应用双模拟同余的一个更一般的范畴框架

Tom Hirschowitz 萨瓦-勃朗峰
大学、法国国家科学研究中心、LAMA，
73000，法国尚贝里**Ambroise**
Lafont 剑桥大学，英国

摘要

我们证明了高阶语言中双模拟等价的一个一般同余结果，将先前的工作 [7, 18]推广到由标记迁移系统指定的语言；在该系统中，程序可以作为标签出现，并且可以依赖除避免捕获的替换之外的项运算。这通常适用于 PCF、带分隔延续的 λ-演算，以及高阶进程演算中的早期风格双模拟等情形。

2012年美国计算机协会学科分类计算理论 → 指称语义；计算理论 → 操作语义；计算理论 → 进程演算；计算理论 → 范畴语义

关键词与短语应用双模拟、高阶语言、同余、范畴论

arXiv:2303.11679v1 [cs.LO] 21 Mar 2023

1 引言

基于范畴论的双模拟等价一般同余结果，至少可以追溯到 Turi 和 Plotkin 的开创性论文 [32], ，该论文涵盖了正 GSOS 格式的范畴版本中的标记迁移系统 [6]。随后，这一结果被扩展到具有变量绑定和重命名的语言，例如 π-演算 [12, 31]。最近，Borthelle 等人 [7, 18] 成功处理了一类更广泛的语言，这些语言的操作语义不仅可以依赖重命名，还可以依赖避免捕获的替换。

然而，他们的结果未能涵盖一些重要的语言，而 Howe 方法已被应用于这些语言，例如 PCF 的（变体） [17]、 λ-演算与分隔延续 [9, 5]，或（早期风格的）高阶进程演算 [30, 23]。Borthelle 等人的框架无法涵盖这些应用，其原因在于，这些应用由标记迁移系统刻画，其中程序可能作为标签出现，或者依赖于避免捕获的替换以外的项上运算。

本文将 Borthelle 等人的结果扩展到这类语言，这需要对证明方法作非平凡的扩展，其核心是抽象出 Bernstein [4]中的思想。

我们引入**代数迁移系统**，用于建模其顶点（=状态）带有某种代数结构、且可以任意顶点作为标签的迁移系统。对于这类迁移系统，我们定义**增强双模拟等价**，作为应用双模拟的抽象对应物

我们引入**操作签名**，以生成我们感兴趣的代数迁移系统，包括上述所有语言。按照初代数语义，操作签名规定了代数结构和转换规则；在应用中，操作签名的模型范畴中的始对象就是所需的句法转换系统。

最后，我们证明（定理 52）：在适当条件下，由操作签名生成的代数转移系统中的增强双模拟等价，是所考虑代数结构上的同余。我们还给出（定理 61）一些充分条件，这些条件

在实践中更容易检验。这涵盖了上述所有应用，但高阶进程演算除外，因为其操作签名不满足所需条件。

相关工作

除上文讨论的 Borthelle 等人 [18], 之外，最密切相关的工作是 Goncharov 等人 [16]提出的高阶操作语义双代数框架。他们将 Turi 和 Plotkin 的 [32] 操作语义最初作为自然变换的表述升级为二自然变换，从而能够涵盖以程序为标签的转换。他们的主要应用是纯 λ-演算（按名称调用和按值调用）的强应用双模拟等价变体。目前，他们的框架无法处理非确定性计算，因此尤其无法处理弱双模拟等价变体。

Plan

我们在第 2 节概述本文的研究进展。接着在第 3 节介绍贯穿全文的示例，并以此为基础进行抽象。然后，我们引入迁移系统（第 4 节）和代数转移系统（第 5 节）的抽象概念，以及双模拟等价及其增强变体。最后，我们在第 6 节介绍操作签名并陈述主要结果，并在第 7 节作总结。

预备知识与记号

我们假设读者具备一些范畴论基础知识 [24], ，尤其包括分解系统和单子分配律 [3]。此外，我们有时会用到局部可表示范畴 [1], ，但这属于技术性内容，初读时可以略过。我们常将自然数 n 与集合 {1，……，n}混为一谈。我们用 n 表示相应的序数，并将其视为一个范畴；例如， $\mathscr{C}^2$ 就是 $\mathscr{C}$中的通常态射范畴。^我们用 CAT 表示局部小范畴所成的范畴。此外，对于给定范畴 C，我们用 C 表示其上的（逆变）预层范畴，并用 y: C $\to$ C 表示 Yoneda 嵌入。再者，我们提醒读者，自函子代数与单子代数并不相同。（单子代数结构必须与单位和乘法适当地相容。）我们用 F- alg 表示自函子代数，用 T- Alg 表示单子代数（大写的“A”！）。最后，对于足够良好的范畴（例如预层范畴）上的任意自函子 F ，我们用F^* 表示 F上的自由单子；此外，它在如下意义下是**代数自由的**：F- alg $\cong$ F^*- Alg。

2 概述

本文的发展大致遵循 [18]。我们在此作一概述，并着重说明其中的差异 .
贯穿全文的例子是一个带分隔延续 [5]的纯 λ-演算。

2.1 迁移系统

我们先从图出发，简要介绍迁移系统的概念。考虑对角函子 Δ: Set $\to$ Set，其定义为 $\Delta(X) = X^2$。一个图由两个集合 E 和V构成，并配备两个映射 $E \to V$；等价地说，它是一个映射 $E \to \Delta(V)$。

Hirschowitz 和 Lafont [18] 提出了一种“类型化”推广：他们假设存在一个顶点类型范畴 VT、一个边类型范畴 ET，以及两个函子 s，t: ET $\to$VT，它们将每种边类型关联到其源和目标的类型。按他们的定义，一个迁移系统

$\widehat{}$ $\widehat{}$由一个 VT 中的**顶点对象** V、一个 ET 中的**边对象** $E \in$ 以及一个态射 $E \to \Delta(V)$，$\widehat{}$ $\widehat{}$构成，其中 Δ: VT $\to$ ET 将任意 V 映射为 $\Delta(V)(\alpha) = V(\mathrm{s}(\alpha)) \times V(\mathrm{t}(\alpha))$，对所有 $\alpha \in$ ET 均成立。取 VT = ET = 1，即可得到普通图。

在本文中，为了涵盖标签，我们通过添加一个函子 l 来推广这一概念，该函子将每种边类型 $\alpha \in$ ET 关联到一个顶点类型序列 $\mathrm{l}(\alpha) = (\mathrm{l}_1^\alpha, \ldots\ldots, \mathrm{l}_{n_\alpha}^\alpha)$。元组 (VT，ET，s，t，l) 称为一个**Howe 上下文**。在本节余下部分中，我们固定这样一个上下文。

我们相应地修改 Δ，将其定义为

$$\Delta(V)(\alpha) \quad = \quad V(\mathrm{s}(\alpha)) \quad \times \quad \left(\prod_{i=1}^{n_\alpha} V(\mathrm{l}_i^\alpha) \right) \quad \times \quad V(\mathrm{t}(\alpha)).$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$迁移系统仍由对象 $V \in$ VT 和 $E \in$ ET 构成，并配有一个态射 $E \to \Delta(V)$；这意味着我们为每条边关联一个源、一个目标，以及一个类型适当的标签序列。对于这类迁移系统，我们直接定义双模拟的一种推广。

2.2 代数迁移系统与增强双模拟等价

现在我们简要说明所采用的代数结构概念。沿袭 Fiore 等人 [11, 13], Borthelle 等人 [7, 18] 使用 Σ-幺半群的做法，这类幺半群旨在刻画带代换的语法。本文依据 Hirschowitz 和 Lafont [19], 的工作，采用另一种代数结构概念，旨在涵盖具有更一般附加运算的语法。

定义 1.（在 $\mathbb{V}\mathbb{T}$ 上的）增强语法 由以下部分组成：
有限保持的函子 Σ: $\widehat{}\mathbb{V}\mathbb{T} \to \widehat{}\mathbb{V}\mathbb{T}$ 和 Γ: $\widehat{}\mathbb{V}\mathbb{T}^2 \to \widehat{}\mathbb{V}\mathbb{T}$，使得 Γ 是左余连续的，即在其第一个自变量上余连续，并配备一个分配律 δ: $T \circ S \to S \circ T$，其中 $S = \Sigma^*$ 表示由 Σ 自由生成的单子，而 $T = \Gamma_S^*$ 表示由 $X \mapsto \Gamma(X, S(X))$ 生成的单子。

这里，Σ 表示基本语法，而 Γ 表示诸如代换之类的附加运算。Γ 是一个双函子这一事实，是为了在其元数中区分一个“主要”出现位置；在下文增强双模拟等价的定义中会用到这一点。分配律表示附加运算与基本运算在主要出现位置处的交换（通常为 $(M\ N)[\sigma] = M[\sigma]\ N[\sigma]$）。

遵循初始代数语义 [15], ，这里关注的主要对象是初始Σ-代数 $S(\emptyset)$；关键在于，它自动具有 T-代数结构，由复合 $T(S(\emptyset)) \xrightarrow{\delta_\emptyset} S(T(\emptyset)) \cong S(\emptyset)$ 给出（初始对象因余连续性而是一个 T-代数，因此 $T(\emptyset) \cong \emptyset$）。事实上，这种代数结构使 $S(\emptyset)$ 成为复合单子 ST 的初始代数。

固定某种增强语法 $\sigma = (\Sigma, \Gamma, \delta)$ 后，对我们而言，代数转移系统就是一个迁移系统 $E \to \Delta(V)$，并配备定义在 V 上的 ST-代数结构。我们称这类迁移系统为 **σ-代数的**。

最后，对于任意 σ-代数的迁移系统 $G = (E, V, \partial)$，我们将**增强双模拟等价**定义为 $\sim_G^\sigma$，即满足**增强**条件的最大双模拟 R，其含义是$\Gamma(R, V) \subseteq R$ ——此处用到了 Γ 是一个双函子这一事实。在具体实例中，正如 Borthelle 等人 [7, 18], 所指出的，增强双模拟等价与应用双模拟一致。

因此，目标是证明，对于我们感兴趣的代数迁移系统 G，增强双模拟等价$\sim_G^\sigma$ 是一个**同余**，即 $\Sigma(\sim_G^\sigma) \subseteq \sim_G^\sigma$。

2.3 操作签名

为此，我们将注意力限制在由一种合适的**操作签名**概念生成的代数迁移系统上，下面将对此加以描述。操作签名由两个部分组成：一个用于生成增强语法，另一个用于指定转换规则。

▶ **定义 2.** 句法签名 是一个自函子 Σ，并配备一个序列

$$T_0 = \mathrm{id} \xrightarrow{(\Gamma_1, d_1)} T_1 \quad \dots \quad T_{n-1} \xrightarrow{(\Gamma_n, d_n)} T_n \tag{1}$$

增量结构律 *[19]*。增量结构律 $T \to T'$ 由一个有限保持的、左余连续双函子 $\Gamma\colon \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}^2 \to \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}$ 以及一个自然变换 $d_{X,Y}\colon \Gamma(\Sigma(X), Y) \to S(T(\Gamma(X, S(T(Y))) + X + Y))$ 构成，使得 $T' = T \oplus \Gamma^*_S$，其中 $\oplus$ 表示单子余积。

在示例中，自然变换 $d_{X,Y}$ 相当于通过结构递归给出定义，其中 Γ 的第一个参数表示该参数递归出现时的递减情形，第二个参数表示其他出现情形。给定任意句法签名 (1)，所给的增量结构律会导出分配律 $\delta_i\colon T_i \circ S \to S \circ T_i$，因此特别有 $\delta_n\colon T_n \circ S \to S \circ T_n$，此外还有 $T_n = (\sum_i \Gamma_i)^*_S$。于是，令 d 表示所给的句法签名，三元组 $\sigma(\mathsf{d}) = (\Sigma, \sum_i \Gamma_i, \delta_n)$ 构成一种增强语法。作为额外结果，可以证明，复合单子 ST_n 的代数等价于配备了适当相容的 Σ 代数结构及每个函子 $X \mapsto \Gamma_i(X, X)$ 代数结构的对象。

下一步是明确我们感兴趣的代数迁移系统的动态。为此，我们引入**动态签名**。粗略地说，关于增强语法 σ 的动态签名，是作用于 σ-代数迁移系统的自函子，它必须保持顶点对象，并满足一个受结构操作语义 [26]启发的适当“结构性”条件。直观而言，动态签名 Σ_1 是一个转换规则族，而结构性要求每条转换规则的结论源的深度至多为一。

沿着这一类比，满足这些规则的 σ-代数迁移系统是一类特殊的 Σ_1-代数，我们称之为**垂直**。垂直性意味着代数结构在顶点上是平凡的：这确保满足这些规则只涉及边，而不涉及顶点。

最后，一个**操作签名** 由一个句法签名 d，以及作用于 $\sigma(\mathsf{d})$ 上的动态签名 Σ_1 构成。这里真正感兴趣的对象是初始垂直 Σ_1-代数，记作 $\mathsf{Z} = (E_{\mathsf{Z}}, V_{\mathsf{Z}}, \partial_{\mathsf{Z}})$；在具体应用中，它就是所需的句法转换系统。

2.4 增强双模拟等价的同余

我们的目标是证明，在适当的假设下，初始垂直 Σ_1-代数中的增强双模拟等价 $\sim^{\sigma(\mathsf{d})}_{\mathsf{Z}}$ 是一个同余。为此，我们概括 Bernstein 的 [4] 证明，首先定义**灵活双模拟**，这是 Sangiorgi 的 BA- 双模拟 [29] 的一种变体。灵活双模拟类似于普通双模拟：对于任意相关元素 e 和 e'，从 e 出发的任何转换，都应当能由从 e' 出发的某个转换加以匹配。不同之处在于，匹配转换不必具有相同的标签，而是对于任意相关标签，都应存在匹配转换。我们将图为灵活双模拟的代数转移系统态射定义为**函数型灵活双模拟**。我们的主要结果（定理 52）指出，如果动态签名 Σ_1 保持函数型灵活双模拟，那么 $\sim^{\sigma(\mathsf{d})}_{\mathsf{Z}}$ 就是一个同余。

最后，保持函数型灵活双模拟是一个相当抽象的条件，因此我们着手设计一种更具体的判据，以便更容易应用这一结果。

事实上，如果所考虑的动态签名 Σ_1 是**族式** [10, 8, 33, 14], 的，那么保持函数型灵活双模拟就会变得相当容易处理，下面我们将对此作出解释。遵循 Joyal 等人 [22], 的方法，我们首先将函数型灵活双模拟刻画为某个弱分解系统 [20, 28] 的右类——我们将左类称为**余纤维化**。此外，当动态签名是族式的时，结论类型为任意 α 的转换规则，直观上就是 $\Sigma_1(1)(\alpha)$ 的一个元素；我们为每条规则提取两个代数转移系统 A 和 B，以及一个态射 $\varphi\colon A \to B$，直观地说，A 描述结论的源和标签中出现的元变量，B 描述规则中的所有元变量，包括转换前提中的元变量，而 φ 则将前者嵌入后者。我们称 φ 为该规则的**边界元数**。关键在于，族式的 Σ_1 保持函数型灵活双模拟，当且仅当所有边界元数都是余纤维化（定理 61）。这究竟具体在何处？余纤维化已知在复合和余基变换下封闭，因此，要检验是否保持函数型灵活双模拟，只需通过复合和余基变换，从生成上纤维化重构每条规则的边界元数。这一重构过程与通常的无环性判据 [21, 4]颇为相近。

▶ **示例3**。将代数转移系统视为普通图，对于类似$a \to b$　　$b \to c$这样的规则，A 将是单顶点图，B 将由两条可组合的$a \to c$边 $x \to y \to z$组成，而 φ 则选取 x。为检验它是余纤维化，我们将其重构为[0]　　[1]中底部的复合

$$A \leq [0] \qquad [1] \qquad B.$$

作为应用，我们在所考虑的带分隔延续的 λ-演算 [5]中，重新得到应用双模拟的同余性。

3 一个具体示例

作为我们希望进行抽象化的一个具体结果示例，让我们回顾带分隔延续的 λ-演算。我们以一种非标准的方式来呈现它，以便使其符合抽象框架。事实上，该框架基于**结构**操作语义 [26], ，其含义是每条转换规则中，结论的源的深度至多为一。遵循 [7, 18], ，我们还将给出应用双模拟开放扩展的定义，使其与接下来要进行的抽象推导相兼容。

语法以常见的非正式方式呈现，如左下所示，

$$\text{Values} \ni v ::= x \mid \lambda x.e \qquad \Box[e] = e \tag{2}$$

$$\text{Programs} \ni e ::= v \mid e_1\ e_2 \mid \mathcal{S}x.e \mid \langle e \rangle \qquad (v\ E)[e] = v\ E[e] \tag{3}$$

$$\text{求值上下文} \ni E ::= \Box \mid E\ e \mid v\ E \qquad (E\ e')[e] = E[e]\ e'. \tag{4}$$

其中 x 在 e 中绑定，在 $\lambda x.e$ 和 $\mathcal{S}x.e$ 中均如此。避免捕获的替换和上下文应用按通常方式定义。例如，上文右侧定义了上下文应用。其动态行为由图 1 中的规则支配。共有三种类型的转换，分别为 $e \xrightarrow{\tau} e'$、$e \xrightarrow{v} e'$、$e \xrightarrow{E} e'$，其中所有表达式都是闭合的。前四条规则处理函数。前两条规则已足以推导出 (β)，如图 1 所示。接下来的两条是通常的上下文规则。最后三条规则中，α 遍历所有标签，它们确保我们处理的是弱互模拟：将转换在与静默转换复合下闭合。其余规则描述 $\mathcal{S}x.e$ 和 $\langle e \rangle$ 的动态行为，它们

$$\frac{e_1 \xrightarrow{v} e_2}{e_1\ v \xrightarrow{\tau} e_2}\ (\beta') \qquad \frac{}{\lambda x.e \xrightarrow{v} e[x \mapsto v]} \qquad \frac{e_1 \xrightarrow{\tau} e_1'}{e_1\ e_2 \xrightarrow{\tau} e_1'\ e_2} \qquad \frac{e_2 \xrightarrow{\tau} e_2'}{v\ e_2 \xrightarrow{\tau} v\ e_2'} \qquad \frac{}{\langle v\rangle \xrightarrow{\tau} v}$$

(SA)

$$\frac{e \xrightarrow{\tau} e'}{\langle e\rangle \xrightarrow{\tau} \langle e'\rangle} \qquad \frac{e \xrightarrow{\square} e'}{\langle e\rangle \xrightarrow{\tau} e'} \qquad \frac{e_1 \xrightarrow{E[\square\ e_2]} e_3}{e_1\ e_2 \xrightarrow{E} e_3} \qquad \frac{e_1 \xrightarrow{E[v\ \square]} e_2}{v\ e_1 \xrightarrow{E} e_2} \qquad \frac{}{\mathcal{S}k.e \xrightarrow{E} \langle e[k \mapsto \lambda x.\langle E[x]\rangle]\rangle}$$

$$\frac{}{e \xrightarrow{\tau} e} \qquad \frac{e_1 \xrightarrow{\tau} e_2 \xrightarrow{\alpha} e_3}{e_1 \xrightarrow{\alpha} e_3} \qquad \frac{e_1 \xrightarrow{\alpha} e_2 \xrightarrow{\tau} e_3}{e_1 \xrightarrow{\alpha} e_3} \qquad \text{Deriving } \beta\text{:}\ \frac{\dfrac{}{\lambda x.e \xrightarrow{v} e[x \mapsto v]}}{(\lambda x.e)\ v \xrightarrow{\tau} e[x \mapsto v]}\ (\beta')$$

图 1 转换规则

分别称为 **shift** 和 **reset**。前两条规则确保静默计算在任何 reset 内部正常进行；如果计算成功，也就是得到了一个值，那么 reset 就会消失。接下来的规则描述 shift 如何捕获直到外围 reset 为止的环境上下文，例如 E，并将其重化 $\lambda k.\langle E[k]\rangle$ 作为值代换给绑定变量，同时在结果外包上一层新的 reset。

因此，双模拟的定义符合预期：

▶ **定义 4.** 闭程序之间的二元关系 R 称为模拟，当且仅当对于所有$e\ R\ e'$ 和转换 $e \xrightarrow{\alpha} e_1$，都存在一个转换 $e' \xrightarrow{\alpha} e_1'$ 使得 $e_1\ R\ e_1'$。双模拟 是这样一种模拟，其逆关系也是模拟。

▶ **定义 5** ([7, 18]). 潜在开放表达式上的关系 R 称为增强的，当且仅当它对代换、上下文复合和上下文应用封闭，即对于所有代换 σ，$a\ R\ a'$ 蕴含$a[\sigma]\ R\ a'[\sigma]$；$E\ R\ E'$蕴含 $E[e]\ R\ E'[e]$；并且对于所有 e 和 E''，$E[E'']\ R\ E'[E'']$。

增强双模拟是一种增强关系 R，其在闭合程序上的限制是双模拟。

▶ **命题 6.** 存在最大的增强双模拟，称为应用双模拟 .

我们要进行抽象的结果是：

▶ **定理 7**（[5, 定理 1]的推广版本）。应用双模拟是一种同余，也就是说，它在该语言的所有构造下都保持不变。

▶ 注 8. 这与 Biernacki 和 Lenglet 的表述一致，并非显而易见。事实上，他们的迁移系统唯一的区别在于，他们用标准规则 (β) 替换了规则 (β')。我们已经看到，(β) 可以从 (β') 推导出来；反过来，(β') 在他们的迁移系统中也是可容许的。确实，假设给定任意一个转换 $e_1 \xrightarrow{v} e_2$。通过简单的归纳，可得存在转换 $e_1 \xrightarrow{\tau} \lambda x。\ e_3 \xrightarrow{v} e_3[x \mapsto v] \xrightarrow{\tau} e_2$。因此，将饱和规则分组后，我们可以如下推导出 ($\beta$)。

$$\frac{\dfrac{e_1 \xrightarrow{\tau} \lambda x.e_3}{e_1\ v \xrightarrow{\tau} (\lambda x.e_3)\ v} \qquad (\lambda x.e_3)\ v \xrightarrow{\tau} e_3[x \mapsto v] \qquad e_3[x \mapsto v] \xrightarrow{\tau} e_2}{e_1\ v \xrightarrow{\tau} e_2}$$

我们的问题在于，这个结果并非 Borthelle 等人的 [18, 定理 6.15], 的一个实例，因为其动力学依赖于两个尚未得到处理的特征：
(a) 项上的运算、上下文应用和复合，它们不同于替换，(b) 以及作为标签出现的上下文和值。

对于 (a)，上下文应用和复合或许可以在 Borthelle 等人的框架中编码，也许可以借助斜幺半范畴变体 [7]。但这相当牵强，而且需要额外工作，而这些工作本不应是必要的。对于 (b)，这似乎构成了一个难以克服的障碍。

4 抽象视角下的迁移系统

本节开始对第 3 节中的论述进行抽象，方法是引入标记迁移系统的概念，以及与之相关的双模拟等价概念。

4.1 Howe 上下文

让我们从正式介绍 Howe 上下文开始，正如第 2 节中所概述的那样。

▶ 定义 *9. Howe* 上下文由以下部分组成：一个表示状态类型的小范畴 VT、一个表示迁移类型的小范畴 ET、源函子和目标函子 $s, t: ET \to VT$，以及一个标签函子 $l : ET \to \widehat{VT}$，使得每个 $l(c)$ 都是可表函子的有限余积。

▶ **例 10.** 对于普通图，我们可以取：VT 取为终对象范畴，因为只有一种顶点；ET 也取为终对象范畴，因为只有一种边；源函子和目标函子都是唯一函子 $1 \to 1$；标签函子则将唯一对象映到空余积，即 $\emptyset$。

▶ **例 11.** 为了对第 3 节的迁移系统建模，我们需要 VT 上的一个预层等价于函子三元组 $V_\mathrm{p}, V_\mathrm{v}, V_\mathrm{c} : \mathrm{F} \to$ 集合，其中 F 表示有限集范畴的一个骨架，例如由有限序数及其间所有映射组成的范畴，并配备一个自然变换 $\iota\colon V_\mathrm{v} \to V_\mathrm{p}$；换句话说，就是一个函子 $\mathrm{F} \to$ 集合$^{1+2}$。我们将 $V_\mathrm{p}(n)$、$V_\mathrm{v}(n)$ 和 $V_\mathrm{c}(n)$ 分别视为具有 n 个自由变量的程序、值和上下文集合。为了将其构造成一个预层范畴，我们先注意到，这类元组 $\widehat{}\widehat{}(V_\mathrm{p}, V_\mathrm{v}, V_\mathrm{c}, \iota)$ 恰好是函子 $\Delta_{yin_1} : \mathrm{F}^{op} + \mathrm{F}^{op} \to \mathrm{F}^{op}$ 的斜极限的对象，该函子将任意余配对 $[V_\mathrm{p}, V_\mathrm{c}]$ 映到 V_p。不过，正如我们现在要回顾的，这种形式的斜极限等价于预层范畴。

▶ **定义 12.** 对于任意小范畴 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$，以及函子 $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，$F$的拼接记作 $\mathbb{Y}[\mathbb{X}]_F$；当上下文中的 F 明确时，也简记为 $\mathbb{Y}[\mathbb{X}]$。其对象为 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$的对象的不交并，态射则按以下情况定义。

$$\begin{array}{lcllcl} \mathbb{X}[\mathbb{Y}](x,x') & = & \mathbb{X}(x,x') & \mathbb{X}[\mathbb{Y}](y,x) & = & F(x)(y) \\ \mathbb{X}[\mathbb{Y}](y,y') & = & \mathbb{Y}(y,y') & \mathbb{X}[\mathbb{Y}](x,y) & = & \emptyset \end{array}$$

在左侧两种情形中，复合分别按照$\mathbb{X}$ 和$\mathbb{Y}$ 中的方式定义；其余情形则由 F 的作用定义。

▶ 命题 *13*（[8, 引理 *4.9*]）。对于任意小范畴 X 和 Y，以及函子 $F: X \to \widehat{Y}$，令 $\Delta_F(Y)(x) = Y(F(x), \_)$ 表示诱导的神经函子 $Y \to X$，则斜极限 $X/\widehat{\Delta_F}$ 等价于范畴 $Y[X]$，即 F 的拼接上的预层范畴。

现在，上述函子 $\Delta_{\mathbf{y}in_1}$ 确实是 $\mathrm{F}^{op} \xrightarrow{in_1} \mathrm{F}^{op}+\mathrm{F}^{op} \xrightarrow{\mathbf{y}} \widehat{{}^{op}+} \mathrm{F}\ \mathrm{F}^{op}$ 的神经，因为我们有 $\Delta_{\mathbf{y}in_1}[V_\mathbf{p}, V_\mathbf{c}](n) = V_\mathbf{p}(n) = [V_\mathbf{p}, V_\mathbf{c}](in_1(n)) = \mathrm{F}^{op}+\mathrm{F}^{op}(\mathbf{y}(in_1(n)), [V_\mathbf{p}, V_\mathbf{c}])$。我们得到：

▶ **推论 14.** 令 $\mathbb{VT} = (\mathbb{F}^{op}+\mathbb{F}^{op})[\mathbb{F}^{op}]_{\mathbf{y}in_1}$，则有 $[\mathbb{F}, \text{集合}^{1+2}] \simeq \widehat{\ }\mathbb{VT}$。

▶ **记号 1.** 我们分别用 $n_\mathbf{v}$、$n_\mathbf{p}$ 和 $n_\mathbf{c}$ 表示$\mathbb{VT}$ 的对象 $in_1 n$、$in_2 n$ 和 $in_3 n$，$\widehat{\ }$分别对应值、程序和上下文。对于任意 $V \in \mathbb{VT}$，我们用 $V_\mathbf{v}$、$V_\mathbf{p}$ 和 $V_\mathbf{c}$ 表示相应的函子$\mathbb{F} \to \mathbf{Set}$，例如，$V(n_\mathbf{v}) = V_\mathbf{v}(n)$。

现在我们定义 $\mathrm{ET} = 3 = \{[\tau], [\mathbf{v}], [\mathbf{c}]\}$，其中 $[\alpha]$ 表示类型为 α 的标签。因此，记 $c: a \xrightarrow{L} b$，分别表示 $\mathbf{s}(c) = a$、$\mathbf{l}(c) = L$ 和 $\mathbf{t}(c) = b$，并分别将 τ、$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{c}$ 解释为 $\emptyset$、$\mathbf{y}_\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{y}_\mathbf{c}$，我们定义：$[\alpha]: 0_\mathbf{p} \xrightarrow{\alpha} 0_\mathbf{p}$，对所有 $\alpha \in \{\tau, \mathbf{v}, \mathbf{c}\}$。

4.2 广义迁移系统

现在我们来引入迁移系统。在整个小节中，固定一个 Howe 上下文 $\mathrm{H} = (\mathrm{VT}, \mathrm{ET}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{l})$，并从联系范畴 VT 和 ET 入手。

⇝▶ **定义 15。** 对于所有 $V \in \mathbb{VT}$ 和 $\alpha \in \mathbb{ET}$，我们定义如下四个函子 $\mathbb{VT} \to \mathbb{ET}$。

$$\begin{array}{lcllcl} \Delta_\mathbf{s}(V)(\alpha) & = & V(\mathbf{s}(\alpha)) & \Delta_\mathbf{l}(V)(\alpha) & = & \widehat{\mathbb{VT}}(\mathbf{l}(\alpha), V) \\ \Delta_\mathbf{t}(V)(\alpha) & = & V(\mathbf{t}(\alpha)) & \Delta_\mathbb{H}(V) & = & \Delta_\mathbf{s}(V) \times \Delta_\mathbf{l}(V) \times \Delta_\mathbf{t}(V), \end{array}$$

▶ **记号 2。** 当上下文中明确给出 $\mathbb{H}$ 时，我们通常将 $\Delta_\mathbb{H}$ 简写为 Δ。我们还用指标的并置来表示相应函子的积，例如，$\Delta_{\mathbf{s},\mathbf{l}} := \Delta_\mathbf{s} \times \Delta_\mathbf{l}$。

⇝▶ **定义 16。** 一个 $\mathbb{H}$-迁移系统 G 由一个顶点 预层 $V_G \in \mathbb{VT}$、一个$\widehat{\ }$边 预层 $E_G \in \mathbb{ET}$，以及一个边界 自然变换 $\partial_G: E_G \to \Delta(V_G)$组成。

▶ 备注 17. 令 $\mathbf{l}(\alpha) = \sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}\mathbf{l}_i^\alpha$，则有 $\Delta_\mathbf{l}(V)(\alpha) = [\sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}\mathbf{l}_i^\alpha, V] \cong \prod_{i \in n_\alpha} V(\mathbf{l}_i^\alpha)$，其中$\widehat{\ }$任意 $\alpha \in \mathrm{ET}$ 和 $V \in \mathrm{VT}$ 均成立。因而，边界自然变换的类型为

$$E(\alpha) \to V(\mathbf{s}(\alpha)) \times (\textstyle\prod_{i \in n_\alpha} V(\mathbf{l}_i^\alpha)) \times V(\mathbf{t}(\alpha)).$$

▶ **例 18.** 我们来展开例 11 中 Howe 上下文的定义：一个迁移$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$系统由预层 $V \in \mathrm{VT}$ 和 $E \in \mathrm{ET}$ 组成，并配备映射

$$E[\tau] \to V_\mathbf{p}(0)^2 \qquad E[\mathbf{v}] \to V_\mathbf{p}(0) \times V_\mathbf{v}(0) \times V_\mathbf{p}(0) \qquad E[\mathbf{c}] \to V_\mathbf{p}(0) \times V_\mathbf{c}(0) \times V_\mathbf{p}(0).$$

现在我们为 H-迁移系统配备态射：

▶ **命题 19.** $\mathbb{H}$-迁移系统恰好是函子 $\widehat{\ }\mathbb{VT} \xrightarrow{\Delta} \widehat{\ }\mathbb{ET}$ 在 **CAT** 中的斜极限范畴$\widehat{\ }\mathbb{ET}/\Delta$ 的对象，等价地说，是逗号范畴 $\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{ET}}} \downarrow \Delta$的对象。

证明。 斜极限中的一个对象按定义是一个三元组 $(E,\ V,\ \partial: E \to \Delta(V))$。 ◀

▶ **Definition 20.** *Let* $\mathbb{H}$-**Trans** $= \widehat{\mathbb{ET}}/\Delta_\mathbb{H}$.

4.3 双模拟与双模拟等价

现在，对于任意固定的 Howe 上下文 $\mathrm{H} = (\mathrm{VT}, \mathrm{ET}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{l})$，我们要定义双模拟和双模拟等价。先从模拟的概念开始。

▸ **记号 3**。一个跨度是具有相同源的一对态射。在具有二元积的范畴中，我们常将跨度 $X \leftarrow R \rightarrow Y$ 写成它们的配对 $R \rightarrow X \times Y$，跨度 $\langle f, g \rangle\colon R \rightarrow X \times Y$ 的逆是复合 $\langle g, f \rangle\colon R \rightarrow X \times Y$。

在预层范畴 $\mathbb{C}$ 中，对于任意跨度 $j\colon R \rightarrow X \times Y$，对象 $c \in \mathbb{C}$ 和元素 $r \in R(c)$，当 $j_c(r) = (x, y)$ 时，我们记作 $r\colon x\ R\ y$。我们称 r 为一个见证，表明 x 与 y 通过 R 相关联。

最后，在任意 $\mathbb{H}$-迁移系统 G 中，对于任意满足 $\mathbf{l}(\alpha) \cong \sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}^{\mathbf{l}_i^\alpha}$ 的迁移类型 α，我们记 $e\colon x \xrightarrow{\alpha\ (l_1,\ldots,l_{n_\alpha})} y$，表示 $e \in E_G(\alpha)$ 和 $\partial_G(e) = (x, (l_1, \ldots, l_{n_\alpha}), y)$。

▸ **21** $G = V\ E\ \partial\ E \rightarrow \Delta V$ $j\ R \rightarrow$**定义**。对 V^2 于任意 $\mathbb{H}$-迁移系统 $(,,:)$，给定跨度 $:$，当对于任意转换 $e\ x \xrightarrow{\alpha\ l_1\ \ l_{n_\alpha}} x'$ 和见证 $:(,\ldots,)$ $r\colon x\ R\ y$，存在转换 $f\colon y \xrightarrow{\alpha\ (l_1,\ldots,l_{n_\alpha})} y'$ 以及见证 $r'\colon x'\ R\ y'$，如 x $R(\mathbf{s}(\alpha))\ y$ 中所示时，该跨度是一个模拟 。

$$f : x' \alpha(l_1,\ldots,l_{n_\alpha}) \quad R(\mathbf{t}(\alpha)) \quad y'. \tag{5}$$

当一个跨度是模拟，且其逆关系也是模拟时，它就是一个双模拟。双模拟关系是同时也是关系的双模拟，即单态射 $R \hookrightarrow V^2$。

▸ **命题 22**。 $\mathbb{VT}/V^2$ 中由跨越双模拟构成的全子范畴**Bisim**(G) 有一个终对象，我们称之为双模拟等价，并记作 $\sim_G$。

证明。 双模拟关系在并下封闭，因此它们的并构成一个终对象。 ◂

5 代数迁移系统

本节将比§2.2更详细地阐释增强语法、代数转移系统和增强双模拟。增强语法的概念已在前文引入（定义1）；我们固定一个 Howe 上下文 $\mathrm{H} = (\mathrm{VT}, \mathrm{ET}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{l})$，以及一个增强语法 $\sigma = (\Sigma, \Gamma, \delta\colon TS \rightarrow ST)$，其中，回顾一下，$S = \Sigma^*$ 和 $T = \Gamma_S^*$。

5.1 增强语法

▸ **定义 23.** 我们将 ST-代数简称为 σ-代数，并记作 σ-**Alg** $= ST$-**Alg**。

▸ 命题 *24. </style}*初始 Σ-代数 $S\emptyset$ 自动是一个 T-代数，其结构映射为 $TS\emptyset \xrightarrow{\delta_\emptyset} ST\emptyset \xrightarrow{\cong} S\emptyset$。

证明。 由余连续性，$\emptyset$ 是一个 Γ_S-代数：我们有 $\Gamma(\emptyset, S(\emptyset)) \cong \emptyset$。因此它是一个初始 Γ_S-代数，因而也是一个初始 T-代数，因为 Γ_S-**alg** $\cong T$-**Alg**。 ◂

▸ **例 25.** 接续例 11，第 3 节的语法和附加运算可以通过 VT 上的增量结构律来呈现，如下所示。首先，由如下定义的自函子 Σ_0 指定基本运算（右侧沿用原始记法）。

$$\Sigma_0(X)_{\mathrm{v}}(n) = n + X_{\mathrm{p}}(n+1) \quad v ::= x \mid \lambda x.e \quad \Sigma_0(X)_{\mathrm{p}}(n) = \Sigma_0(X)_{\mathrm{v}}(n) + X_{\mathrm{v}}(n) + X_{\mathrm{p}}(n)^2 + X_{\mathrm{p}}(n+1) + X_{\mathrm{p}}(n)$$
$$e ::= v \mid e_1\ e_2 \mid \delta x.e \mid \langle e \rangle \quad \Sigma_0(X)_{\mathrm{c}}(n) = 1 + X_{\mathrm{v}}(n) \times X_{\mathrm{c}}(n) + X_{\mathrm{c}}(n) \times X_{\mathrm{p}}(n) \quad E ::= \Box \mid E\ e \mid v\ E$$

接下来，我们要定义附加运算的元数，即代换、上下文应用和上下文复合。由于这三种附加运算彼此独立，我们可以通过如下定义的双函子 $\Gamma\colon \mathbb{VT}^2 \rightarrow \mathbb{VT}$ 一并指定它们。

$$\Gamma(X,Y)_{\mathrm{v}}(n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} X_{\mathrm{v}}(m) \times Y_{\mathrm{v}}(n)^m \qquad v \quad ::= \quad v[\sigma] \mid \Gamma(X,Y)_{\mathrm{p}}$$
$$(n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} X_{\mathrm{p}}(m) \times Y_{\mathrm{v}}(n)^m + X_{\mathrm{c}}(n) \times Y_{\mathrm{p}}(n) \quad e \quad ::= \quad e[\sigma] \mid E[e] \mid \Gamma(X,Y)_{\mathrm{c}}(n)$$
$$= X_{\mathrm{c}}(n) \times Y_{\mathrm{c}}(n) \quad E \quad ::= \quad E[E']$$

附加运算的具体定义会诱导出 Γ^*_S 在 Σ^* 上的分配律，这一点较难看出，后文将从句法签名理论中推导得出（示例33）。

5.2 代数迁移系统

现在我们来介绍代数迁移系统。

▶ **定义 26**。 一个 σ-迁移系统是一个$\mathbb{H}$-迁移系统，并且其顶点对象上配备了 σ-代数结构。σ-迁移系统态射是$\mathbb{H}$-迁移系统的态射，且其顶点分量是 σ-代数态射。令 σ-**Trans** 表示由 σ-迁移系统及其间的态射构成的范畴。

▶ **命题 27**。 遗忘函子 $\mathscr{U}$ 有一个左伴随，记作 $\mathrm{L}\colon \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans} \to \sigma\text{-}\mathbf{Trans}$.

证明。 左伴随将任意 $\partial\colon E \to \Delta(V)$ 映射为 $E \xrightarrow{\partial} \Delta(V) \xrightarrow{\Delta(\eta^{ST}_V)} \Delta(S(T(V)))$. ◀

我们以定义同余的概念来结束本节。

▶ **定义 28**。 对于任意 σ-迁移系统 $G = (V, E, \partial)$，同余 是一个跨度 $R \to V^2$，存在一个态射 $\Sigma(R) \to R$ 使图 *2* 中的第一个图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(R) & & R \\ & & \\ \langle \Sigma(\pi_1), \Sigma(\pi_2) \rangle & \Sigma(V)^2 & V^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(R,V) & & R \\ & & \\ \langle \Gamma(\pi_1, V), \Gamma(\pi_2, V) \rangle & \Gamma(V,\ V)^2 & V^2 \end{array}$$

图 2 同余与增强

5.3 增强双模拟等价

▶ **定义 29.** 对于任意 σ-代数 V，若存在一个态射 $\Gamma(R,V) \to R$ 使得图 *2* 的第二个图表交换，则跨度 $p\colon R \to V^2$ 是增强的。

▶ **定义 30.** 对于任意 σ-迁移系统 G，令 $\mathbf{Bisim}^\sigma(G)$ 表示由增强跨度构成的 $\mathbf{Bisim}(G)$ 的全子范畴。我们称此类跨度为增强双模拟。

▶ **命题 31.** 对于任意 σ-迁移系统 G，$\mathbf{Bisim}^\sigma(G)$ 存在一个终对象，我们称之为增强双模拟等价，并记作 $\sim^\sigma_G$。

证明. 证明与命题 22 类似，利用 Γ 的左余连续性。 ◀

▶ **例 32.** 在例 25 的设定下，增强双模拟等价就是应用双模拟 .

6 操作语义的签名

6.1 增强语法的句法签名

句法签名已在定义 2 中介绍。

▸ **例 33**。 承接例 25，第 3 节的语法和附加运算可表示为一个增量结构律 $d_{X,Y}\colon \Gamma_Y(\Sigma(X)) \to S(\Gamma_{S(Y)}(X) + X + Y)$（取 $T_1 = \mathrm{id}$）作用于 VT，如下所示。对于上下文应用，方程（2）–（4）可解释为分量 $\Sigma(X)(c)(n) \times Y_p(n) \to S(\Gamma_{S(Y)}(X) + X + Y)(p)(n)$，也就是说，我们将它们理解为

$$\begin{aligned}(in_1(\star), y) &\mapsto in'_3(y)\\ (in_2(v, E), y) &\mapsto \iota(in'_2(v))\ in'_1(E, y)\\ (in_3(E, e), y) &\mapsto in'_1(E, y)\ in'_2(e),\end{aligned}$$

其中 $in'_i = \eta^S \circ in_i$。对于上下文复合，我们用完全相同的公式定义在 c 处的分量（对任意 n），只需将 $y \in Y_c(n)$ 代入。代换的定义类似 [11, 7, 18]。

▸ 命题 *34.* 对于任意句法签名 $d = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$，如式 *(1)* 所示，给定的增量结构律会诱导分配律 $\delta_i\colon T_i \circ S \to S \circ T_i$，因此特别有 $\delta_n\colon T_n \circ S \to S \circ T_n$，并且我们还有 $T_n = (\sum_i \Gamma_i)^*_S$。因此，三元组 $\sigma(d) = (\Sigma, \sum_i \Gamma_i, \delta_n)$ 构成一个增强语法。

证明。 根据 [19, 定理 4。2], 每个增量结构律 d_i 都会诱导一个（$T_{i-1} \oplus \Gamma^*_S$） S上的 S分配律，即 T_i 在 S 上，按定义，使用（$F + G$）$^* \cong F^* \oplus G^*$。◂

最后，我们通过明确描述由句法签名 ST_n 生成的复合单子的代数，来结束本小节。

▸ **定义 35.** 考虑任意句法签名 $\mathbf{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$。对于 $i \in n$，一个增强代数 是一个配备了代数结构 $a\colon \Sigma X \to X, b_1\colon \Gamma_1(X, X) \to X, \ldots, b_n\colon \Gamma_n(X, X) \to X$ 的对象，使得对所有 $i \in n$，下图交换：

$$\Gamma_i(\Sigma X,\ X) \qquad ST_i(\Gamma_i(X, ST_i X) + X + X) \qquad ST_i(\Gamma_i$$

$$ST_i(\Gamma_i(X, X)) \qquad \Gamma_i(X, X)$$

其中，$\bar{a}_i\colon T_i X \to X$ 和 $\bar{a}\colon SX \to X$ 表示由 $(b_j)_{j<i}$ 和 a 所诱导的代数结构。令 **d**-**Alg** 表示由增强代数构成的 $(\Sigma + \sum_{i\in n} \Gamma_i)$-代数全子范畴。

▸ **命题36.** 令 $\mathbf{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$ 表示任意句法签名。遗忘函子 $\sigma(\mathbf{d})$-**Alg** $\to (\Sigma + \sum_{i\in n} \Gamma_i)$-代数 可提升至 **d**-**Alg**，且该提升是一个同构。简言之，我们有 $\sigma(\mathbf{d})$-**Alg** $\cong$ **d**-**Alg** 在$\mathbb{C}$上的情形。

证明。 对 n 和 [19,定理 413]。 ◂

6.2 动态签名

现在，我们来为操作语义的动态部分引入签名。我们希望动态签名类似于 σ-Trans 上带有内置结构性的自函子。为此，我们引入一种 H-迁移系统的变体，称为双目 H-迁移系统；它具有一个指定顶点对象，所有迁移的源都必须位于其中。这将通过允许转移规则结论的源具有一个指定的头部构造子来实现结构性。本小节中，我们固定一种增强语法$\sigma = (\Sigma,\ \Gamma,\ \delta\colon TS \to ST)$。

12 应用双模拟等价同余的更一般范畴框架

▸ **定义 37**。一个双目 $\mathbb{H}$-迁移系统 G 由一个顶点 对象 $V_G \in \mathbb{VT}$、一个指定顶点 对象 $D_G \in \mathbb{VT}$、一个边 对象 $E_G \in \mathbb{ET}$ 以及态射 $\gamma_G\colon\ D_G \to V_G$ 和 $\partial_G\colon\ E_G \to \Delta_s(D_G) \times \Delta_{l,\,t}(V_G)$ 组成。

一个双视 σ-迁移系统 是一个配备了 σ-代数结构的双视 $\mathbb{H}$-迁移系统 G，其结构定义在 V_G 上。

与之前一样，我们将这两个概念分别组织成范畴 σ-$\mathbf{Trans}$ 和 σ-$\mathbf{Trans}_2$。

$\mathbb{VT}^2 \xrightarrow{\langle \pi_1, \pi_2, \pi_2 \rangle} \mathbb{VT}^3 \xrightarrow{\Delta_s \times \Delta_l \times \Delta_t} \mathbb{ET}$。

▸ **定义 38.** σ 上的一个动态签名 是一个函子 $\Sigma_1\colon\ \sigma\text{-}\mathbf{Trans} \to \sigma\text{-}\mathbf{Trans}_2$，满足对所有 $G \in \sigma\text{-}\mathbf{Trans}$，$V_{\Sigma_1(G)} = V_G$、$D_{\Sigma_1(G)} = V_G + \Sigma(V_G)$，且 $\gamma_G\colon\ V_G + \Sigma(V_G) \to V_G$ 是典范态射（态射上的情形也类似）。

▸ 例 39。令 d 表示示例 33 中的句法签名。第 3 节的转换规则定义了一个动态签名 $\Sigma_1\colon\ \sigma(\mathrm{d})\text{-Trans} \to \sigma(\mathrm{d})\text{-Trans}_2$。它在底层 $\sigma(\mathrm{d})$-代数上的行为是固定的，因此我们只需定义它在迁移上的行为。对于任意 $G = (D, V, E, \partial) \in \sigma(\mathrm{d})\text{-Trans}$ 和 $\alpha \in \mathrm{ET}$，我们将 $\Sigma_1(G)(\alpha)$ 定义为所有规则 ρ 的余积，这些规则产生类型为 α 的转换；其中每项都是描述 ρ 前提的集合。一个非平凡的规则是 (SA)，其前提集合为 $E[\mathrm{c}] \times_{V(0_\mathrm{c})} (V(0_\mathrm{c}) \times V(0_\mathrm{v}))$。具体而言，它是由元组 $(r, (E, v))$ 构成的集合，其中 r 是一个转换 $e_1 \xrightarrow{E'} e_2$，而拉回条件施加了 $E' = E[v\ \square]$。（我们取 $E[\mathrm{c}] \xrightarrow{\pi_2 \partial} V(0_\mathrm{c})$ $E[v\ \square]$ E 与 $\xleftarrow{\nu} V(0_\mathrm{c}) \times V(0_\mathrm{v})$ 的拉回。）我们将 $(r, (E, v))$ 的源定义为 $in_2(in_2(\iota(v), e_1)) \in V_\mathrm{p}(0) + \Sigma_0(V)_\mathrm{P}(0)$，（也就是说，回忆一下例 25 中的 Σ_0，形式应用 $\iota(v)$ e_1，）其标签定义为 E，目标定义为 e_2。

回到抽象设定，现在我们来定义动态签名 Σ_1 的模型范畴。为此，我们需要从 Σ_1 构造一个自函子，因此需要建立 σ-Trans 与 σ-Trans_2 之间的联系。

▸ **定义 40.** 令 ι-$\mathbf{Trans}\colon\ \sigma\text{-}\mathbf{Trans} \to \sigma\text{-}\mathbf{Trans}_2$ 将任意 $E \to \Delta(V)$ 映射到其自身（底层箭头为 $V \to V$）。

▸ 命题 *41.* 函子 ι-*Trans:* σ-*Trans* $\to \sigma$-Trans_2 是一个（满的）反射嵌入。左伴随记为 ρ-*Trans:* σ-$\mathit{Trans}_2 \to \sigma$-*Trans*，它将任意 $E \to \Delta_s(D) \times \Delta_{l,t}(V)$ 映射为复合式 $E \to \Delta_s(D) \times \Delta_{l,t}(V) \to \Delta(V)$。

▸ **定义 42.** 对于任意 Σ_1，令 $\check{}\,\Sigma_1$ 为复合函子 $\sigma\text{-}\mathbf{Trans} \xrightarrow{\Sigma_1} \sigma\text{-}\mathbf{Trans}_2 \xrightarrow{\rho\text{-}\mathbf{Trans}} \sigma\text{-}\mathbf{Trans}$。

Σ_1 的模型几乎都是 $\check{}\,\Sigma_1$-代数。问题在于，$\check{}\,\Sigma_1$-代数结构尤其包含底层 σ-代数上 Σ_1 的作用所对应的代数结构，也就是说，包含 σ-代数范畴上恒等自函子的代数结构 $V \to V$。这一结构与我们的目的无关，因此我们要求它是典范候选，即 V 上的恒等映射。

▸ **定义 43.** $\check{}\,\Sigma_1$-代数结构 $\check{}\,\Sigma_1(G) \to G$ 若在遗忘函子 σ-$\mathbf{Trans} \to \sigma$-$\mathbf{Alg}$ 下的像是恒等映射，则称其为垂直的。相应地，$\check{}\,\Sigma_1$-代数称为垂直的 $\check{}$。令 Σ_1-$\mathbf{alg}_v$ 表示由所有垂直代数组成的 Σ_1-$\mathbf{alg}$ 全子范畴。

▸ **定理 44.** 遗忘函子 $\check{}\,\Sigma_1$-$\mathbf{alg}_v \to \sigma$-$\mathbf{Trans}$ 是单子性的，而且初始 $\check{}\,\Sigma_1$-代数可取为垂直代数，记作 $\mathbf{Z}_{\Sigma_1}$；当上下文中明确时，简称为 $\mathbf{Z}$。因此，它特别也是 $\check{}\,\Sigma_1$-$\mathbf{alg}_v$ 中的初始对象。（在这种情况下，$V_\mathbf{Z}$ 是一个初始 σ-代数。）

证明。与 [18,定理 5.18 和命题 5 相同。19]。 ◂

▶ **例45**。 对于 Σ_1，如例 39 所示，Z 是第 3 节的句法转换系统。

现在我们来汇总签名及其模型的静态部分和动态部分。

▶ **定义46**。 一个操作签名 由一个句法签名**d**以及一个动态签名 Σ_1: $\sigma(\mathbf{d})$-**Trans** $\to \sigma(\mathbf{d})$-**Trans**$_2$ 构成，该动态签名定义在所生成的增强句法 $\sigma(\mathbf{d})$ 之上（命题 *34*）。$(\mathbf{d}, \Sigma_1)$-代数的范畴为˘ Σ_1-**alg**$_v$。

根据定义，我们有：

▶ **命题47**。 初始竖直˘ Σ_1-代数是一个初始的$(\mathbf{d}, \Sigma_1)$-代数。

6.3 增强双模拟等价的同余

在本小节中，我们陈述主要的同余结果。为此，我们需要提出一个重要假设，涉及所谓的函数型灵活双模拟。这类双模拟类似于函数型版本，但要求标签彼此相关而非完全相同，这与 Sangiorgi 的 BA-双模拟 [29], 颇为相似。我们需要分别为代数迁移系统及其双重视角变体定义这种双模拟。该假设随后要求所考虑的动态签名 Σ_1 保留函数型灵活双模拟。我们再次固定一个 Howe 上下文 H $=$(VT，ET，s，t，l)，以及其上的增强语法 σ。

▶ **定义48**。 态射 f: $R \to X$ 属于 $\mathbb{H}$-**Trans**$_2$ 是函数型灵活双模拟，当且仅当对任意 $\alpha \in$ $r \in D_R$ α r_1 $r_{n_\alpha} \in \Delta_1$ V_R α e' f_D r $\longrightarrow \mathbb{ET}$、$x'$ (s())、(，...，)()()以及转换： e $r \xrightarrow{\alpha\ r_1\ r_{n_\alpha}} r'$ $()_{\alpha(f_V(r_1),\ldots,f_V(r_{n_\alpha}))}$ 存在： $e = e'$ $_{(,\ldots,)}$，使得 $f_E()$。

在 σ-**Trans**$_2$ 中，态射是函数型灵活双模拟，当且仅当其在 $\mathbb{H}$-**Trans**$_2$ 中的底层态射是函数型灵活双模拟。在 σ-**Trans** 中，态射是函数型灵活双模拟，当且仅当它通过 ι-**Trans** 嵌入 σ-**Trans**$_2$ 后是函数型灵活双模拟。在这些范畴 $\mathscr{C}$ 中任意一个，令 **FFBisim**$(\mathscr{C})$ 表示所有函数型灵活双模拟构成的类。

▶ **定义49**。 动态签名 Σ_1: σ-**Trans** $\to \sigma$-**Trans**$_2$ 保持函数型灵活双模拟，当且仅当对于 σ-**Trans** 中的所有态射 f，若 f 是函数型灵活双模拟，则 $\Sigma_1(f)$ 也是函数型灵活双模拟。

在陈述主要结果之前，我们先引入最后一个假设：

▶ **定义50**。 函子是代数的，当且仅当它是有限保持的，并且保持宽拉回和自反余等化子。句法签名(Σ, Γ, δ) 是代数的，当且仅当其自函子 Σ 是代数的。

▶ 注释 51. 在我们的所有应用中，验证代数性都很直接。

▶ **定理 52.** 对于任意操作签名 $(\mathbf{d}, \Sigma_1)$，若 **d** 是代数的，且 Σ_1 保持˘函数型灵活双模拟，则初始垂直 Σ_1-代数上的增强双模拟等价是一个同余。

证明。 见附录 A。 ◀

6.4 保持函数型灵活双模拟

本节将给出动态签名保持函数型灵活双模拟的一个充分条件，这是对 [18, §7] 的略微推广。固定一个 Howe 上下文 H $=$(VT,ET,s, t, l)$\widehat{\ }$以及 VT 上的一个增强语法 $\sigma = (\Sigma_0, \Gamma, \delta$: $TS \to ST)$，我们首先将 H -Trans 和 H-Trans$_2$ 刻画为预层范畴，由此可将函数型灵活双模拟刻画为某个弱分解系统 [20, 28] –的右类；我们将左类称为

余纤维化。接着，我们回顾族函子，并定义动态签名 Σ_1 的规则以及任意规则的**边界元数**。最后，我们证明，族函子 Σ_1 保持函数型灵活双模拟，当且仅当所有规则的边界元数都是余纤维化。

让我们将迁移系统刻画为预层，并回顾定义 12：

命题 53. 我们有 $\mathbb{H}$-**Trans** $\simeq \mathbb{VT}[\mathbb{ET}]_{\mathbf{y_s}+\mathbf{l}+\mathbf{y_t}}$，其中 $\mathbf{y_s}+\mathbf{l}+\mathbf{y_t}\colon \mathbb{ET} \to \mathbb{VT}$。

证明。 函子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 是 $\mathbf{y_s}+\mathbf{l}+\mathbf{y_t}$ 的神经，因此由 [8, 引理 4。9]得出结论。 ◀

对 H-Trans$_2$ 进行同样的处理，可考虑函子 $\mathrm{ET} \to \widehat{\mathbb{VT}}^2$，它将任意 α 映射到箭头 $\mathbf{y}_{\mathbf{s}(\alpha)} \to \mathbf{y}_{\mathbf{s}(\alpha)} + \mathbf{l}(\alpha) + \mathbf{y}_{\mathbf{t}(\alpha)}$。但要应用 [8, 引理 4.9]，我们需要该函子的余域是一个预层范畴。事实上，在等价意义下确实如此：

▶ **引理 54. </style}我们有 $\mathbb{VT}^2 \simeq \widehat{\mathbb{VT}[\mathbb{VT}]_{\mathbf{y}}}$，其中 $\mathbf{y}\colon \mathbb{VT} \to \widehat{\mathbb{VT}}$。**

▶ **记号 4.** 对于每个状态类型 $b \in \mathbb{VT}$，范畴 $\mathbb{VT}[\mathbb{VT}]$ 有一个与顶点对象对应的对象 b_V、一个对应指定顶点对象的对象 b_D，以及一个态射 $b_V \to b_D$。

沿着所得到的函子 $\alpha \mapsto \mathbf{y}_{\mathbf{s}(\alpha)_D} + \sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}_{(\mathbf{l}_i^\alpha)_V} + \mathbf{y}_{\mathbf{t}(\alpha)_V}$ 进行粘合，我们得到：

命题 55. 我们有 $\mathbb{H}$-**Trans**$_2 \simeq \mathbb{VT}[\mathbb{VT}][\mathbb{ET}]$。

现在，我们通过提升性质来刻画函数型灵活双模拟。

▶ 定义 *56.* 在范畴 $\mathscr{C}$ 中，给定一个态射类 J，令 $J^{\pitchfork}$ 由满足以下条件的态射 $f\colon X \to Y$ 组成：对于任意 $j\colon A \to B \in J$ 以及任意 $(u, v)\colon j \to f \in \mathscr{C}^2$，都存在一个提升，即存在态射 $k\colon B \to X$，使得 $k \circ j = u$ 且 $f \circ k = v$。令 ${}^{\pitchfork}J$ 由所有满足以下条件的 f 组成：对于任意 $(u, v)\colon f \to j \in \mathscr{C}^2$，都存在一个提升。$J$-余纤维化是 ${}^{\pitchfork}(J^{\pitchfork})$ 中的一个元素。

▶ **命题 57**。 对于任意 $\mathbb{J}$，$\mathbb{J}$-余纤维化在余基变换和复合下封闭。

对于任意 $\alpha \in \mathrm{ET}$，元素 $(in_1(\mathrm{id}_{\mathbf{s}(\alpha)})) \in (\mathbf{y_s} + \mathbf{l} + \mathbf{y_t})(\alpha)(\mathbf{s}(\alpha))$ 对应于一个态射 $s_\alpha\colon \mathbf{s}(\alpha) \to \alpha$ in VT[ET],，同样，我们对所有 $i \in n_\alpha$ 得到态射 $l_i^\alpha\colon \mathbf{l}_i^\alpha \to \alpha$。

定义 58。 令 $\mathbb{J}_\sigma$ 表示 σ-**Trans** 中所有映射 $\mathbf{L}'(j_\alpha)$ 的集合，其中 $\mathbb{VT}[\mathbb{ET}] \to \sigma$-**Trans** 的左伴随是遗忘函子，且 $j_\alpha\colon \mathbf{y}_{\mathbf{s}(\alpha)} + \sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}_{\mathbf{l}_i^\alpha} \to \mathbf{y}_\alpha$ 表示余配对 $[\mathbf{y}_{s_\alpha}, [\mathbf{y}_{l_i^\alpha}]_{i \in n_\alpha}]$，对所有 α 均如此。

令 $J_{2,\sigma}$ 表示 σ-*Trans*$_2$，中所有映射 $L_2'(j_{2,\alpha})$ 的集合，其中 $L_2'\colon VT[VT][ET] \to \sigma$-*Trans*$_2$ 是遗忘函子的左伴随，记作 $\mathscr{U}_2'$；而 $j_{2,\alpha}\colon y_{s(\alpha)_D} + \sum_{i \in n_\alpha} y_{(l_i^\alpha)_V} \to y_\alpha$ 表示相应的余配对 $[y_{s_{2,\alpha}}, [y_{l_i^{2,\alpha}}]_{i \in n_\alpha}]$，对所有 α 均成立。

▶ **命题 59**。 我们有 FFBisim(σ-Trans) $= \mathbf{J}_\sigma^{\pitchfork}$ 且 FFBisim(σ-Trans$_2$) $= \mathbf{J}_{2,\sigma}^{\pitchfork}$。

现在我们引入边界元数。函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathrm{D}$ 到某个预层范畴称为**族式**，当且仅当存在一个函子 $E\colon \mathrm{el}(F(1)) \to \mathscr{C}$，它来自 $F(1)$ 的**元素范畴** [25,§I.5]，称为 F 的**指数**，使得我们有一个自然同构

$$F(C)(d) \cong \sum_{o \in F(1)(d)} \mathscr{C}(E(d, o), C).$$

直观地说，元素 $o \in F(1)(d)$ 是输出元数为 d 的运算，而 $E(d, o)$ 给出了它们的输入元数。D 中的态射 $u\colon d \to d'$ 通过前复合作用于 $F(C)$：对任意 $o' \in F(1)(d')$，

我们有一个态射 $(d,o) \xrightarrow{u\restriction o'} (d',o')$，它属于 $\mathsf{el}(F(1))$，其中 $o = F(1)(u)(o')$——记作$o = o' \cdot u$；而映射 $F(C)(u)\colon F(C)(d') \to F(C)(d)$ 将任意 $(o',\varphi\colon E(d',o') \to C)$ 映为 $(o, E(d,o) \xrightarrow{u\restriction o'} E(d',o') \xrightarrow{\varphi} C)$。这为定义边界元数奠定了基础。

▸ 定义 60。考虑一个动态签名 Σ_1，使得复合 $\sigma\text{-}Trans \xrightarrow{\Sigma_1} \sigma\text{-}Trans_2 \xrightarrow{\mathscr{U}'_2} \widehat{[\quad][\, VT}$ $VT\ ET]$ 是族式的，指数为 E。令我们固定 $\alpha \in ET$ 和 $r \in \mathscr{U}'_2\Sigma_1(1)(\alpha)$。对于任意 $k\colon A_k \to \alpha$ 在 $I_\alpha := \{s_2, \alpha, l^2_1{}^{\alpha}, \ldots, l^2_{n_\alpha}{}^{\alpha}\}$ 中，我们有 $E(k \restriction r)\colon E(A_k, r\cdot k) \to E(\alpha, r)$。$r$ 的边界元数 b_r 是余配对 $[E(k \restriction r)]_{k\in I_\alpha}\colon \sum_{k\in I_\alpha} E(A, r\cdot k) \to E(\alpha, r)$。

▸ **定理 61.** 对于任意动态签名 $\Sigma_1\colon \sigma\text{-}\mathbf{Trans} \to \sigma\text{-}\mathbf{Trans}_2$，若 $\mathscr{U}'_2\Sigma_1$ 是族式的，则 Σ_1 保持函数型灵活双模拟，当且仅当所有边界元数都是 $\mathbb{J}\sigma$-余纤维化。

“若”方向的证明概要见 §B。考虑任意 $(u,v)\colon \mathrm{L}'_2(j_{2,\alpha}) \to \Sigma_1(f)$，其中 $f\colon A \to B$ 属于 FFBisim(σ-Trans)。由伴随可得 $(\tilde{u},\tilde{v})\colon j_{2,\alpha} \to \mathscr{U}'_2(\Sigma_1(f))$。令 r 为复合映射 $\mathrm{y}_\alpha \xrightarrow{\tilde{v}} \mathscr{U}'_2(\Sigma_1(B))$ $\mathscr{U}'_2(\Sigma_1(!)) \longrightarrow \mathscr{U}'_2(\Sigma_1(1))$，利用族式性将 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 分解为下图中的实线部分。由下方所示找到 k，并利用 $\mathrm{b}_r \in \Uparrow(\mathbb{J}_\sigma{}^{\Uparrow})$ 和 $f \in \mathbb{J}_\sigma{}^{\Uparrow}.\mathscr{U}'$，即可得出结论。

$$\mathrm{y}_{\mathrm{s}(\alpha)_D} + \sum_{i\in n_\alpha} \mathrm{y}_{(\mathrm{l}_i^\alpha)_V} \qquad {}_2\,\Sigma_1\Big(\sum_{k\in I_\alpha} E(A_k,\ r\cdot k)\Big)$$

$$\mathscr{U}'_2(\Sigma_1(E(\alpha,\ r)))$$

◂

▸ **例 62.** 现在我们来概述定理 7 的一个证明。根据定理 52 和 61 以及命题 57，只需重构每条规则的边界元数。由于篇幅所限，我们只讨论规则 (SA)：它的边界元数是中的底部态射

$$\mathscr{L}(0_{\mathrm{p}} + 0_{\mathrm{c}}) \qquad \mathscr{L}[\mathbf{c}]$$

$$\mathscr{L}(0_{\mathrm{v}} + 0_{\mathrm{p}} + 0_{\mathrm{c}}) \qquad A,$$

记号应该是清楚的。

▸ **例 63.** 这同样适用于 PCF，如 [17],所示；由于篇幅所限，此处略去。

7 结论与展望

我们为存在代换之外的项上运算以及以项为标签的情形下的应用双模拟，提出了一个范畴框架。此外，我们还给出了用于生成该框架实例的签名概念，并证明在适当假设下——尤其是保持函数型灵活双模拟——生成实例中的应用双模拟等价是一个同余。最后，我们给出了一个更具体的充分条件，即边界元数为余纤维化；借此，我们恢复了 λ-演算（含分隔控制算子）和 PCF 中应用双模拟等价的同余性。

对于未来的工作，我们有兴趣进一步推广这一框架，以涵盖一种对 Howe 方法的改编形式——它至今仍未能纳入我们的抽象工作中，即（早期风格的）高阶进程演算 [23]。

参考文献

1 J. Adámek 和 J. Rosicky。《局部可呈示范畴与可达范畴》。剑桥大学出版社，1994年。doi:10.1017/CBO9780511600579。2 J. Adámek、J. Rosický 和 E. M. Vitale。《代数理论：一般代数的范畴导论》。剑桥数学专著丛书。剑桥大学出版社，2010年。doi:10.1017/CBO9780511760754。3 Jon M. Beck。分配律。载于 Beno Eckmann 和 Myles Tierney 编，《三元组与范畴同调理论研讨会》，《数学讲义》第80卷。施普林格，1969年。4 Karen L. Bernstein。高阶语言结构化操作语义的同余定理。载于《第13届计算机科学逻辑研讨会论文集》，第153–164页。电气电子工程师学会，1998年。 doi:10.1109/LICS.1998.705652。5 Dariusz Biernacki 和 Sergueï Lenglet。用于分隔控制操作符的应用双模拟。载于 Lars Birkedal 编，《第15届软件科学与计算结构基础会议论文集》，《计算机科学讲义》第7213卷，第119–134页。施普林格，2012年。doi:10.1007/978-3-642-28729-9_8。6 B. Bloom、S. Istrail 和 A. Meyer。双模拟不可追踪。《ACM学报》，42：232–268，1995年。 doi:10.1145/200836.200876。7 Peio Borthelle、Tom Hirschowitz 和 Ambroise Lafont。一个胞腔 Howe 定理。载于 Holger Hermanns、Lijun Zhang、Naoki Kobayashi 和 Dale Miller 编，《第35届美国计算机协会/电气电子工程师学会计算机科学逻辑研讨会论文集》。美国计算机协会，2020年。 doi:10.1145/3373718.3394738。8 Aurelio Carboni 和 Peter Johnstone。连通极限、族式可表示性与 Artin 粘合。《计算机科学中的数学结构》，5(4)：441–459，1995年。doi:10.1017/S0960129500001183。9 Olivier Danvy 和 Andrzej Filinski。控制抽象。载于 Gilles Kahn 编，《美国计算机协会 Lisp 与函数式编程会议论文集（LFP）》，第151–160页。美国计算机协会，1990年。doi:10.1145/91556.91622。10 Yves Diers。相对于某个函子的谱与局部化。《法国科学院周报》，287(15)：985–988，1978年。11 Marcelo Fiore、Gordon Plotkin 和 Daniele Turi。抽象语法与变量绑定。载于《第14届计算机科学逻辑研讨会论文集》。电气电子工程师学会，1999年。doi:10.1109/LICS.1999.782615。12 Marcelo Fiore 和 Daniele Turi。名称传递和值传递的语义。载于《第16届计算机科学逻辑研讨会论文集》，第93–104页。电气电子工程师学会，2001年。doi:10.1109/LICS.2001.932486。13 Marcelo P. Fiore。二阶与依赖排序抽象语法。载于《第23届计算机科学逻辑研讨会论文集》，第57–68页。电气电子工程师学会，2008年。 doi:10.1109/LICS.2008.38。14 Richard H. G. Garner 和 Tom Hirschowitz。形状单子与解析函子。《逻辑与计算杂志》，28(1)：33–83，2018年。 doi:10.1093/logcom/exx029。15 Joseph A Goguen 和 James W Thatcher。初始代数语义。载于《第15届开关与自动机理论年会（SWAT）论文集》，第63–77页。电气电子工程师学会，1974年。16 Sergey Goncharov、Stefan Milius、Lutz Schröder、Stelios Tsampas 和 Henning Urbat。迈向高阶数学操作语义。《美国计算机协会程序语言学报》，7(POPL)，2023年1月。doi:10.1145/3571215。17 Andrew D. Gordon。作为函数式编程理论的双模拟等价。《理论计算机科学》，228(1-2)：5–47，1999年。 doi:10.1016/S0304-3975(98)00353-3。18 Tom Hirschowitz 和 Ambroise Lafont。高阶语言中应用双模拟同余的范畴框架。《计算机科学中的逻辑方法》，18(3)，2022年。网址：https://lmcs.episciences.org/10066，doi:10.46298/lmcs-18(3:37)2022。19 Tom Hirschowitz 和 Ambroise Lafont。对语法上的结构定义作统一处理，涵盖避免捕获的替换、上下文应用、命名替换、偏微分等。2022年。网址：https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03633933。

20 Mark Hovey。《模型范畴》，数学调查与专著第63卷，美国数学会（1999）。美国数学会，1999。 doi:10.1090/surv/063。21 Douglas J. Howe。证明函数式编程语言中双模拟的同余性。《信息与计算》，124(2):103–112，1996。 doi:10.1006/inco.1996.0008。22 André Joyal、Mogens Nielsen 和 Glynn Winskel。双模拟与开映射。载于《计算机科学逻辑研讨会》第8届会议论文集，第418–427页。电气电子工程师学会，1993。doi:10.1109/LICS.1993.287566。23 Sergueï Lenglet 和 Alan Schmitt。用于上下文语义的 Howe 方法。载于 Luca Aceto 和 David de Frutos-Escrig（编），《并发理论国际会议》第26届会议论文集，计算机科学信息学出版物（LIPIcs）第42卷，第212–225页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2015。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2015.212。24 Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。数学研究生教材第5卷。施普林格，第2版，1998。 doi:10.1007/978-1-4757-4721-8。25 Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：托普斯理论初探》。Universitext。施普林格，1992。 doi:10.1007/978-1-4612-0927-0。26 Gordon D. Plotkin。操作语义的结构化方法。DAIMI 报告 FN-19，奥胡斯大学计算机科学系，1981。27 Jan Reiterman。与自由三元组相关的左伴随构造。《纯粹与应用代数杂志》，10:57–71，1977。doi:10.1016/0022-4049(77)90028-7。28 Emily Riehl。《范畴同伦论》。新数学专著第24卷。剑桥大学出版社，2014。29 Davide Sangiorgi、Naoki Kobayashi 和 Eijiro Sumii。逻辑双模拟与函数式语言。载于 Farhad Arbab 和 Marjan Sirjani（编），《软件工程基础国际研讨会（FSEN）》论文集，计算机科学讲义第4767卷，第364–379页。施普林格，2007。doi:10.1007/978-3-540-75698-9_24。30 Davide Sangiorgi 和 David Walker。《 π演算——移动进程理论》。剑桥大学出版社，2001。31 Sam Staton。通过范畴逻辑实现一般的结构操作语义。载于《计算机科学逻辑研讨会》第23届会议论文集，第166–177页，2008。doi:10.1109/LICS.2008.43。32 Daniele Turi 和 Gordon Plotkin。迈向数学化的操作语义。载于《计算机科学逻辑研讨会》第12届会议论文集，第280–291页。电气电子工程师学会，1997。doi:10.1109/LICS.1997.614955。33 Mark Weber。《球状集合的对称运算子》。博士论文，麦考瑞大学，2001。

A 定理 52 的证明

我们假设给定一个 Howe 上下文 H =(VT，ET，s，t，l)。为便于阅读，我们引入一些记号。

▶ 记号 5。对于任意 $G = (D, V, E, \gamma, \partial) \in H\text{-}Trans_{2,}$，我们令 $G_{D,V}$ 表示底层三元组 $(D, V, \gamma\colon D \to V) \in \widehat{VT^2}$，令 G_0 表示 V，令 G_1 表示 E，并令 G_s 表示 D。此外，沿用记号 2，我们用 $\Delta_{2,s,l}$ 表示将任意 $\gamma\colon D \to V$ 映射到 $\Delta_s(D) \times \Delta_l(V)$ 的函子。最后，我们有时将投影 $G \mapsto G_{D,V}$ 视为隐式强制转换。例如，我们将 $\Delta_{2,s,l}(G)$ 写作 $\Delta_s(D) \times \Delta_l(V)$。

A.1 灵活双模拟的基本性质

本节将确立灵活双模拟的基本性质。

▶ **命题 64**。 函子 Δ_l 是右伴随，因此特别保持所有极限。

证明。 函子 Δ_l 是l的神经函子。它是左 Kan 延拓 $\mathbb{ET} \hat{}\mathbb{ET}$的右伴随；该延拓是 l 沿 Yoneda 嵌入得到的，如下图所示。



◀

关于余极限的保持，由于任意 l(c) 都是可表对象的有限余积，因此：

▶ **命题 65**。 函子 Δ_l 是代数的，并且保持满态射。

证明。 为使证明更简洁，我们借助以下众所周知的事实： [2]在预层范畴中，保持滤过余极限和自反余等化子等价于保持可筛余极限。此外，正如任意有限可表示对象的协变同态函子保持滤过余极限，在预层范畴中，任意可表对象有限余积的协变同态函子都保持可筛余极限，因而保持满态射。后一个事实说明了第二个结论。

首先，对于任意滤过余极限 $\mathrm{colim}_i X_i$ 以及 $c \in$C:

$\Delta_l(\mathrm{colim}_i X_i)(c) = \mathrm{VT}(l(c), \mathrm{colim}_i X_i) = \mathrm{colim}_i \mathrm{VT}(l(c), X_i)$ (l(c) 是可表函子的有限余积)= $\mathrm{colim}_i \Delta_l(X_i)(c)$。

◀

▶ **命题 66**。 **</style}所有函子 ,,,,,** ı, . . . 都是代数右伴随（并保持满态射）。

证明。 我们先处理代数性。由于代数函子在逐点积下封闭，只需分别考察 Δ_l、 Δ_s和 Δ_t： Δ_s 和 Δ_t 作为限制函子，具有代数性； Δ_l 根据命题 65 也具有代数性。最后，在预层范畴中，代数性意味着保满态射。

关于右伴随性，由于右伴随在逐点积下封闭（在此处满足的（余）完备性条件下），只需证明 Δ_{l}、 Δ_{s} 和 Δ_{t} 各自都是右伴随。同样， Δ_{s} 和 Δ_{t} 作为限制函子都是右伴随；而 Δ_{l} 根据命题 64 也是右伴随。◀

▶ **命题 67**。 所有函子 $\Delta_{2}, \Delta_{2,\,\mathrm{l}}, \Delta_{2,\,\mathrm{s}}, \Delta_{2,\,\mathrm{t}}, \Delta_{2,\,\mathrm{s},\,\mathrm{l}}, \ldots$ 都是代数右伴随，并且保持满态射。

证明。 预层范畴之间的代数函子自动保持满态射，因此只需证明这些函子都是代数右伴随。

代数右伴随在逐点有限积下封闭，因此进一步只需证明 $\Delta_{2,\,\mathrm{l}}$, $\Delta_{2,\,\mathrm{s}}$ 和 $\Delta_{2,\,\mathrm{t}}$ 中的每一个都是代数右伴随。现在，这些函子 $\Delta_{2,\,x}$ 中的每一个都是相应函子 Δ_x 与某个投影 $\widehat{\mathbb{VT}}^{2} \to \widehat{\mathbb{VT}}$ 复合所得。但根据命题 66，每个 Δ_x 都是代数右伴随；而投影作为限制函子，既是左伴随也是右伴随，因此也是代数右伴随，结论得证。◀

▶ **引理 68.** 在任意预层范畴中，对于任意形如 $\begin{matrix} A & A' \\ C' & C \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ B \\ \\ D \end{matrix}$ 的交换图表

如果外侧矩形是逐点弱拉回，且标记态射是满态射，那么右侧的方形也是如此。

证明。 显然，这利用了这样一个事实：任何从某个可表预层出发的态射 $\mathbf{y}_c \to C$ 都可以提升到 C' 因为满态射在预层范畴中是逐点的。◀

▶ **命题 69.** 偶极 $\mathbb{H}$-迁移系统的态射 $R \to X$ 是函数型灵活双模拟，当且仅当下方方形是逐点弱拉回。$\begin{matrix} R_1 & X_1 \\ \Delta_{\mathrm{s}}(R_s) \times \Delta_{\mathrm{l}}(R_0) & \Delta_{\mathrm{s}}(X_s) \times \Delta_{\mathrm{l}}(X_0) \end{matrix}$

▶ **引理 70.** 对于 $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_2$ 中的任意态射 $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} X$，若 $f_{D,\,V} : R_{D,\,V} \to S_{D,\,V}$ 是满态射，且 gf 是函数型灵活双模拟，则 g 也是函数型灵活双模拟。

证明。 我们有一个图表 $\begin{matrix} R_1 & S_1 & X_1 \\ \Delta_{2,\mathrm{s},\mathrm{l}} R_{D,V} & \Delta_{2,\mathrm{s},\mathrm{l}} S_{D,V} & \Delta_{2,\mathrm{s},\mathrm{l}} X_{D,V}, \end{matrix}$

并希望证明右侧的方形是逐点弱拉回，已知外层矩形是逐点弱拉回：这可由引理 68 和命题 67 直接推出。◀

▶ **推论 71**。 对于任意 $X \in \mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_2$ 以及 $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_2/X^2$ 中的跨度态射 f： $R \to S$，若 $f_{D,\,V}$ 是满态射，且 R 是一个（双）模拟，则 S也是一个（双）模拟。

▶ **命题 72**。 投影函子 $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans} \to \widehat{\mathbb{VT}}$ 和 $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_2 \to \widehat{\mathbb{VT}}^{2}$ 是 *Grothendieck* 纤维化。

证明。 这可由下一个引理直接得出。 ◀

▶ **引理 73.** 对于任意函子 $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$，若其映至某个具有拉回的范畴 $\mathbf{B}$，则投影函子 $p\colon \mathbf{B}/F \to \mathbf{A}$（将任意对象 $b \to Fa$ 映至 a）是一个格罗滕迪克纤维化。

证明。 给定任意对象 $x\colon b \to Fa$ 以及态射 $f\colon a' \to a$，其笛卡尔提升由以下拉回给出，

$$\begin{array}{cc} b_{|a'} & b \\ x_{|f} Fa' & Fa \end{array}$$

笛卡尔性由拉回的泛性质保证。 ◀

▶ **定义 74.** 偶联的 $\mathbb{H}$-迁移系统（或任意增强语法 σ下的偶联 σ-迁移系统）的跨度 $R \to X \times Y$，若其左腿$R \to X$ 是函数型灵活双模拟，则称为灵活模拟；若两条腿均如此，则称为灵活双模拟。

按照惯例，对于任意 $R \in \widehat{\mathbb{VT}}^2$ 和 $X \in \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_{\mathbb{2}}$，，若跨度 $R \to X^2_{D,V}$ 的 X沿 $R \to X^2_{D,V}$ 的笛卡尔提升（按命题 72 的含义）是灵活双模拟，则称该跨度为灵活双模拟。

▶ **命题 75.** 如果跨度 $R \to X^2$ 是柔性（双）模拟，那么其笛卡尔提升 $R^{\Uparrow}_{D,V} \to X^2$也是如此。

证明。 由推论 71 应用于跨度态射 $R \to R^{\Uparrow}_{D,V}$即可得出。 ◀

▶ **引理 76.** 设 $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 是保持拉回的函子，且其源范畴和目标范畴都具有拉回和（强满射-单态射）分解。那么：

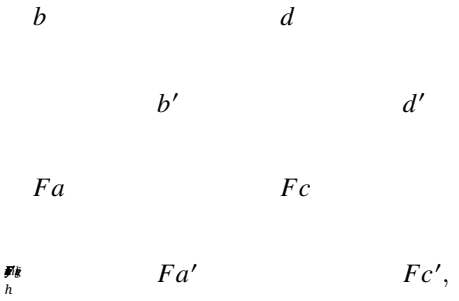
(i) B/F 中的态射 (f, g) 是单态射，当且仅当 f和 g 都是单态射。*(ii)* B/F 中的态射 (f, g) 是强满射，当且仅当 f和 g 都是强满射。*(iii)* 遗忘函子 $B/F \to B \times A$ 创建（强满射-单态射）分解，因而保持这些分解。

证明。 首先，遗忘函子创建所有余极限，也创建它所 F 保持的所有极限，因此特别会创建拉回。此外，在任意范畴 $\mathbf{C}$中，态射 $f\colon X \to Y$ 是单态射，当且仅当它的**自交换方块**

$$\begin{array}{cc} X & X \\ f\,X & Y \end{array}$$

是一个拉回。因此，B/F 中的态射（f，g）是单态射，当且仅当它的自交换方块是一个拉回；当且仅当 f 和 g 的自交换方块都是拉回；当且仅当 f 和 g 都是单态的。由此证明了 (i)。

接下来处理 (ii) 中的“若”部分。考虑如下图表，其实线部分为

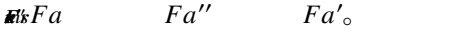


其中 e 和 r 是强满射，m 和 s 是单态射。根据正交性，我们得到唯一提升 k 和 l，使四个三角形均可交换（底面上没有 F ）。剩下要证明的是，竖直的对角方形可交换：根据正交性即可得出这一点，因为 Fs 是单态的（这是因为 F 保持拉回，因而保持单态射）。

对于 (iii)，任取对象 $x\colon b \to Fa$ 和 $x'\colon b' \to Fa'$，并令 $f\colon b \to b'$ 和 $g\colon a \to a'$ 使下图交换。b b'



现在令 $b \xrightarrow{e} b'' \xrightarrow{m} b'$ 和 $a \xrightarrow{r} a'' \xrightarrow{s} a'$ 分别为 f 和 g 的（强满射-单态射）分解。由于 F 保持单态射，Fs 是单态射，因此根据正交性，我们可以找到一个唯一提升，使两个方形都在 b b'' b' 中交换



此外，根据 (i) 和 (ii)，这个提升实际上是 (f, g) 的（强满射-单态射）分解，正如所需。根据假设，由于（强满射-单态射）分解在唯一同构意义下唯一，并且存在于 $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ 中，因此保持性成立。

最后，证明 (ii) 的“仅当”部分：一个态射是强满射，当且仅当其（强满射-单态射）分解中的单态部分是同构。因此，给定 B/F 中的强满射 (e, r)，我们分别求出 e 和 r 的（强满射-单态射）分解 $m \circ e'$ 和 $s \circ r'$。根据 (iii)，它们唯一地提升为 B/F 中 (e, r) 的（强满射 - 单态射）分解 $(m, s) \circ (e', r')$。但根据 (ii)，(e', r') 是强满射；根据假设，(e, r) 也是强满射；而 (m, s) 是它们之间的单态射，因此由引理 83 可知它是同构。于是，m 和 s 都是同构，因此 e 和 r 都是强满射，证毕。◀

▶ **引理 77.** 遗忘函子

$$\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2 \to \widehat{\mathbb{ET}} \times \widehat{\mathbb{VT}}^2$$

创建所有余极限和极限，以及（强满射）-单态射分解。

证明。 对于余极限，这一点显然。对于极限，投影 $\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2 \to \widehat{\mathbb{ET}} \times \widehat{\mathbb{VT}}^2$ 创建函子 Δ_2 所保持的所有极限（因为 $\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2$ 是它的松弛极限），根据命题 67，也就是所有极限。对于（强满射）-单态射分解，这由引理 76 得出。◀

22 应用双模拟等价同余的更一般范畴框架

▶ **引理 78**。 对于任意双视的$\mathbb{H}$-迁移系统 X，遗忘函子

$$\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2/X^2 \to \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2 \to \widehat{\mathbb{ET}} \times \widehat{\mathbb{VT}}^2$$

创建所有余极限和连通极限。

证明。 投影 $(\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2)/X^2 \to \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2$ 创建余极限和连通极限，因为切片范畴中的任意投影都具有这一性质。因此，由引理 77 可得结论。◀

▶ **引理 79**。 灵活双模拟在$\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2^2$，中对滤过余极限封闭，也就是说，在$\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2$的箭头范畴中。

证明。 设 $(r_\infty \colon R_\infty \to X_\infty) = \operatorname{colim}_j (r_j \colon R_j \to X_j)$ 表示任意一个由函数型灵活双模拟构成的滤过图表的余极限。由引理 78 以及余极限在箭头范畴中是逐点计算的这一事实可得

$$(R_\infty)_0 \cong \operatorname{colim}_j (R(j)_0) \qquad (R_\infty)_s \cong \operatorname{colim}_j (R(j)_s) \qquad (R_\infty)_1 \cong \operatorname{colim}_j (R(j)_1)$$

and

$$(X_\infty)_0 \cong \operatorname{colim}_j (X(j)_0) \qquad (X_\infty)_s \cong \operatorname{colim}_j (X(j)_s) \qquad (X_\infty)_1 \cong \operatorname{colim}_j (X(j)_1).$$

此外，所有态射

$$\gamma_{R_\infty} \colon (R_\infty)_s \to (R_\infty)_0 \qquad \partial_{R_\infty} \colon (R_\infty)_1 \to \Delta_2(R_\infty)$$

$$\gamma_{X_\infty} \colon (X_\infty)_s \to (X_\infty)_0 \qquad \partial_{X_\infty} \colon (X_\infty)_1 \to \Delta_2(X_\infty)$$

$$(r_\infty)_1 \colon (R_\infty)_1 \to (X_\infty)_1 \qquad (r_\infty)_s \colon (R_\infty)_s \to (X_\infty)_s \qquad (r_\infty)_0 \colon (R_\infty)_0 \to (X_\infty)_0$$

由泛性质导出。

现在考虑任意的 p 和 q，使下图交换。y^c (

$X_\infty)_1$

$\Delta_{2,\mathrm{s},1} r_\infty \Delta_{2,\mathrm{s},1}(R_\infty)$ $\Delta_{2,\mathrm{s},1}(X_\infty)$

函子 $\Delta_{2,\mathrm{s},1}$ 是有限保持的，且对象 y_c 是有限可表示的，因此 p 可经由某个$(X_h)_1$因子分解为$\Delta_{2,\mathrm{s},1}(R_k)$，例如分解为 p_k；而 q 可经由某个 $(X_l)_1$, 因子分解，例如分解为 q_l。此外，根据滤过性，我们可以找到 h 和态射 $k \xrightarrow{f} h \xleftarrow{g} l$，从而可以如$(X_l)_1$中的下图所示，定义 p_h 和 q_h。

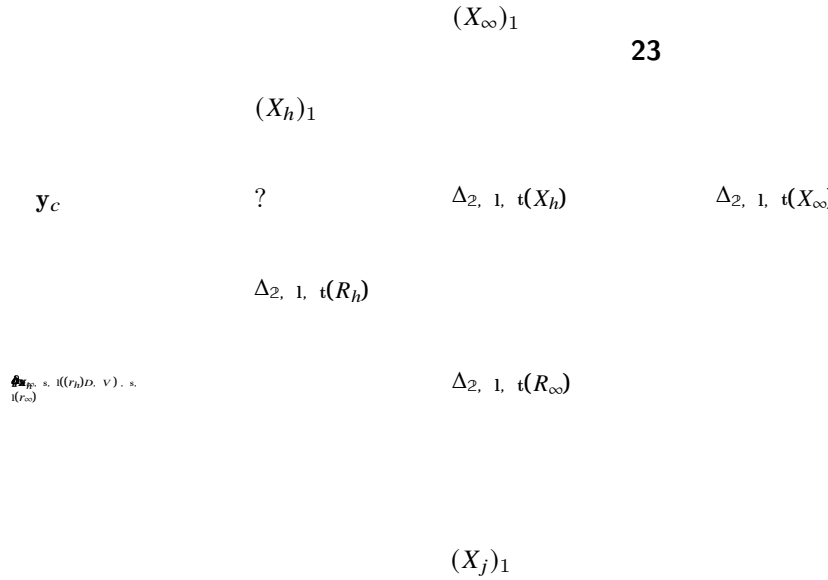
$\Delta_{2,1,\mathrm{t}}(X_h)$

$\mathbf{y}_c$

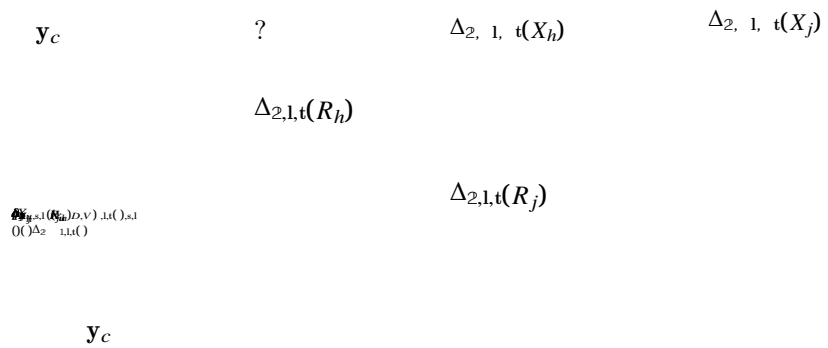
$\Delta_{2,\ \mathrm{s},\ 1}\ (R_k)$

$\Delta_{2,1,\mathrm{t}}(R_h)$

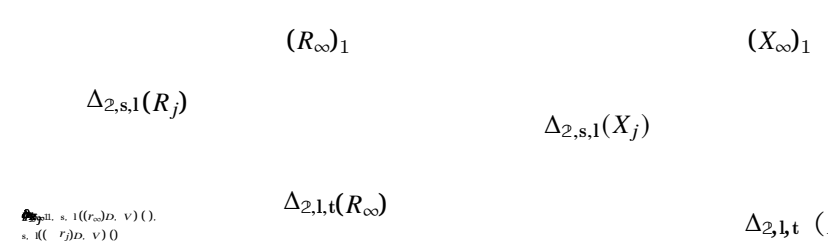
由于下图可交换，



根据滤过性，我们可以找到某个 j和态射 $u: h \to j$，使得 $\Delta_{2,\ s,\ 1} X_u$将上方带问号的平行对等化。然后我们通过复合定义 p_j和 q_j，从而得到如下的 $(X_h)_1$交换图



（其中，带问号的平行对再次可能不交换，但外部的对交换）因此我们得到如下情形



但 r_j: $R_j \to X_j$是函数型灵活双模拟，因此我们可以找到如图所示的中介箭头 m。复合箭头

$$\mathbf{y}_c \xrightarrow{m} (R_j)_1 \to (R_\infty)_1$$

最终给出了所需的中介箭头。 ◂

▸ **推论 80.** 对于任意 *diplopic* $\mathbb{H}$-迁移系统 X，其上的灵活双模拟 $R \to X^2$ X 在$\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_{\mathcal{Z}}/X^2$中对滤过余极限封闭。

▸ **引理 81.** 对于任意 *diplopic* $\mathbb{H}$-迁移系统 X，其上的灵活双模拟 $R \to X^2$ X 对跨度复合封闭。

证明. 我们需要证明方形$(R; S)_1$ X_1
$\pi_1 \Delta_{2\,\mathrm{s}\,1}$ R S $\Delta_{2\,\mathrm{s}\,1} X_{,,(;),,,\mathrm{s},1}$

是一个逐点弱拉回。根据构造，该方形分解为 $(R; S)_1$ R_1 X_1

$\pi_1 \Delta_{2,\mathrm{s},1}(R; S)$ $\Delta_{2,\mathrm{s},1} R$ $\Delta_{2,\mathrm{s},1} X$

$(R; S)_1$ S_1
其中右侧方形根据假设是一个逐点弱拉回。现在，左侧方形是以下图表中的左侧面，R_1

X_1

$\Delta_{2,\mathrm{s},1}(R;\ S)$ $\Delta_{2,\mathrm{s},1} S$

π_1 $\Delta_{2,\mathrm{s},1} R$ $\Delta_{2,\mathrm{s},1} X$

其上下两个面由引理 78 给出的拉回构成，并且 $\Delta_{2,\ \mathrm{s},\ 1}$: $\widehat{\mathrm{VT}^2} \to \widehat{\mathrm{ET}}$ 是右伴随，因此连续。由于右侧面根据假设是弱拉回，故根据 [18, 引理 9.26 的 (i)，左侧面也是弱拉回；接着应用 (ii)]。最后，我们根据 [18,引理 9.26 的 (i)]得出结论。◂

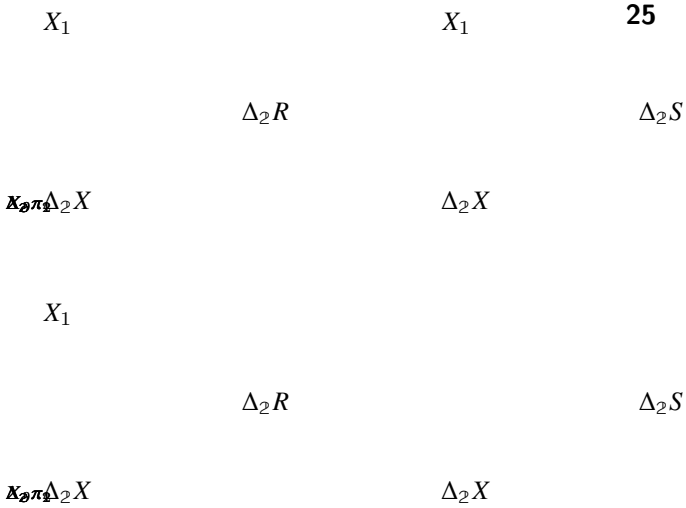
▸ **引理 82**。 对于任意 *diplopic*$\mathbb{H}$-迁移系统 X，其上的灵活双模拟 $R \to X^2_{D,\ V}$在跨度复合下封闭。

证明。 给定任意两个灵活双模拟，记作 R 和 S，我们注意到存在一个投影 $R^{\Uparrow}$; $S^{\Uparrow}$ π: $R^{\Uparrow}$; $S^{\Uparrow} \to (R;\ S)^{\Uparrow}$ 使下图交换。

$(R;\ S)^{\Uparrow}$ X_1^2

$\Delta_2(R);\ \Delta_2(S)$ $\Delta_2(R;\ S)$ $\Delta_2 X^2$

为此，我们注意到，根据极限交换， $R^{\Uparrow}; S^{\Uparrow}$ 是以下对象的极限

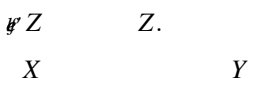


而 $R; S^{\Uparrow}$ 是以下子图表的极限。

最后，由引理 81，我们知道 $R^{\Uparrow}; S^{\Uparrow}$ 是灵活双模拟，因此根据引理 68，$R; S$ 也是如此。◀

▶ **引理 83**。对于任意强满射 $e\colon X \to Y$ 和 $e'\colon X \to Z$，以及任意单态射 $f\colon Y \to Z$，若 $f \circ e = e'$ 是一个同构。

证明。我们通过如 X Y中的提升，找到 f 的一个截面。



但根据 中提升的唯一性，l 实际上是一个逆态射

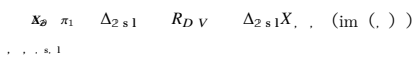


◀

▶ **引理 84**。对于任意双射 $\mathbb{H}$-迁移系统 X，在 X 上的灵活双模拟 $R \to X^2$ 关于像封闭。

证明。两者 $\widehat{\mathbb{ET}}$ 和 $\widehat{\mathbb{VT}}^2$ 都是（同构于）预层范畴，因此像可通过（强满射-单态射）分解来计算。此外，Δ_2 根据命题 67 保持拉回，因此由引理 76，遗忘函子 $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_2 \to \widehat{\mathbb{ET}} \times \widehat{\mathbb{VT}}^2$ 创建（强满射-单态射）分解，因此也创建像。

现在，考虑任意灵活双模拟 $p\colon R \to X^2$。正如我们刚才所见，通过对 p_1 和 $p_{D,\,V}$ 进行因子分解，我们得到 p 的一个（强满射-单态射）分解。接下来需要证明方形 $\mathrm{im}(R_1)X_1$



是逐点弱拉回。但根据命题 67， $\Delta_{2,\ l,\ s}$ 保持满态射。因此，由于 R_1 $\mathrm{im}(R_1)$ X_1 的外部

$$X_{2,s,l}\pi_1 \quad \Delta_{2,s,l}(R_{D,V}) \qquad \Delta_{2,\ s,\ l}(\mathrm{im}(R_{D,\ V})) \quad \Delta_{2,s,l}X$$

根据假设，这是一个逐点弱拉回，因此由引理 68 可得结论。 ◀

A.2 灵活模拟与刚性模拟的复合

本小节的目标是证明以下结论。

▶ **引理 85.** 对于任意 $\mathbb{H}$-迁移系统 X、双重柔性模拟 $R \to X^2$ 和模拟 $S_0 \to X_0^2$，若配备跨度态射 ρ： R_0； $S_0 \to R_0$，则关系 $\mathrm{im}(R$； $\theta S_0)$是一个灵活模拟，因此 $\mathrm{im}(R_{D,\ V}$； $S_0)^{\Uparrow}$也是如此。

为了顺利证明这一点，我们引入以下三重过渡系统的概念。

▶ **定义 86.** 令 $\mathbb{H}$-**Trans**$_3$ 表示 $\widehat{\mathbb{VT}}^3 \xrightarrow{\Delta_s \times \Delta_l \times \Delta_t} \widehat{\mathbb{ET}}$的松弛极限。$\mathbb{H}$-**Trans**$_3$的对象称为三视转换系统。

▶ 记号 *6.* 我们用 Δ_3, $\Delta_{3,s}$, $\Delta_{3,s,l}$,... 表示与 Δ_2, $\Delta_{2,s}$, $\Delta_{2,s,l}$,... 类似的函子，并且通常将投影 $H\text{-}Trans_3 \to \widehat{VT}^3$ 视为隐式强制转换，因此例如可写作$\Delta_{3,s,l}X$，对于任意 $X \in H\text{-}Trans_3$,，意为 $\Delta_s(X_s) \times \Delta_l(X_l)$。

因此，三视转换系统 X 由预层 $X_s, X_l, X_t \in$ VT 和 $X_1 \in$ ET 组成，并配有一个态射 $X_1 \to \Delta_s(X_s) \times \Delta_l(X_l) \times \Delta_t(X_t)$。

▶ 注 87。我们在 H -Trans$_2$ 中使用粗体 2，在 H-Trans$_3$, 中使用普通字体的 3，以反映这样一个事实：任何双重跃迁系统 $X \in$ H-Trans$_2$ 都带有一个态射 $X_s \to X_0$，而三重过渡系统则没有这样的要求。

我们不妨注意以下有用事实。

▶ **命题 88**。 所有函子 $\Delta_3, \Delta_{3,l}, \Delta_{3,s}, \Delta_{3,t}, \Delta_{3,s,l}, \ldots$ 都是代数右伴随，并且保满态射。

证明。 预层范畴之间的代数函子自动保满态射，因此只需证明这些函子都是代数右伴随。

由于代数右伴随在逐点有限积下封闭，因此只需进一步证明 $\Delta_{3,l}$, $\Delta_{3,s}$ 和 $\Delta_{3,t}$ 中的每个都是代数右伴随。现在，这些函子 $\Delta_{3,x}$ 分别是相应函子 Δ_x与某个投影$\widehat{\mathrm{VT}}^3 \to \widehat{\mathrm{VT}}$复合得到的。但根据命题 66，每个 Δ_x 都是代数右伴随；而投影作为限制函子，既是左伴随也是右伴随，因此是代数右伴随。结论得证。◀

▶ **引理 89**。 遗忘函子

$$\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_3 \to \widehat{\mathbb{ET}} \times \widehat{\mathbb{VT}}^2$$

创建所有余极限和极限，以及（强满射）-单态射分解。

证明。 与引理 77 一样。 ◀

三视转换系统的理念是将灵活与刚性双模拟统一到单一框架中，同时允许在输入状态、输出状态和标签的选择上拥有最大的灵活性。现在我们来定义三视转换系统中的（双）模拟。接着，我们将介绍迁移系统和二重过渡系统到三视转换系统中的嵌入，并在每种情况下证明，该嵌入保持并反映双模拟。

▶ **定义90.** 三视转换系统的态射 $f\colon R \to X$ 是函数互模拟，当且仅当方形

$$\begin{array}{ll} R_1 & X_1 \\ \Delta_{3,\mathrm{s},\mathrm{l}} R & \Delta_{3,\mathrm{s},\mathrm{l}} X \end{array}$$

是逐点弱拉回。$\mathbb{H}$-**Trans**$_3$ 中的跨度和关系分别类比$\mathbb{H}$-**Trans**$_2$的情形，称为模拟和双模拟。

▶ **命题91.** 将任意二重过渡系统映射

$$(X_1, \gamma\colon X_s \to X_0, \partial\colon X_1 \to \Delta_{\mathrm{s}}(X_s) \times \Delta_{\mathrm{l,t}}(X_0))$$

to

$$(X_1, X_s, X_0, X_0, \partial\colon X_1 \to \Delta_{\mathrm{s}}(X_s) \times \Delta_{\mathrm{l,t}}(X_0))$$

得到一个嵌入 $\iota\colon \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_2 \to \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_3$。

证明。 显然。 ◀

▶ **记号7。** 通过与 $\mathbb{H}$-**Trans** $\hookrightarrow \mathbb{H}$-**Trans**$_2$, 复合，我们得到另一个嵌入$\mathbb{H}$-**Trans** $\hookrightarrow$ $\mathbb{H}$-**Trans**$_3$。将前者视为隐式强制转换后，我们因此通常也只将复合记作 ι。

▶ **命题 92。** 双重跃迁系统的态射（分别地，跨度）是函数互模拟（分别地，模拟或双模拟），当且仅当它嵌入三重过渡系统后也是如此。

证明。 显然。 ◀

除了我们上面看到的嵌入 H -Trans $\hookrightarrow$ H-Trans$_3$ 之外，还有以下跨度的嵌入：

▶ **命题 93。** 对于任意 $X \in \mathbb{H}$-**Trans**，将 $\mathbb{V}\mathbb{T}^{\frown}$ 中的任意跨度 $R_0 \to X_0^2$ 映射到由 (R_0, X_0, R_0) 和 $\theta(R_0)_1 = R_0^{\uparrow}$ 给出的三视转换系统 $\theta(R_0)$，即由拉回 $R_0^{\uparrow}$ X_1^2 给出

$$\Delta_{\mathrm{s}}(R_0) \times \Delta_{\mathrm{l}}(X_0) \times \Delta_{\mathrm{t}}(R_0) X_0^2,$$

扩展为一个嵌入 $\theta\colon {}^{\frown}\mathbb{V}\mathbb{T}/X_0^2 \to \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_3/X^2$，我们称之为薄嵌入。

▶ 注记 94。这里的薄性指的是标签：在 $\theta(R_0)$ 中，任何转换两侧的标签都必须一致。

28 应用双模拟等价同余的更一般范畴框架

薄嵌入使我们能够用三重 H-迁移系统中的双模拟来刻画 H-迁移系统中的双模拟：

▶ **命题 95**。 对于任意 $X \in \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}$，跨度 $R_0 \to X_0^2$ 是一个模拟（分别是双模拟等价）当且仅当 $\theta(R_0) \to X^2$ 也是如此。

证明。 两个陈述都意味着方形

$$\begin{array}{ccc} R_0^{\uparrow} & & X_1 \\ & & \\ \pi_1 \quad \Delta_s\, R_0 \;\times \Delta_1\, X_0 & & \Delta_{s\,1} X_0 \end{array}$$

是一个逐点弱拉回。 ◀

最后，我们有显然的

▶ **命题 96**。 （双）模拟在 $\mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_3$ 中对跨度复合封闭。

证明。 由对称性，只需证明模拟对跨度复合封闭。因此，考虑任意两个模拟 R 和 S，它们定义在某个 $X \in \mathbb{H}\text{-}\mathbf{Trans}_3$上。我们必须证明方形

$$\begin{array}{ccc} (R;S)_1 & & X_1 \\ & & \\ \pi_1 \Delta_{3,s,1}(R;S) & & \Delta_{3,s,1} X \end{array}$$

是一个逐点弱拉回。此方形可分解为$(R;S)_1$ R_1 X_1

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{3,s,1}(R;S) & \Delta_{3,\,s,\,1}(R) & \Delta_{3,s,1} X, \\ (R;S)_1 & & S_1 \end{array}$$

其中右侧方形根据假设是逐点弱拉回，而左侧方形是

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & X_1 \\ \Delta_{3,s,1}(R;S) & & \Delta_{3,s,1} S \\ \Delta_{3,s,1}\pi_1 & \Delta_{3,s,1} R & \Delta_{3,s,1} X \end{array}$$

其上下两面由引理 78 以及 $\Delta_{3,\,s,\,1}$ 是右伴随且连续这一事实可知是拉回。由于右侧面根据假设是逐点弱拉回，因此根据 [18, 引理 9.26 的 (i)，再由 (ii)]，左侧面也是逐点弱拉回。因此，根据 [18,引理 9.26 的 (i)], ，整个矩形是逐点弱拉回，如所需。◀

▶ **命题 97**。 三重（双）模拟在像下封闭。

证明。 由对称性，只需考虑模拟的情形。设 $R \to X^2$ 是任意一个三重模拟。那么根据命题 89，我们需要证明下方右侧的方形是逐点弱拉回，

R_1 $\mathrm{im}(R_1)$ X_1^2

$\Delta_{3,s,1}R$ $\Delta_{3,s,1}\,\mathrm{im}(R)$ $\Delta_{3,s,1}X^2$

根据引理 68，以及 $\Delta_{3,\ s,\ 1}$ 由代数性保持满态射这一事实（引理 88），该方形确实是逐点弱拉回。◀

▶ **引理 98.** 给定任意 X^2 中的一个分裂满射 $R \twoheadrightarrow S$ $\mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}_3$，，若 S 是一个模拟，则 $\mathrm{im}(R)$ 也是模拟。

证明。 给定的分裂满射及其截面诱导出态射

$$\mathrm{im}(R) \to \mathrm{im}(S) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{im}(S) \to \mathrm{im}(R),$$

因此 $\mathrm{im}(R) \cong \mathrm{im}(S)$，故由引理 97 得证。 ◀

引理 85 的证明。 态射 $\tilde{\rho}\colon\ R;\ \iota S \to R;\ \theta S$ 由三元组定义

$$\mathrm{id}\colon R_0; S_0 \to R_0; S_0 \qquad \rho\colon R_0; S_0 \to R_0 \qquad \mathrm{id}\colon R_0; S_0 \to R_0; S_0$$

有一个截面，即态射 $R; \theta S \to R;\ \iota S$，定义如下

$$\mathrm{id}\colon R_0; S_0 \to R_0; S_0 \qquad R_0 \cong R_0; X_0 \to R_0; S_0 \qquad \mathrm{id}\colon R_0; S_0 \to R_0; S_0$$

（由 S_0 的自反性诱导）。因此，根据引理 98，$\mathrm{im}(R; \iota S)$ 是一个三重模拟，故根据命题 92，它也是一个双模拟。最后，根据命题 75，$\mathrm{im}(R_{D,\ v}; S_0)^{\Uparrow}$ 是一个灵活模拟。◀

A.3 灵活双模拟的基本性质

在本节中，我们利用灵活双模拟的以下基本性质，将定理归结为一个涉及灵活双模拟的特定结果：

▶ **命题 99。** 对于任意 $X \in \mathbb{H}$-$\mathbf{Trans}$ 以及自反的灵活双模拟 $R \to X^2$, $R_0 \to X_0^2$，它都是一个双模拟。

我们需要以下引理。

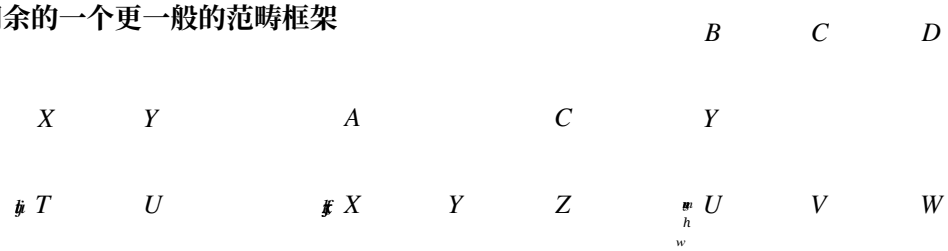
▶ **引理 100。** 考虑以下形式的任意交换图 A B C D

X Y Z

T U V W

（即，所有三个方形和该矩形都交换，且满足 $zf = kjx$），使得下面的三个方形都是弱拉回。

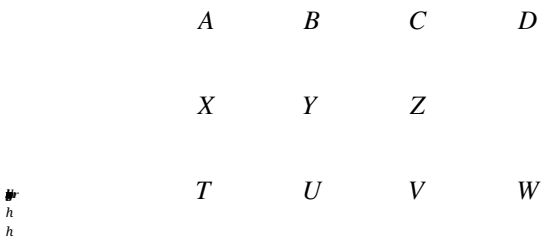
30 应用双模拟等价同余的一个更一般的范畴框架



那么，外部整体仍是一个弱拉回。

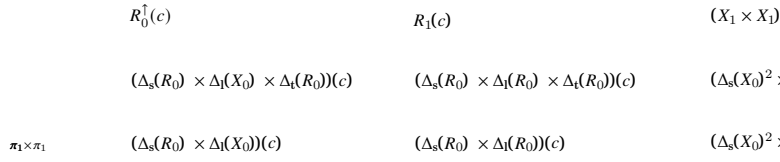
证明。 首先，我们找到 i： $A \to B$ 使得 $gi = f$ 且 $uyi = ltx$，根据 B 的弱泛性质。

现在，考虑如下所示的任意锥 $(p,\ q)$。



根据 B 的弱泛性质，我们找到 r： $E \to B$，使得 $hgr = p$ 且 $vyr = lq$。接着，根据 X 的弱泛性质，我们找到一个态射 s： $E \to X$，使得 $us = q$ 且 $hs = yr$。最后，根据 A 的弱泛性质，我们找到所需的态射 d： $E \to A$，使得 $xd = s$ 且 $gid = gr$。请注意，这里并不能保证 $id = r$，也不能保证 $yi = hx$，但这并不会使结果失效。◂

命题 99 的证明。 由对称性，只需检验第一个投影 π_1： $R_0 \to X_0$ 是一个模拟。对于任意 $c \in \mathbb{ET}$，我们构造如下图表，



并由引理 100 得出结论。为了确认它适用，我们注意到

- 第一个要求很容易满足（左下方的方形显然是一个拉回）；第二个要求由 $R_0^{\Uparrow}$ 的构造满
- 足；最后一个要求则基于 R 是灵活双模拟这一假设而成立。
- ◂

现在让我们利用灵活双模拟的基本性质（命题 99），将双模拟等价的同余问题归结为寻找合适的灵活增强双模拟。

▸ **推论 101.** 考虑任意句法签名 $\mathbf{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i \in n})$。令 σ 表示生成的增强语法 $\sigma(\mathbf{d})$。令 X 为任意 σ-迁移系统，并假设存在一个自反增强柔性双模拟关系 $R \to X^2$，使得 $\sim_X^{\sigma} \subseteq R_0$ 和 R_0 是同余。那么增强双模拟等价 $\sim_X^{\sigma}$ 是同余。

证明。 考虑任意自反增强柔性双模拟关系 $R \to X^2$，使得 R_0包含增强双模拟等价且是同余。根据命题 99， R_0 是增强双模拟，因此根据 $\sim_X^\sigma$的终端性，我们有 $R_0 \subseteq \sim_X^\sigma$，因此态射

$$\Sigma_0(\sim_X^\sigma) \to \Sigma_0(R_0) \to R_0 \to \sim_X^\sigma$$

在 X_0^2 上。 ◀

A.4 Howe 闭包：基本性质

在本节中，我们引入候选的自反增强柔性双模拟关系$R \to \mathbf{Z}^2$，使得 $\sim_{\mathbf{Z}} \subseteq R_0$ 和 R_0 是同余。按照惯例，我们

- 直接将其构造为同余，证明它是自反且增强的（相对容易），最后努力证明它
- （或者更确切地说，它的传递闭包）是灵活双模拟。

▸ **定义 102。** 令***Howe*** 函子 $\Sigma_0^{+;\sim_X}\colon \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}/X_0^2 \to \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}/X_0^2$将任意 $R_0 \to X_0^2$映射到余积跨度 $\Sigma_0(R_0) + (R_0;\ \sim_X)$，其中第二项更具体地表示；$\sim_X$以下复合跨度。

$$R_0 \qquad\qquad \sim_X$$

$$\pi_2 X_0 \qquad\qquad X_0 \qquad\qquad X_0$$

令证明相关的 *Howe* 闭包 $R_0^\odot$ 为以下对象上的自由 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数： R_0；并令**(**证明无关的，或称关系**) *Howe*** 闭包 $R_0^\bullet$ 表示 $R_0^\odot \to X_0^2$的像。

Howe 函子是预层范畴上的有限型自函子，因此我们有 [27]:

▸ **命题 103。** 任意 R_0 上都存在自由 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数，可通过标准初始链计算得到；遗忘函子 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数 $\to \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}/X_0^2$ 是有限保持的单子性函子。

▸ 命题 *104*。令 $\mathscr{U}\colon Sub(X_0^2) \hookrightarrow \widehat{\ }VT/X_0^2$表示典范嵌入，并令$\Sigma = \Sigma_0^{+;\sim_X}$仅用于本命题。复合自函子 $im \circ \Sigma^* \circ \mathscr{U}$ 作用于 $Sub(X_0^2)$ 上构成一个单子；事实上，它是 $im \circ \Sigma \circ \mathscr{U}$上的自由单子。因此，关系 *Howe* 闭包 $(\mathscr{U}R)^\bullet$ 作用于关系 $R \in Sub(X_0^2)$ 上，是 R上的自由 $(im \circ \Sigma \circ \mathscr{U})$-代数。

证明。 利用 Σ_0 的代数性，很容易证明 Σ 保持满态射。对于任意 $R \in \widehat{\ }\mathbb{V}\mathbb{T}/X_0^2$，令 $T = \mathscr{U} \circ \mathrm{im}$ 表示由伴随 $\mathrm{im} \dashv \mathscr{U}$诱导的单子，因而根据唯一提升，我们有一个态射 $\delta_R\colon \Sigma TR \to T\Sigma R$，如以下图表所示，$\Sigma R$ $\mathscr{U}\,\mathrm{im}\,\Sigma R$

$$\Sigma_{\pi R} \quad \Sigma\mathscr{U}\,\mathrm{im}\,R \qquad \Sigma(X_0^2) \qquad X_0^2$$

其中 $R \to X_0^2$ 分解为 $e \circ m$，且最后一个水平态射是

$$\Sigma_0^{+;\sim_X}(X_0^2) = \Sigma_0(X_0^2) + (X_0^2);\sim_X \xrightarrow{[\langle a\circ\Sigma_0(\pi_1),a\circ\Sigma_0(\pi_2)\rangle,\langle\pi_1\circ\pi_1,\pi_2\circ\pi_2\rangle]} X_0^2.$$

因此，结论由下一个引理得出。 ◀

32 应用双模拟等价同余的更一般范畴框架

▸ **引理105**。 考虑一个满且反射的嵌入 $U\colon \mathscr{D} \hookrightarrow \mathscr{C}$，它将某个偏序集 $\mathscr{D}$ 嵌入局部有限可表示范畴 $\mathscr{C}$中，设其左伴随为 $L\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，并给定一个有限型自函子 Σ 作用于 $\mathscr{C}$。此外，假设给定一个函子分配律，即一个自然变换 $\delta\colon \Sigma T \to T\Sigma$，其中 $T := UL$表示诱导单子。那么，$L\Sigma^* U$ 是 $L\Sigma U$上的自由单子，因此特别地，任意 $D \in \mathscr{D}$ 上的自由 $L\Sigma U$-代数都是 $L\Sigma^* UD$。

▸ **引理105**。在引理*105*的设定下，所有形如 $UD \in \mathscr{C}$ 的对象都是子终端的，也就是说，任何两个指向 UD 的平行态射都相等。

证明。任取 $f,\ g\colon C \to UD$。根据伴随，它们与态射 $\tilde{f},\ \tilde{g}\colon LC \to D$一一对应。由于 $\mathscr{D}$ 是偏序集，这些态射相等。◂

引理105的证明。根据 [27], Σ 存在一个自由单子 Σ^*。

此外，根据引理106，给定的函子分配律 δ 实际上是一个**函子-单子分配律**，也就是说，它与 T的单位和乘法相交换。

现在，运用与 [3], 类似的推理，函子-单子分配律 $\delta\colon \Sigma T \to T\Sigma$与单子 T到 Σ-代数的提升一一对应；也就是说，它们对应于 Σ-代数上的单子 T^δ，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma\text{-}\mathbf{alg} & \Sigma\text{-}\mathbf{alg} \\ T^\delta\ \ \mathscr{C} & & \mathscr{C} \end{array}$$

其乘法和单位经遗忘函子映射后，分别成为 T的乘法和单位。给定的函子-单子分配律 δ因此对应于这样的提升。但 Σ-代数与 $\cong \Sigma^*$-代数在 $\mathscr{C}$上相同，因此我们得到一个将 T提升到 Σ^*-代数的提升；根据 [3]，这又等价于一个单子$^-$分配律，记作 $\delta\colon\ \Sigma^* T \to T\Sigma^*$。

由此，利用余单位是同构这一事实（这可由 U的全忠实性推出），我们赋予复合函子 $L\Sigma^* U$单子结构：

- 单位是复合函子 $R(\xrightarrow{\varepsilon^T\ {}^{-1}} LUR \xrightarrow{L\eta^{\Sigma^*}} L\Sigma^* UR)$，乘法为

$$L\Sigma^* UL\Sigma^* UR = L\Sigma^* T\Sigma^* UR \xrightarrow{L\bar{\delta}} LT\Sigma^*\Sigma^* UR \xrightarrow{\varepsilon U\mu^{\Sigma^*} UR} L\Sigma^* UR,$$

- 并且由于 $\mathscr{D}$ 是偏序集，单子律自动成立。

此外，对于任意 $R \in \mathscr{D}$，以下各项等价：Σ^*上的代数结

- 构（单子意义下）、 UR上的代数结构（函子意义下）、
- Σ^*上的代数结构、 UR上的代数结构（单子意义下）、Σ
- 上的代数结构（函子意义下）、 UR上的代数结构。

确实，

- Σ-代数结构 $\Sigma UR \to UR$ 通过伴随对应于 $L\Sigma U$-代数结构$L\Sigma UR \to R$；Σ-代数结构 $\Sigma UR \to UR$通过 Σ^*的泛性质对应于 Σ^*-代数结构 $\Sigma^* UR \to UR$（单子意义下）；

- 根据次终端性， Σ^*-代数结构 $\Sigma^* UR \to UR$ 在单子意义下和函子意义下等价；再次根据伴随，在函子意义下的 Σ^*-代数结构 $\Sigma^* UR \to UR$ 等价于在函子意义下的 $L\Sigma^* U$-结构 $L\Sigma^* UR \to R$；
- 最后，由于 $\mathscr{D}$ 是偏序集，函子意义和单子意义下的 $L\Sigma^* U$-结构 $L\Sigma^* UR \to R$ 是等价的。

因此，我们特别得到 $\mathscr{D}$上的 $(L\Sigma^* U)$-Alg $\cong (L\Sigma U)$-alg，从而得证。 ◂

▸ **定义 107**。 令 $S^{+;\sim_X}$ 表示由 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$在 $\widehat{\ }\mathbb{T}/X_0^2$上诱导的单子。

▸ **引理 108**。 设 R_0' 为 R_0的证明相关（分别为证明无关）*Howe* 闭包 $R_0^\odot$（分别为 $R_0^\bullet$）。它满足以下性质。
(i) R_0' 是一个 Σ_0-代数；**(ii)** 存在一个作用 R_0'； $\sim_X \to R_0'$ 在 X_0^2上。此外，若 $X_0 = \Sigma_0^*(\emptyset)$ 是初始 Σ_0-代数，则有：**(iii)** R_0' 是自反的，**(iv)** 存在一个态射 $\sim_X \to R_0'$ 在 X_0^2上。

证明。 我们证明证明相关的 Howe 闭包所具有的性质——对于证明无关的 Howe 闭包，这些性质也很容易得出。
(i) 根据定义， $R_0^\odot$是一个 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数，因此特别是一个 Σ_0-代数，或者更准确地说，是一个由 Σ_0 到 $\widehat{\ }\mathbb{T}/X_0^2$的显然提升所对应的代数。
(ii) 作为一个$\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数， $R_0^\odot$是第二项函子的一个代数，也就是说，它是一个所需形式的态射： $R_0^\odot$； $\sim_X \to R_0^\odot$。
现在假设 X_0 是初始 Σ_0-代数。那么，根据 X_0 的初始性以及 (i)，存在唯一的 Σ_0-代数态射 $X_0 \to R_0^\odot$，它见证了自反性。
接着，我们利用自反性和 (ii) 构造如下复合

$$\sim_X \cong X_0; \sim_X \to R_0^\odot; \sim_X \to R_0^\odot,$$

这证明了第二点。 ◂

另一个关键性质是：

▸ **命题 109.** 若 X_0 是一个 ST-代数，则任意 R_0 上的证明相关的 *Howe* 闭包 $R_0^\odot$ 都是一个 ST-代数，且 $R_0^\odot \to X_0^2$ 是 ST-代数的态射。此外，关系 *Howe* 闭包 $R_0^\bullet$ 是增强的。

为证明这一点，我们需要几个中间步骤。

▸ **定义 110.** 对于范畴 $\mathbf{C}$ 上的任意双函子 F 以及 $F\Delta$-代数 X，令 F 表示将 F 提升到 $\mathbf{C}/X^2$所得的结果，它将任意 $U \to X^2$ 和 $V \to X^2$ 映射为以下复合

$$F(U,V) \to F(X^2, X^2) \to F(X,X)^2 \to X^2.$$

▸ **引理 111.** 对于任意具有拉回的范畴 $\mathbf{C}$ 上的双函子 Γ 、对象 $X \in \mathbf{C}$以及跨度u_i: $U_i \to X^2$，对于 $i \in 3$，存在一个态射

$$\Gamma((U_1; U_2), U_3) \to \Gamma(U_1, U_3); \Gamma(U_2, X)$$

X上的跨度。

34 应用双模拟等价同余的更一般范畴框架

$\Gamma((U_1;U_2),U_3)$ $\Gamma(U_2,U_3)$

证明。 我们利用拉回的泛性质构造所需的态射，如下图表所示。

$\Gamma(U_1,U_3);\Gamma(U_2,X)$

$\Gamma(U_1,U_3)$ $\Gamma(X,U_3)$

$\Gamma_2(\ \ U_2,U_3)(\ ,)$
$(\ ,)(\ ,)(,\pi_2)(,)$ $\Gamma(U_1,U_3)$

◀

▶ **引理 112.** 假设 X_0 是一个 σ-代数，其结构由以下给出

$$\mathbf{a}\colon \Sigma_0 X_0 \to X_0 \qquad \ldots \qquad \mathbf{b}_i\colon \Gamma_i(X_0,X_0) \to X_0 \qquad \ldots,$$

并令导出的单子代数结构如下。

$$\bar{\mathbf{a}}\colon SX_0 \to X_0 \qquad \ldots \qquad \bar{\mathbf{b}}_{<i}\colon T_i X_0 \to X_0 \qquad \ldots.$$

那么，对所有 $i \in n$，增量结构律

$$d_i\colon \Gamma_i(\Sigma_0 A, B) \to ST_i(\Gamma_i(A, ST_i B) + A + B)$$

提升为一个增量结构律

$$\bar{d}_i\colon \bar{\Gamma}_i(\Sigma_0^{+;\sim_X} A, B) \to S^{+;\sim_X}\bar{T}_i(\bar{\Gamma}_i(A, S^{+;\sim_X}\bar{T}_i B) + A + B).$$

证明。 根据引理 111，利用 Γ_i的左余连续性，以及 $\sim_X$ 是增强的这一事实。◀

命题 109 的证明。 根据命题 34，存在一个分配律

$$\bar{T}_{n+1} S^{+;\sim_X} \to S^{+;\sim_X}\bar{T}_{n+1}$$

且 T_{n+1} 不含常量，因此自然变换 $S^{+;\sim_X} \to S^{+;\sim_X}T_{n+1}$ 在 $\emptyset$处是一个同构。于是，证明相关的 Howe 闭包 $R_0^{\odot} = S^{+;\sim_X}\emptyset$ 自然具有一个规范的 $S^{+;\sim_X}T_{n+1}$-代数结构。当然，终对象也具有这种结构，而到它的唯一态射是一个 $S^{+;\sim_X}T_{n+1}$-代数态射，由此完成第一点的证明。

证明相关的 Howe 闭包尤其通过以下方式得到增强

$$\Gamma_i(R_0^{\odot}, X) \to \Gamma_i(R_0^{\odot}, R_0^{\odot}) \to R_0^{\odot},$$

由此可知，关系 Howe 闭包具有增强性，因为每个 Γ_i 都是左余连续的，会在其第一个自变量上保持满态射，而且预层范畴中的所有满态射都是强态射。事实上，我们通过如下图表中的提升即可找到所需的态射。

$\Gamma(R_0^{\odot},\ X_0)$ $\Gamma(R_0^{\odot},\ R_0^{\odot})$ $R_0^{\odot}$

$\Gamma(R_0^{\bullet},\ X_0)$ $R_0^{\bullet}$

$\Gamma(X_0^2,\ X_0)$ $\Gamma(X_0^2,\ X_0^2)$ $\Gamma(X_0,\ X_0)^2$ X_0^2

◀

最后一个基本性质涉及语法迁移系统上关系 Howe 闭包的关系传递闭包的对称性（见下文命题 116）。

▶ **定义 113** ([18, 定义 9。5])。 跨度$R_0 \to X_0^2$ 的关系传递闭包 $R_0^{\mp}$ 是并集 $\bigcup_{n>0}\mathrm{im}(R_0^{;n})$，其中 $(-)^{;n}$ 表示跨度的迭代自复合。

▶ **命题 114**。 对于任意跨度 $R_0 \to X_0^2$，关系传递闭包 $R_0^{\mp}$都配备了一个在 X_0^2 上的作用 R_0；$R_0^{\mp} \to R_0^{\mp}$。

证明依赖于以下引理。

▶ **引理 115**。 在任意完备、余完备、正则且局部笛卡尔闭的范畴中，因而特别是在任意预层范畴中，

(i) 跨度复合在两侧都保持所有余极限，并且**(ii)** 关系的顺序复合在两侧都保持所有并集。

证明。 拉回函子（沿相关投影）是左伴随，因此是余连续的，这直接推出第一点。对于第二点，在正则范畴中，拉回函子保持正则满态射和单态射，因而也保持像分解。 ◀

命题 114 的证明。 我们有

$$R_0;\bigcup_{n>0}\mathrm{im}(R_0^{;n}) \twoheadrightarrow \mathrm{im}(R_0);\bigcup_{n>0}\mathrm{im}(R_0^{;n}) \cong \bigcup_{n>1}\mathrm{im}(R_0^{;n}) \hookrightarrow \bigcup_{n>0}\mathrm{im}(R_0^{;n}),$$

其中，同构由引理 115(ii) 得出。 ◀

▶ **命题 116**。 再次设 $X_0 = \Sigma_0^*(\emptyset)$。那么， $\emptyset$ 的证明无关 *Howe* 闭包 $\emptyset^{\bullet\mp}$ 的关系传递闭包是对称的。

▶ **引理 117** ([18, 引理 9。10])。 对于任意跨度 $R_0 \to \mathbf{Z}_0^2$, , 若存在跨度态射 $R_0 \to R_0^{\mp\dagger}$ ，则 $R_0^{\mp}$ 是对称的。

▶ **引理 118**。 若跨度 R 是对称的，即存在一个关于 X_0^2 的态射 $R^{\dagger} \to R$，那么它的诱导关系也是对称的。

证明。 我们按照以下图表进行。

R R

imR X^2 imR

$\langle \pi_2, \pi_2 \rangle \circ m$ X^2

◀

命题 116 的证明。 根据引理，只需构造一个态射 $\emptyset^\bullet \to \emptyset^{\bullet\mp\dagger}$。因此，根据命题 104，只需为 $\emptyset^{\bullet\mp\dagger}$ 赋予自函子 $S \mapsto \mathrm{im}(\Sigma_0^{+;\sim_X}(S))$ 在 子对象范畴(X_0^2)上的代数结构。为此，由于 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$是代数的，只需为 $\emptyset^{\bullet\mp\dagger}$赋予 $\Sigma_0^{+;\sim_X}$-代数结构。

我们首先赋予它 ($\emptyset^{\bullet\mp\dagger}$ X_0^2 $\overset{-\ \sim_X}{}$ $-^\dagger$ $\overset{\sim_X \to}{\sim_X{}^\dagger\ \emptyset^{\bullet\mp} \to \emptyset^{\bullet\mp}}$;)-代数结构。我们需要找到一个从 $\emptyset^{\bullet\mp\dagger}$; 到 的态射，或者等价地，应用对合 ( ) 后，找到一个 ; 态射。我们选取复合

$$\sim_X{}^\dagger; \emptyset^{\bullet\mp} \to \sim_X; \emptyset^{\bullet\mp} \to \emptyset^\bullet; \emptyset^{\bullet\mp} \to \emptyset^{\bullet\mp},$$

其中

- 第一个态射是 $\sim_X$ 的对称性，第二个态射是引理
- 108 中的态射，最后一个态射是命题114中的作用。
-

这样一来，剩下的任务就是为 Σ_0 到 $\mathrm{Sub}(X_0^2)$ 的提升赋予 $\emptyset^{\bullet\mp\dagger}$ 代数结构。根据 Σ_0 的代数性，只需为 Σ_0 到 $\widehat{\ }\mathrm{VT}/X_0^2$ 的提升赋予它代数结构，记作 $\bar{\Sigma}_0$。由 [18, 推论 9.8], 可得 $\emptyset^{\bullet\mp\dagger} \cong \emptyset^{\bullet\dagger\mp}$，由 [18, 引理 9.9]可知， $\emptyset^{\bullet\dagger\mp}$ 是以下链的余极限

$$X_0 \to \mathrm{im}(\emptyset^{\bullet\dagger}) \cong \mathrm{im}(\emptyset^{\bullet\dagger}; X_0) \to \mathrm{im}(\emptyset^{\bullet\dagger}; \emptyset^{\bullet\dagger}) \cong \mathrm{im}(\emptyset^{\bullet\dagger}; \emptyset^{\bullet\dagger}; X_0) \to \mathrm{im}(\emptyset^{\bullet\dagger}; \emptyset^{\bullet\dagger}; \emptyset^{\bullet\dagger}) \to \dots$$

在 $\widehat{\ }\mathrm{VT}/X_0^2$ 中。不过， $\bar{\Sigma}_0$ 是代数的，因此遗忘函子 $\bar{\Sigma}_0\text{-}\,\mathrm{alg} \to \widehat{\ }\mathrm{VT}/X_0^2$ 创建滤过余极限，特别是创建链的余极限。因此，只需将上述链提升到 $\Sigma_0\text{-}\,\mathrm{alg}$ 即可。此外，由于链中的所有对象都是关系，它们都是次终对象，因此，只要对象能够提升到 $\Sigma_0\text{-}\,\mathrm{alg}$，所有态射也会自动提升。最后，遗忘函子 $\bar{\Sigma}_0\text{-}\,\mathrm{alg} \to \widehat{\ }\mathrm{VT}/X_0^2$ 创建极限，而根据引理 108， $\emptyset^\bullet$ 具有 Σ_0-代数结构，因此 $\emptyset^{\bullet\dagger}$也具有该结构。◀

为了结束本节，我们运用刚刚证明的基本事实，将主要结果归结为证明 $\emptyset^\bullet$ 是一种灵活模拟。

▶ **命题 119**。 考虑任意句法签名 $\mathbf{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$，并假设$\emptyset^\bullet_{\mathbf{Z}}$ 是一种灵活模拟。那么，$\mathbf{Z}$ 上的增强双模拟等价是一个同余。

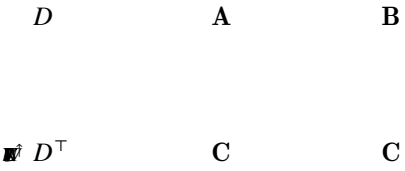
▶ 注释 120. 回顾一下，根据定义 74， $R_0 \to X_0^2$ 在 $\widehat{\ }\mathrm{VT}$ 中是一个灵活模拟，当且仅当其笛卡尔提升 $R_0^{\Uparrow} \to X^2$ 是。
我们将依赖以下引理。

▶ **引理 121.** 考虑局部小范畴 **AB** 之间任意一个由函子组成的交换图

$$\boldsymbol{w} \qquad \mathbf{C}$$

如果 V 和 W 创建某种形状 D 的余极限，并且 W 保持这些余极限（通常是指 $\mathbf{C}$ 具有这些余极限），那么 U 也会创建它们。

证明。考虑任意函子 $J\colon D \to \mathrm{A}$，以及 $U \circ J$ 的余极限余锥 $K\colon D^\triangleright \to \mathrm{B}$。由于 W 保持形状为 D 的余极限， $W \circ K$ 是 $W \circ U \circ J$ 的余极限；因此，由于 V 创建余极限，我们找到唯一提升 $J^\uparrow$，使得 $J^\uparrow \circ I = J$ 且 $V \circ J^\uparrow = L \coloneqq W \circ K$，如下面的图表所示。



但现在， $U \circ J^{\uparrow}$ 和 K 都是外层方形的候选提升，因此根据 W 创建余极限时的唯一性，它们相等，于是 $J^{\uparrow}$ 是原方形（J， K）的一个提升。

此外，任意一个针对（J, K）的提升都会导出一个针对（J, L）的提升，因此它必定等于 $J^{\uparrow}$，这就证明了唯一性。

$J^{\uparrow}$ 是余极限，因为 V 创建了形状为 D 的余极限。 ◀

▶ **定义 122**。 给定一个双函子 $\Gamma\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ 和一个对象 X，一个(Γ, X)-预模 是一个对象 M，它带有一个作用，即一个态射 $r\colon \Gamma(M, X) \to M$。一个$(\Gamma, X)$-预模之间的态射是一个与作用相交换的态射。我们用 (Γ, X) -**Mod** 表示(Γ, X)-预模的范畴。

▶ **术语 1**。 当 Γ 可由上下文明确时，我们通常省略它，直接称为 X-预模和 X -**Mod**。

▶ 注 123。定义 29 中的增强跨度 $R \to X^2$ 是X-预模范畴中的一个跨度。

▶ **引理 124. </style}若 是左余连续的，且C** 是局部有限可表示且正则的，则范畴 X-**Mod** 是正则的，并且遗忘函子 X-**Mod** $\to \mathbf{C}$ 创建所有极限和余极限，以及像分解。

证明. 极限和余极限的创建很容易由以下事实得出： X -**Mod** 是余连续自函子 $\Gamma(-, X)$所对应的代数范畴。

特别地， X - Mod 是完备且余完备的，因此正则性问题归结为证明正则满射在拉回下稳定。

我们先参阅 [18, §1.6.5] ，了解像的定义和初步结果。值得注意的是，在局部有限可表示范畴中，（强满射）-单态射分解可导出像分解，而并可通过先作余配对，再作（强满射）-单态射分解来计算。

那么我们来考虑任意一个拉回方形 A B



在 X - Mod 中，其中 f 是正则满态射，并证明 v 也必定是正则满态射。由于极限和余极限的构造（从而也包括它们的保留），给定的拉回方形在 C 中也构成一个拉回，且其中 f 也是正则满态射。因此，根据 C 的正则性， v 在 C 中是正则满态射。换言之，它是其核对的余等化子。但由于极限的构造，该核对唯一地提升为 X - Mod 中的核对；又由于余极限的构造， v 在那里也是余等化子。这表明 X - Mod 是正则的。

最后，让我们证明遗忘函子创建像分解。给定 $A, C \in X$ - Mod，考虑态射 $f\colon A \to C$in X - Mod 的任意像分解 $A \overset{e}{} \quad B \overset{m}{} \quad C$ in C，即 e 是正则满态射，而 m 在 C 中是单态射。在这种情况下， e 是其核对在 C 中的余等化子

，但正如我们刚才所见，这个核对可提升为 X - Mod 中的核对，而其余等化子由遗忘函子创建，因此 e 是余等化子，进而是 X - Mod 中的正则满态射。最后， f 也将该核对等化，因此存在唯一的中介态射 $B \to C$ in X - Mod；由遗忘函子 X - Mod $\to$ C 的忠实性可知，它必定是 m 。因此， m 也是 X - Mod 中的态射。最后，它的单态性同样可由遗忘函子的忠实性推出。◂

▸ **引理 125.** 若**C** 是正则的，则增强跨度在像下稳定；也就是说，若$p\colon R \to X^2$ 是增强的，则$\mathrm{im}(p)\colon \mathrm{im}(R) \hookrightarrow X^2$也是增强的。

证明。 由引理 124（像分解的创建）可得。 ◂

▸ **引理 126.** 遗忘函子 X -**Mod**$/X^2 \to \mathbf{C}/X^2$ 创建余极限。因此，特别地（由$\mathbf{C}/X^2$的余完备性可知），增强跨度在$\mathbf{C}/X^2$中对所有余极限封闭。

证明。 考虑**CAT**中的以下交换图。X -**Mod**$/X^2$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{C}/X^2 \\ & \nearrow & \\ X\text{ - Mod} & & \mathbf{C} \end{array}$$

根据引理 124，两个（竖直）投影函子以及底部函子都创建余极限。此外，由于 C 是余完备的，投影函子 C/X^2 →C 保持所有余极限，因此根据引理 121，顶部函子创建这些余极限。◂

▸ **引理 127。** 对于任意句法签名 $\mathbf{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$ 以及 $X \in \sigma(\mathbf{d})$ -**Trans**，如果 $R_0 \hookrightarrow X_0^2$ *in* $\widehat{\ }\mathbb{VT}$ 是一个自反的增强灵活模拟关系，那么 $R_0^{\mp}$ 也是如此。

证明。 自反性显然成立。关于增强性，我们已在引理 125 和 126 中看到，增强跨度在像和余积下封闭。此外，根据引理 111，跨度复合下的封闭性可直接得出。最后，为了证明 $R_0^{\mp}$ 是一个灵活模拟，我们采用 [18, 引理 9。9], 的刻画，据此 $R_0^{\mp}$ 是链的余极限

$$X_0 \to \mathrm{im}(R_0) \cong \mathrm{im}(R_0; X_0) \to \mathrm{im}(R_0; R_0) \cong \mathrm{im}(R_0; R_0; X_0) \to \mathrm{im}(R_0; R_0; R_0) \to \dots$$

在 $\widehat{\ }\mathbb{VT}/X_0^2$ 中。根据推论 80，只需证明每个 $\mathrm{im}(R_0^{;n})$ 都是灵活模拟。根据引理 84，进一步只需证明每个 $R_0^{;n}$ 都是灵活模拟。通过归纳和引理 82，最终只需证明 R_0 是灵活模拟，而根据假设，它确实如此。◂

命题 119 的证明。 根据假设， $\emptyset^\bullet$ 是灵活模拟。根据命题 109，它也是增强的。现在令 $R_0 := \emptyset^{\bullet\mp}$，根据引理 127，它同样是灵活增强模拟。根据命题 116， R_0 还具有对称性。但任何对称模拟实际上都是双模拟，因此 R_0 是灵活增强双模拟。此外， R_0 包含 $\sim_{\mathbf{Z}}$ （根据引理 108(iv)），并且根据引理 108(i) 是同余。因此，由推论 101 可得结论。◂

A.5 关键引理

我们终于引入关键引理，它将直接引导我们证明定理 52。

▶ **引理 128.** 对于任意句法签名 $\mathrm{d} = (\Sigma, (\Gamma_i, d_i)_{i\in n})$，如果 Σ_1 保持函数型灵活双模拟，那么 $\emptyset^\bullet_{\mathbf{Z}}$ 的笛卡尔提升 $\emptyset^{\bullet\Uparrow}\,\mathrm{z}$ 是一种灵活模拟。

在证明该引理之前，让我们先证明主定理，正如承诺的那样：

定理 52 的证明。 根据命题 119，只需证明 $\emptyset^\bullet_{\mathbf{Z}}$ 是一个灵活模拟，而这由引理 128 得证。◀

本节余下部分将证明引理 128。

▶ **记号 8.** 我们将 $\emptyset^\odot\,\mathrm{z}$ 简记为 $\emptyset^\odot$，将 $\sim^{\sigma(\mathrm{d})}\,\mathrm{z}$ 简记为 $\sim$。

为了证明 $\emptyset^\bullet_{\mathbf{Z}}$ 是模拟，根据引理 68，只需证明 $\emptyset^\odot\,\mathrm{z}$ 是。简而言之，我们将构造一个形式如下的 ω-链灵活模拟。

$$\check{\Sigma}_1^n(\mathbf{Z}_0) \leftarrow R^n \to \mathbf{Z},$$

$\widehat{\ }$其到 VT 的投影是恒定链，位于

$$\mathbf{Z}_0 \leftarrow \emptyset^\odot \to \mathbf{Z}_0. \tag{6}$$

根据构造，该链的余极限将是一个灵活模拟

$$\mathbf{Z} \leftarrow R^\infty \to \mathbf{Z}$$

带投影的with projection

$$\mathbf{Z}_0 \leftarrow \emptyset^\odot \to \mathbf{Z}_0,$$

由引理 70 可知，这意味着 $\emptyset^\odot$ 是所需的灵活模拟。

为此，我们构造一个范畴，其对象是形式类似的跨度。

▶ **定义 129.** 令 $\mathbf{Span}/\emptyset^\odot$ 表示该图表的极限

$$\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\mathbf{Z}_0 \xleftarrow{\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\pi_1} \widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\emptyset^\odot \xrightarrow{\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\pi_2} \widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\mathbf{Z}_0 \xleftarrow{\mathbf{Z}} 1$$

加权为

$$2 \xleftarrow{0} 1 \xrightarrow{0} 2 \xleftarrow{1} 1$$

▶ 注 130. 因此，来自某个范畴 A 的加权锥是如下形式的图表^A 1

$\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\pi_2$ $\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\mathbf{Z}_0$ $\widehat{\mathrm{ET}}/\Delta\emptyset^\odot$ $\widehat{\mathbb{ET}}/\Delta\mathbf{Z}_0$

因此，加权极限的对象是形如 $Y \leftarrow X \to \mathrm{Z}$、位于 (6) 之上的跨度，而从这样的跨度到某个跨度 $Y' \leftarrow X' \to \mathrm{Z}$ 的态射，是一对 $(g\colon Y_1 \to Y_1',\ f\colon X_1 \to X_1')\widehat{\ }$，由 ET 中的态射构成，并使下图可交换。

40 一个更一般的应用双模拟同余范畴框架 Y_1 X_1 $\mathbf{Z}_1$

Y_1' X_1'

$\not\in$ $\Delta\mathbf{Z}_0$ $\Delta\emptyset^{\odot}$ $\Delta\mathbf{Z}_0$

▶ **命题 131**。 将任意跨度 $Y \leftarrow X \rightarrow \mathbf{Z}$ 映射到 (Y_1, X_1) 的遗忘函子 $\widehat{\ }\mathbb{ET}^2$ 创建余极限和连通极限。

证明。 显然。 ◀

▶ **命题 132**。 范畴 $\mathbf{Span}/\emptyset^{\odot}$ 以跨度 $\mathbf{Z}_0 \leftarrow \emptyset^{\odot} \rightarrow \mathbf{Z}$为始对象。

由于 $\mathrm{Z}_0 = \check{}\Sigma_1^n(\mathrm{Z}_0)$，该跨度具有所需的形式，且其左侧的腿显然是一个函数型灵活双模拟，因此我们可以将其作为我们的 R^0。

▶ **定义 133**。 令 F 表示 $\mathbf{Span}/\emptyset^{\odot}$ 上的自函子，它将任意对象 Y_1 X_1 $\mathbf{Z}_1$

$\Delta\mathbf{Z}_0$ $\Delta\emptyset^{\odot}$ $\mathbf{Z}_0$

to $\Sigma_1(Y)_1$ $\Sigma_1(X)_1; (\sim^*)^{\uparrow}$

$\Delta_{2,\mathrm{s},\mathrm{l},\mathrm{t}}(\Sigma_0^?(\mathbf{Z}_0), \mathbf{Z}_0)$ $\Delta_{\mathrm{s}}(\Sigma_0^?(\emptyset^{\odot});\ \sim^*)\ \times\Delta_{\mathrm{l}}($

$\Delta\mathbf{Z}_0$ $\Delta\emptyset^{\odot}$

▶ **定义 134.** 令 R^n 为初始 F-链。

▶ **引理 135.** 自函子 F 保持柔性模拟。

$\Sigma_1(X)_1;\ \ (\sim^*)^{\uparrow}$ $\Sigma_1(X)_1$

证明。 给定任意一个跨越 $Y \leftarrow X \rightarrow \mathbf{Z}$ 于 (6) 之上，其在 F 下的像的左腿是函数型灵活模拟，当且仅当以下粘贴图是逐点弱拉回。

$\Delta_{\mathrm{s}}(\Sigma_0^?(\emptyset^{\odot}); \sim^*) \times \Delta_{\mathrm{l}}(\emptyset^{\odot}; \mathbf{Z}_0)$ $\Delta_{2,\mathrm{s},\mathrm{l}}(\Sigma_0^?(\emptyset^{\odot}), \emptyset^{\odot})$

$\Delta_{\mathrm{s},\mathrm{l}}\emptyset^{\odot}$

为此，根据 [18, 引理 9.26,(i)], ，只需证明三个内部多边形都是逐点弱拉回。右上方形是逐点弱拉回，因为 Σ_1保持函数型灵活双模拟。左上方形也是逐点弱拉回，因为它是下述立方体的左侧面。

事实上，顶面和底面按构造都是拉回，而右侧面是逐点弱拉回，因为 $\sim^*$ 是一个双模拟。因此，根据 [18,引理 9.26,(i)]，左侧面也是逐点弱拉回。

最后，对于底部的矩形，其定义域为

$$\begin{aligned}
\Delta_s(\Sigma_0^?(\emptyset^\odot);\sim^*)\times\Delta_1(\emptyset^\odot;\mathbf{Z}_0) &\cong \Delta_s(\Sigma_0^?(\emptyset^\odot);\sim^*)\times\Delta_1(\emptyset^\odot)\\
&\cong \Delta_s(\Sigma_0(\emptyset^\odot);\sim^* +\emptyset^\odot;\sim^*)\times\Delta_1(\emptyset^\odot)\\
&\cong (\Delta_s(\Sigma_0(\emptyset^\odot);\sim^*)+\Delta_s(\emptyset^\odot;\sim^*))\times\Delta_1(\emptyset^\odot)\\
&\cong \Delta_s(\Sigma_0(\emptyset^\odot);\sim^*)\times\Delta_1(\emptyset^\odot)+\Delta_s(\emptyset^\odot;\sim^*)\times\Delta_1(\emptyset^\odot)\\
&\cong \Delta_{2,s,1}((\Sigma_0(\emptyset^\odot);\sim^*),\emptyset^\odot)+\Delta_{2,s,1}((\emptyset^\odot;\sim^*),\emptyset^\odot).
\end{aligned}$$

同理，我们有 $\Delta_{2,\,s,\,1}(\Sigma_0^?Z_0,Z_0)\cong\Delta_{2,\,s,\,1}(\Sigma_0Z_0,Z_0)+\Delta_{2,\,s,\,1}(\Sigma_0^?Z_0,Z_0)$。因此，该矩形是将 $\Delta_{2,\,s,\,1}$ 应用于以下两个方形的（纵向）余配对而得到的。$\Sigma_0(\emptyset^\odot);\sim^*$ Σ_0Z_0 $\emptyset^\odot;\sim^* Z_0$

$\cong$ $\emptyset^\odot$ $\mathbf{Z}_0$ $\emptyset^\odot$ $\mathbf{Z}_0$

由于逐点弱拉回在（纵向）余配对下封闭，且在 $\Delta_{2,\,s,\,1}$下保持，因此只需证明这两个方形都是逐点弱拉回。左侧方形是箭头范畴中的一个同构，因此是逐点弱拉回。右侧方形是逐点弱拉回，因为它 $\emptyset^\odot$存在一个来自实际拉回的锥态射，并使用了 $\sim^*$ 中的自反性，如

$\emptyset^\odot;\sim^*$ $\mathbf{Z}_0$

$\emptyset^\odot$ $\mathbf{Z}_0$.

◀

B 定理 61 的证明

我们假设读者具备一些关于族函子的基础知识。特别是，有一种众所周知的替代刻画方式，即通过**无一般态射** 分解来刻画边界元数，如下所示。

42 应用双模拟同余的一个更一般的范畴框架

▶ 命题 136. 在定义 60 的设定下，对于任意 $\alpha \in \mathrm{ET}$ 和 $r \in \mathscr{U}_2'\Sigma_1(1)(\alpha)$，边界元数 b_r 同构于态射 φ：该态射通过先将 r 分解为 $\mathrm{y}_\alpha \xrightarrow{\xi_r} \mathscr{U}_2'\Sigma_1(B)\ \mathscr{U}_2'\Sigma_1(!) \longrightarrow \mathscr{U}_2'\Sigma_1(1)$，其中 ξ_r是一般态射；然后将 $\xi_r \circ j_{2,\alpha}$分解为 $F(\varphi) \circ \chi_r$，其中 χ_r是一般态射，得到。$\mathrm{y}_{\mathrm{s}(\alpha)_D} + \sum_{i \in n_\alpha} \mathrm{y}_{(1_i^\alpha)_V} \mathrm{y}_\alpha$

$$\mathscr{U}_2'(\Sigma_1(\varphi)) \quad \mathscr{U}_2'(\Sigma_1(A)) \qquad \mathscr{U}_2'(\Sigma_1(B))$$

▶ **引理 137**。对于任意带有生成上纤维化 $(\mathscr{A}, \mathbb{J})$ 和 $(\mathrm{B}, \mathbb{K})$的范畴，族函子 $F\colon \mathscr{A} \to \mathrm{B}$ 保持纤维化，当且仅当它是胞腔的，也就是说，对所有交换方形 $C \qquad D$

$$F(X) \qquad F(Y) \tag{7}$$

其中 $k \in \mathbb{K}$、ξ 和 χ 是生成的，δ 是余纤维化（即 $\delta \in {}^{\pitchfork}(\mathbb{J}^{\pitchfork})$）。

证明。这是对 [18, 引理 7.28], 的直接推广，其证明经相应调整后◂

定理 61 的证明。假设给定一个动态签名 $\Sigma_1\colon \sigma\text{-Trans} \to \sigma\text{-Trans}_2$，使得 $\mathscr{U}_2\Sigma_1$ 是族式的。由命题 59，Σ_1 保持函数型灵活双模拟，当且仅当 $\mathscr{U}_2\Sigma_1$ 将 $\mathrm{J}\sigma$-纤维化映射到 J_2，σ-纤维化；等价地，由引理 137，当且仅当它是胞腔的。

显然，若 $\mathscr{U}_2\Sigma_1$ 是胞腔的，则所有规则的边界元数都是 $\mathrm{J}\sigma$-余纤维化，这可由图 7 直接实例化得到。反过来，假设所有规则都是 $\mathrm{J}\sigma$-余纤维化，并考虑图 7 中的一个交换方形，取 $F = \mathscr{U}_2\Sigma_1$，并将其特化到所涉及的余纤维化集合：

$$\mathbf{y}_{\mathrm{s}(\alpha)_D} + \sum_{i \in n_\alpha} \mathbf{y}_{(1_i^\alpha)_V}\ \mathbf{y}_\alpha$$

$$F(\varphi) \qquad F(A) \qquad F(B).$$

通过考察规则 $\mathrm{y}_\alpha \xrightarrow{\xi_r} F(B)\ F(!) \longrightarrow F(1)$，并利用泛因子分解的唯一性（差一个同构），即可得到该结果 [18, 注 7.19]。◂