arXiv:2303.11658v1 [math.LO] 21 Mar 2023

集合论中罗素式的典型性

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，
541 24，希腊塞萨洛尼基。电子邮
件：tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们调整了罗素提出的典型性概念。该概念曾在先前的一篇论文中针对一般一阶结构加以引入和研究；此次调整旨在使其能够用集合论语言表达。我们采用的非典型集合类 NT 的定义，是对罗素初始定义的一种自然强化；罗素的初始定义使用小（少数）外延的性质，而这里将这些外延限制在 V_ζ of V 的各个层级上。由此可将 NT 定义为属于某个可数序数可定义集合的集合类。因此，OD $\subseteq$NT，进而 HOD $\subseteq$HNT。我们证明，遗传非典型集合类 HNT 是 ZF 集合论的一个内模型。此外，我们通过证明在许多强迫扩张中，$M[G]$ 泛型集合 G是 $M[G]$的一个典型元素，确立了 $V \neq$NT 的（相对）相容性；这一事实完全符合典型性的直观含义。特别是，存在连续统多个典型实数是相容的。此外，由 Kanovei 和 Lyubetsky 的一个结果可知，HOD $\neq$ HNT 也是相对相容的。特别是，$\mathcal{P}(\omega) \cap$OD $\subsetneq \mathcal{P}(\omega) \cap$NT 是相容的。不过，仍有许多问题悬而未决，其中包括 HOD $\neq$ HNT $\neq V$、HOD $=$ HNT $\neq V$以及 HOD $\neq$ HNT $= V$ 的相容性。

数学主题分类（2010）：03E45，03E47

关键词：罗素的典型性概念、ZFC 的典型与非典型集合、序数可定义集合。

1 引言

受 B. Russell 在 [8]，中对“典型英国人”的定义启发，我们在 [9] 中引入了一阶结构 $\mathfrak{M}=$（M，.....）上的典型性质的严格定义（用 $\mathfrak{M}$ 的语言 L 表述），以及 $\mathfrak{M}$ 的典型元素的定义。典型元素的定义与 Martin-L¨ 对随机实数的著名定义及其变体显然十分相似，因此可以将其视为一种替代性的随机性概念。此外，在相关公式中允许出现参数，便可得到相对典型性概念：“对象 a 相对于对象 $\overline{b}$ 是典型的”，或称“$\overline{b}$-典型”，记作 Tp($a,\overline{b}$)。在这种形式下，典型性也与 van Lambalgen 的相对随机性概念 $R(x,\overline{y})$ 显然十分相似；并且已证明，Tp($a,\overline{b}$) 满足 [6] 及同一作者其他论文中提出的大多数随机性公理。首先，让我们回顾 [9] 中的一些基本定义。

罗素对典型英国人的启发性定义 [8, p. 89] 如下：

非典型英国人是指具备多数英国人所具备的所有性质的人。

如果不区分对象语言和元语言，这个定义显然是循环定义，因此实际上毫无用处；但只要作出上述区分，定义便显得自然且严谨。借助模型论的基本工具，很容易做到这一点。

我们的背景理论始终是 ZFC。设 L 是一阶语言，$\mathfrak{M}=(M,\ldots)$ 是一个无限的 L-结构，且 $A\subseteq M$。$L(A)$ 表示由来自 A 的参数扩充而成的 L。稍微宽泛地使用术语，我们也把 $L(A)$ 称为 $L(A)$ 的公式集合。所谓 $L(A)$ 的一个性质，是指一个含有一个自由变量的公式 $\phi(x)\in L(A)$。多数集是任何包含的元素严格多于其补集元素的 $X\subseteq M$，即 $|X|>|M\backslash X|$。（相应地，$M\backslash X$ 是少数集。）注意，$|X|>|M\backslash X|$ 等价于 $|M\backslash X|<|M|$（这尤其意味着 $|X|=|M|$）。令

$$\mathsf{mj}(M)=\{X\subseteq M:|X|>|M\backslash X|\}=\{X:|M\backslash X|<|M|\}$$

是 M 的多数子集类。mj(M) 是 M 上的一个滤子，它扩展了 M 的余有限子集的 Fr´echet 滤子。

给定一个 L结构 $\mathfrak{M}$，以及 L 的性质 $\phi(x,\overline{y})$ 和参数$\overline{b}\in M$，$\phi(\mathfrak{M},\overline{b})$ 表示 $\mathfrak{M}$中 $\phi(x,\overline{b})$ 的外延，即，

$$\phi(\mathfrak{M},\overline{b})=\{a\in M:\mathfrak{M}\models\phi(a,\overline{b})\}.$$

定义 1.1 若存在某个 $A \subseteq M$，使得对于每个 $\overline{b} \in A$, $\phi(\mathfrak{M}, \overline{b}) \in \mathrm{mj}(M)$，则称 L 的性质 $\phi(x, \overline{y})$ 在 $\mathfrak{M}$上是 A-典型的。特别地，如果 $\phi(x)$ 是 $\emptyset$-典型的，则称其为典型的。若元素 $a \in M$ 满足关于 $\mathfrak{M}$的每个 A-典型性质，则称其为 A-典型的。

如果 A 是有限的，我们就将其写成 $\overline{a} = \langle a_1、\ldots\ldots、a_n \rangle$ 的形式，并称其为 $\overline{a}$-典型，而不称为 A-典型。给定一个结构 $\mathfrak{M}$，记号 $\mathrm{Tp}(a, \overline{b})$ 表示“a 在 $\mathfrak{M}$ 上是 $\overline{b}$-典型的”。$\mathrm{Tp}(a)$ 表示 a 是“$\emptyset$-典型的”，或简称“典型的”。

以下关于典型元素的存在性结果见 [9]。

定理 1.2 如果对于某个 $\kappa \geq \aleph_0$，$\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的，那么对每个满足 $|A| < \kappa$ 的 $A \subseteq M$，M 都包含 A-典型元素。

定理 1.3 设 $\mathfrak{M}$ 是一个基于可数 L 的 L-结构，并设 $A \subseteq M$ 是参数集，且 $cf(|M|) > \max(\aleph_0, |A|)$。那么 $\mathfrak{M}$ 包含 $|M|$ A-典型元素，而只有 $< |M|$ 个非 A-典型元素。

将定理 1.3 应用于完全二阶算术的标准模型 $\mathcal{R} = (\omega, \mathcal{P}(\omega)\ +, \cdot, <, \in, 0, 1)$，即可得到以下直接推论。

定理 1.4 对任意满足 $|A| \leq \aleph_0$ 的 $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$，都存在 $2^{\aleph_0}$$A$-典型实数，而只有 $< 2^{\aleph_0}$ 个非 A-典型实数。更准确地说：对于任意有限（甚至可数）的实数元组 $\overline{b}$，$|\{x : \mathrm{Tp}(x, \overline{b})\}| = 2^{\aleph_0}$，而$|\{x : \neg\mathrm{Tp}(x, \overline{b})\}| < 2^{\aleph_0}$。

2 ZFC 中的典型性

引言中给出的定义和事实，涉及相对于给定一阶结构 $\mathfrak{M}$ 的所谓“外部典型性”，因为用于判定哪些性质是典型的、哪些不是的基数度量，相对于 $\mathfrak{M}$ 而言是外部的。在 [9]（注 2.15）中，我们已经指出，这样的概念适用于除集合论模型以外的所有一阶结构，因为每个这样的模型都有自己的内部基数，而这当然优于外部基数；我们还强调了“寻找一种适用于集合论模型的典型性概念这一挑战”。本文旨在探讨如何在任意 ZFC 模型中自然地实现罗素的典型性概念。这相当于寻找一种能够用集合论语言表达的典型性概念。基本问题在于如何实现罗素的

关于 ZFC 集合宇宙 V 中性质外延大小的多数/少数标准。

我们在 [9] 中论证过，典型对象的行为很像随机实体；这等价于说，非典型对象被认为是“特殊”实体，也就是我们用来构建“熟悉”结构的那类对象。例如，根据上一节的定义（涉及外部典型性），结构中的所有可定义元素都是非典型的；显然，对于 ZFC 中任何合理的典型性概念，也必然如此。也就是说，集合宇宙 V 中每个无需参数即可定义的集合都应当是非典型的。为简化记号，今后我们将结构 $\mathfrak{M}$ 与其论域 M视为相同。给定一个集合结构或类结构M，我们用 Df(M) 表示 M 中一阶可定义（无需参数）的元素所构成的集合或类（即，$a \in$ Df(M) 当且仅当存在一个公式 $\phi(x)$，使得 a 是 M 中满足 $\phi(x)$的唯一元素）。特别地，Df(V) 是集合宇宙 $(V, \in)$ 中所有无需参数即可定义的集合所构成的类。根据塔斯基真理不可定义定理，Df(M) 不是M 的可定义子类（特别是，集合论公式无法表达某个集合是否属于 Df(V)）。另一方面，有一点值得注意（尽管下文不会用到）：Df(V) 是 ZFC 中遗传可定义集所构成的内模型 HOD 的初等子类，即 Df(V) $\prec$ HOD （例如参见 [2, 定理 4]）。

令 TP、NT 分别表示 V 的典型集合与非典型集合所构成的互补类；我们正在寻求它们的定义。由前面的讨论可知，NT 的定义应满足以下要求：

$$\mathrm{Df}(V) \subseteq \mathrm{NT}. \tag{1}$$

此外，如上所述，NT 的定义应当能够用集合论语言表达。回顾上一节，给定一个第一结构 M 和一个公式 $\phi(x)$（或 $\phi(x, \overline{b})$，其中 $\overline{b} \in M$），$\phi(M)$（分别为 $\phi(M, \overline{b})$）表示 $\phi(x)$ 在 M 中的外延。即使 M 是真类，在集合论中也将使用相同的记号。因此，$\phi(V)$ 是类 $\{x : (V, \in) \models \phi(x)\}$，通常写作 $\{x : \phi(x)\}$。于是，对 NT 的定义提出的第二个要求是，存在一个一阶性质 $\sigma(x)$（不含参数），使得：

$$\mathrm{NT} = \sigma(V). \tag{2}$$

除了要求（1）和（2）之外，这一定义还应当是非平凡的，例如，ZFC 不应能证明不存在典型元素（即，$V =$NT），也不应能证明 NT 与 V 的某个已知子类相同。

下面我们考察 NT 定义的三种方案。它们都试图将罗素的多数/少数标准应用于集合 a 的性质扩展。第一种方案会导出 $V = \mathbf{NT}$，因此不可避免地因平凡而被否决。第二种方案则在某种意义上走向了相反的极端，因为它使得 $V \neq$NT 可在 ZFC 中证明。由此可知，$\mathbf{Df}(V) \not\subseteq \mathbf{NT}$，即对条件（1）的否定，是相容的。这足以成为否决这一方案的理由。第三种方案会产生两个子方案，其中一个令人欣喜地为 NT 提供了一种定义；根据这种定义，它的子类 HNT（由遗传非典型集合构成）结果是 ZF 的一个新的内模型。

由于在整个 V 上处理外延 $\phi(V)$会导致无法用集合论语言表达的概念，我们必须将讨论限制在片段 $V_\zeta = \{x$ 中 ϕ的外延：$rank(x) < \zeta\}, \zeta \in Ord$，属于 V；也就是说，限制在集合$\phi(V_\zeta) = \{x : (V_\zeta, \in) \models \phi(x)\}$。（我们将简单地用 $V_\zeta \models \phi$代替$(V_\zeta, \in) \models \phi$。）在$(V_\zeta, \in)$中工作时，我们经常使用来自 V_ζ的序数参数，也就是元组 $\overline{\theta} < \zeta$；但正如稍后将要解释的，使用序数参数在所有$(V_\zeta, \in)$中定义的集合，与在相同结构中完全不使用参数所定义的集合，并无不同。因此，至少目前我们可以放心地不使用序数参数。

在继续之前，让我们回顾罗素典型性的形式定义，并确定一些记号。给定一个结构 M，令

$$\mathrm{TP}(M) = \{a \in M : \mathsf{Tp}(a)\}, \quad \mathrm{NT}(M) = \{a \in M : \neg\mathsf{Tp}(a)\}$$

分别是 M 的典型元素类和非典型元素类。由定义 1.1 可得

$$\mathrm{NT}(M) = \{a \in M : (\exists \phi)(a \in \phi(M) \ \wedge \ |\phi(M)| < |M|)\}. \tag{3}$$

现在我们来讨论定义 NT(V) 的三种选项：$= \mathbf{NT}$。

选项 1。鉴于罗素典型性的定义不能直接应用于整个 V，一种自然的替代方案是相对于 V 的集合近似 V_ζ、$\zeta \in Ord$ 来定义它。也就是说，如果一个集合 a 相对于它所属的某个 V_ζ 是非典型的（即，对于某个 $\zeta > rank(a)$），那么我们就称该集合是非典型的；于是我们设

$$\mathrm{NT} := \bigcup_{\zeta > \omega} \mathrm{NT}(V_\zeta), \tag{4}$$

其中 NT(V_ζ) 的定义同式 (3)，即

$$\mathrm{NT}(V_\zeta) = \{a \in V_\zeta : (\exists \phi)(a \in \phi(V_\zeta) \wedge |\phi(V_\zeta)| < |V_\zeta|)\}.$$

很容易看出，定义 (4) 满足条件 (1) 和 (2)，但遗憾的是，它在以下意义上是平凡的：它意味着每个集合都是非典型的，即 NT $= V$。事实上，任取 $a \in V$，并选取某个 ζ，使得 $a \in V_\zeta$。显然，ζ 可定义于 $V_{\zeta+1}$ 中（作为其最大的序数），即 $\zeta \in \mathrm{Df}(V_{\zeta+1})$，因此 $V_\zeta \in \mathrm{Df}(V_{\zeta+1})$（作为秩为 $< \zeta$ 的元素组成的集合）。于是存在 $\phi(x)$，使得 $V_\zeta = \phi(V_{\zeta+1})$，故 $a \in \phi(V_{\zeta+1})$。此外，$|\phi(V_{\zeta+1})| = |V_\zeta| < |V_{\zeta+1}|$。因此 $a \in \mathrm{NT}(V_{\zeta+1})$，从而 $a \in \mathrm{NT}$。由此可知，不存在典型集合，即 $\mathrm{TP} = \emptyset$。

如果这个事实只涉及 ZFC 的某个模型，那将是正常且可以接受的。但它是 ZFC 的一个定理，这使非典型集合变得平凡，说明其定义过于宽泛。因此，接下来我们将尝试以某种方式限制它，并相应地扩大典型性类 TP。

选项 2。我们在上文看到，如果 $rank(a) = \zeta$，即 a 首次出现在 $V_{\zeta+1}$ 中，那么根据选项 1 中的定义，已经有 $a \in$非典型集合$(V_{\zeta+2})$，因此 $a \in$ 是非典型集合。因此，限制非典型集合并避免非典型集合 $= V$ 的一种可能方法，是不在任意满足 $\zeta > rank(a)$ 的层级 V_ζ 中判定集合 a 是否典型，而是在它首次出现的层级判定，即在 $V_{rank(a)+1}$。这样就会用以下定义取代非典型集合的定义 (4)：

$$\mathrm{NT}_0 := \{a : a \in \mathrm{NT}(V_{rank(a)+1})\}. \tag{5}$$

那么，对于每个满足 $rank(a) = \zeta$ 的 a，$a \in$非典型集合$_0$ 当且仅当存在 $\phi(x)$，使得 $a \in \phi(V_{\zeta+1})$ 且 $|\phi(V_{\zeta+1})| < |V_{\zeta+1}|$。

然而，事实证明，定义（5）对于非典型集合类而言过于严格（相应地，对于典型集合类而言又过于宽松），导致条件（1）不成立（也就是说，条件（1）与之不相容）。这将由以下结果推得。（请注意，$\mathrm{NT}(V_\zeta)$ 和 $\mathrm{TP}(V_\zeta)$ 仍沿用定义（3）中规定的含义。）

引理 2.1（ZFC） (i) 对于每个 $\zeta \geq \omega$，$|\mathrm{NT}(V_{\zeta+1})| < |V_{\zeta+1}|$，而$|\mathrm{TP}(V_{\zeta+1})| = |V_{\zeta+1}|$。

(ii) Moreover, for every $\zeta \geq \omega$, $|\mathrm{TP}(V_{\zeta+1}) \cap (V_{\zeta+1} \backslash V_\zeta)| = |V_{\zeta+1}|$.

证明。 (i) 证明很简单，与上文定理 1.3 的证明十分相似（参见 [9], 定理 2.9）。这只需基于两个事实即可得出：第一，不带参数的性质 $\phi(x)$ L 有可数多个；第二，$|V_{\zeta+1}| = 2^{|V_\zeta|}$ 的共尾度总是不可数的。只需根据定义观察到

$$\mathrm{NT}(V_{\zeta+1}) = \bigcup \{\phi(V_{\zeta+1}) : \phi \in L, \text{ and } |\phi(V_{\zeta+1})| < |V_{\zeta+1})|\}.$$

右侧的集合 $\phi(V_{\zeta+1})$ 有可数多个，且每个集合的基数都是 $< |V_{\zeta+1}|$，因此，由于 cf($|V_{\zeta+1}|$) $> \aleph_0$, |非典型集合($V_{\zeta+1}$)| $< |V_{\zeta+1}|$。因此 $|\mathrm{TP}(V_{\zeta+1})| = |V_{\zeta+1} \backslash$非典型集合($V_{\zeta+1}$)$| = |V_{\zeta+1}|$。

(ii) 我们有

$$\mathrm{TP}(V_{\zeta+1}) = (\mathrm{TP}(V_{\zeta+1}) \cap V_\zeta) \cup (\mathrm{TP}(V_{\zeta+1}) \cap (V_{\zeta+1} \backslash V_\zeta)).$$

由于 $|\mathrm{TP}(V_{\zeta+1}) \cap V_\zeta| \leq |V_\zeta|$，而根据 (i)，$|\mathrm{TP}(V_{\zeta+1})| = |V_{\zeta+1}|$，故结论成立。⊣

推论 2.2 ZFC 证明 $V \neq \mathrm{NT}_0$。具体而言，对于每个后继层 $V_{\zeta+1}$，$|V_{\zeta+1} \cap \mathrm{TP}_0| = |V_{\zeta+1}|$（其中 $\mathrm{TP}_0 = V \backslash \mathrm{NT}_0$）。

证明。$V_{\zeta+1} \backslash V_\zeta$ 的元素恰好是秩为 ζ 的元素，因此根据 TP_0, 的定义，显然 $V_{\zeta+1} \cap \mathrm{TP}_0 = (V_{\zeta+1} \backslash V_\zeta) \cap \mathrm{TP}(V_{\zeta+1})$。由此，结论可由引理 2.1 (ii) 得出。⊣

推论 2.3 $\mathrm{Df}(V) \not\subseteq \mathrm{NT}_0$ 与 ZFC 相容。因此，条件（1）不可证。

证明。众所周知，如果 ZFC 相容，那么它就有一些模型，其中的所有元素都是可定义的，也就是说，$\mathrm{Df}(V) = V$ 在这些模型中成立（见 [2]，其中证明了此类模型的存在，并称其为逐点可定义模型）。令$M \models$ ZFC 为这样一个模型。那么，$M \models V \neq \mathrm{NT}_0$, ，因为推论 2.2 可在 ZFC 中证明；或者等价地，$M \models V \not\subseteq \mathrm{NT}_0$。但由于在 $M\mathrm{Df}(V) = V$中也成立，因此在该模型中，$\mathrm{Df}(V) \not\subseteq \mathrm{NT}_0$。⊣

总而言之：用定义（5）替代定义（4），会走向光谱的另一极端，过度缩小非典型集合的类别，并导致条件（1）无法证明。因此，需要某种折中的方案，下一种选择将对此进行探讨。

选项 3。我们限制选项 1 中非典型集合的下一种尝试，是要求 V_ζ 的一个非典型元素落在某个基数不仅为 $< |V_\zeta|$，而是为 $< \kappa$ 的性质 ϕ 的外延 $\phi(V_\zeta)$ 中，其中 κ 满足 $\aleph_0 \leq \kappa \leq |V_\zeta|$。

更一般地，给定一个结构 M 和一个满足 $\aleph_0 \leq \kappa \leq |M|$ 的基数 κ，定义 (3) 中的 NT(M) 可细化如下：

$$\mathrm{NT}_\kappa(M) = \{a \in M : (\exists \phi)(a \in \phi(M) \ \wedge \ |\phi(M)| < \kappa)\}. \tag{6}$$

（在此记号下，$\mathrm{NT}(M) = \mathrm{NT}_{|M|}(M)$。）

事实 2.4 对任意 M 和任意 $\aleph_0 \leq \kappa < \lambda \leq |M|$，$\mathrm{NT}_\kappa(M) \subseteq \mathrm{NT}_\lambda(M)$。特别地，$\mathrm{NT}_{\aleph_0}(M)$ 是 M 的代数元素集合。

证明。第一个断言由定义（6）立即得出。关于第二个断言，回忆一下：如果存在一个公式 $\phi(x)$，它属于集合宇宙 M 的不含参数的语言，并且 $\phi(M)$ 是有限的，且 $a \in \phi(M)$，那么元素 $a \in M$ 在 M 中是代数的。（特别地，集合宇宙 M 中每个不含参数即可定义的元素都是代数的。）因此，a 是代数的，当且仅当存在某个 ϕ，使得 $a \in \phi(M)$ 且 $|\phi(M)| < \aleph_0$；也就是说，当且仅当 $a \in \mathrm{NT}_{\aleph_0}(M)$。⊣

由此可知，M 的非典型元素类达到最小；若令 $\mathrm{NT}(M) := \mathrm{NT}_{\aleph_0}(M)$，则该类与代数元素类相同（相应地，典型元素类达到最大）。对于 $M = (V_\zeta, \in)$ 以及满足 $\aleph_0 \leq \kappa \leq |V_\zeta|$ 的 κ，特别有：

$$\mathrm{NT}_\kappa(V_\zeta) = \{a \in V_\zeta : (\exists \phi)(a \in \phi(V_\zeta) \ \wedge \ |\phi(V_\zeta)| < \kappa)\}. \tag{7}$$

将事实 2.4 应用于结构 V_ζ，可得：

事实 2.5 对任意 $\zeta > \omega$ 和任意 $\aleph_0 \leq \kappa < \lambda \leq |V_\zeta|$，$\mathrm{NT}_\kappa(V_\zeta) \subseteq \mathrm{NT}_\lambda(V_\zeta)$）。特别地，$\mathrm{NT}_{\aleph_0}(V_\zeta)$ 是结构 $(V_\zeta, \in)$ 的代数元素集合。

$\mathrm{NT}_\kappa(V_\zeta)$ 的定义在局部上推广了 NT 的定义，但尚不清楚它是否适用于类 NT 本身。回想一下，对于任意序数 $\alpha \geq 0$，$|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$，其中 $\beth_0 = \aleph_0$，$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$，且 $\beth_\alpha = \sup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$，当 α 为极限时。（在广义连续统假设下，对于所有 α，$\beth_\alpha = \aleph_\alpha$。）

从本文的角度来看，将集合二分为典型的和非典型的，只涉及无限集合，或包含无限集合的有限集合等；而 V_ω 的元素都是遗传有限的，因而是可定义的，所以相对于 NT 的任何定义，它们都是非典型的。因此，(7) 中的序数 ζ 必须取遍超出 ω 的范围，即 $\zeta > \omega$。因此，对于每个无限基数 κ，自然可以设定

$$\mathrm{NT}_\kappa = \bigcup_{\zeta > \omega} \mathrm{NT}_\kappa(V_\zeta)$$

作为（4）的推广。问题是：κ的取值范围应当是什么？如果对于某个 ζ，$|V_\zeta| < \kappa$，那么根据（7），显然 $V_\zeta = \mathrm{NT}_\kappa(V_\zeta)$，因此 $V_\zeta \subseteq \mathrm{NT}_\kappa$。但鉴于 $\zeta > \omega$，这似乎相当不自然。因为在这种情况下，V中严格包含 V_ω 的整段都应当只由

非典型集合构成。尤其是，我们将有 $\mathcal{P}(\omega) \subseteq V_{\omega+1} \subseteq \mathrm{NT}_\kappa$，也就是说，所有实数都是非典型的；这与典型性最初在 [9] 中被引入时（相当成功地）作为随机性的平行概念相矛盾——在那里，有大量实数被证明是典型的（相对于该处采用的“外部”典型性概念）。

避免这种不自然情况的唯一办法，是将范围限制在满足以下条件的那些 κ：对于所有 $\zeta > \omega$，都有 $\kappa \leq |V_\zeta|$；或者等价地，限制在满足 $\kappa \leq |V_{\omega+1}|$ 的那些 κ。鉴于 $|V_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0}$，且后者可能的最小值为 $\aleph_1$，我们得出结论：κ 唯一可接受的取值是 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$，因此我们只应考虑以下类

$$\mathrm{NT}_{\aleph_0} = \bigcup_{\zeta>\omega} \mathrm{NT}_{\aleph_0}(V_\zeta), \quad \mathrm{NT}_{\aleph_1} = \bigcup_{\zeta>\omega} \mathrm{NT}_{\aleph_1}(V_\zeta). \tag{8}$$

因此，$\mathrm{NT}_{\aleph_0}$ 和 $\mathrm{NT}_{\aleph_1}$（其中 $\mathrm{NT}_{\aleph_0} \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_1}$）是类 NT（非典型集合类）的两个自然候选定义。它们都可以用集合论语言表达，因此满足条件（2）。我们将在下文看到，$\mathrm{OD} \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_0} \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_1}$，所以特别地，$\mathrm{Df}(V) \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_0} \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_1}$；也就是说，它们还满足条件（1）。

我们先来讨论 $\mathrm{NT}_{\aleph_0}$。根据事实 2.5，并运用反射原理，可知 $\mathrm{NT}_{\aleph_0}$ 是 V 中代数元素所构成的类，也就是说，是属于有限集合且这些有限集合可在 V 中借助序数参数定义的元素，即属于有限 OD 集。实际上，这个类以及类 $\mathrm{HNT}_{\aleph_0} = \{x : TC(\{x\}) \subseteq \mathrm{NT}_{\aleph_0}\}$（即遗传非典型集合），都不是新概念。J.D. Hamkins 和 C. Leahy 已经从不同的动机出发，在 [3], 中对其进行了研究，并称之为“序数代数”集合类，记作 OA。OA 与 $\mathrm{NT}_{\aleph_0}$ 的定义唯一的区别在于：$\mathrm{NT}_{\aleph_0} = \bigcup_{\zeta>\omega} \mathrm{NT}_{\aleph_0}(V_\zeta)$，而 OA 在 [3] 中被定义为这样一个集合类：其中的集合在结构 V_ζ 中借助序数参数而成为代数元素。这等价于说，$\mathrm{OA} = \bigcup_{\zeta>\omega} \mathrm{NT}^*_{\aleph_0}(V_\zeta)$，其中 $\mathrm{NT}^*_{\aleph_0}(V_\zeta)$表示结构 $(V_\zeta, \in, \zeta)$ 中的代数元素集合；该结构即是添加了序数参数 $< \zeta$的 $(V_\zeta, \in)$。

现在，众所周知，根据 [7], ，尽管对于每个特定的 V_ζ，在 $(V_\zeta, \in, \zeta)$ 中的可定义性与在 $(V_\zeta, \in)$ 中的可定义性并不一致，但在某个 $(V_\zeta, \in, \zeta)$ 中可定义的所有集合，与在某个 $(V_\zeta, \in)$ 中可定义的所有集合并无不同。这归因于以下关键事实（参见 [7]中的扩展反射原理）。

引理 2.6 对于任意序数 $\theta_1, \ldots, \theta_n$，存在一个序数 $\eta > \theta_1, \ldots, \theta_n$，使得 $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathrm{Df}(V_\eta)$。

正是由于这个引理，序数可定义集类 OD 才能定义为 $\bigcup_{\zeta\in On}\mathrm{Df}(V_\zeta)$，尽管我们经常在定义中允许使用序数参数，也就是说，我们实际上处理的是 $\bigcup_{\zeta\in On}\mathrm{Df}(V_\zeta,\zeta)$ 中的集合。基于同样的理由，以下结论成立。

引理 2.7 序数代数集合 $=$ 非典型集合$\aleph_0$。

证明。我们必须证明 $\bigcup_{\zeta>\omega}$非典型集合$^*_{\aleph_0}(V_\zeta) = \bigcup_{\zeta>\omega}$非典型集合$\aleph_0(V_\zeta)$。由于对每个 $\zeta>\omega$，显然都有 $\mathrm{NT}\aleph_0(V_\zeta) \subseteq \mathrm{NT}^*_{\aleph_0}(V_\zeta)$，因此一个包含关系显然成立。反过来，设 $a\in\mathrm{NT}^*_{\aleph_0}(V_\zeta)$，其中某个 ζ 如此。于是存在 $\phi(x,\overline{y})$ 和 $\overline{\theta}<\zeta$，使得 $a\in\phi(V_\zeta,\overline{\theta})$ 且 $|\phi(V_\zeta,\overline{\theta})|<\aleph_0$。根据引理 2.6，存在 η，使得 $\zeta,\overline{\theta}\in\mathrm{Df}(V_\eta)$。于是 $V_\zeta\in V_\eta$，并且由满足关系的绝对性可知，对所有 $x\in V_\zeta$，

$$V_\zeta\models\phi(x,\overline{\theta})\Leftrightarrow V_\eta\models(V_\zeta\models\phi(x,\overline{\theta})).$$

由于 $\zeta,\overline{\theta}$在 V_η中是可定义的，公式 $\psi(x,\zeta,\phi,\overline{\theta}):=(V_\zeta\models\phi(x,\overline{\theta}))$ 在 V_η中无参数地定义了 $\phi(V_\zeta,\overline{\theta})$，也就是说，$\phi(V_\zeta,\overline{\theta})=\psi(V_\eta)$。由于$a\in\psi(V_\eta)$ 且 $|\psi(V_\eta)|=|\phi(V_\zeta,\overline{\theta})|<\aleph_0$，可得 $a\in$非典型集合$\aleph_0(V_\eta)$。这就证明了 $\bigcup_{\zeta>\omega}$非典型集合$^*_{\aleph_0}(V_\zeta)\subseteq\bigcup_{\zeta>\omega}$非典型集合$\aleph_0(V_\zeta)$。⊣

鉴于引理 2.6 及其对 OD 定义的影响，$\mathrm{NT}\aleph_0$ 和 $\mathrm{NT}\aleph_1$ 这两个类有如下简单刻画。

Le题 2.8 (i) 一个集合属于 $\mathrm{NT}\aleph_0$，当且仅当它属于某个有限 OD 集。(ii) 一个集合属于 $\mathrm{NT}\aleph_1$，当且仅当它属于某个可数 OD 集。

证明。我们简述 (ii) 的证明。设 $a\in\mathrm{NT}\aleph_1$。那么存在 ζ 和 $\phi(x)$，使得 $a\in\phi(V_\zeta)$ 且 $|\phi(V_\zeta)|<\aleph_1$，也就是说，$|\phi(V_\zeta)|\leq\aleph_0$。但显然 $\phi(V_\zeta)\in\mathrm{OD}$。反过来，设 $A\in\mathrm{OD}$，$a\in A$ 且 $|A|\leq\aleph_0$。那么对某个 ζ，有 $A\in\mathrm{Df}(V_\zeta)$。由于 $A\subseteq V_\zeta$，显然存在 ϕ 使得 $A=\phi(V_\zeta)$。于是 $a\in\phi(V_\zeta)$ 且$|\phi(V_\zeta)|\leq\aleph_0$，因此 $a\in\mathrm{NT}\aleph_1(V_\zeta)\subseteq\mathrm{NT}\aleph_1$。⊣

由上文 (i) 可立即推出 $\mathrm{OD}\subseteq\mathrm{OA}=\mathrm{NT}\aleph_0$。然而，[3] 确立了一个有趣的事实：遗传序数代数集类 HOA 与遗传序数可定义集类 HOD 相同。令 $\mathrm{HNT}\aleph_i$ 分别表示 $\mathrm{NT}\aleph_i$ 的遗传子类，其中$i=0$为 1。根据 2.7，$\mathrm{HOA}=\mathrm{HNT}\aleph_0$。

定理 2.9 ([3]) 序数代数集合 HOD =HOD。因此，$\mathrm{HNT}\aleph_0=\mathrm{HOD}$。

（另一方面，已知 $\mathrm{NT}_{\aleph_0}$ ≠OD 是相容的。具体而言， [1] 证明了存在 L 的一个泛型扩张，其中包含一对$\{X, Y\}$是 OD 的对象，而 X和 Y都不是 OD。因此， $X, Y \in \mathrm{NT}_{\aleph_0} \backslash \mathrm{OD}$。）

根据前面的定理，$\mathrm{NT}_{\aleph_0}$ 作为定义 NT 的候选类，其吸引力有所减弱，因为它的遗传子类退化为熟知的内模型 HOD。因此，如果要寻找一个真正新颖且严格包含 HOD 的 ZF 内模型，我认为唯一剩下的选择就是将 NT 认定为类 $\mathrm{NT}_{\aleph_1}$。事实证明，后者的子类 $\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 确实是一个新的 ZF 内模型。

定理 2.10 ZFC 证明，$\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 是一个 ZF 内模型，且 $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$。

证明。我们在 ZFC 中进行论证。$\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 这一点，源于 $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HNT}_{\aleph_0}$ 这一事实（事实上，由 2.9 可知 $\mathrm{HOD} = \mathrm{HNT}_{\aleph_0}$），并且 $\mathrm{HNT}_{\aleph_0} \subseteq \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$。

为简便起见，在整个证明中我们用 HNT 代替 $\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$。由于 HNT 的传递性，外延公理在 HNT 中成立；基础公理则显然成立，因为它在底层宇宙 V 中成立。无穷公理也显然成立，因为 $\omega \in \mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HNT}$。剩下需要证明的是配对公理、并集公理、幂集公理和替代公理。证明基于引理 2.8 (ii) 给出的刻画：$a \in \mathrm{HNT} = \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 当且仅当存在一个可定义集 $A \in$，使得 $a \in A$ 并且 $|A| \leq \aleph_0$。

配对公理。设 $a, b \in \mathrm{HNT}$。我们需要证明 $\{a, b\} \in \mathrm{NT}$。根据假设，存在 $A, B \in \mathrm{OD}$，使得 $a \in A, b \in B$ 且 $|A|, |B| \leq \aleph_0$。令 $C = \{\{x, y\} : x \in A, y \in B\}$。显然 $C \in \mathrm{OD}$，$|C| \leq \aleph_0$ 且 $\{a, b\} \in C$。

并集公理。设 $a \in \mathrm{HNT}$。只需证明 $\cup a \in \mathrm{NT}$。令 $a \in A$，其中 $A \in \mathrm{OD}$，使得 $|A| \leq \aleph_0$。令 $B = \{\cup x : x \in A\}$。显然 $B \in \mathrm{OD}$，$|B| \leq \aleph_0$ 且 $\cup a \in B$。

幂集公理。设 $a \in \mathrm{HNT}$。只需证明 $\mathcal{P}^{\mathrm{HNT}}(a) = \mathcal{P}(a) \cap \mathrm{HNT}$ 属于 NT。令 $a \in A$，其中某个 $A \in \mathrm{OD}$ 满足 $|A| \leq \aleph_0$。对于每个 x，$\mathcal{P}(x) \cap \mathrm{HNT}$ 是一个集合（由 V 中的分离公理可知），而且（由替代公理）$B = \{\mathcal{P}(x) \cap \mathrm{HNT} : x \in A\}$ 也同样是一个集合。此外，容易验证 $B \in \mathrm{OD}$。由于显然 $|B| \leq |A| \leq \aleph_0$ 且 $\mathcal{P}(a) \cap \mathrm{HNT} \in B$，证毕。

替代公理。设 $a \in \mathrm{HNT}$，且 $\phi(x, y, b_1, \ldots, b_n)$ 是一个带有参数 $b_i \in \mathrm{HNT}$ 的公式，使得 $\mathrm{HNT} \models (\forall x \in a)(\exists! y)\phi(x, y, b_1, \ldots, b_n)$，或等价地，$(\forall x \in a)(\exists! y)\phi^{\mathrm{HNT}}(x, y, b_1, \ldots, b_n)$，其中 ϕ^{HNT} 是将 ϕ 相对化到类 HNT 的通常写法。ϕ^{HNT} 定义了一个函数关系

在 a 上，因此我们用 $F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}(x) = y$ 代替 $\phi^{\mathrm{HNT}}(x, y, b_1, \ldots, b_n)$，其中 $\overline{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$。如果对于某个元组 $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$，$\phi(x, y, b_1, \ldots, b_n)$ 不定义函数，则令 $F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}(x) = \emptyset$。

在此记号下，我们需要证明，对于给定的 $a, \overline{b} \in \mathrm{HNT}$，集合 $c = F_{\mathrm{HNT}\,\phi(\overline{b})}[a] = \{F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}(x) : x \in a\}$ 是 HNT 的一个元素。根据我们的假设，存在可数的 $A, B_1, \ldots, B_n \in$ 可定义集，使得 $a \in A$ and $b_i \in B_i$，对于 $i = 1, \ldots, n$。由于 $F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}()$ 是 HNT 内的一个函数，对于每个 $x \in a$，$F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}(x) \in \mathrm{HNT}$，因此 $c \subseteq \mathrm{HNT}$。所以只需证明 $c \in$ 非典型集合，即对于某个可数的 $C \in$ 可定义集，有 $c \in C$。令

$$C = \{F^{\mathrm{HNT}}_{\phi(\overline{w})}[z] : z \in A, w_1 \in B_1, \ldots, w_n \in B_n\}.$$

利用反射原理以及 A, B_i 属于可定义集这一事实，不难看出 $C \in$ 可定义集。由于 $a \in A$ 和 $b_i \in B_i$，我们有 $c = F^{\mathrm{HNT}}_{\phi\,\overline{b}}[a]$ 属于 C。此外，由于变量 z 和 w_i 分别遍历可数集合 A 和 B_i，因此

$$|C| \leq |A \times B_1 \times \cdots \times B_n| \leq \aleph_0.$$

因此 C 是一个包含 c 的可数 OD 集，证毕。 ⊣

我们不知道 AC 是否在 $\mathrm{HNT}^{\aleph_1}$ 中成立。我们只知道，无法在 ZFC 中证明 AC 在 $\mathrm{HNT}^{\aleph_1}$ 中不成立。因为如果 ZFC 相容，那么 $\mathrm{ZFC} + V = \mathrm{HOD}$ 也相容。但后一个理论蕴含 $\mathrm{HOD} = \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$，并且 HOD 满足 AC，因此 $\mathrm{ZFC} + AC^{\mathrm{HNT}^{\aleph_1}}$ 相容。仅凭 $\mathrm{ZFC} + V = \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$ 相容，也能推出后者，无论 $\mathrm{HOD} = \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$ 还是 $\mathrm{HOD} \neq \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$。

一般而言，鉴于 $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HNT}_{\aleph_1} \subseteq V$ 这些包含关系，关于这三个类之间各种相互关系是否相容的问题自然会浮现。最简单的这类关系当然是 $\mathrm{HOD} = \mathrm{HNT}_{\aleph_1} = V$，它由 $V = \mathrm{HOD}$ 推出，而其相容性众所周知。[1] 至于其他关系，我们只有两个不完整的答案。

也许最迫切需要回答的问题，是典型集合本身是否存在，也就是说，$V \neq \mathrm{NT}^{\aleph_1}$ 是否相容。因为如果我们不知道 V 能否与 $\mathrm{NT}^{\aleph_1}$ 分离，那么 $\mathrm{TP}^{\aleph_1}$ 的定义就毫无意义。所幸

[1] 顺便指出，与 HOD 和 OD 这两个类（见 [7, 第276]页）的情形一样，以下等价关系成立：$\mathrm{HNT}^{\aleph_1} = \mathrm{NT}_{\aleph_1} \Leftrightarrow V = \mathrm{HNT}_{\aleph_1} \Leftrightarrow V = \mathrm{NT}^{\aleph_1}$。最后一个等价关系，以及第一个等价关系的 $\Leftarrow$，都是显然的。关于第一个等价关系的 $\Rightarrow$，假设 $\mathrm{HNT}^{\aleph_1} = \mathrm{NT}^{\aleph_1}$。对于每个 $\alpha \in Ord$，显然 $V_\alpha \in \mathrm{OD} \subseteq \mathrm{NT}^{\aleph_1}$，因此 $V_\alpha \in \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$，从而 $V_\alpha \subseteq \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$，因此 $V = \mathrm{HNT}^{\aleph_1}$。

这个问题可以通过许多具有丰富自同构集合的强迫概念得到肯定的回答。更具体地说，有如下结论。

定理 2.11 (i) 设 $M \models \mathrm{ZFC}$，$\mathbb{P} \in M$ 是一个强迫概念，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是M-泛型。对于任意 $p \in \mathbb{P}$，令 $A_p = \mathrm{Aut}^M_{\{p\}}(\mathbb{P})$ 为 M 中所有保持 p不变的 $\mathbb{P}$ 自同构所构成的集合。进一步假设，对于每个 $p \in G$，集合 $\{\pi''G : \pi \in A_p\}$ 在 $M[G]$中不可数。那么 G 在 $M[G]$中是典型的，因此$M[G] \models V \neq \mathrm{NT}_{\aleph_1}$。

(ii) 特别地，存在 M 和 G，使得 $M[G] \models |\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{TP}_{\aleph_1}| = 2^{\aleph_0}$（其中 $\mathrm{TP}_{\aleph_1} = V \backslash \mathrm{NT}_{\aleph_1}$），也就是说，$M[G]$包含连续统多个典型实数。

证明。(i) 首先注意，集合 A_p 属于 M，因而也属于 $M[G]$，所以 $\{\pi''G : \pi \in A_p\}$ 也是 $M[G]$的一个元素。其次，众多强迫概念都满足定理的要求，这一点已为人所知。例如，偏序集 $\mathbb{P}$ 由满足 $dom(p) \subset \omega$ 和 $rng(p) \subseteq \{0,1\}$的有限函数 p 构成，并按反向包含关系排序；它会添加一个科恩实数。$\mathbb{P}$ 的自同构由置换 $\pi : \omega \to \omega$ 诱导，定义如下：对于每个 $p \in \mathbb{P}$，$dom(\pi(p)) = \pi[dom(p)]$，且 $\pi(p)(\pi(n)) = p(n)$。于是，对于任意泛型 G 和 $p \in G$，$\{\pi''G : \pi \in A_p\}$ 在 $M[G]$中不可数。

为验证该定理的断言，设 $\mathbb{P} \in M$ 和 G 如所述。根据引理 2.8 (ii)，我们必须证明，对于每个满足 $G \in A$, $M[G] \models |A| > \aleph_0$的 $A \in \mathrm{OD}^{M[G]}$，.....。任取一个包含G的 $A \in \mathrm{OD}^{M[G]}$。那么存在一个公式 $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$以及序数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，使得 $A = \{x : M[G] \models \phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ 且 $M[G] \models \phi(G, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。这里的关键事实是，$\mathbb{P}$ 的所有泛型子集 G 都有一个“共同的”$\mathbb{P}$-名称，有时称为“典范名称”，即 $\Gamma = \{\langle \check{q}, q\rangle : q \in \mathbb{P}\}$。若 t^G 表示将一个 $\mathbb{P}$-名称 t 解释为 $M[G]$中的 G-解释，那么对于每个泛型 G，都有 $\Gamma^G = G$。现在，$M[G] \models \phi(G, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$意味着存在某个$p \in G$，使得

$$p \Vdash \phi(\Gamma, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_n),$$

其中 Γ 是典范名称。固定这样一个 $p \in G$。众所周知，对于每个自同构 π 和泛型 G，$\pi''G$ 也同样是泛型，而且 $M[G] = M[\pi''G]$。但于是对于每个 $\pi \in A_p$，$p \in \pi''G$，所以$p \Vdash \phi(\Gamma, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_n)$也意味着 $M[\pi''G] \models \phi(\Gamma^{\pi''G}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，或者$M[\pi''G] \models \phi(\pi''G, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。因此对于每个 $\pi \in A_p$，

$$M[G] = M[\pi''G] \models \phi(\pi''G, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

由此可知，集合 A（即 $M[G]$中的 ϕ 的外延）包含集合 $\{\pi''G$ 作为子集：$\pi \in A_p\}$ 根据假设在 $M[G]$ 中不可数，因此 $M[G] \models |A| > \aleph_0$也如此。

(ii) 只需令 $\mathbb{P}$ 为证明开头提到的、用于添加一个科恩实数的强迫概念，因此本质上，$G \in \mathcal{P}(\omega)$。于是$M \models |Aut(\mathbb{P})| = 2^\omega$，而众所周知的事实是，$M[G]$ 中有连续统多个 G 的像 $\pi(G)$，它们全都是泛型集合，因此是典型的。所以$M[G] \models |\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{TP}_{\aleph_1}| = 2^{\aleph_0}$。⊣

一位审稿人告诉我，定理 2.11 中证明的事实，即满足给定条件的泛型集合不属于 $\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$，也已在 [5] 中针对科恩扩张和索洛维随机扩张通过一种不同且复杂得多的论证得到了证明。

然而，并非所有泛型集合都是典型的。这是 V.G. Kanovei 和 V.A. Lyubetsky 在 [4],中的以下相关结果的一个附带推论，该结果蕴含 HOD 和 $\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 这两个类可以分离。

定理 2.12（[4, 定理 4]）存在一个通过实数序列 $x_n \in 2^\omega$ 对可构造宇宙 L 作出的泛型扩张 $\mathrm{L}[(x_n)_{n<\omega}]$，在其中以下命题成立：$\{x_n : n < \omega\}$ 是一个没有序数可定义元素的可数 Π^1_2 集合。

在该定理的证明中，集合 x_n 是通过泛型方式加入 L 的。因此，与定理 2.11 不同，这里实质上使用泛型来证明非典型且非序数可定义集合的存在。具体而言，以下结论成立。

推论 2.13 如果 ZF 集合论相容，那么 $\mathrm{ZFC} + \mathrm{HOD} \neq \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 也相容。特别地，$\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{OD}$ $\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{NT}_{\aleph_1}$ 是相容的。

证明。设 $X = \{x_n : n < \omega\}$ 是定理 2.12 中的集合。显然，$X \in \mathrm{OD}$，且 X 是可数的。因此，每个 x_n 都属于 $\mathrm{NT}_{\aleph_1}$。此外，每个 x_n 都是实数，因此 $x_n \in \mathrm{HNT}_{\aleph_1}$。另一方面，由于 $x_n \notin \mathrm{OD}$，可得$x_n \in \mathrm{HNT}_{\aleph_1} \setminus \mathrm{HOD}$。同理，$x_n \in (\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{NT}_{\aleph_1}) \setminus (\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{OD})$。⊣

问题 2.14 以下各项是否与 ZFC 相容?

1) $\mathrm{HOD} \neq \mathrm{HNT}_{\aleph_1} \neq V$,
2) $\mathrm{HOD} = \mathrm{HNT}_{\aleph_1} \neq V$,
3) $\mathrm{HOD} \neq \mathrm{HNT}_{\aleph_1} = V$。

问题 2.15：AC 在 $\mathrm{HNT}_{\aleph_1}$ 中失效是否与 ZFC 相容?

致谢：谨向两位匿名审稿人致谢，他们提出了一些重要的修正意见，以及若干澄清和建议，显著改善了本文。

参考文献

[1] M. Groszek 和 R. Laver，《OD-共轭的有限群》，《匈牙利数学期刊》18（1987），第 2 期，87-97。[2] J.D. Hamkins、D. Linetsky 和 J. Reitz，《集合论的逐点可定义模型》，《符号逻辑杂志》78（2013），第 1 期，139-156。[3] J.D. Hamkins、C. Leahy，《集合论中的代数性与隐式可定义性》，《圣母大学形式逻辑杂志》57（2016），第 3 期，431-439。[4] V.G. Kanovei 和 V.A. Lyubetsky，《不含可定义元素的可数可定义集》，《数学札记》102（2017），第 3 期，338-349。（译自《数学札记》102（2017），第 3 期，369-382。）[5] V. Kanovei 和 V. Lyubetsky，《可数实数OD集属于基模型》，《数学逻辑文献》57（2018），285-298。[6] M. van Lambalgen，《随机性的公理化》，《符号逻辑杂志》55（1990），1143-1167。[7] J. Myhill 和 D.S. Scott，《序数可定义性》，载于：《公理集合论》，纯粹数学研讨会论文集 XIII-1，洛杉矶，1967，美国数学学会，普罗维登斯，1971，第 271-278 页。[8] B. Russell，《我的哲学发展》，Routledge，修订版，1995。[9] A. Tzouvaras，《罗素典型性：另一种随机性概念》，《数学逻辑季刊》66（2020），第 3 期，355-365。