arXiv:2303.11636v1 [math.LO] 21 Mar 2023

σ-超可加测度的基础——关于推进 Kalina 测度的一则札记——

Kiri Sakahara* Takashi Sato†

摘要

本文尝试改进最初由 Martin Kalina 在替代集合论框架下提出的测度构造方法。通过引入一个由有理数的戴德金分割扩展而成、包含若干特殊分割的割系统，本文证明可以得到一种测度：它与 Kalina 的测度一样，具有单调不减、非负且"取决于测量方式"的性质，同时还具有 σ-超可加性。

1 引言

在替代集合论（简称 AST）中发展测度理论的诸多尝试里，Kalina 和 Zlatoˇs 研究的系列成果 [14], 尤为重要 [2, 3, 4, 5, 6] ；其中前两篇仅由 Kalina 独自撰写。这些成果不仅在特定条件下提供了与传统测度论一致的框架；Raˇskoviˊc [7] 也独立证实，可以构造出与 Loeb 的框架相一致的测度；而且还使 Kalina [2, 3], 能够以某种不太确定的依据为类赋予测度，例如可数类 FN 的大小。

更形象地说，我们不妨设想把 1m 长的线段一次又一次地拼接起来。经过可数次重复后，整条线可能会变得长得无法测量，而且由于拼接的线段数量不确定，其长度也无法具体计算。不过，我们可以合理推断，拼接 1m 长线段所得的长度是拼接 2m 长线段所得长度的一半，因此，拼接 1m 长线段所得长度相对于拼接 2m 长线段所得长度的测度必定为 $1\ 2$。Kalina [2, 3] 构建了一套框架，能够以恰当的方式精确测量这类长度。

然而，尽管考虑得十分周详，仍有一些方面尚未得到充分探究。一个例子可以通过相反的问题来说明。反过来，设想将一条 1m 长的线段反复对半切割。经过可数次重复后，得到的线段必定会短到难以辨认，但它们也必须遵循某种算术运算规律。然而，Kalina 并未进一步深入探讨这一问题。

为了以令人信服的方式完成这项研究，本文引入了有理数割，它们构成了有理数的扩展系统。它们不仅包括表示有理数的割，还包括

*日本神奈川县横滨国立大学和神奈川大学。
†日本东京东洋大学。

一些特殊的割，即所谓的加性割，它们满足性质 $A+A=A$。其中最重要的一个是 $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$ ，它表示一个不可辨识的小数。无论将其相加多少次，只要次数有限，它始终保持不变。然而，在可数次相加之后，结果会跳变为从 $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$ 到 $Q\langle\frac{FN}{1}\rangle$ 的任意割，具体取决于其逼近方式。这一关键性质被称为 σ-超可加性，它不仅能够解决该问题，还能够测度那些与维塔利集或由巴拿赫-塔斯基定理 [1]得到的集合具有相似性质的类。

此外，本文将散见于各篇论文中有关 Kalina 框架的必要定义、定理和陈述汇集在一起，并作了进一步阐述，以便能够更明确地测度特定的类。文中还提供了一些例子。

2 数系

让我们从按照 Vopˇenka[14]构造一个数系开始。有理数集的自然数 N 类定义如下:

$$N \;=\; \left\{ x \;;\; \begin{array}{c} (\forall y \in x)\,(y \subseteq x) \\ \wedge\,(\forall y,z \in x)\,(y \in z \vee y = z \vee z \in y) \end{array} \right\},$$

而有限自然数类 FN 由可用有限集表示的数构成

$$FN \;=\; \{x \in N \;;\; Fin(x)\}$$

其中 Fin(x) 表示 x 的每个子类都是一个集合。所有整数Z 的类以及所有有理数的类分别定义如下:

$$Z \;=\; N \cup \{-a;\, a \in N \wedge a \neq 0\} \qquad \text{and} \qquad Q \;=\; \left\{ \frac{x}{y} \;;\; x,\, y \in Z \wedge y \neq 0 \right\}.$$

BQ $\subseteq Q$ 表示有界有理数类，FQ $\subseteq BQ$ 表示有限有理数类，即:

$$\begin{aligned} &BQ = \{x \in Q \;;\; (\exists i \in FN)\,(|x| \leq i)\} \text{ and} \\ &FQ \;=\; \left\{ q \in Q \;;\; (\exists x,y \in FN) \left(q = \frac{x}{y} \vee q = -\frac{x}{y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

在 AST 中，实数被定义为有理数的一个等价类。采用这种构造方式的原因在于，人类无法区分两个彼此非常接近的有理数。不可辨识等价关系 $\doteq$ 在全体有理数构成的类 Q 上体现了这一思想。不可辨识等价关系 $\doteq$ 的定义如下:

$$p \doteq q \quad \equiv \quad \begin{pmatrix} (\exists k)\,(\forall i > 0)\,\left(|p| < k \wedge |p-q| < \frac{1}{i}\right) \\ \vee\,(\forall k)\,((p > k \wedge q > k) \vee (p < -k \wedge q < -k)) \end{pmatrix}$$

其中，字母 i、j、k 表示有限自然数，即为方便记号，以下记作 i、j、$k \in$ FN。对于每个 $q \in Q$，记号 mon（q） $= \{s \in Q;\;\; s \doteq q\}$ 称为 q 的单子，表示所有与之

无法区分的有理数构成的类。每个实数 a 都由某个有理数 q 的单子 mon（q）表示。

所有实数构成的类 R 定义如下：

$$R \equiv \{\mathrm{mon}\,(x)\ ;\ x \in BQ\} = BQ/\doteq$$

两个极限情形记为：

$$\infty = \{q \in Q\,;\,(\forall i)\,(q > i)\} \quad \text{and} \quad -\infty = \{q \in Q\,;\,(\forall i)\,(q < -i)\}.$$

实数的有限算术运算与通常情况相同。然而，正如我们将在本文后面看到的，实数的可数和无法被唯一确定。

3 博雷尔类

所有博雷尔类构成的系统记为 $\mathscr{B}$，它是包含所有集合论可定义类的最小 σ-环[1]，而 $\mathscr{B}_s$ 表示所有博雷尔半集构成的系统。更准确地说，博雷尔类归纳定义如下：

(1) X 是一个 σ_0-类，当且仅当 X 是一个 π_0-类，当且仅当 X 是一个集合论可定义类。(2) 若 $a \in \mathrm{FN}$，则 X 是一个 σ_a-类（π_a-类），当且仅当存在一个序列 $(X_i)_{i\in FN}$，使得每个 X_i 都是一个 $\pi_{<a}$-类（$\sigma_{<a}$-类），它表示某个 $b < a$ 的 π_b-类（σ_b-类），且 $X = \cup_{i\in FN} X_i$ ($\cap_{i\in FN} X_i$)。(3) 若 X 既是一个 σ_a-类，也是一个 π_a-类，则 X 是一个 δ_a-类。(4) 最后，若对于某个 $a \in \mathrm{FN}$，X 是一个 σ_a-类或 π_a-类，则 X 是一个博雷尔类。

$\mathscr{B}$ 严格大于 V，因为它包含真半集，例如 FN，尤其还包含 V 本身。$\mathscr{B}$ 的元素称为博雷尔类。当 $B \in \mathscr{B}$是一个半集时，它称为博雷尔半集。虽然 $\mathscr{B}$ 也构成一个 σ-域，因为它将 V 作为一个完整的类包含在内，但 $\mathscr{B}_s$ 并非如此。

尽管博雷尔类被定义为某些 $n \in \mathrm{FN}$ 的 $\sigma_{<n}$/$\pi_{<n}$-类的可数交/并，但它们也可以构造为 δ_2-类。下一个定理将证实这一点。为方便描述此类序列，令 $\cup\cap X_i$ 和 $\cap\cup X_i$ 分别表示

$$\bigcup_{i\in FN}\bigcap_{j\geq i} X_j \quad \text{and} \quad \bigcap_{i\in FN}\bigcup_{j\geq i} X_j$$

给定类序列（X_i）$_{i\in FN}$所对应的

定理 1. 对于每个博雷尔类 $X \in \mathscr{B}$，都存在一个序列（X_i）$_{i\in FN}$，其中各类在集合论意义下可定义，并满足 $\cap\cup X_i = \cup\cap X_i = X$。

证明. 设 $X \in \mathscr{B}$ 为一个 π_n-类，其中 $n \geq 3$；为方便记号，令（X（$n-1$）$_i$）$_{i\in FN}$ 表示 $X = X$（n）的一个递减生成序列。为简洁起见，该序列由σ_{n-1}-类构成。另令（X（$n-2$）$_i$；ℓ_1）$_{i\in FN}$ 表示对每个 $\ell_1 \in \mathrm{FN}$，X（$n-1$）$_{\ell_1}$的一个递升生成序列，其中各项由 π_{n-2}-类构成。

同样，令 $\big(X(n-x)_i\,;\ \ell_1,\ ...,\ \ell_{x-1}\big)_{i\in FN}$ 表示 $X(n-x+1)_{\ell_{x-1}}\,;\ \ell_1,\ ...,\ \ell_{x-2}$ 的一个递降生成序列：若 x 为奇数，则该序列由 σ_{n-x}-类组成；否则，它是由 π_{n-x}-类组成的递升生成序列。

[1]若类系 $\mathscr{M}$ 对类论差和可数并封闭，但不要求包含整个类，则称其为 σ-环；而 σ-域则要求包含整个类。

将由集合论可定义类组成的序列 $(X_i)_{i\in FN}$ 定义为 $X_i = X(0)_{\ell_n;\ i,\ \ell_2,\ ...,\ \ell_{n-1}}$ 和 $\ell_2, \ldots, \ell_n \in \mathbf{FN}$，使其满足对每个 $k \in \{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1\}$ 都成立的以下包含关系

$$\begin{aligned} X(n) &\subseteq X(n-2k-2)_{\ell_{2k+2};\, i,\ell_2,\ldots,\ell_{2k+1}} \\ &\subseteq X(n-2k-3)_{\ell_{2k+3};\, i,\ell_2,\ldots,\ell_{2k+2}} \subseteq X(n-1)_i. \end{aligned}$$

于是，满足

$$X(n) \subseteq X_i \subseteq X(n-1)_i \quad \text{for all } i \in FN.$$

由于 $X(n-1)_j \subseteq X(n-1)_i$ 对所有 $j \geq i$ 均成立，因此满足以下包含关系：

$$X(n) \subseteq \cup_{j\geq i} X_j \subseteq X(n-1)_i \quad \text{for all } i \in FN.$$

因此，方程 $\cap\cup X_i = X(n)$ 成立。

用同样的论证，也满足以下包含关系：

$$X(n) \subseteq \cap_{j\geq i} X_j \subseteq \cap_{j\geq i} X(n-1)_j \quad \text{for all } i \in FN.$$

由于 $\cap_{j\geq i} X(n-1)_j = X(n)$ 对所有 $i \in \mathbf{FN}$ 均成立，方程 $\cup\cap X_i = X(n)$ 成立。

接下来，设 $X \in \mathscr{B}$ 为一个 σ_n-类，其中 $n \geq 3$，且 $\left(X(n-x)_{i;\ \ell_1,\ ...,\ \ell_{x-1}}\right)_{i\in FN}$ 表示 $X(n-x+1)_{\ell_{x-1};\ \ell_1,\ ...,\ \ell_{x-2}}$ 的一个递升生成序列；若 x 为奇数，该序列由 π_{n-x}-类组成，否则则为由 σ_{n-x}-类组成的递减生成序列。

定义一个集合论可定义类的序列 $(X_i)_{i\in FN}$，使其满足 $X_i = X(0)_{\ell_n;\ i,\ \ell_2,\ ...,\ \ell_{n-1}}$ 其中 ℓ_2、...、$\ell_n \in \mathbf{FN}$ 的取值应满足以下包含关系，对每个 $k \in \{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1\}$ 均成立

$$\begin{aligned} X(n-1)_i &\subseteq X(n-2k-3)_{\ell_{2k+3};\, i,\ell_2,\ldots,\ell_{2k+2}} \\ &\subseteq X(n-2k-2)_{\ell_{2k+2};\, i,\ell_2,\ldots,\ell_{2k+1}} \subseteq X(n). \end{aligned}$$

于是，满足

$$X(n-1)_i \subseteq X_i \subseteq X(n) \quad \text{for all } i \in FN.$$

由于对所有 $i \leq j$，$X(n-1)_i \subseteq X(n-1)_j$，因此满足以下包含关系：

$$X(n-1)_i \subseteq \cap_{j\geq i} X_j \subseteq X(n) \quad \text{for all } i \in FN.$$

因此，方程 $\cup\cap X_i = X(n)$ 成立。

用同样的论证，也满足以下包含关系：

$$\cup_{j\geq i} X(n-1)_j \subseteq \cup_{j\geq i} X_j \subseteq X(n) \quad \text{for all } i \in FN.$$

由于对所有 $i \in \mathbf{FN}$，$\cup_{j\geq i} X(n-1)_j = X(n)$，因此 $\cap\cup X_i = X(n)$ 成立。 □

满足$\cap\cup X_i = \cup\cap X_i = X$ 的集合论可定义类序列 $(X_i)_{i\in FN}$，对于博雷尔类 $X \in \mathscr{B}$ 而言，称为 X的博雷尔生成序列。博雷尔生成序列关于类运算具有易于处理的性质。下一个定理表明，若干博雷尔类的生成序列的并确实生成它们的并。

定理 2. 对于博雷尔类 X、$Y \in \mathscr{B}$ 的每一对博雷尔生成序列 $(X_i)_{i\in FN}$ 和 $(Y_i)_{i\in FN}$，序列 $(X_i \cup Y_i)_{i\in FN}$ 也生成 $X \cup Y$。

证明. 假设存在满足 $a \notin \cup\cap(X_i \cup Y_i)$ 的 $a \in X$。那么，总存在满足 $a \notin X_j \cup Y_j$ 的 $j > i$，对所有 $i \in$ FN 均成立，这意味着 $a \notin X_j$。这与 $a \in \cup\cap X_i$ 相矛盾，因为 $\cup\cap X_i = X$。因此，$(\cup\cap X_i) \cup (\cup\cap Y_i) = X \cup Y \subseteq \cup\cap(X_i \cup Y_i)$ 成立。

其次，假设存在 $a \in \cap\cup(X_i \cup Y_i)$ 满足 $a \notin X \cup Y$。那么，存在 $i \in$FN 满足 $a \notin X_j$，且对所有 $j > i$ 都满足 $a \notin Y_j$。这与 $a \in \cap\cup(X_i \cup Y_i)$ 矛盾。因此，$\cap\cup(X_i \cup Y_i) \subseteq X \cup Y$，最后，方程 $\cap\cup(X_i \cup Y_i) = \cup\cap(X_i \cup Y_i) = X \cup Y$ 成立。 □

还存在保持 σ-可加性的博雷尔生成序列。为了证明该定理，我们先陈述下面的引理。

引理 3. 对于博雷尔类 $X \in \mathscr{B}$ 的任意生成序列 $(X_i)_{i\in FN}$，由相同元素构成、但仅有有限个元素与 $(X_i)_{i\in FN}$ 不同的序列 $(Y_i)_{i\in FN}$，即 $\{i \in \text{FN};\ Y_i \neq X_i\}$ 为有限集，也能生成 X。

证明。根据 $(Y_i)_{i\in FN}$ 的定义，存在 $j \in$ FN 满足方程 $\cap_{i>j} X_i = \cap_{i>j} Y_i$。由于 $\cap_{i>k} X_i \subseteq \cap_{i>j} X_i$ 对所有 $k \in j$ 都成立，因此 $\cup\cap X_i = \cup\cap Y_i$ 也成立，从而 $\cup\cap Y_i = X$。类似地，方程 $\cap\cup X_i = \cap\cup Y_i$ 和 $\cap\cup Y_i = X$ 也成立。 □

该引理通常保证，无论生成序列中有多少个元素发生变化，它所生成的博雷尔类都保持不变，除非该序列是有限的。因此，得到下面的定理。

定理 4. 设 B 是一个博雷尔类，且 $\{B(j);\ j \in \text{FN}\}$ 是一个满足 $\cup B(j) = B$ 的博雷尔类族。那么存在一个生成序列族 $\{(X(j)_i)_{i\in FN};\ j \in \text{FN}\}$，其元素生成 $B(j)$，而并集 $(\cup X(j)_i)_{i\in FN}$ 生成 B。

证明。设 $\{(Y(j)_i)_{i\in FN};\ j \in \text{FN}\}$ 是任意给定的生成序列族，其中每个生成序列都生成 $B(j)$。设 $X(j)_i$ 是满足以下条件的集合论可定义类

$$X(j)_i = \begin{cases} \emptyset & \text{if } i < j \\ Y(j)_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，根据引理 3，每个类 $X(j)_i$ 都是集合论可定义的，并生成 $B(j)$。

接下来，我们确认 $(\cup_{j\in FN} X(j)_i)_{i\in FN}$ 是 B 的一个生成序列。假设对于某个 $j \in$ FN，存在满足 $b \notin \cup\cap(\cup_{j\in FN} X(j)_i)$ 的 $b \in B(j)$。那么，总存在满足条件 $b \notin X(j)_k$ 的 $k > i$，对所有 $i \in$ FN 均如此。这与 $b \in \cup\cap X(j)_i$ 相矛盾，因为 $\cup\cap X(j)_i = B(j)$。因此，$B \subseteq \cup\cap(\cup_{j\in FN} X(j)_i)$ 成立。

其次，假设存在 $b \in \cap\cup(\cup_{j\in FN} X(j)_i)$，且其满足$b \notin B$。那么，存在满足 $b \notin X(j)_k$ 的 $i \in$ FN，对所有 $k > i$ 以及所有$j \in$ FN 均成立。这意味着 $b \notin \cap\cup(\cup_{j\in FN} X(j)_i)$。因此，$\cap\cup(\cup_{j\in FN} X(j)_i) \subseteq B$并且最终，方程 $\cap\cup(\cup_{j\in FN} X(j)_i) = \cup\cap(\cup_{j\in FN}(X(j)_i) = B$ 成立。 □

4 割及其算术运算

为了估计各类的大小及其比值，我们引入有理数的戴德金分割[2]。如果类 A 是有理数割，那么

$$\left(\forall a, b \in Q^{+}\right)\left((a \leq b \wedge b \in A) \;\Rightarrow\; (a \in A)\right) \wedge (\forall a \in A)\,(\exists b \in A)\,(a < b)$$

其中 Q^{+} 表示非负有理数类。所有割构成的族上的序关系 $\leq$ 由包含关系给出。对于任意非负有理数 $q \in Q^{+}$，$Q\langle q\rangle$ 表示有理数集 q 的一个割，定义如下:

$$Q\langle q\rangle \;=\; \left\{x \in Q^{+};\; x < q\right\}.$$

当 $q \in N$时，称其为自然数割。

两类重要的割分别是可数并和交集。它们均由一个有限有理数序列 $(a_i)_{i\in FN}$ 构造而成，该序列分别满足：对每个 $n \in \mathrm{FN}$，$a_j > n$；对某个$j \in \mathrm{FN}$,

$$Q\langle \tfrac{FN}{1}\rangle \;=\; \cup_{i\in FN} Q\langle a_i\rangle, \qquad \text{and} \qquad Q\langle \tfrac{1}{FN}\rangle \;=\; \cap_{i\in FN} Q\langle \tfrac{1}{a_i}\rangle.$$

所有割的博雷尔类构成的类是一个 σ-环，记为 $\mathscr{B}_{Q}$。

任意给定的两个割 A和 B之间的二元运算定义如下，其中 B'表示 $B \cup \{\min(Q^{+} \setminus B)\}$: [3]

$$\begin{aligned}
A \dot{+} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\forall a \notin A)\,(\forall b \notin B)\,(x < a + b)\right\};\ \text{external sum}\\
A \dot{-} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\exists b \notin B)\,(x + b \in A)\right\};\ \text{external difference}\\
A \dot{\times} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\forall a \notin A)\,(\forall b \notin B)\,(x < a \cdot b)\right\};\ \text{external product}\\
A \dot{\div} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\exists b \notin B)\,(x \cdot b \in A)\right\};\ \text{external quotient}\\
A \dot{+} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\exists a \in A)\,(\exists b \in B)\,(x < a + b)\right\};\ \text{internal sum}\\
A \dot{-} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\forall b \in B')\,(x + b \in A)\right\};\ \text{internal difference}\\
A \dot{\times} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\exists a \in A)\,(\exists b \in B)\,(x < a \cdot b)\right\};\ \text{internal product}\\
A \dot{\div} B &= \left\{x \in Q^{+};\, (\forall b \in B')\,(x \cdot b \in A)\right\};\ \text{internal quotient.}
\end{aligned}$$

两种和与积都满足交换律和结合律。当两种运算的结果一致时，分别简记为 $A + B$、$A - B$、 $A \cdot B$ 和 A/B或 $\frac{A}{B}$。

正如我们接下来将看到的，有理数的割的算术运算与有理数的算术运算一致；然而，非有理数的割的算术运算有一个颇为奇特的特点，那就是可加性。

如果割 A 满足 $A + A = A$，则称其为可加的。否则，它是非可加的。正如上文所述，其中两个具有重要意义的可加割是 $Q\langle \frac{FN}{1}\rangle$ 和 $Q\langle \frac{1}{FN}\rangle$。

[2]Kalina 和 Zlatoˇs[4]最初将割定义为自然数的初始段。为了提及这类割，我们特称其为 *cuts consisting of naturals*。Kalina 和 Zlatoˇs[4, 6, 5] 和 Sochor[11, 12]对本文所涉及的自然数分割的基本性质进行了全面考察。[3]若要更详细地了解割，Kalina 和 Zlatoˇs[4, 6] 和 Sochor [11, 12] 的著作很有帮助。

不难验证， $q \in Q$ 的割与割 A 之间的算术运算如下:

$$
\begin{aligned}
Q\langle q\rangle \dot{+} A &= Q\langle q\rangle \dot{+} A &&= Q\langle q\rangle + A \\
Q\langle q\rangle \dot{\times} A &= Q\langle q\rangle \dot{\times} A &&= Q\langle q\rangle \cdot A \\
Q\langle q\rangle \dot{-} A &= Q\langle q\rangle \dot{-} A &&= Q\langle q\rangle - A, \\
A \dot{-} Q\langle q\rangle &= A \dot{-} Q\langle q\rangle &&= A - Q\langle q\rangle \\
Q\langle q\rangle \dot{\div} A &= Q\langle q\rangle \dot{\div} A &&= Q\langle q\rangle / A, \\
A \dot{\div} Q\langle q\rangle &= A \dot{\div} Q\langle q\rangle &&= A / Q\langle q\rangle .
\end{aligned}
$$

只要涉及至少一个具体有理数的割，两种运算就一致。然而，一旦两个割都是 σ-类或 π-类，它们就可能不同。为了了解何时会出现这种情况，我们先来考察有理数的算术运算与有理数割的算术运算之间的一致性。

很容易验证，两个有理数割的和（例如 $Q\langle q\rangle + Q\langle p\rangle$）与这两个有理数之和的割（例如 $Q\langle q + p\rangle$）一致。这个结果对另外三种算术运算也成立。为避免重复，我们只证明 $+$ 和 $-$ 的情形，略去 $\cdot$ 和 $/$ 的情形。不过，如果将 $+$、$-$、单位元素 0 和运算 p（$x + y$）分别替换为 $\dot{-}$、 $/$、1 和（$x \cdot y$）^{p}，这些结果仍然成立。

引理 5. 对于每个有理数 $q \in Q$ 和一个有理数序列（a_i）$_{i\in FN}$，下列方程成立

$$
Q\langle q\rangle + A = \begin{cases} \cup_{i\in FN} Q\langle q + a_i\rangle & if\ A = \cup Q\langle a_i\rangle \\ \cap_{i\in FN} Q\langle q + a_i\rangle & if\ A = \cap Q\langle a_i\rangle . \end{cases}
$$

证明。设 $x \in Q\langle q\rangle + A$。那么，存在满足 $x < p + a$ 的 $p \in Q\langle q\rangle$ 和 $a \in A$。若 $A = \cup Q\langle a_i\rangle$, 则存在满足 $a <$max$_{i\in j}\, a_i$ 的 $j \in$ FN。这意味着 $x < p + a < q +$ max$_{i\in j}\, a_i$, 因此 $x \in \cup Q\langle q + a_i\rangle$ 成立。另一方面，若 $A = \cap Q\langle a_i\rangle$, 则对于所有 $i \in$ FN, $a < a_i$ 成立。这意味着对于所有 $i \in$ FN, $x < p + a < q + a_i$ 成立，因此 $x \in \cap Q\langle q + a_i\rangle$ 成立。

反过来，设 $x \in \cup Q\langle q + a_i\rangle$。那么，存在满足 $x < q + a$ 的 $j \in$ FN，其中 $a =$ max$_{i\in j}\, a_i$。取 $c \in (0, \frac{q+a-x}{2})$。那么，$q - c \in Q\langle q\rangle, a - c \in A$ 且 $x < (q - c) + (a - c)$。这意味着 $x \in Q\langle q\rangle + A$。

另一方面，假设 $x \in \cap Q\langle q + a_i\rangle$。由于对于所有 $p \notin Q\langle q\rangle$， $p \geq q$，且对每个满足 $a_j < a$ 的 $a \notin \cap Q\langle a_i\rangle$，都存在 $j \in$ FN，因此不等式 $x < q + a_j < p + a$ 对所有 $p \notin Q\langle q\rangle$ 和 $a \notin \cap Q\langle a_i\rangle$ 均成立。这意味着$x \in Q\langle q\rangle + A$。 □

引理 6. 对于每个有理数 $q \in Q$ 以及有理数序列 $(a_i)_{i\in FN}$，以下方程成立

$$
Q\langle q\rangle - A = \begin{cases} \cup_{i\in FN} Q\langle q - a_i\rangle & if\ A = \cap Q\langle a_i\rangle \\ \cap_{i\in FN} Q\langle q - a_i\rangle & if\ A = \cup Q\langle a_i\rangle . \end{cases}
$$

证明。假设 $x \in Q\langle q\rangle - A$。那么，存在满足 $x + a < q$ 的 $a \notin A$。如果 $A = \cap Q\langle a_i\rangle$, 则存在满足 min$_{i\in j}\{a_i\} < a$ 的 $j \in$ FN。这意味着 $x +$ min$_{i\in j}\{a_i\} < x + a < q$, 因此 $x \in \cup Q\langle q - a_i\rangle$ 成立。如果另一方面,

$A = \cup Q\langle a_i\rangle$，那么对于所有 $i \in \mathrm{FN}$， $a_i < a$ 都成立。这意味着对于所有 $i \in \mathrm{FN}$，$x + a_i < x + a < q$ 都成立，因此 $x \in \cap Q\langle q - a_i\rangle$ 成立。

反之，假设 $x \in \cup Q\langle q - a_i\rangle$。那么，存在满足 $x + a_j < q$ 的 $j \in \mathrm{FN}$，因此 $x \in Q\langle q\rangle - A$ 成立，因为 $a_j \notin \cap Q\langle a_i\rangle = A$,

另一方面，假设 $x \in \cap Q\langle q - a_i\rangle$。那么，对每个 $a \in A$，都存在满足 $a < a_j$ 的 $j \in \mathrm{FN}$，因为 $A = \cup Q\langle a_i\rangle$。这意味着 $x + a < x + a_j < q$，因此 $x \in Q\langle q\rangle - A$。□

引理 7. 对每个有理数 $q \in Q$ 和有理数序列 $(a_i)_{i\in FN}$，以下方程成立

$$A - Q\langle q\rangle \;=\; \begin{cases} \cup_{i\in FN} Q\langle a_i - q\rangle & \text{if } A = \cup Q\langle a_i\rangle \\ \cap_{i\in FN} Q\langle a_i - q\rangle & \text{if } A = \cap Q\langle a_i\rangle. \end{cases}$$

证明. 假设 $x \in A - Q\langle q\rangle$ 且 $A = \cup Q\langle a_i\rangle$。那么，存在满足 $x + p < a_j$ 的 $p \geq q$ 和 $j \in \mathrm{FN}$。由于 $x + q \leq x + p < a_j$， $x \in \cup Q\langle a_i - q\rangle$成立。另一方面，若 $A = \cap Q\langle a_i\rangle$，则存在满足 $x + p < a_i$ 的 $p \geq q$，对所有 $i \in \mathrm{FN}$ 均成立。由于 $x + q \leq x + p < a_i$，因此 $x \in \cap Q\langle a_i - q\rangle$成立。

反过来，假设 $x \in \cup Q\langle a_i - q\rangle$。那么，存在满足 $x + q < a_j$ 的 $j \in \mathrm{FN}$，因此由于 $q \notin Q\langle q\rangle$， $x \in A - Q\langle q\rangle$ 成立。

另一方面，假设 $x \in \cap Q\langle a_i - q\rangle$。那么，由于 $A = \cap Q\langle a_i\rangle$，不等式 $x+q < a_i$ 对所有 $i \in \mathrm{FN}$ 都成立。这意味着对所有 $i \in \mathrm{FN}$， $x+q < a_i$ 都成立，因此由于 $q \notin Q\langle q\rangle$, $x \in A - Q\langle q\rangle$ 成立。 □

根据这些引理，可以确认，有理数的戴德金分割可以完全按照有理数的方式计算。因此，为简化记号，除非存在歧义，以下将有理数割直接称为有理数，不再另行说明。

然而，一旦两个割都是 σ-割或 π-割，这些等式便不再成立；当它们是可加割时，通常就是如此。根据引理 5 和 6，每个 σ-割或 π-割都可以分离为两个割：一个有理数割和一个可加割，分别记作 $\alpha + \frac{FN}{1}$ 或 $\alpha - \frac{FN}{1}$。而可加割（本例中记作 $\frac{FN}{1}$）正是问题的根源。例如，对于任意有理切割 $\alpha > \frac{FN}{1}$，以下内部和／外部和并不相等：

$$\alpha - \tfrac{FN}{1} \dot{+} \tfrac{FN}{1} \;=\; \alpha - \tfrac{FN}{1} \;\neq\; \alpha + \tfrac{FN}{1} \;=\; \alpha - \tfrac{FN}{1} \dot{+} \tfrac{FN}{1}.$$

这个不等式揭示了可加割的独特性质：它们会平滑微小差异，除非差异超过割本身的大小。事实上，即使将割 $\frac{FN}{1}$ 内部加到 $\alpha - \frac{FN}{1}$ 上，结果在 $\alpha - \frac{FN}{1}$ 处仍保持稳定，因为每个 $b \in \frac{FN}{1}$ 和 $c \in \alpha - \frac{FN}{1}$ 都满足 $b + c \in \alpha - \frac{FN}{1}$。通过将无限多个割加到 $\alpha - \frac{FN}{1}$ 上得到的、比任何其他割都小的最小割是外和 $\alpha - \frac{FN}{1} \dot{+} \frac{FN}{1} = \alpha + \frac{FN}{1}$。

可加割具有吸收小割的这一性质，可用于刻画割的等价性。为了表述这种等价关系，我们先定义

割的内部和闭包[4] 如下定义： A

$$\begin{aligned}\operatorname{int}(A) &= A \dot{-} A \div \tfrac{FN}{1};\\ \operatorname{cl}(A) &= A \dot{+} A \div \tfrac{FN}{1}.\end{aligned}$$

于是，若一个割位于另一个割的内部与闭包之间，则称这两个割等价，记作等价关系 $\approx$ as

$$A \approx B \;\equiv\; \operatorname{int}(A) \le B \le \operatorname{cl}(A).$$

换言之，如果两个割之差小于不能吸收它们的最大加性割，那么这两个割就等价。事实上，$\alpha - \frac{FN}{1}$和 $\frac{FN}{1}$的内和与外和之差可以忽略，因为对于所有 $\alpha \in N \setminus$ FN， $\alpha / \frac{FN}{1} > \frac{FN}{1}$，因此 $\alpha - \frac{FN}{1} \approx \alpha + \frac{FN}{1}$。不言而喻， $\alpha / \frac{FN}{1}$是不能吸收 α的最大加性割。

从加性割这些特性可以推导出的性质，汇总于以下引理中；这些引理扩展了 Sochor [11]的命题 (5) a)。

引理 8. 对于任意加性割 A、有理切割 $\alpha > A$ 和割 $B < A$，以下方程成立：

$$\alpha + A + B \;=\; \alpha + A \;=\; \alpha + A - B.$$

证明. 我们先验证$\alpha + A +$。$B = \alpha + A \dot{+} B = \alpha + A$成立。由于$\alpha + A \subseteq \alpha + A +$。 $B \subseteq \alpha + A \dot{+} B$，只需证明 $\alpha + A \dot{+} B \subseteq \alpha + A$。设 $x \in \alpha + A \dot{+} B$。根据外和的定义，对于所有 $a \notin A$ 和 $b \notin B$， $x < \alpha + a + b$ 成立。要证明 $x \in \alpha + A$，只需确认对于所有 $a \notin A$，$x < \alpha + a$ 成立。由于 A 是可加的， $a/2 \notin A$ 成立。又由于 $B < A$，存在满足 $b < a/2$的 $b \notin B$ 。这意味着对于所有 $a \notin A$，$x < \alpha + a/2 + b < \alpha + a$ 成立。因此， $\alpha + A \dot{+} B \subseteq \alpha + A$ 成立。

接下来确认 $\alpha + A = \alpha + A \dot{-} B = \alpha + A - B$成立。由于 . $\alpha + A \dot{-} B \subseteq \alpha + A -$. $B \subseteq \alpha + A$，只需证明 $\alpha + A \subseteq \alpha + A \dot{-} B$。设 $x \in \alpha + A$。那么，根据外和的定义，对于所有 $a \notin A$， $x < \alpha + a$都成立。由于 A 是可加的，对于所有 $a \notin A$， $a/2 \notin A$ 成立。由于 $B < A$，存在满足 $a/2 > b$ 的 $a \notin A$，对每个 $b \notin B$均如此。这意味着，对每个$b \notin B$，都存在满足 $x < \alpha + a/2 < \alpha + a - b$ 的 $a \notin A$。因此，$x \in \alpha + A \dot{-} B$且 $\alpha + A \subseteq \alpha + A \dot{-} B$成立。 □

下一个引理也可通过相同的论证得出。

引理 9. 对于任意可加割 A、有理数割 $\alpha > A$ 和割 $B < A$，以下方程成立：

$$\alpha - A + B \;=\; \alpha - A \;=\; \alpha - A - B.$$

证明。我们首先确认 $\alpha - A +$。$B = \alpha - A \dot{+} B = \alpha - A$成立。由于$\alpha - A \subseteq \alpha - A +$。 $B \subseteq \alpha - A \dot{+} B$，只需证明 $\alpha - A \dot{+} B \subseteq \alpha - A$。令 $x \in \alpha - A \dot{+} B$。根据定义，对所有 $a \in A$，都有 $x < \alpha - a + b$，且 $b \notin B$

[4]等价地，它们可以定义为拟连续统 $\mathscr{Q} = \langle Q^+, \doteq_Q \rangle$ 的 $\operatorname{int}_{\mathscr{Q}}(A) = Q^+ \setminus \operatorname{cl}_{\mathscr{Q}}(A^c)$ 和 $\operatorname{cl}_{\mathscr{Q}}(A) = \operatorname{fig}_{\mathscr{Q}}(A)$，其中 $\doteq_Q$ 定义为： $a \doteq_Q b$ 当且仅当 $a = b = 0$ 或$\big((a, b \neq 0) \wedge (\frac{a}{b} \doteq 1)\big)$。请注意，$\mathscr{Q} = \langle Q, \doteq_Q \rangle$ 仍然是拟连续统，因为 $\doteq_Q$ 不紧致。更多详情请参阅 Sakahara 和 Sato [8] 。

外和。由于 A 是可加的，因此对所有 $a \in A$，也有 $2 \cdot a \in A$。由于 $B < A$，存在 $b \notin B$，使得对每个 $a \in A$，都有 $b < a$。这意味着 $x < \alpha - 2 \cdot a + b < \alpha - a$。因此，$\alpha - A+$。$B \subseteq \alpha - A$ 成立。

接下来我们来确认 $\alpha - A = \alpha - A \dot{-} B = \alpha - A - B$成立。由于 $\alpha - A \dot{-} B \subseteq \alpha - A -$. $B \subseteq \alpha - A$，只需证明 $\alpha - A \subseteq \alpha - A \dot{-} B$。令 $x \in \alpha - A$。由于 A 是可加的，因此对所有 $a \notin A$，$2 \cdot a \notin A$ 均成立；于是，根据外差 $\alpha \dot{-} A$ 的定义，存在某个 $a \notin A$ 使得 $x + 2 \cdot a \in \alpha$。由于 $B < A$，存在满足 $b < a$的 $b \notin B$，因此，由于 $x + a + b < x + 2 \cdot a$ 成立，$x + a + b \in \alpha$。由此可得 $\alpha - A \subseteq \alpha - A \dot{-} B$。 □

本文中起核心作用的割具有如下形式：$\alpha \pm A$，其中 α 是有理数割，A 是可加的。因此，我们来确认这几类割之间的算术运算。

引理 10. 对于任意给定的 α、$\beta \in Q^+$ 和加性割 $A > B$，以下方程成立。

$$(\alpha - A) + (\beta - B) = \begin{cases} \alpha - A & if\ \beta < A \\ \alpha + \beta - A & otherwise \end{cases}$$

证明. 由于 $(\alpha - A)^+ . (\beta - B) \subseteq (\alpha - A) \dot{+} (\beta - B) \subseteq \alpha + \beta - A$，只需证明 $(\alpha - A)^+ . (\beta - B) = \alpha + \beta - A$. 这由 Sochor [11] 的 (19) 中的陈述 (c) 得证。当 $\beta < A$ 时，方程 $\alpha + \beta - A = \alpha - A$ 由引理 9 得出。 □

引理 11. 对于任意给定的 α、$\beta \in Q^+$ 和加性割 $A > B$，以下方程成立：

$$(\alpha \pm A) + (\beta \mp B) = \begin{cases} \alpha \pm A & if\ \beta < A \\ \alpha + \beta \pm A & otherwise. \end{cases}$$

证明. 由于 $(\alpha \pm A)^+ . (\beta \mp B) \subseteq (\alpha \pm A) \dot{+} (\beta \mp B) \subseteq \alpha + \beta \pm A$，只需证明 $(\alpha \pm A)^+ . (\beta \mp B) = \alpha + \beta \pm A$. 这由 Sochor [11] 的 (19) 中的陈述 (b) 得证。当 $\beta < A$ 时，方程 $\alpha + \beta \pm A = \alpha \pm A$ 由引理 8 和 9 得出。 □

最后，割的可数和定义如下。设 $(A_i)_{i \in FN}$ 是一个割序列。那么，两种类型的可数和，即下界和上界，定义为

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{i \in FN} A_i &= \{x\,;\, (\exists j)\,(x \in A_0 + A_1 + \cdots + A_j)\}\,, \\ \dot{\sum}\nolimits_{i \in FN} A_i &= \left\{ x\,;\, (\forall f) \left(\begin{pmatrix} (FN \subseteq \mathrm{dom}(f)) \\ \wedge\, (\mathrm{rng}(f) \subseteq Q^+) \\ \wedge\, (\forall i)\,(f(i) \notin A_i) \end{pmatrix} \Rightarrow\ x < \sum f(i) \right) \right\}. \end{aligned}$$

5 博雷尔类大小的测量

接下来，我们来确认一种测定自然数的割所构成的类的大小的方法。为了给割排序，我们引入次势关系。若存在一个单射集合函数f，其定义域为 n，值域是真子集 u，则称 n 严格次势于 u，记作 $n \widehat{\prec} u$。

对于每个类 $X \subseteq V$，其下割 $\underline{X}$ 和上割 $\overline{X}$[5] 定义如下:

$$\begin{aligned}\underline{X} &\equiv \left\{q \in Q^+ ; (\exists n \in N)(\exists u)\left(u \subseteq X \wedge n \widehat{\prec} u\right) \wedge (q < n)\right\}, \\ \overline{X} &\equiv \left\{q \in Q^+ ; (\exists n \in N)(\forall u)\left(u \supseteq X \Rightarrow n \widehat{\prec} u\right) \wedge (q < n)\right\}.\end{aligned}$$

若 $\underline{X} = \overline{X}$，则这个共同的值记作 $|X|$，称为 X 的割。

例如，当给定的类的下割和上割不同时，X 由 $X_0 = \alpha \setminus A$ 和 $X_1 = \{0\} \times A$ 组成，其中 $A < \alpha$ 是一个可加割。此时，其下割和上割分别为 $\underline{X} = \alpha - A$ 和 $\overline{X} = \alpha + A$。

下一命题概述了类运算与割的算术运算之间的基本性质。

命题 12（Kalina 和 Zlatoˇs [4] 的命题 3.1.6）。对于所有的类 X、Y，以下断言成立:

(a) $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \underline{X} + \underline{Y} \leq \underline{X \cup Y}$,

(b) $\overline{X \cup Y} \leq \overline{X} + \overline{Y}$,

(c) 如果存在集合论可定义类 S，使得 $X \subseteq S, Y \cap S = \emptyset$，简言之，$X$ 和 Y 是可分的 Sep(X, Y)，那么 $\underline{X \cup Y} = \underline{X} +$。$\underline{Y}$和$\overline{X \cup Y} = \overline{X} + \overline{Y}$。

前两个条件的严格情形是 X 和 Y 不可分。设 $X = (\alpha + \beta) \setminus A$，其中 $\beta < A < \alpha$ 和 A 是可加的，并且$Y = A$，例如，那么 $X \cup Y = \alpha + \beta$，因此 $|X \cup Y| = \alpha + \beta$。然而，$|X| +$。$|Y| = \alpha - A$和 $|X| \dot{+} |Y| = \alpha + A$，因此 $\underline{X} +$。$\underline{Y} < \underline{X \cup Y}$和 $\overline{X} \dot{+} \overline{Y} > \overline{X \cup Y}$成立。

然而，就博雷尔类而言，这些差异可以忽略不计，因为以下定理成立。

定理 13（Kalina 和 Zlatoˇs [5] 的定理 3.2）。设 $X \in \mathscr{B}$ 和 $\alpha \in N$。若 $\underline{X} \leq \alpha \leq \overline{X}$，则

$$\operatorname{int}(\alpha) \leq \underline{X} \leq \alpha \leq \overline{X} \leq \operatorname{cl}(\alpha).$$

由此定理可得博雷尔类的以下基本性质[6]。

推论 14（Kalina 和 Zlatoˇs [5] 的推论 3.3）。设 X 是一个博雷尔类。

(a) 若 $\underline{X}$ 或 $\overline{X}$ 是可加割，则 $\underline{X} = \overline{X}$。

(b) 若 $\underline{X}$ 和 $\overline{X}$ 均为非可加的，则存在 $a \in N$，使得 int (a) $\leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq$ cl (a)。若另外 $\underline{X} \neq \overline{X}$，则每个 $a \in \overline{X} \setminus \underline{X} \cap N$ 都满足该不等式。

(c) $\underline{X} \approx \overline{X}$。

此外，下一个定理尤为重要。

[5]Kalina 和 Zlatoˇs[4] 也将这些割定义为自然数的初始段。不过，这一区别并不重要，因为包含在有理数中的自然数仍然可以对这些数进行计数。[6]有关博雷尔半集的割的更详细性质，请参阅 [5], [3] 和 [2]

定理 15（Kalina 和 Zlatoˇs [5] 的定理 3.4）。设 X 是任意给定的类。那么， $X \in \mathscr{B}$ 当且仅当满足以下条件： $|X|$ 存在，且 $|X|$ 是一个 σ- 割或 π- 割；或者存在一个可加割 $A < \underline{X}$，满足 $\underline{X} = n - A$ 和 $\overline{X} = n + A$ 对每个 $n \in \overline{X} \setminus \underline{X} \cap N$ 均成立。

这个定理非常有力，它指出对每个博雷尔类 X，都存在博雷尔类 Y，使得

$$Y \;=\; \underline{X} \cup \left(\left(\overline{X} \setminus \underline{X} \right) \times \{0\} \right).$$

假设 $\underline{X} = n - A$、 $\overline{X} = n + A$ 和 A 是可加的，则可得以下方程：

$$Y \;=\; (n - A) \cup (A \times \{0\}).$$

由于可加割是一个 σ-类或 π-类，每个博雷尔类至少有一个 δ_2-类，其割对与 X 相同。下一个定理陈述了这一事实。

定理 16（Kalina 和 Zlatoˇs [5] 的定理 3.5）。对每个博雷尔类$X \in \mathscr{B}$，都存在一个类 Y，它是一个 π-类与一个 σ-类的并，使得$\underline{X} = \underline{Y}$ 且 $\overline{X} = \overline{Y}$。

正如我们在第 3 节中所见，根据定理 1，每个博雷尔类都可以构造为 δ_2-类。由于 δ_2-类的割可表示为 π-类与 σ-类的并，因此可以直接从该结果推出定理 16。

接下来考虑一种由割构成的生成序列。若自然数的割序列 $(s_i)_{i \in FN}$ 满足以下条件，则称其为一对割 $\langle A, B \rangle$ 的逼近序列[7]：

$$\bigcup\bigcap s_i \;=\; A \quad \text{and} \quad \bigcap\bigcup s_i \;=\; B.$$

特别地，若 $(s_i)_{i \in FN}$ 是割对 $\langle \underline{X}, \overline{X} \rangle$的逼近序列，则称其为类 X 的逼近序列。

首先注意，由于逼近序列由自然数的割构成，因此无法逼近具有无限割的集合论真类，例如 $\cup_{i \in N} Q\langle i \rangle$；所以只有半集才有其逼近序列。此外，正如下一条引理所示，每个博雷尔半集都有其逼近序列。

引理 17（Kalina [3] 的引理 2.2）。设 B 是一个博雷尔半集。那么，存在一个 B 的逼近序列。

看起来，由给定博雷尔类 X 的生成序列 $(X_i)_{i \in FN}$ 中的元素 $|X_i|$ 所构成的割序列，也能逼近 X。然而事实并非如此。下面给出一个例子：设 u 是一个集合，$(a_i)_{i \in FN}$是一个序列，其元素定义如下：

$$a_i \;=\; u \cup \{x_i\} \quad \text{where } x_i \neq x_j \text{ for all } j \neq i.$$

那么，$(a_i)_{i \in FN}$ 是集合 u 的博雷尔生成序列。但由于 $\cup \cap |a_i| = \cap \cup |a_i| = |u| + 1$，$(|a_i|)_{i \in FN}$ 并不是 $|u|$ 的博雷尔逼近序列。对于

[7]请注意，尽管 Kalina [3] 最初将其定义为不可数序列，但本文将其修改为可数序列。这个微小的改动看似无关紧要，却带来了关键结构，使我们得以建立 σ-超可加测度。

要使 $(|X_i|)_{i\in FN}$ 成为博雷尔类 X 的逼近序列，必须将 $(X_i)_{i\in FN}$ 划分为 $X(k)$ 的单调生成序列 $(X(k)_i)_{i\in FN}$，其中$\cup_{k\in\{0,1\}}X(k) = X$，且 $X(0)$ 是一个 σ-类，而 $X(1)$ 是一个 π- 类。

定理18. 设 $(X(0)_i)_{i\in FN}$ 和 $(X(1)_i)_{i\in FN}$ 分别是 σ-类 $X(0)$ 和 π-类 $X(1)$ 的单调生成序列，其中 $X(0)$ 和 $X(1)$ 是分离的。那么，$(|X(0)_i \cup X(1)_i|)_{i\in FN}$ 逼近 $X(0)\cup X(1)$。

证明. 由于 $X(0)$ 和 $X(1)$ 是分离的，存在 $j \in$FN，使得对所有 $i > j$，$X(0)_i \cap X(1)_i = \emptyset$ 成立。由于 $(X(0)_i)_{i\in FN}$ 和 $(X(1)_i)_{i\in FN}$ 是单调的，方程 $\cap_{i\geq k}|X(0)_i \cup X(1)_i| = |X(0)_k \cup \cap_{i\in FN}X(1)_i|$ 对所有 $k > j$ 成立；因此，由于 $X(0)_k$ 是递增的，该方程对所有 $k \in$ FN 也成立。此外，下列方程成立

$$\begin{aligned}\cup_{k\in FN}|X(0)_k \cup \cap_{i\in FN}X(1)_i| &= \cup_{k\in FN}|X(0)_k| \dot{+} |X(1)| \\ &= |\cup_{k\in FN}X(0)_k| \dot{+} |X(1)| = |X(0)| \dot{+} |X(1)|.\end{aligned}$$

由于 $X(0)$ 和 $X(1)$ 可分，$|X(0)| \dot{+} |X(1)| = \underline{X}$ 成立。

此外，还存在满足 $\cup_{i\in FN}(X(0)_i) \cap X(1)_j = \emptyset$ 的 $j \in$ FN，因为 $X(0)$ 和 $X(1)$ 是分离的。由于 $(X(0)_i)_{i\in FN}$ 和 $(X(1)_i)_{i\in FN}$ 是单调的，对所有 $k > j$，方程 $\cup_{i\geq k}|X(0)_i \cup X(1)_i| = |\cup_{i\in FN}(X(0)_i) \cup X(1)_k|$ 成立。此外，以下方程成立

$$\begin{aligned}\cap_{k\in FN}|\cup_{i\in FN}X(0)_i \cup X(1)_k| &= |X(0)| \dot{+} \cap_{k\in FN}|X(1)_k| \\ &= |X(0)| \dot{+} |\cap_{i\in FN}X(1)_i| = |X(0)| \dot{+} |X(1)|.\end{aligned}$$

由于 $X(0)$ 和 $X(1)$ 可分，$|X(0)| + |X(1)| = \overline{X}$ 成立。 □

根据定理18，每个博雷尔半集 X 都保证存在一个生成序列 $(X_i)_{i\in FN}$，该序列由其割构成一对 X 的割的逼近序列的元素组成，因为根据定理 15，每个博雷尔半集都可以分离为一个 σ-类 $X(0)$ 和一个 π-类 $X(1)$。

注意，所有博雷尔半集组成的系统 $\mathscr{B}_s$ 并不是扩展宇宙中的一个类，因为它不仅由集合组成，也包含真类。为了像处理集合那样处理这个系统，提醒读者注意可编码类并公设外延编码公理会有所帮助；该公理等价于选择公理。

若存在一对类 $\langle X、\ S\rangle$，使得类族 $\mathscr{A}$ 可编码，则称该类族可编码。

$$(\forall Y \in \mathscr{A})\,(\exists y \in X)\,(S\text{“}y = Y) \wedge (\forall y \in X)\,(S\text{“}y \in \mathscr{A}) \tag{1}$$

具有性质 (1) 的类对 $\langle X、\ S\rangle$ 称为 $\mathscr{A}$ 的编码对。

注1。由于 $\mathscr{B}_s$ 是使 $V \subset \mathscr{B}_s$、$\mathscr{B}_s$ 可编码的最小 σ-环。

外延编码公理 每个可编码类族 $\mathscr{A}$ 都是外延可编码的，即存在这样一对 $\mathscr{A}$ 的编码对 $\langle X、\ S\rangle$，使得

$$(\forall x, y \in X)\,(S\text{“}x = S\text{“}y \ \equiv\ x = y) \tag{2}$$

成立。

引理 19（Kalina [3] 的引理 2.4）。设 $\langle X、S\rangle$ 是 $\mathscr{B}_s$ 的一个编码对。则存在一个映射 G，其定义域 dom(G) 为 $=X$，使得对每个 $x\in X$，$G(x)$ 都是 S"x 的博雷尔生成序列。

我们将 $\mathscr{B}_s$ 视为映射 F 的定义域，并将 $F(B)$ =$G(x)$ 视为其中每个 $B\in\mathscr{B}_s$ 对应的值，其中 S"$x=B$ 对于 $\mathscr{B}_s$的编码对 $\langle X,S\rangle$。任何将序列映射到生成 A的映射 F（定理18保证存在）都称为博雷尔生成函数（简称 BGF）；而将每个类 $A\in\mathscr{B}_s$ 映射到 A的博雷尔逼近序列的映射 $|F|$，或简称 F，称为博雷尔逼近函数（BAF）。

6 比较博雷尔类的大小

若要以割为单位衡量给定博雷尔类的一个割 B 与另一个割 S 之间的比值，会遇到一个问题。正如第 4 节所述，处理可加割时，内部计算与外部计算并不相同；同样，一般而言，通过除法得到的割的值也并非唯一确定，尤其是一个可加割除以另一个可加割时。为确定这些比值，我们采用逼近序列。

设 B 和 S 为博雷尔半集，$(b_i)_{i\in FN}$ 和 $(s_i)_{i\in FN}$ 分别是 B 和 S的逼近序列。令 $\lim_{i\in FN}\frac{b_i}{s_i}$ 表示有理割序列 $\left(\frac{b_i}{s_i}\right)_{i\in FN}$的下极限，其定义为

$$\underline{\lim_{i\in FN}}\,\frac{b_i}{s_i}\;=\;\bigcup_{i\in FN}\bigcap_{j\geq i}\frac{b_j}{s_j}.$$

类似地，令 $\overline{\lim}_{i\in FN}\ \frac{b_i}{s_i}$ 表示上极限，其定义为

$$\overline{\lim_{i\in FN}}\,\frac{b_i}{s_i}\;=\;\bigcap_{i\in FN}\bigcup_{j\geq i}\frac{b_j}{s_j}.$$

若 $\underline{\lim}_{i\in FN}\frac{b_i}{s_i}=\overline{\lim}_{i\in FN}\frac{b_i}{s_i}$，则将它们的公共值简记为 $\lim_{i\in FN}\frac{b_i}{s_i}$，并称为 B 与 S的比值极限。

此外，当逼近序列由 BAF F给出时，也就是说，$F(B)$ =$(b_i)_{i\in FN}$和 $F(S)$ =$(s_i)_{i\in FN}$，序列 $\left(\frac{b_i}{s_i}\right)_{i\in FN}$ 可简记为 $\frac{F(B)}{F(S)}$，或 $\frac{(b_i)}{(s_i)}$，其极限也可等价地记作

$$\lim\frac{F(B)}{F(S)}\;=\;\lim\frac{(b_i)}{(s_i)}\;=\;\lim_{i\in FN}\frac{b_i}{s_i}.$$

如果极限与 BAF 的选择无关，则将其简单记为 $\frac{|B|}{|S|}$。

下面展开讨论博雷尔割上的不可辨识等价关系 $\doteq$。博雷尔割 A 和 B 等价，当且仅当它们满足以下条件：

$$A\doteq B\quad\Leftrightarrow\quad\left((A\dot{-}B)\cup(B\dot{-}A)\subseteq\frac{1}{FN}\right)\vee\left(A\cap B\supseteq\frac{FN}{1}\right).$$

显然，对于任意一对 p、$q\in Q$，$Q\langle q\rangle\doteq Q\langle p\rangle$ 当且仅当 $q\doteq p$。

若博雷尔半集 B是 $\langle s,F\rangle$-可观的，则其 B 与 S 之比的下极限和上极限等价，即 $\underline{\lim}\frac{b_i}{s_i}\doteq\lim\frac{b_i}{s_i}$，其中 F 是

BAF 且 $F(B) = (b_i)_{i\in FN}$，并且 $s = (s_i)_{i\in FN}$是 $S \in \mathscr{B}_s$的一个逼近序列。所有 $\langle s, F\rangle$-可观半集构成的类记作 $\mathscr{O}(s, F)$。

当 S 是具有非可加割的半集时，任意给定的博雷尔半集 B 与 S 之比都有极限，且无论选择何种 BAF，该极限在等价关系 $\doteq$下都是唯一确定的。以下陈述本质上与 Kalina [3]的定理 3.3相同。

定理 20. 设 S 是具有非可加割 $|S|$ 的博雷尔半集，其逼近序列为 $(s_i)_{i\in FN}$，则对于任意博雷尔半集 B 和 BAF F， $\mathscr{O}(s, F) = \mathscr{B}_s$。此外，若 G是任意另一个 BAF，则以下方程成立。

$$\underline{\lim}\,\frac{F(B)}{(s_i)} \;\doteq\; \underline{\lim}\,\frac{G(B)}{(s_i)}$$

当 B 具有可加割时，以下包含关系成立：

i.) if $|B| \subset \cup\cap(s_i)_{i\in FN}$ *then* $\overline{\lim}\,\frac{F(B)}{(s_i)} \subseteq \frac{1}{FN}$.

ii.) 若 $|B| \supset \cap\cup(s_i)_{i\in FN}$，则 $\underline{\lim}\,\frac{F(B)}{(s_i)} \supseteq \frac{FN}{1}$，

为证明定理 20，下面的命题很有用，它本质上与 Kalina [3]的命题 3.1相同。

命题 21. 设 $(b_i)_{i\in FN}$ 是任意给定的非空博雷尔半集 B 的逼近序列。那么， B 的下割和上割是非可加的，当且仅当对于所有 $\ell \in$ FQ，都存在满足 $\left|\frac{b_j}{b_i} - 1\right| < |\ell|$ 的 $i \in$ FN，且对所有 $j > i$ 均成立。

证明. 若 B 有可加割，根据推论 14 的 (a)， $\underline{B} = \overline{B}$。由于 $|B|$ 是可加的，对于每个 $b_i \in |B|$，必定存在 $j > i$ 使得 $\frac{b_j}{b_i} > 2$。否则，对于每个 $b_i \notin |B|$，必定存在 $j > i$ 使得 $\frac{b_j}{b_i} < \frac{1}{2}$。

若 B 有非可加割，那么根据推论 14 的 (b)，存在 $d \in N$ 使得 int $(d) \leq \underline{B} \leq \overline{B} \leq$ cl (d)。设 $\ell \in$ FQ 是任意给定的有限有理数，且 $k \in$ FN 满足 $\frac{2}{k-1} \leq |\ell|$。那么，对于此 d 和 k，存在满足下列不等式的 i，对于每个 $j > i$ 均成立

$$d - \frac{d}{k} \;<\; b_i \;<\; d + \frac{d}{k} \quad \text{and} \quad d - \frac{d}{k} \;<\; b_j \;<\; d + \frac{d}{k}.$$

接下来得到以下不等式：

$$\frac{d - \frac{d}{k}}{d + \frac{d}{k}} \;=\; 1 - \frac{2}{k+1} \;<\; \frac{b_j}{b_i} \;<\; 1 + \frac{2}{k-1} \;=\; \frac{d + \frac{d}{k}}{d - \frac{d}{k}}.$$

由于满足 $\frac{2}{k-1} \leq |\ell|$, $\left|\frac{b_j}{b_i} - 1\right| < |\ell|$。 □

定理 20 的证明。设 $F(B) = (b_i)_{i\in FN}$。如果 B 有非可加割，那么根据命题 21，$\left|\frac{b_j}{b_i} - \frac{s_j}{s_i}\right| < |\ell|$ 对所有 $\ell \in$ FQ 均成立。这意味着，如果对于某个 $i \in$ FN， $\frac{b_i}{s_j} \in$ 对所有 $j > i$ BQ 均成立，那么 $\left|\frac{b_j}{s_j} - \frac{b_i}{s_i}\right| < \frac{b_i}{s_j}|\ell|$ 对所有 $\ell \in$ FQ 均成立，

因此 $\underline{\lim}_{(b_i)\ (s_i)} \doteq \overline{\lim}_{(b_i)\ (s_i)}$ 成立。否则，由于 $\frac{b_i}{s_j} \in Q \setminus \mathrm{BQ}$，等价关系显然成立。

其次，我们来证明这些有理割是唯一确定的。设F、G是两个不同的 BAF，其中 $F(B) = (o_i)_{i\in FN}$且 $G(B) = (e_i)_{i\in FN}$。定义 $H(B) = (b_i)_{i\in FN}$，其中当 i 为奇数时 $b_i = o_i$，否则为 $b_i = e_i$。根据 H 的定义和命题 21，H 也是一个 BAF，并且它们等价:

$$\underline{\lim} \frac{F(B)}{(s_i)} \doteq \underline{\lim} \frac{H(B)}{(s_i)} \doteq \underline{\lim} \frac{G(B)}{(s_i)}.$$

另一方面，如果 B 有一个可加割，则有两种情况: $|B|$ 满足 i.) $|B| \subset \cup \cap s_i$，以及 ii.) $|B| \supset \cap \cup s_i$。

i.) 由于 $|B|$ 满足 $|B| \subset \cup \cap s_i$，因此存在 i 满足对所有 $j > i$均有 $s_j \notin |B|$。于是存在 i 满足对所有 $j > i$均有 $b_j < s_j$。由于 B 是可加的，对于每个 $k \in \mathrm{FN}$，都存在 i 满足对所有 $j > i$均有 $k \cdot b_j < s_j$。这意味着$\frac{b_j}{s_j} < \frac{1}{k}$，因此 $\underline{\lim}_{F_{(B)}\ (s_i)} \subseteq \frac{1}{FN}$成立。

ii.) 由于 $|B|$满足 $|B| \supset \cap\cup s_i$，因此存在 i，使得对所有 $j > i$均满足 $s_j \in |B|$。因此，存在 i，使得对所有 $j > i$均满足 $b_j > s_j$。由于 B 是可加的，对每个 $k \in \mathrm{FN}$，存在 i，使得对所有 $j > i$均满足 $b_j > k \cdot s_j$。这意味着 $\frac{b_j}{s_j} > k$，因此 $\underline{\lim}_{F_{(B)}\ (s_i)} \supseteq \frac{FN}{1}$成立。 □

此外，只要下割相等，B 和 C 的割与 S 之比就相等。下一个定理陈述了这一性质，它本质上与 Kalina [3]的定理 3.4相同。

定理22. 设博雷尔半集 B、$C \in \mathscr{B}_s$ 满足 $\underline{B} \doteq \underline{C}$。那么，对于任意给定的 BAF F，其中$(s_i)_{i\in FN}$是具有非可加割的半集 S 的逼近序列，均有 $\underline{\lim}_{F_{(B)}(s_i)} \doteq \underline{\lim}_{F_{(C)}(s_i)}$

证明。已知 B 和 C 具有加性割 $|B| = |C|$。于是，由定理 20 可得这些等价关系。

否则，B 和 C 都具有非可加割，因此存在 $d \in N$，根据定理 13，它满足

$$\mathrm{int}\,(d) \leq \underline{B} \approx \underline{C} \approx \overline{B} \approx \overline{C} \leq \mathrm{cl}\,(d).$$

令 $F(B) = (b_i)_{i\in FN}$和 $F(C) = (c_i)_{1\in FN}$。那么，对于每个 $k \in \mathrm{FN} \setminus 2$，都存在 i，使其对所有 $j \in \mathrm{FN} \setminus i$满足以下不等式

$$\frac{d - \frac{d}{k}}{d} = 1 - \frac{1}{k} < \frac{b_j}{d} < 1 + \frac{1}{k} = \frac{d + \frac{d}{k}}{d}$$

and

$$\frac{d - \frac{d}{k}}{d} = 1 - \frac{1}{k} < \frac{c_j}{d} < 1 + \frac{1}{k} = \frac{d + \frac{d}{k}}{d}.$$

这意味着存在 $j \in \mathrm{FN}$，使其满足 $\left|1 - \frac{b_j}{c_j}\right| < |\ell|$ 对于任意给定的$\ell \in \mathrm{FQ}$，从而 $\lim_{i\in FN} \frac{b_i}{c_i} \doteq 1$ 和 $\underline{\lim}_{i\in FN} \frac{b_i}{s_i} \doteq \underline{\lim} \frac{c_i}{s_i}$成立。因此，可得 $\underline{\lim}_{F_{(B)}\ (s_j)} \doteq \underline{\lim}_{F_{(C)}\ (s_j)}$。 □

正如我们将看到的，这一定理表明，对于具有非可加割的博雷尔半集，其 Kalina 测度与经典测度一致，只要 S具有非可加割。然而，接下来的定理与 Kalina [3], 的定理 4.2基本相同，它向我们揭示了有理割的一些颇为奇特的性质。

定理23. 设 S 和 $(s_i)_{i\in FN}$ 与上一条定理中的情况相同，只是 S 有一个可加割。设 $B \in \mathscr{B}_s$ 和 $|B| = \cup\cap(s_i)_{i\in FN}$。那么，

i.) 对每个正的 $r \in \in$有理数集 Q，都存在满足 F 的 $^{F}{}_{(B)\,(s_i)} = r$。此外，存在满足以下条件的 $(\underline{b_i})_{i\in FN}$ 和 $(\overline{b_i})_{i\in FN}$

$$\underline{\lim}\,\frac{b_i}{s_i} = \frac{1}{FN} \quad and \quad \underline{\lim}\,\frac{\overline{b_i}}{s_i} = \frac{FN}{1},$$

ii.) 并且还存在 G，使得 $\lim\, ^{G}{}_{(B)\,(s_i)} \neq \lim\, ^{G}{}_{(B)\,(s_i)}$。

证明. 为简化证明，我们将注意力限制在 $|B|$是一个 σ-类的情形。对于 $|B|$ 是 π-类的另一种情形，可以用类似的方法证明。

我们先证明 i.)：通过说明，对每个正的 $r \in \in$有理数集 Q，都存在满足 $\lim\, ^{F}{}_{(B)\,(s_i)} = r$ 的 F。为构造这样的 F，令

$$F(B) = (b_i) \quad \text{in which} \quad b_i = \lfloor r \cdot s_i \rfloor.$$

由于 B 是可加的，方程 $\cap\cup(b_i) = \cap\cup(s_i) = \cup\cap(s_i) = \cup\cap(b_i) = |B|$成立。因此，$(b_i)$ 也是 B 的一个逼近序列。

为构造一个满足 $\lim \frac{b_i}{s_i} = \frac{1}{FN}$ 的 BAF $(\underline{b_i})_{i\in FN}$，我们归纳地定义一个自然数序列 $(n(k))_{k\in FN\setminus\{0\}}$：

$$n(1) = 0 \quad \text{and} \quad n(k) = \min\left\{i \in FN\ ;\ (i > n(k-1)) \wedge (\forall j \geq i)\left(\left\lfloor \frac{s_j}{k} \right\rfloor \geq s_k\right)\right\}.$$

由于 $|B|$ 是 σ-可加的，对每个 k 都存在这样的 $n(k)$。然后令[8]

$$\underline{b_i} = \left\lfloor \frac{s_i}{k} \right\rfloor \quad \text{for} \quad n(k) \leq i < n(k+1).$$

显然，$(\underline{b_i})_{i\in FN}$ 逼近 B。由于当 i 增大时， k 无限增大，因此可得方程 $\lim \frac{b_i}{s_i} = \lim \frac{1}{k} = \frac{1}{FN}$。

最后，为构造一个满足 $\lim\, ^{(\overline{b_i})}{}_{(s_i)} = \frac{FN}{1}$ 的 BAF $(\overline{b_i})_{i\in FN}$，只需令

$$\overline{b_i} = i \cdot s_i.$$

于是，$(\overline{b_i})_{i\in FN}$ 逼近 B，因此可得 $\lim\, ^{(\overline{b_i})}{}_{(s_i)} = \frac{FN}{1}$。

为证明 ii.)，考虑两个不同的 BAF F 和 H，使得 $\lim\, ^{F}{}_{(B)\,(s_i)} \neq \lim\, ^{H}{}_{(B)\,(s_i)}$。再设 F 和 H 满足 $F(B) = (o_i)_{i\in FN}$ 且 $H(B) = (e_i)_{i\in FN}$。定义另一个 BAF G 如下：

$$G(B) = \begin{cases} o_i & \text{if } i \text{ is odd} \\ e_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么，显然 $G(B)$ 逼近 B，但 $\lim\, ^{G}{}_{(B)\,(s_i)} \neq \lim\, ^{G}{}_{(B)\,(s_i)}$。 □

[8]直接代入 $\underline{b_i} = \left\lfloor \frac{s_i}{i} \right\rfloor$ 看起来似乎可行，但实际上并不行。因为可能存在满足 $\underline{b_i} \leq k$ 的 $k \in FN$，对所有 $i \in FN$ 都有 $\cap\cup\underline{b_i} < |B|$。

该定理表明，具有相同可加割的 B 与 S 之比可以是从 $\frac{1}{FN}$ 到 $\frac{FN}{1}$ 之间的任意有理割，分别对应外商和内商的结果。这一事实说明，加性截口除法的值取决于逼近方式。 B 与 S 的比值可能因 BAF 而异，而外商和内商则保持不变，分别等于其最小值 $\frac{1}{FN}$ 和最大值 $\frac{FN}{1}$ 。

割 B 具有可加割的比率的另外两种情形见下一个引理，其本质上与 Kalina [3] 的引理 4.1 相同。

引理24. 设 S 和 $(s_i)_{i\in FN}$ 与上一个定理中的相同。设 $B \in \mathscr{B}_s$、$(b_i)_{i\in FN}$ 是 B 的一个逼近序列，且 F 是任意一个 BAF。则以下包含关系成立：

i.) *if* $\underline{B} \supset \cap\cup(s_i)_{i\in FN}$ *then* $\underline{\lim}\frac{F(B)}{(s_i)} \supseteq \frac{FN}{1}$,

ii.) *if* $\overline{B} \subset \cup\cap(s_i)_{i\in FN}$ *then* $\overline{\lim}\frac{F(B)}{(s_i)} \subseteq \frac{1}{FN}$.

证明. 为证明 ii.)，设 $F(B) = (b_i)_{i\in FN}$ 且 $d \in \cup\cap(s_i)_{i\in FN} \setminus \overline{B}$。则存在满足对所有 $j > i$ 均有 $s_j < d$ 的 i。由于 $|S|$ 是可加的且 $d \in |S|$，对每个 k，存在 i 使得 $s_j > d\cdot k$，因此对所有 $j > i$，$\frac{b_j}{s_j} < \frac{d}{s_j} < \frac{1}{k}$ 成立，故满足 $\lim {}^{F_{(B)}}{}_{(s_i)} \subseteq \frac{1}{FN}$。

i.) 的证明本质上是相同的。 □

请注意，到目前为止，所有定理都只涉及博雷尔半集，而不涉及半集。这是因为集合论可定义的真类，例如全类 V 或实区间，都有逼近序列，因为例如，$|V| = |[0,1]| = \cup_{i\in N} Q\langle i\rangle$。下一节将处理这个问题。

7 σ-一致性：逼近序列

加性割在可数次相加时也会遇到一些困难。根据第 4 节最后给出的定义，$\frac{1}{FN}$ 的可数和的下界是 $\frac{1}{FN}$，而上界是 $\frac{FN}{1}$。然而，也可以利用它们的逼近序列为每个可数和赋值。为了了解如何做到这一点，让我们先从构造 σ-分割开始。

如下定义的 $\mathscr{S}$ 称为 S 的 σ-分割

$$\mathscr{S} = \left\{ S_{(i,j)} \subseteq S \,;\, \begin{array}{c} (\forall k \in FN)(\forall m \in j(k)) \left(\begin{array}{c} ((i \neq k) \vee (j \neq m)) \\ \Rightarrow \left(S_{(i,j)} \cap S_{(k,m)} = \emptyset\right) \end{array} \right) \\ \wedge \left(\cup_{i\in FN} \cup_{j\in j(i)} S_{(i,j)} = S\right) \end{array} \right\}$$

其中 $j(\cdot): \alpha \to \beta$，对于某个满足以下条件的 $\alpha, \beta \in N \setminus \mathrm{FN}$：对于每个 $i \in \mathrm{FN}$，$j(i) \in \mathrm{FN}$。特别地，当对于所有 $i \in \mathrm{FN}$，$j(i) = 1$ 时，该条件可简化如下

$$\mathscr{S} = \left\{ S_i \subseteq S \,;\, \left((\forall j \neq i)\left(S_i \cap S_j = \emptyset\right)\right) \wedge \left(\cup_{i\in FN} S_i = S\right) \right\}.$$

注意，如果 $j(\cdot)$ 是指数函数，那么 $\mathscr{S}$ 是不可数的，因此可以覆盖不可数类；而如果 $j(\cdot)$ 是多项式，则它是可数的。

要测量实区间，确保实连续统存在 σ-划分至关重要。下一个定理将证明，每个连续统都有一个 σ-划分。

定理 25. 给定一个连续统 $\mathscr{C} = \langle C, \doteq_{\mathscr{C}} \rangle$，所有单子的类是一个$\sigma$-划分。

证明. 已知 $(R_i)_{i\in FN}$ 是 $\doteq_{\mathscr{C}}$的递减生成序列。令 X_i为一个极大 R_i-网，其中不包含任何满足 $\langle x, y\rangle \in R_i$ 的不同元素对 $x, y \in X_i$，并且对每个 $x \in C$，都存在满足 $\langle x, y\rangle \in R_i$的 $y \in X_i$。令 $(X_i)_{i\in FN}$ 为极大 R_i-网的单调序列，并对每个 $i > 0$定义 $C_0 = X_0$和 $C_i = X_i \setminus X_{i-1}$。

由于 $|C_i| \in \mathsf{FN}$，根据 Vopˇenka [14], 第 85 页的第二个定理，对于每个 $i \in \mathsf{FN}$，定义为 $j(i) = |C_i|$ 的函数$j(\cdot)$取有限值，因此，对于每个 $i \in\mathsf{FN}$，C_i 的每个成员都可以用 $j \in j(i)$ 编号为 $C_i = \cup_{j\in j(i)}\{c_{(i,j)}\}$。由于对每个 i，X_i 都是极大 R_i-网，R_i“$X_i = C$，且每一对 $x, y \in X_i$ 都相互可辨识。这意味着 $\mathscr{S}_X = \{\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}\left(c_{(i,j)}\right)$；$(i \in \mathsf{FN})(j \in j(i))\}$构成一个 σ-划分。 □

在上一个证明中构造的类 $\mathscr{S}_X$ 称为一个拓扑的 σ-分区，其编号依据 $(X_i)_{i\in FN}$；而定义为 $\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C}) = \{c_{(i,j)}$ 的类 $\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$；$(\exists i \in \mathsf{FN})(\exists j \in j(i))(c_{(i,j)} \in C_i)\}$ 则称为依据 $(X_i)_{i\in FN}$的 $\mathscr{C}$选择类。根据定义，$\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$ 是一个 σ-类。

若对所有 $i \in I$ 和 $j \in h(i)$（其中$I \subseteq \mathsf{FN}$ 且 $h(i) \subseteq j(i)$）都满足下列方程，则称 BAF F 在 $\mathscr{S}$ 上是 σ-一致的:

$$\underline{\lim} \frac{\sum_{i\in I}\sum_{j\in h(i)} F(S_{(i,j)})}{F(S)} \doteq \underline{\lim} \frac{F(\cup_{i\in I}\cup_{j\in h(i)} S_{(i,j)})}{F(S)},$$

其中，逼近序列 $F(S_{(i,j)}) = (s_{(i,j),\ k})_{k\in FN}$ 的和 $\sum_{i\in I} F(S_{(i,j)})$ 是序列 $\left(\sum_{i\in I} s_{(i,j),\ k}\right)_{k\in FN}$ 的简写。

每个 σ-类都有一个平凡的、 σ-一致的 BAF。首先，为方便表述，我们定义 α的 ℓ步滞后近似序列，记作 $(\alpha)_\ell$，它由 $i < \ell$ 时的 $a_i = 0$ 和 $i \geq \ell$时的 $a_i = \alpha$ 组成。当 $\ell = 0$时，$(\alpha)_0$ 简记为 (α)，并称为 α的常值近似序列。

于是， σ-类 $\mathsf{Ch} = \{c_{(i,j)}$ 上的 BAF $(\forall i \in \mathsf{FN})(\exists j \in j(i))\}$（称为 Ch 的典范 BAF）定义如下:

$$F_{\mathrm{Ch}}(\{c_{(i,j)}\}) = (1)_i \quad \text{for each } i \in FN \text{ and } j \in j(i)$$

并且，对每个 $B \subseteq \mathsf{Ch}$，$F_{\mathrm{Ch}}(B) = \sum_{c\in B} F_{\mathrm{Ch}}(\{c\})$。

根据定义，每个典范 BAF 都是 σ-一致的，但一般而言，BAF 并非如此。不过，如下一个定理所示，每个连续统都有一个这样的 BAF。

定理 26. 设 $\mathscr{C}$ 是一个连续统。那么，在 $\mathscr{C}$ 的任意拓扑 σ-划分 $\mathscr{S}_X$ 上，都存在一个 σ-一致的 BAF。

[9] 一个连续统由一对 $\mathscr{C} = \langle C, \doteq_{\mathscr{C}}\rangle$构成，其中 C 是集合论可定义的，$\doteq_{\mathscr{C}}$ 是 C上的不可辨识等价关系；$\mathscr{C}$ 的单子是 $x \in C$ 的一个等价类，定义为 $\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}(x) = \{y \in C$；$x \doteq y\}$。详情请参见 Sakahara 和 Sato [8]。

证明. 设 $(R_i)_{i\in FN}$ 是 $\doteq_{\mathscr{C}}$ 的一个单调生成序列，且 $(X_i)_{i\in FN}$ 是一列极大 R_i-网。对每个 $c_{(i,j)}\in \mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$，按照定理 4 定义序列$\left(S_{(i,j),k}\right)_{k\in FN}$ 如下

$$S_{(i,j),k} \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{if} \quad k<i \\ R_k\text{“}\{c_{(i,j)}\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，每个序列 $\left(S_{(i,j),\ k}\right)_{k\in FN\setminus i}$ 都是单调的，并生成 $\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}\left(c_{(i,j)}\right)$，因此，根据定理18，$\left(|S_{(i,j),\ k}|\right)_{k\in FN}$ 逼近 $\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}\left(c_{(i,j)}\right)$。

给定 $x,y\in \mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$，令 $(S_{x,\ k})_{k\in FN}$ 和 $(S_{y,\ k})_{k\in FN}$分别表示它们的生成序列。那么，存在 $k\in$FN，使其对所有 $\ell>k$都满足以下方程，

$$S_{x,\ell}\cap S_{y,\ell} \;=\; \emptyset.$$

这意味着 $\cup\cap|S_{x,\ \ell}\cap S_{y,\ \ell}|=0$，因此以下方程成立：

$$\cup\cap|S_{x,\ell}\cup S_{y,\ell}| \;=\; |\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}(x)|+|\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}(y)|.$$

设 B 是 $\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$ 的一个子类，且对某个 $I\subseteq$ FN 和 $h(\cdot)\subseteq j(\cdot)$ 满足 $\cup_{i\in I}\cup_{j\in h(i)}\{c_{(i,j)}\}=B$。那么，根据引理 3，$\left(\cup_{\ell\in i}\cup_{j\in h(\ell)}S_{(i,j),\ k}\right)_{k\in FN}$ 对所有 $i\subseteq I$ 都生成 $\mathsf{fig}_{\mathscr{C}}\left(\cup_{\ell\in i}\cup_{j\in h(\ell)}S_{(i,j),\ k}\right)$；根据定理18，其割也逼近该图形。

现在，定义 $F_{\mathscr{S}_X}(\mathsf{fig}_{\mathscr{C}}(B))$ 为

$$F_{\mathscr{S}_X}\left(\mathrm{fig}_{\mathscr{C}}(B)\right) \;=\; \left(\left|\cup_{\ell\in I}\cup_{j\in h(\ell)}S_{(i,j),k}\right|\right)_{k\in FN}.$$

那么，$F_{\mathscr{S}_X}$ 在 $\mathscr{S}_X$ 上是 σ-一致的。 □

一般而言，BAF $F_{\mathscr{S}_X}$ 被称为拓扑的，当且仅当它为每个单子 $\mathsf{mon}_{\mathscr{C}}\left(c_{(i,j)}\right)$ 赋予一个级数 $\left(|S_{(i,j),\ k}|\right)_{k\in FN}$ 其中 $S_{(i,j),\ k}=\emptyset$ 若 $k<i$，否则，$S_{(i,j),\ k}=R_k\text{“}\{c_{(i,j),k}\}$。此外，$F_{\mathscr{S}_X}$ 被称为在 $\mathscr{C}$上几乎一致，当且仅当存在一个有限集 $b\subseteq\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$，满足$|S_{x,\ k}|=n_k\in N$对所有$x\in\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})\setminus b$和 $k\in$FN 均成立，并且还满足 $p\leq\frac{|S_{x,\ k}|,\ k|}{|S_{y,\ k}|}\leq q$对某些 $p,q\in$FQ 下的所有 $x,y\in\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$ 均成立。若 b 为空，则 $(R_k)_{k\in FN}$ 简称为一致的。

定理 27. 设 $F_{\mathscr{S}_X}$ 是连续统 $\mathscr{C}$ 上拓扑 σ-分割 $\mathscr{S}_X$ 的几乎一致拓扑 σ-一致 BAF，且 $F_{\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C})}$ 是 $\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$ 上的典范 BAF。那么，对于所有 $B\subseteq\mathsf{Ch}_X(\mathscr{C})$，均有 $\lim^{F_{\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C})}}(B)\,F_{\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C})}(\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C}))\doteq\lim^{F_{\mathscr{S}_X}}(\mathrm{fig}_{\mathscr{C}}(B))F_{\mathscr{S}_X}(C)$。

证明. 由于 $F_{\mathscr{S}_X}$ 是拓扑的且几乎一致，存在 $p,q\in$ FQ，其中 $p<1<q$，满足

$$p\cdot n_k \;\leq|R_k\text{“}\{c_{(i,j),k}\}|\;\leq\; q\cdot n_k.$$

此外，由于 $F_{\mathscr{S}_X}$ 几乎一致，因此存在有限子集 $b\subseteq B$，对于某个 $\ell\in$FN，满足

$$\left(\sum_{i\in\ell\cap I}h(i)+(p-1)|b|\right)n_k\;\leq\;\sum_{i\in\ell\cap I}\sum_{j\in h(i)}|S_{(i,j),k}|\;\leq\;\left(\sum_{i\in\ell\cap I}h(i)+(q-1)|b|\right)n_k,$$

其中 $I \subseteq \mathrm{FN}$，且 $h(\cdot) \subseteq j(\cdot)$满足 $\cup_{i\in I} \cup_{j\in h(i)} \{c_{(i,j)}\} = B$。

由于对每个 $r \in \mathrm{FQ}$，都存在满足以下条件的 $k > \ell$

$$\frac{(1-p)|b|}{\sum_{i\in k} j(i)} < r \quad \text{and} \quad \frac{(q-1)|b|}{\sum_{i\in k} j(i)} < r,$$

对于所有 $r \in \mathrm{FQ}$，以下不等式均成立

$$\lim_{\ell\in FN} \frac{\sum_{i\in \ell\cap I} h(i)}{\sum_{i\in \ell} j(i)} - r \leq \lim_{\ell\in FN} \frac{\sum_{i\in\ell\cap I}\sum_{k\in h(i)} |S_{(i,j),k}|}{\sum_{i\in\ell}\sum_{k\in j(i)} |S_{(i,j),k}|} \leq \lim_{\ell\in FN} \frac{\sum_{i\in\ell\cap I} h(i)}{\sum_{i\in\ell} j(i)} + r.$$

这意味着 $\lim^{F_{\mathscr{S}_X}(\mathrm{fig}_{\mathscr{C}}(B))\, F_{\mathscr{S}_X}(C)} \doteq \lim^{F_{\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C})}(B)\, F_{\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C})}(\mathrm{Ch}_X(\mathscr{C}))}$ 成立。 □

现在，为了了解有理加性切割如何运作，我们来看几个例子。设有一根单位长度字符串，将其反复平分。最后剩下可数个字符串片段，记作 FN，每个片段的长度为 $\frac{1}{FN}$。

设 $\langle [0,1]_{2^\varepsilon}, \doteq \rangle$ 是表示实区间 $[0,1]$，的连续统，其中 $[0,1]_{2^\varepsilon}$ 是定义为 $\left\{\frac{n}{2^\varepsilon} \mid (0 \leq n \leq 2^\varepsilon) \wedge (n \in N)\right\}$ 的有理网格，对某个 $\varepsilon \in N\backslash \mathrm{FN}$ 而言，且 $\doteq$ 是由生成序列 $R = (R_k)_{k\in FN}$ 定义的不可辨识等价关系，该序列由 $R_k = \{\langle a, b\rangle \in [0,1]^2_{2^\varepsilon} ; \ |a-b| \leq 2^{-k}\}$[11] 构成。此外，有理数 $\alpha \in [0,1]_{2^\varepsilon}$ 称为位置，而包含一个位置 α 的实单子（α）$\in [0,1]$，则分别称为连续统上的点。

例 1. 设 $c_{(i,j)}$ 表示有理网格 $[0,1]_{2^\varepsilon}$ 中的一个位置，其中 $i \in \mathrm{FN}$，$j \in j(i)$，其中 $j(0) = j(1) = 1$，并且对于所有 $i \geq 2$，$j(i) = 2^{i-2}$，如

$$c_{(i,j)} = \begin{cases} i & \text{if } i < 2 \\ \frac{2j+1}{2^{i-1}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是，由所有有限有理点组成的类构成了 $[0,1]$ 的一个选择类

$$\mathrm{Ch}_X([0,1]) = \{c_{(i,j)} ; \ ((i<2) \wedge (j=0)) \vee (\exists i \in FN \setminus 2)(j \in 2^{i-2})\},$$

并且 $\mathscr{S}_X = \{\mathrm{mon}\,(c);\ c \in \mathrm{Ch}_X([0,1])\}$ 成为一个拓扑 σ-划分，因为对于所有 $c \neq d$，$\mathrm{mon}\,(c) \cap \mathrm{mon}\,(d) = \emptyset$，并且 $[0,1]_{2^\varepsilon} = \cup_{c\in \mathrm{Ch}_X([0,1])} \mathrm{mon}\,(c)$。

设 $F_{\mathscr{S}_X}$ 是 $\mathscr{S}_X$ 上的一个拓扑 BAF，其中 $S_{(i,j),k} = R_k \text{“} \{c_{(i,j),k}\}$ 对所有 $k \geq i$，否则，$S_{(i,j),k} = \emptyset$。于是，$\mathscr{S}_X$ 中每个元素的值定义为 $F_{\mathscr{S}_X}(\mathrm{mon}\,(c_{(i,j)})) = (|S_{(i,j),k}|)_{k\in FN}$，其中

$$|S_{(i,j),k}| = 2^{\varepsilon-k+1-[i<2]}[12] \cdot [k \geq i]$$

且每个点的有理切割表示为

$$\lim \frac{F_{\mathscr{S}_X}\left(\mathrm{mon}\left(\{c_{(i,j)}\}\right)\right)}{F_{\mathscr{S}_X}([0,1])} = \lim \frac{(2^{\varepsilon-k+1-[i<2]} \cdot [k \geq i])_{k\in FN}}{(2^\varepsilon)} = \frac{1}{FN}.$$

[10]看起来似乎还剩下 2^{FN} 个部分，而 2^{FN} 确实由不可数多个元素组成。然而，2^{FN} 只包含可数多个有限集，也就是说，FN。除了这些集合之外，它还包含真半集。[11]详情请参阅 Sakahara 和 Sato [9] 是一个艾弗森括号，表示当 $i < 2$ 时其值为 1，否则为 0。

区间 $[0,\ell]$ 的有理切割（其中 $2^{\varepsilon}\cdot\ell\in 2^{\varepsilon}$）也表示为

$$\lim\frac{\sum_{i\in FN}\sum_{j\le 2^{i}\cdot\ell}F_{\mathscr{S}_X}(\mathrm{mon}\left(\{c_{(i,j)}\}\right))}{F_{\mathscr{S}_X}([0,1])}\;=\;\lim\frac{\left((2m(k)-1)\cdot 2^{\varepsilon-k}\right)_{k\in FN}}{(2^{\varepsilon})}\;\doteq\;\ell,$$

其中 $m(k)=\max_{j\in 2^{k-1}}\{j\,;\;\;\frac{j}{2^{k-1}}\le\ell\}$。

由于每个元素都满足 $|S_{(i,j),\;k}|\;=\;2^{\varepsilon-k+1}$ 除非 $i<2$, $F_{\mathscr{S}_X}$ 几乎是一致的，因此根据定理 27，可以直接从选择类 $\mathsf{Ch}_X([0,1])$ 中构造出相同的有理割。设 $F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}$ 是 $\mathsf{Ch}_X([0,1])$ 的典范 BAF。那么，由于其元素等于 $F_{\mathscr{S}_X}$ 除以 $2^{\varepsilon-k}$，$\mathsf{Ch}_X([0,1])$ 的值为

$$F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}(\mathrm{Ch}_X([0,1]))\;=\;\sum_{c\in\mathrm{Ch}_X([0,1])}F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}(c)\;=\;(2^{k})_{k\in FN}.$$

同样，每个点的有理割为

$$\lim\frac{F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}(c_{(i,j)})}{F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}([0,1])}\;=\;\lim\frac{([k\ge i])_{k\in FN}}{(2^{k})_{k\in FN}}\;=\;\frac{1}{FN},$$

而区间 $[0,\ell]$ 的有理割为

$$\lim\frac{\sum_{i\in FN}\sum_{j\le 2^{i}\cdot\ell}F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}(c_{(i,j)})}{F_{\mathrm{Ch}_X([0,1])}([0,1])}\;=\;\lim\frac{(m(k))_{k\in FN}}{(2^{k})_{k\in FN}}\;\doteq\;\ell.$$

例 2。实数单位区间的 σ-划分可以采用不同于例 1 的方式枚举。为说明这一点，我们考虑另一个生成序列 $(P_i)_{i\in FN}$，如下所示:

$$P_k\;=\;\left\{\langle a,b\rangle\in[0,1]^2_{2^{\varepsilon}}\,;\;\left(\begin{array}{c}\left(\left(\max\{a,b\}\le\frac{3}{4}\right)\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\cdot|b-a|\le\frac{1}{2^k}\right)\right)\\ \wedge\left(\left(\frac{3}{4}\le\min\{a,b\}\right)\Rightarrow\left(2\cdot|b-a|\le\frac{1}{2^k}\right)\right)\\ \wedge\left(\begin{array}{c}\left(\min\{a,b\}\le\frac{3}{4}\le\max\{a,b\}\right)\\ \Rightarrow\left(2\max\{a,b\}-1-\frac{2}{3}\min\{a,b\}\le\frac{1}{2^k}\right)\end{array}\right)\end{array}\right)\right\}.$$

这或许看起来很复杂，不过，$(P_i)_{i\in FN}$ 实际上只是将两个生成序列 $(R_i)_{i\in FN}$ 和 $(Q_i)_{i\in FN}$ 连接起来，它们定义如下

$$R_k\;=\;\left\{\langle a,b\rangle\in\left[0,\tfrac{3}{4}\right]^2_{2^{\varepsilon}}\;;\;\tfrac{2}{3}|b-a|\le\tfrac{1}{2^k}\right\}\;\text{ and }\;Q_k\;=\;\left\{\langle a,b\rangle\in\left[\tfrac{3}{4},1\right]^2_{2^{\varepsilon}}\;;\;2|b-a|\le\tfrac{1}{2^k}\right\}.$$

很容易验证，$(P_i)_{i\in FN}$ 也是一个 π-生成序列[13]。为确保无误，我们来验证 $(P_i)_{i\in FN}$ 满足 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in P_{k+1}$，继而满足 $\langle x,z\rangle\in P_k$。其中一个非平凡的情形是 $x\le y\le\frac{3}{4}\le z$。由于 $\langle x,y\rangle\in P_{k+1}$，不等式 $2\cdot 3(y-x)\;\le\frac{1}{2^{k+1}}$ 成立。不等式 $2z-1-\frac{2}{3}y\le\frac{1}{2^{k+1}}$ 也成立，因为 $\langle y,z\rangle\in P_{k+1}$。将这两个不等式相加，可得以下不等式

$$2z-1-\frac{2}{3}x\;\le\;\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\;=\;\frac{1}{2^k}.$$

这意味着 $\langle x,z\rangle\in P_k$。

[13]参见 Vopˇenka 的第 3 章第 1 节 [14]

另一个选择类 $\mathsf{Ch}_Y([0,1]) = \{c_{(i,j)} : (\exists i \in \mathsf{FN})(j \in j(i))\}$ 根据最大 P_k-网的序列 $(Y_k)_{k\in FN}$，其中 $j(0) = j(1) = 1$，且 $j(i) = 2^{i-2}$定义为：若 $i < 2$，则为 $c_{(i,0)} = i$；否则，

$$c_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{2j+1}{2^{i-1}} & \text{if } j < 2^{i-3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{2^{i-1}} & \text{if } j \geq 2^{i-3} \end{cases}$$

且拓扑的 σ-划分表示为 $\mathscr{S}_Y = \{\mathsf{mon}(x) : x \in \mathsf{Ch}_Y([0,1])\}$。

设 $F_{\mathscr{S}_Y}$ 是一个拓扑 BAF，其中 $S_{(i,j),k} = \emptyset$ 若 $k < i$，则为；否则，$S_{(i,j),k} = P_k\text{“}\{c_{(i,j),k}\}$。那么，区间的长度，即 $\left[0, \frac{3}{4}\right]$，与例 1 中的相同，表示为

$$\lim \frac{F_{\mathscr{S}_Y}([0,\frac{3}{4}])}{F_{\mathscr{S}_Y}([0,1])} = \lim \frac{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}[k=0] + \frac{1}{2^{k+1}}[k \geq 2])_{k\in FN}}{(1)} \doteq \frac{3}{4}$$

然而，典范 BAF 的 $\lim F_{\mathrm{Ch}_Y([0,1])}([0,\frac{3}{4}]) F_{\mathrm{Ch}_Y([0,1])}([0,1]) = \frac{1}{2}$。

可以看出，两个例子中考察的单子对应于 ZFC 框架下的维塔利集。众所周知，维塔利集不可测；然而，在 AST 框架下，可以计算它的比率。事实上，正如我们将在下一节看到的，它的测度也可以枚举。

8 Kalina 测度

Kalina测度[14] $m_{s,\ F}$；$\mathscr{O}(s,F) \to R \cup \{\infty\}$ 定义为

$$m_{s,F}(B) = \lim_{i\in FN} \mathrm{mon}\left(\frac{b_i}{s_i}\right).$$

其中，$s = (s_i)_{i\in FN}$是 S的逼近序列，且 $F(B) = (b_i)_{i\in FN}$。若实数序列（$\mathrm{mon}(a_i)$）$_{i\in FN}$收敛[15] 到 $\mathrm{mon}(x)$，记作 $\lim_{i\in FN} \mathrm{mon}(a_i) = \mathrm{mon}(x)$，当且仅当

$$(\forall q \in FQ)(\exists i \in FN)(\forall j > i) \begin{pmatrix} (|a_j - x| < |q|) \\ \vee (a_j > q \wedge x > q) \\ \vee (a_j < q \wedge x < q) \end{pmatrix}.$$

当 $F_{\mathscr{S}}$在 $\mathscr{S}$上是 σ-一致的时，$m_{F_{\mathscr{S}}(S)\ F_{\mathscr{S}}}(B)$ 简写为 $m_{F_{\mathscr{S}}}(B)$，而$\langle F(S)\ F\rangle$-可观测类简称为 $F_{\mathscr{S}}$-可观测。

容易确认，任意给定的博雷尔半集 B的 Kalina 测度，以某种方式对应于由 B给出的有理割。下一个命题将展示其对应方式。

---

[14]请注意，Kalina测度的定义与 Kalina [3]的定义略有不同，后者将其定义为

$$m_{s,F}(B) = r \quad \text{iff} \quad (\exists \delta \in N \setminus FN)(\delta < \alpha)(\forall \eta \in \delta \setminus FN)\left(\frac{b_\eta}{s_\eta} \in r\right),$$

其中，逼近序列定义为由 $\delta \in N \setminus FN$ 元素组成，使得$\frac{b_\eta}{s_\eta}$存在。容易验证，当（a_i）$_{i\in FN}$收敛于 x 时，根据延拓公理，存在一个延拓序列（a_i）$_{i\in\delta}$，对所有 $\eta \in \delta \setminus FN$均满足 $a_\eta \in$ mon（x）。[15] 一般性陈述见 Sakahara 和 Sato [8]。

命题28. Kalina测度$m_{s,\ F}$（B）对每个 $B \in \mathscr{B}_s$都满足以下方程

$$m_{s,F}(B) \ = \ \begin{cases} \text{mon}\,(q) & if \ \ \lim \frac{F(B)}{s} \ \doteq \ q \\ \text{mon}\,(0) & if \ \ \overline{\lim} \frac{F(B)}{s} \ \subseteq \ \frac{1}{FN} \\ \infty & if \ \ \underline{\lim} \frac{F(B)}{s} \ \supseteq \ \frac{FN}{1} \end{cases}$$

证明。先考虑 $\lim {}^{F}{}_{(B)\ s} \ \doteq \ q$ 成立的情形。这意味着对所有 $a \in$FQ，不等式 $\lim |\frac{b_i}{s_i} - q| \leq |a|$ 成立，因此存在满足 $|\frac{b_j}{s_j} - q| \leq |a|$ 的 $i \in$FN，使得对每个 $j > i$和 $a \in$FQ，$\lim \text{mon}\ \left(\frac{b_i}{s_i}\right) = \text{mon}\,(q)$ 成立。

其次，考虑 $\lim {}^{F}{}_{(B)\ s} \ \subseteq \frac{1}{FN}$成立的情形。这意味着对每个$a \in$ FQ，都存在满足 $0 \subseteq \frac{b_j}{s_j} \subseteq |a|$ 的 $i \in$ FN，使得对所有 $j > i$，$0 \leq \frac{b_j}{s_j} \leq |a|$ 成立，因此对所有 $j > i$，$\lim \text{mon}\ \left(\frac{b_i}{s_i}\right) = \text{mon}\,(0)$。

最后，考虑 $\lim {}^{F}{}_{(B)\ s} \ \supseteq \frac{FN}{1}$成立的情形。这意味着对每个$a \in$FQ，都存在满足 $|a| \subseteq \frac{b_j}{s_j}$的 $j > i$，使得对所有 $i \in$FN，$|a| \leq \frac{b_j}{s_j}$对某个 $j > i$ 成立，因此 $\lim \text{mon}\ \left(\frac{b_i}{s_i}\right) = \infty$ 成立。 □

设 $s = (s_i)_{i \in FN}$ 是具有非可加割的博雷尔半集的任意逼近序列，则根据定理 20，$\langle s, F\rangle$-可观测类与 $\mathscr{B}_s$ 重合。这意味着下面的定理，它对应于 Kalina [3]的定理 3.7。

定理29. 设 F 是一个 BAF，且 $(s_i)_{i \in FN}$ 逼近一个具有非可加割的博雷尔半集。那么 $\mathscr{O}(s, F) \ = \ \mathscr{B}_s$，并且 $m_{s,\ F}$ 是非递减的非负测度。

请注意，这与 Kalina [3] 的原始设定截然不同：在我们的设定中，σ-可加性对 F 并不成立。这种差异源于测度的定义方式。首先，在我们的设定中，逼近序列被定义为可数序列，因此能够捕捉诸如 $\frac{1}{FN}$ 这样的特征性有理割；而 Kalina [3] 将其定义为不可数序列。其次，在计算测度之前，我们的设定先给出类的有理割；而 Kalina [3] 则直接为各个类赋予实数，因此无法区分 $\frac{1}{FN}$ 的实数值与 0。

还要注意，任意给定的博雷尔半集 $X \in \mathscr{B}_s$ 的下割 $\underline{X}$ 和上割 $\overline{X}$ 的 Kalina测度相同，只要 s 逼近非可加割。下一个定理直接由定理 22 得出，陈述了这一性质。

定理 30. 设 $B, C \in \mathscr{B}_s$ 满足 $\underline{B} \doteq \underline{C}$。那么 $m_{s,\ F}(B) = m_{s,\ F}(C)$。

相反，当 $s = (s_i)_{i \in FN}$ 是一个具有可加割的逼近序列时，并非每个博雷尔半集都总是 $\langle s, F\rangle$-可观测。下一个定理陈述了这一点，这是定理 23 的直接推论。

定理 31. 设 $B \in \mathscr{B}_s$, $|B| = \cup \cap (s_i)_{i \in FN}$ 是一个可加割。那么

i.) 对每个实数 $0 \leq r \leq \infty$，都存在一个 BAF F，使得 $B \in \mathscr{O}(s, F)$ 且 $m_{s,\ F}(B) = r$

ii.) 存在一个 BAF G，使得 $B \notin \mathscr{O}(s, G)$。

此外，当 S 具有可加割时，Kalina 测度的基本特征便显现出来。若存在一个 σ-划分 $\mathscr{T} = \{S_{(i,j)} \subseteq T;\ (i \in \mathrm{FN})(j \in j(i))\}$，属于 S 的子类 T，并满足对于所有 $i \in \mathrm{FN}$ 和 $j \in j(i)$，$m_{\mathscr{S}}(S_{(i,j)}) = \mathrm{mon}\,(0)$，且$m_{\mathscr{S}}(\cup_{i\in FN}\cup_{j\in j(i)} S_{(i,j)}) = \mathrm{mon}\,(r) \in (0,1]$，则称 BAF $F_{\mathscr{S}}$ 是 σ-超可加的。

定理32. 设 $\mathscr{C} = \langle C、\doteq_{\mathscr{C}}\rangle$ 是一个连续统，且 $F_{\mathscr{S}}$ 是一个几乎一致拓扑 BAF。那么，$F_{\mathscr{S}}$ 是 σ-超可加的。

证明. 设 $\mathscr{S} = \{S_{(i,j)}; (i \in \mathrm{FN})(j \in j(i))\}$ 是一个几乎一致拓扑σ-分割 $\mathscr{C}$，且 $F_{\mathscr{S}}$ 是一个拓扑 BAF，定义如下

$$F_{\mathscr{S}}(\cup_{i\in I}\cup_{j\in j(i)} S_{(i,j)}) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in j(i)} \left(|S(i)_{(i,j),k}|\right)_{k\in FN}.$$

由于 $F_{\mathscr{S}}$ 几乎一致，存在一个有限集 $b \subseteq \mathrm{Ch}_R(\mathscr{C})$，满足$|R_k\text{“}\{x_{(i,j),k}\}| = n_k$ 对所有$x_{(i,j),\ k} \in b$均成立，并且下列不等式成立

$$|R_k\text{“}\{x_{(i,j),k}\}| \le q \cdot n_k \quad \text{where } \langle x_{(i,j),k}, c_{(i,j)}\rangle \in R_k,$$

因此，$|S_{(i,j),\ k}| \le q \cdot n_k$ 对所有 $i \in \mathrm{FN}$ 均成立，其中某个 $q \in \mathrm{FQ}$。于是，下列不等式成立

$$m_{\mathscr{S}}(S_{(i,j)}) \le \lim_{i\in FN} \mathrm{mon}\left(\frac{q\cdot n_k}{\sum_{k\in i} j(k)\cdot n_k}\right) = \lim_{i\in FN} \mathrm{mon}\left(\frac{q}{\sum_{k\in i} j(k)}\right) = \mathrm{mon}\,(0).$$

但是$\sum_{i\in FN}\sum_{j\in j(i)} F_{\mathscr{S}}(S_{(i,j)}) = F_{\mathscr{S}}(S)$，因此$m_{\mathscr{S}}\left(\cup\cup S_{(i,j)}\right) = \mathrm{mon}\,(1)$成立。 □

下面给出单位区间 $[0,1]$ 上的 σ-分割且 σ-相容的 BAF 示例。

例3. 设 $[0,1] = \langle [0,1]_{2^\varepsilon}, \doteq\rangle$ 为例 1 中考察的闭单位区间的连续统。$[0,\ell]$ 的一个Kalina测度定义如下:

$$m_{F_{\mathscr{S}_R}}([0,\ell]) = m_{F_{\mathrm{Ch}_R([0,1])}}\left(\cup_{i\in FN}\cup_{j\le 2^i\cdot\ell} \mathrm{mon}\left(c_{(i,j)}\right)\right) = \mathrm{mon}\,(\ell).$$

然而，每个单子 $\mathrm{mon}\,(q)$ 的 Kalina测度定义如下:

$$m_{F_{\mathscr{S}_R}}(\mathrm{mon}\,(q)) = m_{F_{\mathrm{Ch}_R([0,1])}}(q) = \mathrm{mon}\,(0)$$

因此， σ-超可加性成立。

9 概率测度与随机变量

设 A 为非空博雷尔半集， F 为 Borel逼近函数。若函数 $X_F: A \to Q$ 满足：对于每个 $L \in \mathscr{B}_Q$，$(X_F^{-1})\text{“}L$ 是 $\langle F(A)\ F\rangle$-可观测的，且由下式定义的函数 $D: \mathscr{B}_Q \to R$

$$D(L) = m_{F(A),F}\left(\left(X_F^{-1}\right)\text{“}L\right)$$

是 σ-超可加的。函数 D 称为X_F的概率分布。

例4. 例3中考察的均匀实区间 $[0,1]$上的随机变量的一个例子可简单表示为

$$X_{F_{\mathscr{S}}}(x) \;=\; x,$$

其对任意子类 $B \subseteq [0,1]$ 的概率分布可简单地表示为

$$D(B) \;=\; m_{F_{\mathscr{S}}}\left(\left(X_{F_{\mathscr{S}}}^{-1}\right)\text{“}B\right) \;=\; m_{F_{\mathscr{S}}}(B)\,.$$

10 Kalina 可测函数

设 $\mathscr{C} = \langle C、\doteq_{\mathscr{C}}\rangle$ 是连续统， $\mathscr{R} = \langle Q、\doteq\rangle$ 是实连续统。若对于每个满足 $r = \text{mon}\,(q)$ 且某个 $q \in Q$ 存在的 $r \in R$ ，都存在一个博雷尔类 $B \subseteq C$ 和一个 $\mathscr{F}$ 的表示 F，即 $\mathscr{F} = [F]$，使得.....则称实函数 [16] $\mathscr{F}:\ \mathscr{C} \to \mathscr{R}$ 可测。

$$(\forall q \in Q)\,(\exists B \in \mathscr{B}_C)\,(B = \text{fig}\,(\{x \in C;\, F(x) \le q\}))\,,$$

其中 $\mathscr{B}_C$ 是包含 C 的所有集合论可定义子类的最小 σ-环。于是，得到下一个定理。

定理33. 每个实函数 $\mathscr{F}$ 都是可测的。

证明。由于 F 是一个实类， $\{x \in C$；根据 Kalina 和 Zlatǒs 的引理1.2.1（b） [4], $F\,(x) \le q\}$ 也是一个实类。因此，其图形是 $\mathscr{B}_C$ 的一个元素。 □

11 积分

设 $\mathscr{S}$ 是连续统 $\mathscr{C} = \langle C、\doteq_{\mathscr{C}}\rangle$ 的一个 σ-划分。设 $\mathscr{F}:\ \mathscr{C} \to \mathscr{R}$ 是一个实函数， $G_{\mathscr{S}}$ 是一个 σ- 一致的 BAF，它为每个 $y \in F(B)$ 和 $G_{\mathscr{S}}(C) = (s_k)_{k\in FN}$ 给出博雷尔逼近序列 $G_{\mathscr{S}}(F^{-1}(\{y\})) = (x_k)_{k\in FN}$。那么，关于 $G_{\mathscr{S}}$， $\mathscr{F}$ 在 fig (B) 上的积分为

$$\int_{\mathscr{S}(B)} \mathscr{F}\, dm_{G_{\mathscr{S}}} \;=\; \lim_{k\in FN} \text{mon}\left(\sum_{y\in F(B)} y \cdot \frac{x_k}{s_k},\right)$$

其中 $\mathscr{S}(B) = \{S \in \mathscr{S};\ \ S \subseteq \text{fig}\,(B)\}$，且 F 是 $\mathscr{F}$ 的一种表示。

定理34. 设 $[0,1] = \langle [0,1]_{2^\varepsilon}, \doteq\rangle$ 是单位长度实连续统， $\mathscr{S}$ 是 $[0,1]$，的 σ-分割，且 $G_{\mathscr{S}}$ 是几乎一致拓扑 BAF。那么，在 $[0,\ell]$ 上对 $\mathscr{F}$ 的积分（其中 $\ell \in [0,1]_{2^\varepsilon}$）与黎曼积分一致:

$$\int_{[0,\ell]} \mathscr{F}\, dm_{G_{\mathscr{S}}} \;=\; \int_0^\ell \mathscr{F}(x)dx.$$ [17]

[16]实函数的定义见 Tsujishita 的 2.3 Morphism [13]。详情另见 Sakahara 和 Sato 的第 3 节 [9]。[17]定义如下： $\int_0^\ell \mathscr{F}(x)dx = \text{mon}\left(\sum_{0\le x\le \ell} F(x)\Delta x\right)$，其中 $\Delta x = \frac{1}{2^\varepsilon}$。有关此记号的详细说明，参见 Sakahara 和 Sato [9]。

证明. 回顾一下，拓扑 σ-分割 $\mathscr{S}$ 定义为

$$\mathscr{S} \;=\; [0,1]_{2^\varepsilon}/\doteq .$$

令 $G_{\mathscr{S}}$ 为一个几乎一致的拓扑 σ-一致 BAF。则， $\mathscr{F}$ 在 $[0,\ell] = \text{fig } ([0,\ell]_{2^\varepsilon})$ 上的积分为

$$\int_{[0,\ell]} \mathscr{F}\, dm_{G_{\mathscr{S}}} \;=\; \lim_{k\in FN} \operatorname{mon}\left(\sum_{q\in F([0,\ell]_{2^\varepsilon})} q\cdot\frac{x_k(q)}{2^\varepsilon}\right).$$

其中 $(x_k(q))_{k\in FN} = G_{\mathscr{S}}(F^{-1}(q))$。

由于 $G_{\mathscr{S}}$ 是拓扑的且几乎一致，根据定理27，以下方程成立

$$\lim_{k\in FN} \operatorname{mon}\left(\sum_{q\in F([0,\ell]_{2^\varepsilon})} q\cdot\frac{x_k}{2^k}\right) \;=\; \operatorname{mon}\left(\sum_{q\in F([0,\ell]_{2^\varepsilon})} q\cdot|F^{-1}(q)|\cdot\Delta x\right).$$

同一区间的黎曼和为:

$$\int_0^\ell \mathscr{F}(x)dx \;=\; \operatorname{mon}\left(\sum_{0\le x\le \ell} F(x)\cdot\Delta x\right) \;=\; \operatorname{mon}\left(\sum_{q\in F([0,\ell]_{2^\varepsilon})} q\cdot|F^{-1}(q)|\cdot\Delta x\right).$$

这意味着

$$\int_{[0,\ell]} \mathscr{F}\, dm_{G_{\mathscr{S}}} \;=\; \int_0^\ell \mathscr{F}(x)dx.$$

□

12 结语

本文提供了一种测度方法，可用于测量任意给定的连续统，包括那些无法用勒贝格型测度测量的连续统。例 1 和例 2 讨论了两个例子：与维塔利集对应的类，它将一个单位区间剖分成一个 σ-分割。另一个例子的细节见配套论文 [10], ，它是由巴拿赫–塔斯基定理 [1]，得到的类；该定理将一个球剖分成一个 σ-分割，其中由 G-轨道中的选择类构成。

这两个例子都将一个具有有限正测度的类剖分成大小相等的 σ-分割。由于勒贝格测度要求保持 σ-可加性，每个测度为 0 的元素即使可数多个相加，也不可能具有正测度。相比之下，Kalina 测度将其放宽为σ-超可加性，从而为这些元素具有正测度留出了空间。

准确地说，这是通过将有理数集扩展为有理切割系统实现的，扩展方式是加入两类可加割： $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$ 和 $Q\langle\frac{FN}{1}\rangle$。$\sigma$有限有理数的加法被规定为等于 $Q\langle\frac{FN}{1}\rangle$，而任何有限有理数除以 FN，则对偶地被确定为 $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$。 σ $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$ 的加法为何可以是任意有限数，其原因可通过

逆向追溯这一过程得出，也就是说，将任何数划分为 σ分区后，只要将它们相加，就能还原为原数。这些值借助选择公理，由各分量类的生成序列精确确定。表面看来， σ-超可加性之所以会出现，只是因为这些测度的值是用实数近似得到的。

由于 AST 的任意实连续统都被划分为点的 σ 分割，因此其上的 Kalina 测度本质上不需要零类。换言之，ZFC 中与零集对应的每个类都被吸收到 AST 的一个点中，因此它们的 σ 并集覆盖了整个连续统，外面不剩下任何东西。

请注意，这里采用了选择公理，或者说外延编码公理。人们常认为，它是某些不可测类存在问题的根源。然而，正如本文所示，该公理对于确定每个测度的精确值不可或缺，与不可测性无关。问题的本质另有所在。本文提出了一种可能的解决途径。

这里引入不定性的方式也值得一提。AST 成功地将不定性作为半集的一种形式纳入数的形式系统，具体而言，即 FN。加法有理割 $Q\langle\frac{1}{FN}\rangle$ 可以说是以一种对偶的方式引入不定性。借助逼近序列，该系统提供了一种适当处理这些不定数的计算方法。这或许能为处理涉及不定性的现象开辟一种全新的途径。

这类测量在日常情境中通常很重要。计算与自己想法相同的人所占的比例，或某件好事会发生的日子所占的比例时，人数或天数的总数往往难以确定。在日常生活中，我们会基于有限的经验，并将其推广到可数多种可能性，来进行这类略显模糊的测量。本文提出的框架为恰当地建模这类测量提供了一种方法。

参考文献

[1] 斯特凡·巴拿赫和阿尔弗雷德·塔斯基。论将点集分解为分别全等的部分。《数学基础》，6(1):244–277，1924年。[2] Martin Kalina。替代集合论中的概率。查理大学数学评论，30(2):347–356，1989年。[3] Martin Kalina。构造测度的序列方法。查理大学数学评论，30(1):121–128，1989年。[4] Martin Kalina 和 Pavol Zlatoˇs。割的算术与类的割。查理大学数学评论，29(3):435–456，1988年。[5] Martin Kalina 和 Pavol Zlatoˇs。AST 中的博雷尔类：可测性、割与等价。查理大学数学评论，030(2):357–372，1989年。

[6] Martin Kalina 和 Pavol Zlatoˇs。实类的切割。查理大学数学评论，30(1):129–136，1989年。[7] Miodrag Raˇskovi´c。替代集合论中的测度与积分。《数学研究所出版物》，29(43):121–128，1981年。[8] Kiri Sakahara 和 Takashi Sato。替代集合论中的基本拓扑概念与实数的构造。arXiv 预印本，arXiv:2005.04388，2020年5月。[9] Kiri Sakahara 和 Takashi Sato。替代集合论中的实函数及其微分。arXiv 预印本，arXiv:2007.08741，2020年5月。[10] Kiri Sakahara 和 Takashi Sato。非容许类上的 Kalina 测度。即将发表。[11] Anton´ın Sochor。初始段的加法（一）。查理大学数学评论，29(3):501–517，1988年。[12] Anton´ın Sochor。初始段的加法（二）。查理大学数学评论，29(3):519–528，1988年。[13] Toru Tsujishita。没有实无穷的替代数学。arXiv 预印本，arXiv:1204.2193，2012年4月。[14] Petr Vopˇenka。《替代集合论中的数学》。Teubner Verla- gagesellshaft，莱比锡，1979年。