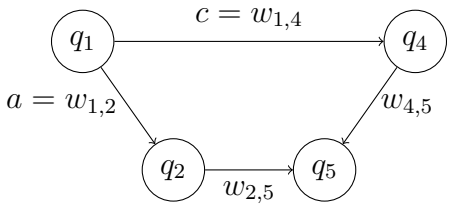
我们证明，图6b不能作为描述近复环面流形的多重图出现。

命题 6.2。图*6b* 不能描述近复环面流形。

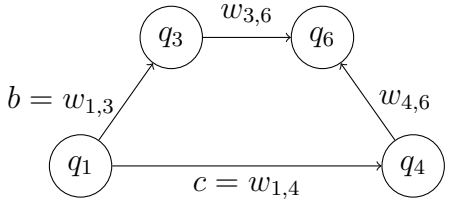
证明。 反设图6b 描述了一个几乎复环面流形 M；则 dim $M=6$，且有 6 个不动点。



(A) $\tilde{F}_1$



(B) $\tilde{F}_2$



(C) $\tilde{F}_3$

FIGURE 8

设 $w_{1,2} = a$，$w_{1,3} = b$ 和 $w_{1,4} = c$。设 $S_1 :=$ 核 $a \cap$ 核 b，并考虑包含 $\tilde{F}_1$ 的 $M^{\tilde{S}_1}$ 各向同性子流形 q_1。根据引理 5.6，F_1 是一个四维几乎复环面子流形M。

根据命题 2.4，图6b 的某个二价子多重图 $\Gamma_{\tilde{F}_1}$ 描述了 $\tilde{F}_1$ 上的 T^3-作用。由于存在一条从 q_1 到 q_2（从 q_1 到 q_3）的边，其标记为 a（b），并且对所有 $g \in S_1$ 都满足 $g^a = 1$（$g^b = 1$），命题 2.4 (2) 蕴含 $q_2 \in F_1$（$q_3 \in F_1$）。此外，由于 $\Gamma_{\tilde{F}_1}$ 是二价的，q_2（q_3）中的两条边必定属于 $\Gamma_{\tilde{F}_1}$。另一方面，根据引理 5.6，$\Gamma_{\tilde{F}_1}$ 至多包含 4 个顶点。因此，$\Gamma_{\tilde{F}_1}$ 不可能包含 q_4，且必定恰好包含 q_5 和 q_6 中的一个。

不失一般性，利用图 6b 的垂直对称性，我们可以假设 $\tilde{F}_1$ 包含 q_6。那么图 8a 描述了 $\tilde{F}_1$ 上的 T^3- 作用。将引理 2.10 应用于 $\tilde{F}_1$ 上满足 $w = a(w = b)$ 的 T^3-作用。由于 q_1 和 q_2（q_1 和 q_3）属于 $M^{\ker a}$（$M^{\ker b}$）的同一个连通分支，因此 $T_{q_1}\tilde{F}_1$ 中的 T^3-权 $\{a, b\}$ 与 $T_{q_2}\tilde{F}_1$ 中的 $\{-a, w_{2,6}\}$（$T_{q_1}F_1$ 中的 $\{a, b\}$ 与 $T_{q_3}F_1$ 中的 $\{-b, w_{3,6}\}$）模 a 相等（模 b 相等）。因此，$w_{2,6} = b + k_1 a$，其中 k_1 是某个整数（$w_{3,6} = a + k_2 b$，其中 k_2 是某个整数。）

其次，令 $\tilde{F}_2$ 为 M的4维分量 S_2 包含q_1，其中 $S_2 =$ 核 $a \cap$ 核 c。根据命题 2.4 和引理 5.6，某个

图6b的二价子多重图 $\Gamma_{\tilde{F}_2}$ 描述了 T^3 在 $\tilde{F}_2$ 上的作用，并且至多包含 4 个顶点。因此， $\Gamma_{\tilde{F}_2}$ 恰好包含 q_5 和 q_6 之一。假设 $\Gamma_{\tilde{F}_2}$ 包含 q_6。那么，$T_{q_6}F_2$ 中的权 $\{-w_{4,6}, -b-k_1a\}$ 是 a 和 c 的线性组合，这会导致矛盾，因为 $\{a,b,c\}$ 构成了 $\mathbb{Z}^3$ 的一个基。因此， $\tilde{F}_2$ 包含 q_1、 q_2、 q_4 和 q_5；见图 8b。将引理 2.10 应用于 $\tilde{F}_2$ 上具有 $w=c$ 的 T^3 作用，由于 q_1 和 q_4 属于 $M^{\ker c}$ 的同一个连通分支， $T_{q_1}F_2$ 中的 T^3-权 $\{a,c\}$ 与 $T_{q_4}F_2$ 中的 $\{-c, w_{4,5}\}$ 模 c 相等。因此，对于某个整数 k_3，有 $w_{4、5}=a+k_3c$。

第三，设 $\tilde{F}_3$ 为 $M^{\tilde{S}_3}$ 的一个 4维分量，其中包含q_1，且 $S_3=\ker b\cap\ker c$。根据命题 2.4 和引理 5.6，图 6b 的某个二价子多重图 $\Gamma_{\tilde{F}_3}$ 描述了 T^3 在 $\tilde{F}_3$ 上的作用，且至多包含 4 个顶点。因此， $\Gamma_{\tilde{F}_3}$ 恰好包含 q_5 和q_6中的一个。假设 F_3 包含 q_5。那么，$T_{q_5}F_3$ 中的权 $\{-w_{3,5}, -a-k_3c\}$是 b 和 c的线性组合，这将导致矛盾。因此， F_3 包含 q_6；见图 8c。于是， $T_{q_3}F_3$ 中的权$\{-b, a+k_2b\}$是 b和 c 的线性组合，这将导致矛盾。□

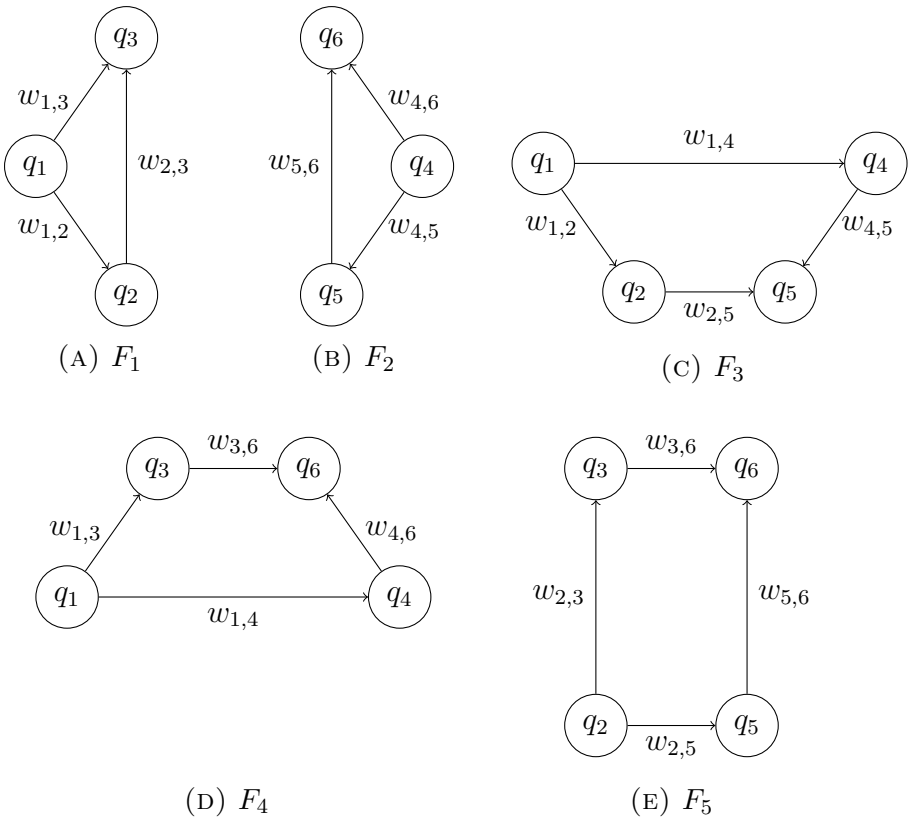
接下来，对于欧拉数为 6 的 6 维近复环面流形，我们研究四维几乎复环面子流形及其子多重图。

引理 6.3。 设 M 是由图 *6a*所描述的近复环面流形。那么存在四维几乎复环面子流形 F_1、 $\cdots$、 F_5 分别由图 *9a*、 $\cdots$、 *9e*所描述。

证明。 证明思路与命题 6.2类似。

令 F_1 为 $M^{\ker w_1}$,$_2$∩核 w_1,$_3$ 中包含 q_1 的 4 维连通分支。由命题 2.4，图 6a 中某个二价子多重图 Γ_{F_1} 描述了 T^3 在 F_1 上的作用。由于存在一条边从 q_1 到 q_2 ，其标记为 w_1,2, $q_2\in F_1$ ，类似地 $q_3\in F_1$。由引理 5.6， Γ_{F_1} 至多包含 4 个顶点。如果 Γ_{F_1} 包含 q_4、 q_5 和 q_6 中的一个，那么 Γ_{F_1} 必须至少包含 5 个顶点。因此，Γ_{F_1} 是图 9a。

其余情形均类似。若令 F_2 （F_3、 F_4 和 F_5）为 $M^{\ker w_4}$、$_5$∩ker w_4、$_6$ （$M^{\ker w_1}$、$_2$∩ker w_1、4、Mker w_1、$_3$∩ker w_1、4 和 Mker w_2、$_3$∩ker w_2、$_5$）中包含 q_4（q_1、 q_1 和 q_2）的 4维分量，则由命题 2.4 和引理 5.6 可知，图 9b （图 9c 、图 9d 和图 9e ）分别描述了 T^3 在 F_2 （F_3、 F_4 和 F_5）上的作用。



(A) F_1 (B) F_2 (C) F_3

(D) F_4 (E) F_5

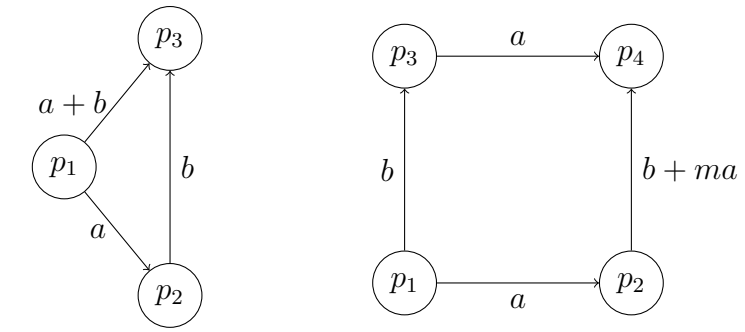
FIGURE 9

对于每个 $1 \leq i \leq 5$，将 T^3 中在 F_i 上作用平凡的子群商去后，可知 F_i 是一个 4 维几乎复环面流形。□

7. PROOF OF THEOREM 1.1

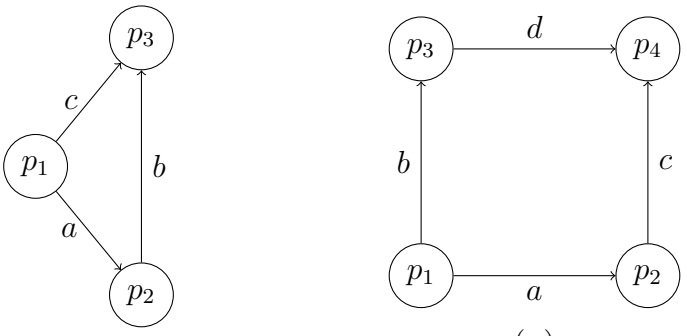
在本节中，我们证明定理 1.1。为此，我们首先确定不动点处的权：对于不动点至多有 4 个的 4 维几乎复环面流形；根据定理 2.11，这样的流形至少有 3 个不动点。

引理 7.1. 设 M 是一个 4 维近复环面流形。
（1）若有 3 个不动点，图 *10a* 描述了 M 对于某个 a 和b 所张成的 $\mathbb{Z}^2$。（2）若有 4 个不动点，图 *10b* 描述了 M 对于某个 a 和b 所张成的 $\mathbb{Z}^2$ 以及对于某个整数 m。



(A) 3不动点 (B) 4不动点

FIGURE 10



(A) (B)

FIGURE 11

证明。设 M 有 3 个不动点 p_1, p_2和 p_3。根据命题 2.6，图 11a 描述了 M 对于某个非零 a, b, $c \in \mathbb{Z}^2$。特别地, p_1, p_2和 p_3 的权分别为 $\{a, c\}$, $\{-a, b\}$和 $\{-b-c\}$。

由于对于所有 i, $\int_M$ 都是从 $H^i_{T^2}(M;\mathbb{Z})$ 到 $H^{i-4}(BT^2;\mathbb{Z})$ 的映射，因此等变上同调类 1 在映射 $\int_M$ 下的像为零，即,

$$\int_M 1 = 0.$$

根据定理2.9,

$$\int_M 1 = \sum_{p\in M^{T^2}} \frac{1}{e_{T^2}(N_pM)} = \sum_{p\in M^{T^2}} \frac{1}{e_{T^2}(T_pM)} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{-ab} + \frac{1}{(-b)(-c)}.$$

因此, $c = a + b$。

接下来，假设 M 有 4 个不动点 p_1、p_2、p_3 和 p_4。根据命题 2.6，图 11b 描述了某些非零 a、b、c、$d \in \mathbb{Z}^2$ 对应的 M。特别地，p_1、p_2、p_3 和 p_4 的权分别为 $\{a, b\}$、$\{-a, c\}$、$\{-b, d\}$ 和 $\{-c, -d\}$。

将定理 2.9 应用于等变上同调类 1，

$$0 = \int_M 1 = \sum_{p \in M^{T^2}} \frac{1}{e_{T^2}(N_p M)} = \sum_{p \in M^{T^2}} \frac{1}{e_{T^2}(T_p M)} =$$
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{-ac} + \frac{1}{-bd} + \frac{1}{(-c)(-d)} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$$

因此，$a = d$ 或 $b = c$。

假设 $a = d$。由于存在一条从 p_1 到 p_2、标记为 a的边，p_1 且 p_2属于同一个连通分支 F，该分支位于 $M^{\ker a}$中。将引理 2.10 应用于 T^2-作用在 F上的情形，取 $w = a$，则 $\{a, b\}$ 处的权p_1 与 $\{-a, c\}$ 处的权 p_2模 a相等。因此，$c = b + ma$对某个整数 m成立。

类似地，若 $b = c$，则由引理 2.10 可得 $a = b + mb$ 对某个整数 m 成立；在这种情况下，通过重新标记不动点和权，即可证明本引理。□

由引理 7.1，我们得到以下引理。

引理 7.2. 假设图 *6a* 描述了一个近复环面流形。则有以下结论。

(1) $w_{1,2} + w_{2,3} = w_{1,3}$. (2) $w_{4,5} + w_{5,6} = w_{4,6}$. (3) $w_{1,2} = w_{4,5}$ 和 $w_{1,4} \equiv w_{2,5}$ 模 $w_{1,2}$，或 $w_{1,4} = w_{2,5}$ 和 $w_{1,2} \equiv w_{4,5}$ 模 $w_{1,4}$. (4) $w_{1,3} = w_{4,6}$ 和 $w_{1,4} \equiv w_{3,6}$ 模 $w_{1,3}$，或 $w_{1,4} = w_{3,6}$ 和 $w_{1,3} \equiv w_{4,6}$ 模 $w_{1,4}$. (5) $w_{2,3} = w_{5,6}$ 和 $w_{2,5} \equiv w_{3,6}$ 模 $w_{2,3}$，或 $w_{2,5} = w_{3,6}$ 和 $w_{2,3} \equiv w_{5,6}$ 模 $w_{2,5}$.

证明。由引理 6.3，图 9a 描述了 4 维几乎复环面流形 F_1。因此，由引理 7.1，$w_{1,2} + w_{2,3} = w_{1,3}$。

类似地，由于图 9b、$\cdots$、9e 分别描述了 4 维几乎复环面流形 F_2、$\cdots$、F_5，其余所有情形均可由引理 7.1推出。□

综上所述，我们已准备好证明主要结果——定理1.1。

定理 *1.1* 的证明。根据命题 6.1 和命题6.2，图6a 描述了 M。根据引理 6.3，存在由图9a、 $\cdots$、9e分别描述的 4 维近复环面子流形 F_1、 $\cdots$、 F_5。为方便起见，令 $a := w_{1,2}$、 $b := w_{2,3}$以及 $c := w_{1,4}$。根据引理 7.2 (1)，$w_{1,3} = a + b$。不动点 q_1 的权$\{a, a+b, c\}$ 张成 $\mathbb{Z}^3$，因此 a、 b、 c 张成 $\mathbb{Z}^3$。

由引理 7.2 (3)，我们得到以下两种情形。

(A) $w_{4,5} = a$ 和 $w_{2,5} = c + ka$，其中 k为某个整数。

(B) $w_{2,5} = c$ 和 $w_{4,5} = a + kc$，其中 k为某个整数。

假设情形 (A) 成立。由引理 7.2 (4)，我们得到以下两种情形。

(i) $w_{4,6} = a + b$ 和 $w_{3,6} = c + l(a + b)$，其中 l为某个整数。(ii) $w_{3,6} = c$ 和 $w_{4,6} = a + b + lc$，其中 l为某个整数。

假设情形 (A-i) 成立。由引理 7.2 (2) 可得$w_{5,6} = b$。由于 $w_{2,3} = w_{5,6} = b$，由引理 7.2 (5) 可得$c + ka = w_{2,5} \equiv w_{3,6} = c + l(a + b)$ 模 $w_{2,3} = b$。由于 a, b, c构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基，因此我们有 $l = k$，且图 1a 描述了 M。

假设情形 (A-ii) 成立。由引理 7.2 (2) 可得$w_{5,6} = b + lc$。由引理 7.2 (5)，(A-ii-1) $b = w_{2,3} = w_{5,6} = b + lc$ 和$c + ka = w_{2,5} \equiv w_{3,6} = c$ 模 $w_{2,3} = b$，或 (A-ii-2) $c + ka = w_{2,5} = w_{3,6} = c$ 和 $b = w_{2,3} \equiv w_{5,6} = b + lc$ 模 $w_{2,5} = c + ka$。由于 a, b, c构成 $\mathbb{Z}^3$的一组基，在前一种情形 (A-ii-1) 下，我们有 $l = 0$ 和 $k = 0$，且图 1a 中的 $k = 0$ 和图 1b 中的 $k = l = 0$ 都描述M；在后一种情形 (A-ii-2) 下，我们有 $k = 0$，且图 1b 中的$k = 0$ 描述 M。

假设情形 (B) 成立。由引理 7.2 (5)，我们得到以下两种情形。

(i) $w_{5,\ 6} = b$ 且 $w_{3,\ 6} = c + lb$，其中 l 是某个整数。

(ii) $w_{3,\ 6} = c$ 且 $w_{5,\ 6} = b + lc$，其中 l 是某个整数。

假设情形（B-i）成立。由引理 7.2 (2) 可得$w_{4,6} = a + b + kc$。由引理 7.2 (4)，(B-i-1) $a + b = w_{1,3} = w_{4,6} = a + b + kc$ 且 $c = w_{1,4} \equiv w_{3,6} = c + lb$ 模 $w_{1,3} = a + b$，或者 (B-i-2) $c = w_{1,4} = w_{3,6} = c + lb$ 且 $a + b = w_{1,3} \equiv w_{4,6} = a + b + kc$模 $w_{1,4} = c$。由于 a, b, c 张成 $\mathbb{Z}^3$，在前一种情形 (B-i-1) 中，我们有 $k = l = 0$，且图 1a（对应 $k = 0$）和图 1b（对应$k = l = 0$）均描述 M；在后一种情形 (B-i-2) 中，我们有 $l = 0$，且图 1b（对应 $l = 0$）描述 M。

假设情形（B-ii）成立。由引理7.2 (2)可知$w_{4,\ 6} = a + b + (k + l)c$。在这种情况下，图1b 描述了 M。□

8. 不变量

本节中，我们证明定理1.5；我们确定欧拉数6的6 维几乎复环面流形的不变量。

定理 1.5 的证明。由命题 5.5， M 有 6 个不动点。由于 $\dim M = 6$, 对于不动点 p，在 p 处的第三等变陈类 $c_3(M)$ 等于 p处法空间的等变欧拉类，而后者是 p处各权的乘积。也就是说， $c_3(M)(p) = e_{T^3}(Np) = \prod_{i=1}^{3} w_{p,i}$。因此，由定理 2.9，陈数$\int_M c_3$ 为

$$\int_M c_3 = \sum_{p\in M^{T^3}} \frac{c_3(M)(p)}{e_{T^3}(Np)} = \sum_{p\in M^{T^3}} \frac{\prod_{i=1}^{3} w_{p,i}}{\prod_{i=1}^{3} w_{p,i}} = \sum_{p\in M^{T^3}} 1 = 6.$$

首先，假设图1a 描述了 M。不动点 p_1、 $\cdots$、 p_6 处的权分别为 $\{-a, b, c + ka\}$、 $\{a, a + b, c\}$、 $\{-b, -a - b, c + k(a + b)\}$、 $\{-c - k(a + b)\ -a - b$、 $-b\}$、 $\{-c, a + b, a\}$、 $\{-c - ka, b, -a\}$。

对于非负整数 i 和实数 x_1、 x_2、 $\cdots$、 x_n， 令 $\sigma_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示关于 x_j 的第 i 个初等对称多项式。例如， $\sigma_0(x_1, \cdots, x_n) = 1$, $\sigma_1(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$， 且 $\sigma_2(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j$。

根据定理 2.9,

$$\begin{aligned}
\int_M c_1c_2 &= \sum_{p\in M^{T^3}} \frac{\sigma_1(w_{p,1}, w_{p,2}, w_{p,3})\sigma_2(w_{p,1}, w_{p,2}, w_{p,3})}{\prod_{i=1}^{3} w_{p,i}} \\
&= -\frac{\{(k-1)a + b + c\}\{-ka^2 + (k-1)ab - ac + bc\}}{ab(c + ka)} \\
&\quad + \frac{(2a + b + c)(a^2 + ab + 2ac + bc)}{a(a + b)c} \\
&\quad - \frac{\{(k-1)a + (k-2)b + c\}\{ka^2 + (3k-1)ab + ac + (2k-1)b^2 + 2bc\}}{b(a + b)\{c + k(a + b)\}} \\
&\quad + \frac{\{(k+1)a + (k+2)b + c\}\{ka^2 + (3k+1)ab + ac + (2k+1)b^2 + 2bc\}}{\{c + k(a + b)\}(a + b)b} \\
&\quad - \frac{(2a + b - c)(a^2 + ab - 2ac - bc)}{c(a + b)a} \\
&\quad + \frac{\{(-k-1)a + b - c\}\{ka^2 + (-k-1)ab + ac - bc\}}{(c + ka)ba}.
\end{aligned}$$

合并分母相同的项后，等于

$$\frac{2(-a^2+3ab-b^2)(ka+c)}{ab(c+ka)}+\frac{2(5a^2+5ab+b^2)c}{a(a+b)c}$$
$$+\frac{2(a^2+5ab+5b^2)(ka+kb+c)}{(a+b)b\{c+k(a+b)\}}=\frac{2}{ab(a+b)}\{(-a^2+3ab-b^2)\times(a+$$
$$b)+(5a^2+5ab+b^2)\times b+(a^2+5ab+5b^2)\times a\}$$
$$=\frac{2}{ab(a+b)}\times 12ab(a+b)=24.$$

因此，$\int_M c_1c_2=24$。

由于 $\int_M T_0^3=\int_M -T_3^3=\int_M \frac{c_1c_2}{24}=1$ 和 $\int_M T_1^3=\int_M -T_2^3=\int_M \frac{c_1c_2-12c_3}{24}=-2$，$M$ 的 Hirzebruch χ_y-属为

$$\chi_y(M)=\sum_{i=0}^{3}\left(\int_M T_i^3\right)y^i=1-2y+2y^2-y^3.$$

接下来我们计算 $\int_M c_1^3$。根据定理 2.9，

$$\int_M c_1^3=\sum_{p\in M^{T^3}}\frac{\sigma_1(w_{p,1},w_{p,2},w_{p,3})^3}{\prod_{i=1}^3 w_{p,i}}$$
$$=-\frac{\{(k-1)a+b+c\}^3}{ab(c+ka)}+\frac{(2a+b+c)^3}{a(a+b)c}+\frac{\{(k-1)a+(k-2)b+c\}^3}{b(a+b)\{c+k(a+b)\}}-$$
$$\frac{\{(-k-1)a+(-k-2)b-c\}^3}{\{c+k(a+b)\}(a+b)b}-\frac{(2a+b-c)^3}{c(a+b)a}+\frac{\{(-k-1)a+b-c\}^3}{(c+ka)ba}.$$

将分母相同的项合并后，得到

$$\frac{-2\{(k^2+3)a^2-6ab+2kac+3b^2+c^2\}}{ab}+\frac{2(12a^2+12ab+3b^2+c^2)}{a(a+b)}$$
$$+\frac{2\{(k^2+3)a^2+(2k^2+12)ab+2kac+(k^2+12)b^2+2kbc+c^2\}}{b(a+b)}$$
$$=\frac{2}{ab(a+b)}\times[-\{(k^2+3)a^2-6ab+2kac+3b^2+c^2\}\times(a+b)$$
$$+(12a^2+12ab+3b^2+c^2)\times b+\{(k^2+3)a^2+(2k^2+12)ab+2kac+$$
$$(k^2+12)b^2+2kbc+c^2\}\times a]$$
$$=\frac{2}{ab(a+b)}\times(k^2+27)ab(a+b)=2(k^2+27).$$

其次，假设图 1b 描述了 M。不动点 p_1、$\cdots$、p_6 处的权分别为 $\{-a,b,c\}$、$\{a,a+b,c\}$、$\{-b,-a-b,c\}$、$\{-c,-a-b-(k+l)c,-b-lc\}$、$\{-c,a+b+(k+l)c,a+kc\}$、$\{-c,b+lc,-a-kc\}$。我们将分别用 A、B 和 C 替换 $a+kc$、$b+lc$ 和 $-c$。那么，后三个不动点处的权

为 $\{C,-A-B,-B\}$, $\{C,A+B,A\}$, $\{C,B,-A\}$, 它们与前面三个不动点的形式相同。根据定理 2.9,

$$\int_M c_1c_2 = \sum_{p\in M^{T^3}} \frac{\sigma_1(w_{p,1},w_{p,2},w_{p,3})\sigma_2(w_{p,1},w_{p,2},w_{p,3})}{\prod_{i=1}^3 w_{p,i}}$$
$$= \frac{(-a+b+c)(-ab-ac+bc)}{-abc} + \frac{(2a+b+c)(a^2+ab+ac+bc)}{a(a+b)c} +$$
$$\frac{(-a-2b+c)(ab-ac+b^2-2bc)}{b(a+b)c}$$
$$+\frac{(-A-2B+C)(AB-AC+B^2-2BC)}{B(A+B)C}$$
$$+\frac{(2A+B+C)(A^2+AB+AC+BC)}{A(A+B)C}$$
$$+\frac{(-A+B+C)(-AB-AC+BC)}{-ABC}.$$

计算前三项，得到

$$\frac{1}{ab(a+b)c}\times\{-(-a+b+c)(-ab-ac+bc)\times(a+b)+(2a+b+$$
$$c)(a^2+ab+ac+bc)\times b+(-a-2b+c)(ab-ac+b^2-2bc)\times a\}$$
$$=\frac{1}{ab(a+b)c}\times 12abc(a+b)=12.$$

因此，后三项之和也为 12。因此，$\int_M c_1c_2 = 24$。与第一种情况一样，$\int_M T_0^3 = \int_M -T_3^3 = \int_M \frac{c_1c_2}{24} = 1$和$\int_M T_1^3 = \int_M -T_2^3 = \int_M \frac{c_1c_2-12c_3}{24} = -2$，所以 M 的 Hirzebruch χ_y-属为

$$\chi_y(M) = \sum_{i=0}^{3}\left(\int_M T_i^3\right)y^i = 1-2y+2y^2-y^3.$$

我们计算$\int_M c_1^3$。根据定理2.9,

$$\int_M c_1^3 = \sum_{p\in M^{T^3}} \frac{\sigma_1(w_{p,1},w_{p,2},w_{p,3})^3}{\prod_{i=1}^3 w_{p,i}}$$
$$= \frac{(-a+b+c)^3}{-abc} + \frac{(2a+b+c)^3}{a(a+b)c} + \frac{(-a-2b+c)^3}{b(a+b)c} +$$
$$\frac{(-A-2B+C)^3}{B(A+B)C} + \frac{(2A+B+C)^3}{A(A+B)C} + \frac{(-A+B+C)^3}{-ABC}.$$

计算前三项，得到

$$\frac{1}{abc(a+b)}\times\{-(-a+b+c)^3\times(a+b)+(2a+b+c)^3\times b+(-a-2b+c)^3\times a\}$$
$$=\frac{1}{abc(a+b)}\times 27abc(a+b)=27.$$

因此，后三项的和也是 27。所以，$\int_M c_1^3$ =54。□

References

[AB] M. Atiyah 和 R. Bott：动量映射与等变上同调。Topology 23 (1984), 1-28.[A] K. Ahara：具有 $\chi(M)=4$ 的 6 维近复 S^1流形。东京大学理学部纪要 IA 数学 38 (1991), no 1, 47-72.[D] A. Darby：等变复配边中的环面流形。Topology Appl. 189 (2015), 31-64.[GS] L. Godinho 和 S. Sabatini：用于分类具有孤立不动点的哈密顿圆作用的新工具。Foundations of Computational Mathematics, 14 (2014), Issue 4, 791-860.[HT] A. Hattori 和 H. Taniguchi：光滑 S^1 作用与配边。J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 701-731.[H] A. Hattori：酉流形上的 S^1 作用与拟丰线丛，东京大学理学部纪要 IA 数学 31 (1985), 433-486.[JT] D. Jang 和 S. Tolman：具有最小不动点集的八维流形上的哈密顿圆作用。Transformation Groups 22 (2017), 353-359.[J1] D. Jang：恰有三个平衡点的辛周期流。Ergodic Theory and Dynamical Systems 34 (2014), 1930-1963.[J2] D. Jang：具有孤立不动点的近复流形上的圆群作用。Journal of Geometry and Physics, 119 (2017), 187-192.[J3] D. Jang：具有离散不动点集的四维近复流形上的圆群作用。(2019) arXiv:arXiv:1912.04128.[J4] D. Jang：具有 4 个不动点的近复流形上的圆群作用。Math. Z. 294 (2020), 287-319.[J5] D. Jang：几乎复环面流形——图与 Hirzebruch 属。Int. Math. Res. Notices (2022), rnac237, https://doi.org/10.1093/imrn/rnac237.[J6] D. Jang：几乎复环面流形——图、Hirzebruch 属与 Petrie 型问题。(2022), arXiv:2201.00352.[Kob] S. Kobayashi：等距变换的不动点。Nagoya Math. J. 13 (1958), 63-68.[KY] C. Kosniowski 和 M. Yahia：圆群作用的酉配边。Proc. Edinburgh Math. Soc. 26 (1983), 97-105.[Kos1] C. Kosniowski：全纯 Lefschetz 公式的应用。Bull. Lond. Math. Soc., 2 (1970), 43-48.[Kos2] C. Kosniowski：具有简单孤立零点的全纯向量场。Math. Ann. 208 (1974), 171-173.[L1] H. Li：具有最少孤立不动点的哈密顿圆作用。(2014) arXiv:1407.1948.

[L2] H. Li：具有近乎最少孤立不动点的哈密顿圆作用。《几何与物理杂志》163 (2021) 104141.[M] M. Masuda：酉环面流形、多扇与等变指标。东北数学杂志 51 (1999), 237-265.Department of Mathematics,
Pusan National University, Pusan, Ko-rea电子邮箱:
donghoonjang@pusan.ac.kr, pjy1147@pusan.ac.kr