arXiv:2303.11741v1 [math.LO] 21 Mar 2023

罗素典型性：另一种随机性概念

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，
希腊塞萨洛尼基 541 24。电子邮件：
tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们对罗素的典型性概念稍作改述，以消除其循环性，并使其适用于任意一阶结构中的元素。我们认为，这一概念与马丁-洛夫（ML）随机性相似：它以可定义集取代可计算集，并以“较小”基数的集合（即基数严格小于结构论域基数的集合）取代零测集。结果表明，如果论域满足 $cf(|M|) > \aleph_0$，那么存在 $|M|$ 个典型元素，而非典型元素仅有 $< |M|$ 个。特别地，这一结论适用于二阶算术的标准模型 $\mathcal{R}$ 。在定义公式中允许出现参数后，我们得到相对典型性，它满足范兰巴尔根相对随机性公理中的大多数。不过，范兰巴尔根定理对相对典型性并不成立。典型实数类与 ML 随机、施诺尔随机以及可计算随机实数类彼此不可比较（就 $\subseteq$ 而言）。此外，典型实数类在图灵度和跳跃运算下均封闭（两个方向皆如此）。

数学主题分类（2010）：03C98，03D78

关键词：B. Russell 的典型英国人、典型性质、典型对象、Martin-L¨of 随机性、van Lambalgen 定理。

1 引言

伯特兰·罗素 [8, 第 89]，页试图解释非谓述定义（以及为避免

循环而必须诉诸可约性公理的必要性）时，审视了以下对“典型英国人”的定义：“例如，假设你提出：‘典型英国人是具备大多数英国人所具备的所有性质的人。’”如此定义的典型性本身就是英国人的一种性质，因此，要判断某个英国人是否典型，除了其他事项外，还必须判断他是否典型，于是判断陷入循环而无法完成。[1]

尽管存在这一缺陷，定义的核心仍然自然且合理；只要稍作修改以消除循环论证，就能轻易恢复其严谨性。本文旨在为典型性提供这样一个严格定义，并探讨它在具体语境中的表现及其与随机性的联系。我们认为，罗素这一概念的本意可以描述如下：给定一个由事物构成的结构化宇宙，它在数学上可以表示为一个一阶结构$\mathfrak{M} = (M, \ldots)$，若元素 a 属于 M，且从任何可定义的意义上说都不特殊，换言之，不具备任何使其归入某个可定义的特殊少数群体 $X \subset M$的性质，那么它就是典型的。我们可以通过以下三个步骤严格地做到这一点：(a) 精确定义集合 $X \subseteq M$ 何时包含 M中占多数／少数的元素。(b) 根据先前定义的多数概念，说明何谓（关于 $\mathfrak{M}$的一阶语言 L 的）“典型性质”。(c) 若元素 a 属于 M，则定义它在满足所有典型性质时为“典型”。由于典型性质是对象语言 L的性质，而典型性是元语言的性质，因此不会产生循环论证。我们将在第 2 节精确阐述这些步骤。

在第 3 节中，我们将论证，典型性是一种随机性概念，尤其是当我们将它应用于完全二阶算术的标准模型$\mathcal{R} = (\omega, \mathcal{P}(\omega)\ +, \cdot, <, \in, 0, 1)$时。在实数的语境中，最广为人知的随机性概念是 Martin-L¨of（ML-）随机性（[1] 是关于这一概念及其变体的丰富信息来源）。ML 随机与典型实数之间的相似之处如下：

[1]罗素似乎担心的并非循环性本身，而是他认为由此会产生的矛盾。因为他接着这样续写了上面的短语：“*Youwill easily realise that most Englishmen do not possess* all *the properties that most English-men possess, and therefore a typical Englishman, according to your own definition, wouldbe untypical.*”（同上）。我不清楚罗素是如何得出 *most Englishmendo not possess all the properties that most Englishmen possess*这一结论的，因此也不清楚矛盾是如何推导出来的。我想，罗素的结论 “*You will easily realise that…*” 属于经验性的，而非逻辑性的。下文第 2 节将证明（例 2.7 和定理 2.9、2.11），存在许多结构，其中元素的 *majority*，甚至它们的 *totality*，都可能具有典型性。因此，在这些结构中，表达典型性的元语言性质本身也具有典型性。

• ML 随机实数的定义基于可计算性与测度论意义下的小集合（零测集）的结合。也就是说，如果 a 无法被“困”在任何一个测度为零的集合$\bigcap_n V_n$ 中，那么 a 就是 ML 随机的；其中 $(V_n)_n$ 是一个由递归可枚举开集构成的可计算序列，并且 $\mu(V_n) \leq 2^{-n}$。

• 典型实数的定义基于可定义性与基数意义下的小集合（基数严格小于连续统的集合）的结合。也就是说，若 a 无法被“困在”任何可定义且很小的集合 X 中，即 $|X| < 2^{\aleph_0}$，则称其为典型实数。

因此，典型性是通过将可计算集替换为可定义集，并将测度论意义下的小集合替换为基数意义下的小集合而得到的。

有些结构，例如 $(\mathbb{N}, S, +, \cdot, 0)$，不包含任何典型元素；另一些结构，例如 $(\mathbb{Q}, <)$，其中所有元素都是典型元素。我们还给出了一些结构包含典型元素的充分条件。其中一个简单而基本的条件见定理 2.9。它指出，每个 $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$只要具有可数语言，且 $cf(|M|) > \aleph_0$，就包含$|M|$典型元素；而只有 $< |M|$非典型元素。特别是，上述实数结构 $\mathcal{R}$ 也满足这一结论，因为 $cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$。

如果进一步允许性质中出现参数，我们便会得到相对典型性的概念：“x 相对于 $\overline{y}$是典型的”，记作 $\mathrm{Tp}(x, \overline{y})$；这类似于 van Lambalgen 在 [5], [6] 和 [7]中研究的相对随机性 $R(x, \overline{y})$。我们证明，这些论文中考虑的关于 $R(x, \overline{y})$ 的大多数基本公理，对于一般结构中的 $\mathrm{Tp}(x, \overline{y})$ 也成立，特别是在结构 $\mathcal{R}$中。另一方面，这两种概念在某些方面存在显著差异。例如，van Lambalgen 定理对相对典型性并不成立，但对 ML 随机性成立。事实上，典型实数类与 ML 随机实数类、施诺尔随机实数类以及可计算随机实数类之间，按包含关系而言互不可比。

最后，我们证明关系 $\mathrm{Tp}(x, \overline{y})$ 在图灵可归约性 $\leq_T$ 、图灵度以及跳跃算子 $a \mapsto a'$ 下都是封闭的。

论文末尾提出了一些开放性问题。

2 形式化典型性

设 L 是一阶语言， $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$ 是一个 L-结构，且 $A \subseteq M$.$L(A)$ 表示以来自 A 的参数扩充后的 L 。稍微宽泛地使用 “ 语言 ” 一词，我们也将 $L(A)$ 称为 $L(A)$ 的公式集。性质

$L(A)$ 是指具有一个自由变量的公式 $\phi(x) \in L(A)$。首先，我们需要明确集合 $X \subseteq M$ 包含 M 中多数元素的含义。定义正如预期：多数子集是指元素数严格多于其补集的任意集合，即任何满足 $|X| > |M\backslash X|$ 的 $X \subseteq M$。我们将这样的 X 称为多数子集（相应地，将 $M\backslash X$ 称为少数子集）。此定义适用于有限论域和无限论域 M。如果 M 是有限的，那么 X 是多数集合，当且仅当 $|X| > |M|/2$。如果 M 是无限的（本文始终如此），那么上述条件等价于 $|M\backslash X| < |M|$ （这尤其意味着 $|X| = |M|$）。令

$$\mathsf{mj}(M) = \{X \subseteq M : |X| > |M\backslash X|\} = \{X : |M\backslash X| < |M|\}$$

针对 M 的多数子集类。容易看出，$\mathsf{mj}(M)$ 是 M 上的一个滤子，它扩展了由余有限集构成的弗雷歇滤子

$$Fr(M) = \{X \subseteq M : |M\backslash X| \text{ is finite}\}.$$

对于可数的 M，$\mathsf{mj}(M) = Fr(M)$，而 $\mathsf{mj}(M)$ 有时称为广义弗雷歇滤子。

确定了严格的多数概念后，罗素概念的形式化分为两步：首先，将语言 L 关于结构 $\mathfrak{M} = (M,...)$ 的性质 $\phi(x)$ 定义为典型的，当且仅当它定义了 M 的一个多数子集，即它在 $\mathfrak{M}$ 中的外延属于 $\mathsf{mj}(M)$；其次，将元素 $a \in M$ 定义为典型的，当且仅当它满足 $\mathfrak{M}$ 的所有典型性质。若在不可数结构上用滤子 $Fr(M)$ 代替 $\mathsf{mj}(M)$，便可得到一种较弱的典型性概念。

2.1 一阶结构的典型与弱典型性质和元素。相对典型性

给定一个 L-结构 $\mathfrak{M}$、一个集合 $A \subseteq M$ 和一个关于 $L(A)$ 的性质 $\phi(x)$，我们通常用 $ext(\phi)^{\mathfrak{M}}$，或直接用 $ext(\phi)$，表示 $\phi(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的外延，即，

$$ext(\phi) = \{a \in M : \mathfrak{M} \models \phi(a)\}.$$

定义 2.1 若 $ext(\phi) \in \mathsf{mj}(M)$（分别为 $ext(\phi) \in Fr(M)$），则称 $L(A)$ 的性质 $\phi(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上是典型的，或称为 $(\mathfrak{M}, A)$- 典型的，或简称为 A- 典型的（分别为弱 A- 典型的）。特别地，若 $\phi(x)$ 是 $\emptyset$-典型的（分别为弱 $\emptyset$-典型的），则称其为典型的（分别为弱典型的）。[2]

[2]定义性质的典型性和弱典型性的另一种等价方式，是分别使用广义量词 Q_{most} 和 Q_{inf}。对于每个结构 $\mathfrak{M}$，其解释——

令 $TP(\mathfrak{M}, A)$、 $wTP(\mathfrak{M}, A)$ 分别表示 $\mathfrak{M}$ 上 $L(A)$ 的 A-典型性质和弱 A-典型性质 $\phi(x)$ 的集合。显然， $wTP(\mathfrak{M}, A) \subseteq TP(\mathfrak{M}, A)$。

事实 2.2 $TP(\mathfrak{M}, A)$ 和 $wTP(\mathfrak{M}, A)$ 都是 $\mathfrak{M}$ 上以 A 中的参数为参数的类型，按通常意义而言，即它们在 $\mathfrak{M}$ 中有限可满足。

证明。由定义可直接得出，有限多个 A-典型（分别为弱 A-典型）性质的合取是 A-典型（分别为弱 A-典型）的，因此是可满足的。⊣

我们主要关注有限 A 的 A-典型性质和元素。在这种情况下， A 的元素按一定顺序出现在 ϕ 中，即作为向量 $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 出现，因此便于同时使用向量记法，并将 $\overline{a}$-典型（弱 $\overline{a}$-典型）写作 A-典型（弱 A-典型）。关于结构 $\mathfrak{M}$ 上 A-典型性质的存在性，我们有以下简单事实。以下考虑的所有结构 $\mathfrak{M}$ 都是无限的。下面结论的证明是直接的。

事实 2.3 (i) 每个重言式 $\phi(x)$（例如 $\psi(x) \vee \neg\psi(x)$）都是 M-典型的。
(ii) 对于 M 的每个元组 $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，性质

$$\phi_{\overline{a}}(x) := (x \neq a_1) \wedge \cdots \wedge (x \neq a_n)$$

是 $\overline{a}$-典型的。
(iii) 若 $\overline{b}$ 是 M 中由 $\overline{a}$ 可定义元素组成的元组，那么性质 $\phi_{\overline{b}}(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上等价于一个 $\overline{a}$-典型性质。

接下来讨论典型元素。

定义 2.4 给定一个结构 $\mathfrak{M}$ 和 $A \subseteq M$，若元素 $a \in M$ 满足 $\mathfrak{M}$ 上由 A-典型性质构成的类型 $TP(\mathfrak{M}, A)$，则称其为 $(\mathfrak{M}, A)$-典型的，或简称为 A-典型的（弱典型时称为弱 A-典型的）；也就是说，对于每个 $\phi \in TP(\mathfrak{M}, A)$，都有 $\mathfrak{M} \models \phi(a)$。

Q_{most} 和 Q_{inf} 分别对应多数滤子 $\mathsf{mj}(M)$ 和 Fr´echet 滤子。也就是说，对于 L的每个 $\phi(x)$（A），

$$\mathfrak{M} \models (Q_{most}x)\phi(x) \iff \{a \in M : \mathfrak{M} \models \phi(a)\} \in \mathsf{mj}(M),$$

and

$$\mathfrak{M} \models (Q_{inf}x)\phi(x) \iff \{a \in M : \mathfrak{M} \models \phi(a)\} \in Fr(M).$$

那么，性质 $\phi(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上是 A-典型的（分别地，弱 A-典型的），当且仅当 $\mathfrak{M} \models (Q_{most}x)\phi(x)$（分别地， $\mathfrak{M} \models (Q_{inf}x)\phi(x)$）。

允许在定义中使用参数，便得出结构 $\mathfrak{M}$ 中元素之间如下的相对典型性关系：

- $\mathrm{Tp}(a,\overline{b})$：“$a$ 是 $\overline{b}$-典型的”，
- $\mathrm{wTp}(a,\overline{b})$：“$a$ 是弱 $\overline{b}$-典型的”。

特别地，我们分别用 $\mathrm{Tp}(a)$、$\mathrm{wTp}(a)$ 代替 $\mathrm{Tp}(a,\emptyset)$、$\mathrm{wTp}(a,\emptyset)$。

回顾一下，给定一个 L-结构 $\mathfrak{M}$ 和 $A \subseteq M$，若存在 L 的公式 $\phi(x,\overline{y})$ 以及一个元组$\overline{a} \in A$，使得 b 是 M 中满足 $\phi(x,\overline{a})$ 的唯一元素，则称元素 $b \in M$ 在 $\mathfrak{M}$ 中是 A-可定义的，即

$$\mathfrak{M} \models (\forall x)(x = b \leftrightarrow \phi(x,\overline{a})).$$

若一个元素是 $\emptyset$-可定义的，则称其为可定义的。更一般地，若存在公式 $\phi(x,\overline{y})$ 和元组 $\overline{a} \in A$，使得 $\mathfrak{M} \models \phi(b,\overline{a})$ 且 $ext(\phi(x,\overline{a}))$ 是有限的，则称 $b \in M$ 在 $\mathfrak{M}$ 中是 A-代数的。对于每个元组 $\overline{a} \in M$，令 $\mathrm{df}(\overline{a})$ 和 $\mathrm{cl}(\overline{a})$ 分别表示 M 中的 $\overline{a}$-可定义元素集和 $\overline{a}$-代数元素集。显然，$\mathrm{df}(\overline{a}) \subseteq \mathrm{cl}(\overline{a})$。

以下是由定义直接得到的结论。

事实 2.5 对任意结构 $\mathfrak{M}$及其元素 M，以下结论成立：(i) $\neg\mathrm{Tp}(a,\overline{b})$ 当且仅当存在 $\phi(x,\overline{y})$，使得 $\mathfrak{M} \models \phi(a,\overline{b})$ 且$|ext(\phi(x,\overline{b}))| < |M|$。(ii) $\neg\mathrm{wTp}(a,\overline{b})$ 当且仅当存在 $\phi(x,\overline{y})$，使得 $\mathfrak{M} \models \phi(a,\overline{b})$ 且$ext(\phi(x,\overline{b}))$ 是有限的。(iii) 若 $\{b_1,\dots b_n\} \subseteq \{c_1,\dots,c_m\}$，则 $\mathrm{Tp}(a,\overline{c})$ 蕴含 $\mathrm{Tp}(a,\overline{b})$，且 $\mathrm{wTp}(a,\overline{c})$ 蕴含 $\mathrm{wTp}(a,\overline{b})$。(iv) $\mathrm{Tp}(a,\overline{b}) \Rightarrow \mathrm{wTp}(a,\overline{b}) \Leftrightarrow a \notin \mathrm{cl}(\overline{b})$。(v) 对可数的 $\mathfrak{M}$，$\mathrm{Tp}(a,\overline{b}) \Leftrightarrow \mathrm{wTp}(a,\overline{b})$。

虽然所有（无限）结构都存在典型性质，但不能指望所有结构都包含典型元素。例如，对于所有元素都是“特殊的”（即无需参数即可定义）的结构，情况就是如此。另一方面，也存在完全由典型元素构成的结构。下面将考察两个这样的著名例子，它们处于这一光谱的两端。

例 2.6 令 $\mathfrak{M} = \mathcal{N} = (\mathbb{N}, S, +, \cdot, 0)$ 为自然数的标准结构。每个 $n \in \mathbb{N}$ 都可在 $\mathcal{N}$ 中定义，因此 $L(\mathbb{N})$ 的公式与 L 的公式相同。因此，对于 $\mathbb{N}$ 中任意由元素组成的元组 $\overline{n} = (n_1,\dots,n_k)$，在 2.3 中定义的公式 $\phi_{\overline{n}}(x)$ 都是典型的。说到元素，很容易看出 $\mathcal{N}$ 不包含任何典型元素。因为对于每个元组

$\mathbb{N}$ 中的 $\overline{n}=(n_1,\ldots,n_k)$，典型性质 $\phi_{\overline{n}}(x):=(x\neq n_1)\wedge\cdots\wedge(x\neq n_k)$ 的外延是 $\mathbb{N}\backslash\{n_1,\ldots,n_k\}$。因此，若 $a\in\mathbb{N}$ 是典型的，它就应该属于所有性质 $\phi_{\overline{n}}(x)$ 的外延，也就是说属于 $\bigcap Fr(\mathbb{N})$，但这是空集。

例 2.7 令 $\mathfrak{M}=\mathcal{Q}=(\mathbb{Q},<)$ 为有理数的有序集。这里，与 $\mathcal{N}$ 完全相反， $\mathcal{Q}$ 的元素全都具有相同的类型，即对于每个 $\phi(x)$ 以及任意 $a,b\in\mathbb{Q}$, $\mathcal{Q}\models\phi(a)$， $\leftrightarrow\phi(b)$。因此，对于每个 $\phi(x)$，它要么对所有元素都成立，即 $ext(\phi)=\mathbb{Q}$，所以 $\phi(x)$ 是典型的；要么对所有元素都不成立，在这种情况下 $ext(\neg\phi)=\mathbb{Q}$，即 $\neg\phi(x)$ 是典型的。由此可知，对于每个 $\phi(x)$， $\phi(x)$ 或 $\neg\phi(x)$ 在 $\mathcal{Q}$ 上是典型的。

令 $A\subseteq\mathbb{Q}$ 为一个参数集。理论 DLO^* （稠密线性无端点序的理论）允许量词消去，因此，带有来自 A 的参数的每个性质 $\phi(x)$，在 $\mathcal{Q}$ 上都等价于公式 $x<a_i$、 $a_j<x$、 $x=a_k$ 及其否定的布尔组合。其中只有性质 $x\neq a_i$ 是 A-典型的。因此， $\mathcal{Q}$ 上的 A-典型性质恰好是$\phi_{\overline{a}}(x)$: $=(x\neq a_1)\wedge\cdots\wedge(x\neq a_n)$，其中 $\overline{a}\in A$。由此可知， a 是 A-典型的，当且仅当它满足所有此类 $\phi_{\overline{a}}(x)$，也就是说，当且仅当它属于 $\bigcap_{a_1,\ \ldots,\ a_n\in A}\mathbb{Q}\backslash\{a_1,\ldots,a_n\}$，而这等于 $\mathbb{Q}\backslash A$。这正是 $\mathcal{Q}$ 的 A-典型元素集合。

下面给出结构 $\mathfrak{M}$ 中存在典型元素的一个充分条件。

定理2.8 设 $\mathfrak{M}$ 是一个结构。若对于某个 $\kappa\geq\aleph_0$， $\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的，那么对于满足 $|A|<\kappa$ 的每个 $A\subseteq M$， M 都包含 A-典型元素。

证明。我们已经看到， $TP(\mathfrak{M},A)$ 这一 A-典型性质的集合是关于 $(\mathfrak{M},A)$ 的一个类型。由于 $|A|<\kappa$ 和 $\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的， $TP(\mathfrak{M},A)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中可满足。满足 $TP(\mathfrak{M},A)$ 的每个 $a\in M$ 都是 A-典型的。$\dashv$

下面给出一个与饱和无关的、关于存在典型元素的另一充分条件。

定理 2.9 设 $\mathfrak{M}$ 是一个 L-结构，其语言为可数语言 L；设 $A\subseteq M$ 是一个参数集，且 $cf(|M|)>\max(\aleph_0,|A|)$。那么 $\mathfrak{M}$ 包含 $|M|$ A-典型元素，而只有 $<|M|$ 个非 A-典型元素。

证明。设 $\mathfrak{M}$ 和 $A\subseteq M$ 如所述。根据定义，元素 $a\in M$是非-A-典型的，当且仅当它满足一个外延为少数的性质。因此，如果

$$S=\{\phi(x,\overline{b}):\overline{b}\in A\ \&\ |ext(\phi(x,\overline{b}))|<|M|\},$$

那么， M 中所有非-A-典型元素构成的集合为 $X = \bigcup\{ext(\phi) : \phi \in S\}$，因此 $|X| \leq \Sigma\{|ext(\phi)| : \phi \in S\}$。现在， $|S| \leq \max(\aleph_0, |A|) < cf(|M|)$，也就是说， $|S| < cf(|M|)$，并且对每个 $\phi \in S$，都有 $|ext(\phi)| < |M|$。由此可得$\Sigma\{|ext(\phi)| : \phi \in S\} < |M|$，因此 $|X| < |M|$。 A-典型元素的集合是 X 的补集，因此 $|M \backslash X| = |M|$。⊣

推论 2.10 设 $\mathfrak{M}$ 是一个 L 结构，其 L 可数，并且满足 $cf(|M|) > \aleph_0$。那么，对于任意满足 $|A| \leq \aleph_0$ 的 $A \subseteq M$， $\mathfrak{M}$ 包含 $|M|$ A-典型元素以及 $< |M|$ 个非 A- 典型元素。

设 Z_2 是完全二阶算术的理论，其语言为 $L_2 = \{+, \cdot, <, \in, 0, 1\}$。$L_2$ 的变量 m、 n、 i、 j、.....表示数，而变量 x、 y、 z 表示数集，即实数（详情参见 [9]）。 Z_2 的完全标准模型为 $\mathcal{R} = (\omega, \mathcal{P}(\omega)\ +, \cdot, <, \in, 0, 1)$。 a、 b、 c、.....表示任意实数。由于 $cf(|\mathcal{P}(\omega)|) = cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$，将推论 2.10 应用于结构 $\mathcal{R}$，可立即得到以下结论。

定理 2.11 对每个满足 $|A| \leq \aleph_0$ 的 $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$，都存在 $2^{\aleph_0}$$A$-典型实数，而只有 $< 2^{\aleph_0}$ 个非A-典型实数。更准确地说：对于任意有限（甚至可数）实数元组 $\overline{b}$， $|\{x : \mathrm{Tp}(x, \overline{b})\}| = 2^{\aleph_0}$，而$|\{x : \neg\mathrm{Tp}(x, \overline{b})\}| < 2^{\aleph_0}$。

例 2.7 和定理 2.9、2.11 给出了一些结构的例子：这些结构不仅包含典型元素，而且典型性这一属性本身（作为元语言的一种属性）在这些结构中也“典型”（从其外延是一个多数集这一意义上说）。

由事实 2.5 (ii) 可知，每个代数元素（因而每个可定义元素）都是非典型的。然而，利用实数的编码能力，很容易看出，对于任意 $\overline{b}$， $\overline{b}$-代数实数与 $\overline{b}$-可定义实数相同。

事实 2.12 对所有 $\overline{b} \in \mathcal{P}(\omega)$， $\mathrm{cl}(\overline{b}) = \mathrm{df}(\overline{b})$。

证明。只需证明 $\mathrm{cl}(\overline{b}) \subseteq \mathrm{df}(\overline{b})$。这是由如下事实直接得出的：每个有限（甚至可数）实数集都可以用一个实数编码。令 $a \in \mathrm{cl}(\overline{b})$。那么存在 L_2 的一个公式 $\phi(x, \overline{y})$，使得$\models \phi(a, \overline{b})$，且 $\{x : \models \phi(x, \overline{b})\}$ 是有限的，因此令 $\{x : \models \phi(x, \overline{b})\} = \{c_1, \ldots, c_n\}$。后一个集合的一个编码是实数 $c = \{\langle i, m\rangle : m \in c_i, 1 \leq i \leq n\}$，其中 $\langle i, m\rangle$ 是数对 (i, m) 的通常算术编码。若 $(c)_i = \{m : \langle i, m\rangle \in c\}$，则对于 $1 \leq i \leq n$，都有 $c_i = (c)_i$。特别地，存在某个 i_0 使得 $a = (c)_{i_0}$。现在 c

由公式 $\psi(x,\overline{b}) := (\forall y)(\phi(y,\overline{b}) \leftrightarrow y = (x)_1 \vee \cdots \vee (x)_n)$ 定义。因此 $c \in \mathrm{df}(\overline{b})$，并且由于 $a \in \mathrm{df}(c)$ 也成立，所以可得 $a \in \mathrm{df}(\overline{b})$。$\dashv$

事实 2.12 与 2.5 (ii) 一起推出：

事实 2.13 在结构 $\mathcal{R}$ 中，对于所有实数 $a, \overline{b}$，我们有

$$Tp(a,\overline{b}) \Rightarrow wTp(a,\overline{b}) \Leftrightarrow a \notin \mathrm{df}(\overline{b}).$$

众所周知，$\mathcal{P}(\omega)$ 的 L_2-可定义子集就是描述集合论中解析（或 lightface）层级的那些子集，它们由类 Σ^1_n, Π^1_n 组成，其中 $n \geq 0$。因此，实数 a 是非典型的，当且仅当它属于该层级中的一个小基数集，也就是说，当且仅当存在某个 $X \in \Sigma^1_n$，以及某个 $n \geq 0$，使得 $a \in X$ 且 $|X| < 2^{\aleph_0}$。如果我们假设 CH，问题就会大大简化；在这种情况下，$|X| < 2^{\aleph_0}$ 意味着 X 是可数的。因此，我们有以下结论。

事实 2.14 假设 CH，实数 $a \in \mathcal{P}(\omega)$ 是非典型的，当且仅当存在一个可数的 $X \in \bigcup_n \Sigma^1_n$，使得 $a \in X$。

有趣的是，描述集合论中的重要研究者很早就开始关注解析层级中的可数集合，并取得了显著成果（见 [2], [3] 和 [10]）。前述论文证明，对于某些 n，存在最大的可数 Σ^1_n 集和 Π^1_n 集，同时还提供了有关其内部结构的信息。顺带一提，这些论文也给出了一些非典型实数的非平凡例子。例如，Solovay [10]证明，如果可构造实数只有可数多个（存在可测基数时便是如此），那么它们构成最大的可数 Σ^1_2 集，这意味着每个可构造实数都是非典型的。作为推广，[2] 和 [3] 证明，在射影决定性（PD）的假设下，对于每个 n，都存在最大的可数 Σ^1_{2n} 集 C_{2n}，以及最大的可数Π^1_{2n+1} 集 C_{2n+1}。

上述结果或许应促使我们通过考虑“典型性度”，来进一步完善实数典型性的一般定义，即对于 $n \geq 0$，分别考察满足定义中所涉及性质为 Σ_n 和 Π_n的 Σ_n-典型和 Π_n-典型实数。我们的目标应是找到实数属于某个可数 Σ_n/Π_n 解析集的条件，并进一步指出不属于任何此类集合的“具体”实数。

注 2.15 尽管我们对典型性质和典型元素的定义适用于任何类型的一阶结构，但在全文中我们将避免

讨论集合论的模型，即满足例如 ZF公理的语言 $L = \{\in\}$ 的结构 $\mathfrak{M} = (M, E)$。原因在于，结构 $\mathfrak{M}$ 上的典型性质定义很大程度上依赖于 M 的子集基数，而这一基数是从结构$\mathfrak{M}$ 之外判定的（外部基数）。另一方面， ZF的每个模型(M, E)都有一个自然的内部基数概念 $|x|^{\mathfrak{M}}$，对每个 $x \in M$均如此；这为衡量 M中元素的大小提供了一种更自然的方式。现在，若 $\phi(x)$是语言 $L = \{\in\}$中的一个性质，我们就不能用 $\mathfrak{M} = (M, E)$的内部基数来衡量 $\phi(x)$的外延，因为$\{x \in M : \mathfrak{M} \models \phi(x)\}$ 通常是一个类，也就是说，它不是 M 的元素。因此，采用内部基数时，多数外延判据无法直接应用于 $\phi(x)$。不过，如果改用参数化典型性，即对每个序数 $\alpha \in M$定义的 α-典型性，就可以绕开这个问题，定义如下：若集合论语言（或许带有参数）中的性质 $\phi(x)$在 $\mathfrak{M}$上是 α-典型的，则

$$\mathfrak{M} \models |\{x \in V_{\alpha+1} : \phi(x)\}| > |\{x \in V_{\alpha+1} : \neg\phi(x)\}|.$$

如果对于每个序数$\alpha \in M$， $\phi(x)$ 都是 α-典型的，那么就称它在 $\mathfrak{M}$上是典型的。这种调整在某种程度上将关于 $\mathfrak{M} = (M, E)$的典型性质的定义内化了，尽管代价是复杂性有所增加。但在定义（M, E）的α-典型元素／典型元素时，这种内化会彻底失效（如果我们在旧定义中只是将“典型性质”替换为“α-典型性质”）。因为这样一来，集合 $A \in M$ 是 α-典型的，当且仅当对于每个关于 $\mathfrak{M}$的 α-典型性质 $\phi(x)$，都有 $\mathfrak{M} \models \phi(A)$。显然，后一个定义无法在 $\mathfrak{M}$内部表达。因此，我们面临这样的处境：必须同时借助内部和外部判据来判断 $\mathfrak{M}$ 的典型集合是什么，而这种做法并不十分自然。

尽管存在上述微妙之处和障碍，为集合论模型寻找一种合适的典型性概念这一挑战依然存在。尤其是因为这类模型自然地容纳泛集，而众所周知，在实数和集合这两种语境中，泛性都是与随机性对偶的概念（参见例如 [1], [6]）。

3 相对典型性作为一种相对随机性概念。随机性公理

上文讨论的典型性概念具有一个鲜明的关键特征，使其能够作为随机性（一般概念）的忠实形式化表示。这一特征在于，典型对象会避开所有“特殊的”

谓词，即具有“较小外延”（按基数衡量）的谓词。目前在实数语境中使用的所有成熟随机性概念（即 ML 随机性、施诺尔随机性和可计算随机性）都具有类似特征：随机实数是指避开由某些特殊的可计算测试生成的所有零测集的实数。

由于小性的判据和有效性的判据存在差异，因此不应指望证明典型实数与 ML 随机实数或施诺尔随机实数之间有许多联系。相反，应当从典型集合类的结构以及其他随机集类的结构中寻找相似之处。van Lambalgen 在一系列论文 [5], [6]和 [7]中提出了这种通过公理研究随机性的结构化方法。在这些论文中，作者引入了一种新的原始关系$R(x,\overline{y})$，用于表示相对随机性，其预期含义是“x 相对于 $\overline{y}$是随机的”（或“$\overline{y}$ 不为 x提供任何信息”），并提出了关于 R 的一些公理 Ri（随机性公理）。在 [5] 中，关系 $R(x,\overline{y})$ 主要指无限二进制序列，即 2^ω 的元素；而在后续论文[6] 和 [7] R 中，$(x,\overline{y})$旨在表达一般随机集的性质，因此这些公理仍记作 Ri，但略有不同。

上一节定义的相对典型性关系 Tp$(x,\overline{y})$ 和 wTp$(x,\overline{y})$，与 $R(x,\overline{y})$ 有明显的相似之处，因此很自然要仔细考察哪些公理 Ri 对它们成立，哪些不成立。回想一下，当关系 Tp 和 wTp 特化到语言 L_2和实数结构 $\mathcal{R}$ 时，它们的含义如下：

- Tp$(a,\overline{b}) :\Leftrightarrow$ 对于 L_2 中的每个公式 $\phi(x,\overline{b})$，只要 $\mathcal{R}\models\phi(a,\overline{b})$，就有$|\{x:\mathcal{R}\models\phi(x,\overline{b})\}|=2^{\aleph_0}$。
- wTp$(a,\overline{b}) :\Leftrightarrow$ 对于 L_2 中的每个公式 $\phi(x,\overline{b})$，只要 $\mathcal{R}\models\phi(a,\overline{b})$，就有$|\{x:\mathcal{R}\models\phi(x,\overline{b})\}|\geq\aleph_0$。

下面讨论的随机性公理都是 van Lambalgen 在 [5], [6], 和 [7]中提出的公理的类似形式。这些论文列出了三套各含 6 或 7 条公理的清单，彼此不同但大体重叠，公理记作 Ri，其中 $i=1,\ldots,7$。下文给出的 Ti 公理（其中 $1\leq i\leq 6$）是 [5]清单中相应 Ri 的类似形式。公理 T7（尾集）对应于 [7], 中的 R6，而公理模式 T8（零一律）对应于 [7]中的模式 R5。请注意，Ri 是用一阶对象语言 $L\cup\{R\}$表述的，也就是在 L 的基础上增添了 R。此外，在模式 R6 和零一律中，公式可以包含 R。另一方面，我们的 Ti 则是用元语言表述的。对于有限元组 $\overline{a}$、$\overline{b}$，我们用$\overline{a}\overline{b}$ 表示 $\overline{a}$ 与 $\overline{b}$ 的连接。

需要强调的是，我们并不期望所有公理 Ti 都适用于关系 Tp$(x,\overline{y})$。这是因为 Ri 的提出主要是受到以下直觉的启发：

关于由独立选择生成的随机数字序列 0,1 的直觉（见 [7, p. 284]），而典型对象背后的直觉——正如其定义所体现的那样——则大不相同。

下面的公理模式 T8 的表述需要用到下一个定义。

定义 3.1 若实数 a、b 仅在有限多个元素上不同，即对称差 $a\triangle b$ 是有限集，则称它们等价，记作 $a \approx b$。令 $[a]_{\approx}$ 为 a的等价类。若实数集 X 满足：只要 $a \in X$ 且 $b \approx a$，就有 $b \in X$，则称其为尾集。

T1.（存在性）$(\forall \overline{y})(\exists x)\mathsf{Tp}(x, \overline{y})$。特别地，存在 a 使得 $\mathsf{Tp}(a)$。

T2.（向下单调性）$\mathsf{Tp}(a, c\overline{b}) \Rightarrow \mathsf{Tp}(a, \overline{b})$。

T3.（参数的作用方式是集合而非向量）(a) 对任意置换 π，$\mathsf{Tp}(a,\overline{b}) \Rightarrow \mathsf{Tp}(a, \pi\overline{b})$，其中 $\overline{b}$。(b) $\mathsf{Tp}(a, b\overline{c}) \Rightarrow \mathsf{Tp}(a, bb\overline{c})$。

T4.（非自反性）$\mathsf{Tp}(a, b) \Rightarrow a \neq b$。T5.（Steinitz 交换原理）$\mathsf{Tp}(a, \overline{c})$ & $\mathsf{Tp}(b, a\overline{c}) \Rightarrow \mathsf{Tp}(a, b\overline{c})$。[3]T6. 如果 $\phi(x, \overline{y})$ 是一个不含自由 z 的 L 公式，那么

$$(\forall x)(\mathsf{Tp}(x, z\overline{y}) \Rightarrow \phi(x, \overline{y})) \Rightarrow (\forall x)(\mathsf{Tp}(x, \overline{y}) \Rightarrow \phi(x, \overline{y})).$$

T7.（尾集，针对实数 $\mathcal{R}$ 结构）对于任意实数$\overline{c}$，集合 $\{x\colon \mathsf{Tp}(x, \overline{c})\}$ 是一个尾集。

T8.（零一律，针对实数 $\mathcal{R}$ 结构）设 $\phi(x, \overline{c})$ 是一个公式，其外延是一个尾集。那么

$(\exists x)(\mathsf{Tp}(x, \overline{c})$ & $\phi(x, \overline{c}))$ 蕴含 $(\forall x)$

$(\mathsf{Tp}(x, \overline{c}) \Rightarrow \phi(x, \overline{c}))$。

命题 3.2 公理 T1-T4 在每个结构 $\mathfrak{M}$ 中都成立。公理 T7 在 $\mathcal{R}$ 中成立。

证明。T1：这直接由定理 2.11 得出。T2 和 T3 是 $\mathsf{Tp}(a, \overline{b})$ 定义的直接推论，因为关键只在于元组 $\overline{b}$ 中元素的集合，而不在于它们的具体顺序。T4

[3]这一原理的动机来自线性相关关系。正如上文所述，关系 $R(a, \overline{b})$，以及 $\mathsf{Tp}(a, \overline{b})$，都可以读作“$a$ 独立于 $\overline{b}$”，因此 $\neg\mathsf{Tp}(a,\overline{b})$ 可以看作相关关系 $D(a, \overline{b})$：“a 依赖于 $\overline{b}$”。那么 T5 等价地可写为 $D(a, b\overline{c}) \Rightarrow D(a, \overline{c}) \vee D(b, a\overline{c})$。如果我们把 a、b、c_1、……、c_n 看作向量，并将 $D(a, \overline{b})$ 理解为“a 是 b_1、……、b_n 的线性组合”，就很容易看出这个蕴含式成立。

等价地可写为 $\neg\mathsf{Tp}(a,a)$，这直接由事实 2.5 (i) 得出。

T7：我们必须证明，对于任意 a、b、$\overline{c}$，若 $\mathsf{Tp}(a,\overline{c})$ 且 $a \approx b$，则 $\mathsf{Tp}(b,\overline{c})$；或者等价地，若 $\neg\mathsf{Tp}(a,\overline{c})$ 且 $a \approx b$，则 $\neg\mathsf{Tp}(b,\overline{c})$。假设 $\neg\mathsf{Tp}(a,\overline{c})$ 且 $a \approx b$。于是存在 $\phi(x,\overline{y})$，使得 $\mathcal{R} \models \phi(a,\overline{c})$，并且若 $X = \{x : \mathcal{R} \models \phi(x,\overline{c})\}$，则 $|X| < 2^{\aleph_0}$。注意，谓词 $Fin(x) :=$ “实数 x 是有限的”在 $\mathcal{R}$ 中可定义，因此关系 $x \approx y := Fin(x \triangle y)$ 也可定义。令 $\psi(x,\overline{c}) := (\exists y)(\phi(y,\overline{c}) \wedge x \approx y)$。那么 $\mathcal{R} \models \psi(b,\overline{c})$。只需证明，若 $Y = \{x : \mathcal{R} \models \psi(x,\overline{c})\}$，则 $|Y| < 2^{\aleph_0}$。但是 $Y = \bigcup\{[x]_{\approx} : \mathcal{R} \models \phi(x,\overline{c})\}$，且 $|[x]_{\approx}| = \aleph_0$ 对每个实数 x 都成立。因此 $|Y| \leq |X| \cdot \aleph_0 = |X| < 2^{\aleph_0}$。$\dashv$

关于其余公理 T5、T6 和 T8，它们要么不成立（在 $\mathcal{R}$ 中或在其他某个结构中），要么其真值尚未确定。我们分别讨论每条公理的情形。

公理 T5。对于关系 Tp 和 wTp，这条公理一般都不成立。具体来说，只需证明

$$\mathsf{Tp}(a)\ \&\ \mathsf{Tp}(b,a)\ \Rightarrow\ \mathsf{Tp}(a,b) \tag{1}$$

在某个结构 $\mathfrak{M}$ 上，针对某些 a、$b \in M$（以及 $\overline{c} = \emptyset$），该式不成立。我们用以下反例来证明这一点。

例 3.3 设 $\mathfrak{M} = (M, S, +, \cdot, 0)$ 是一个具有以下性质的可数非标准模型：存在 a、$b \in M$，使得 $a \notin \mathsf{df}(\emptyset)$、$a \in \mathsf{df}(b)$ 且 $b \notin \mathsf{df}(a)$。则 $\mathsf{Tp}(a)$、$\mathsf{Tp}(b,a)$ 和 $\neg\mathsf{Tp}(a,b)$ 在 $\mathfrak{M}$中成立，因此 (1) 在 $\mathfrak{M}$上不成立。

证明。首先注意，具有上述性质的可数非标准模型 PA 有很多（例如，每个可数递归饱和模型都具有这一性质）。固定这样一个 $\mathfrak{M}$。还要回顾一下（事实 2.5）：由于可数性，在 $\mathfrak{M}$上，$\mathsf{Tp}(a,b) \Leftrightarrow \mathsf{wTp}(a,b)$；而（再次由事实 2.5）$\mathsf{wTp}(a,b) \Leftrightarrow a \notin \mathsf{cl}(b)$。鉴于这些等价关系，只需证明存在 a、$b \in M$，使得

$$a \notin \mathrm{cl}(\emptyset)\ \&\ b \notin \mathrm{cl}(a)\ \&\ a \in \mathrm{cl}(b). \tag{2}$$

根据假设，存在 $a, b \in M$ 使得

$$a \notin \mathrm{df}(\emptyset)\ \&\ b \notin \mathrm{df}(a)\ \&\ a \in \mathrm{df}(b).$$

因此，为了证明 (2)，只需证明对于每个 $\mathfrak{M} \models PA$ 和任意 $\overline{b} \in M$，$\mathrm{df}(\overline{b}) = \mathrm{cl}(\overline{b})$。不过，后者是一个众所周知的事实，与事实 2.12 类似，在每个 PA 的模型中都成立，这得益于整数的编码能力。⊣

然而，以下问题仍未解决：

问题 3.4 T5，尤其是 (1)，是否在结构 $\mathcal{R}$ 中成立？

注意，如果 (1) 在 $\mathcal{R}$ 中成立，那么对于任意典型实数 a、b，即满足 $\mathrm{Tp}(a)$ 和 $\mathrm{Tp}(b)$ 的实数，我们就有 $\mathrm{Tp}(a,b) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(b,a)$。论文末尾还列出了若干与问题 3.4 类似的未决问题。

公理模式 T6。文献 [5] 对应模式 R6（更准确地说，是其较简单的版本 R6′）所作的解释有些含糊，且显得牵强。（R6 本身的表述和解释要复杂得多。）在第 1146 页，作者仅以下述理由说明引入 R6′ 的必要性：对于结构 $\mathfrak{M}$ 中任意的 a、$\overline{b}$，如果 a 相对于 $\overline{b}$ 是随机的，也就是说，如果 $R(a,\overline{b})$，那么 a 就不应属于 $\overline{b}$ 的代数闭包。作者称，模式 R6′ 成立时便能实现这一目标，这就是采纳该模式的理由。他还简短证明了 R6′ 能保证蕴含关系 $\mathfrak{M} \models R(a,\overline{b}) \Rightarrow a \notin \mathrm{cl}(\overline{b})$。然而在我们的情形中，$R(a,\overline{b})$ 被解释为 $\mathrm{Tp}(a,\overline{b})$ 或 $\mathrm{wTp}(a,\overline{b})$ 时，根据定义（见事实 2.5 (iv)），$\mathrm{Tp}(a,\overline{b}) \Rightarrow \mathrm{wTp}(a,\overline{b}) \Leftrightarrow a \notin \mathrm{cl}(\overline{b})$，因此推导这一结论无需额外公理。除此之外，要说明 T6 对实数上的关系 $\mathrm{Tp}(a,\overline{b})$ 和 $\mathrm{wTp}(a,\overline{b})$ 为何成立，也十分困难。此外，相对容易证明，在适当的皮亚诺算术的可数非标准模型中，T6 不成立。然而，该证明超出了本文的主要范围，因此我们从略。综上，T6 并非关于典型性的自然原则。

公理模式 T8。与 T7 一样，该模式再次提到了实数。对于一般公式 $\phi(x,\overline{y})$，我们尚不清楚它是否为真。如果对于某个公式 $\phi(x,\overline{y})$ 和某些给定参数 $\overline{c}$，$\phi(x,\overline{c})$ 或 $\neg\phi(x,\overline{c})$ 恰好是一个典型性质，那么不难看出，T8 对这样的 $\phi(x,\overline{c})$ 成立。因为如果 $\phi(x,\overline{c})$ 是典型的，那么每个 $\overline{c}$-典型元素都满足它，也就是说，$(\forall x)(\mathrm{Tp}(x,\overline{c}) \Rightarrow \phi(x,\overline{c}))$ 为真。另一方面，如果 $\neg\phi(x,\overline{c})$ 是典型的，那么没有 $\overline{c}$-典型元素满足 $\phi(x,\overline{c})$，即 $(\exists x)(\mathrm{Tp}(x,\overline{c}) \,\&\, \phi(x,\overline{c}))$ 为假。这两种情况下，T8 都成立。然而，不难找到一些性质 $\phi(x)$，其外延在 $\approx$ 下封闭，但 $\phi(x)$ 和 $\neg\phi(x)$ 都不是典型的。例如，$\phi(x) :=: (\forall n)(\exists m > n)(m$ 是偶数 $\wedge\ m \in x)$ 就是这样一种性质。

3.1 范兰巴尔亨定理

本节主要将典型实数与 ML 随机实数进行比较，也会将它们与施诺尔随机实数和可计算随机实数进行比较。关于这些概念的精确定义，见 [1]。在 [4] van Lambalgen 证明了以下定理，此后该定理便以他的名字命名（另见 [1], §11.6）。

定理 3.5 对任意 $a,b \subseteq \omega$, $a \oplus b$， a 是 ML 随机，当且仅当 b 是 ML 随机且 a 是 -ML 随机。

这里 $a \oplus b$ 表示集合 $\{2n : n \in a\} \cup \{2n+1 : n \in b\}$。关系 $\mathsf{Tp}(a, \overline{b})$ 在结构 $\mathcal{R}$ 中是否满足定理 3.5 的类比形式？也就是说，对于所有实数 a, b，等价关系 $\mathsf{Tp}(a \oplus b) \Leftrightarrow \mathsf{Tp}(a)$ & $\mathsf{Tp}(b, a)$ 是否成立？我们将看到答案是否定的。相反，对于 $a \oplus b$ 的典型性，我们有以下简单的约化。

定理 3.6 对任意实数 a, b, $\overline{c}$,

$$\mathit{Tp}(a \oplus b, \overline{c}) \Leftrightarrow \mathit{Tp}(a, \overline{c}) \vee \mathit{Tp}(b, \overline{c}).$$

证明。我们等价地证明

$$\neg\mathsf{Tp}(a \oplus b, \overline{c}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{Tp}(a, \overline{c}) \ \& \ \neg\mathsf{Tp}(b, \overline{c}).$$

$\Rightarrow$: 假设 $\neg\mathsf{Tp}(a \oplus b, \overline{c})$。存在一个 $\phi(x, \overline{y})$，使得 $\mathcal{R} \models \phi(a \oplus b, \overline{c})$ 且 $|\{x : \mathcal{R} \models \phi(x, \overline{c})\}| < 2^{\aleph_0}$。注意，根据运算$\oplus$的定义，每个实数 x 都能唯一地写成和 $x_0 \oplus x_1$。因此，我们可以写成$x_0 = (x)_0$ 和 $x_1 = (x)_1$, ，即 $x = (x)_0 \oplus (x)_1$。考虑以下公式:

$\psi_0(x, \overline{c}) := (\exists y)(\phi(y, \overline{c}) \wedge x = (y)_0)$, $\psi_1(x, \overline{c}) := (\exists y)(\phi(y, \overline{c}) \wedge x = (y)_1)$。

由于 $\mathcal{R} \models \phi(a \oplus b, \overline{c})$，可知 $\mathcal{R} \models \psi_0(a, \overline{c})$ 且 $\mathcal{R} \models \psi_1(b, \overline{c})$。令 $X = \{x : \mathcal{R} \models \phi(x, \overline{c})\}$， $X_0 = \{x : \mathcal{R} \models \psi_0(x, \overline{c})\}$，以及 $X_1 = \{x : \mathcal{R} \models \psi_1(x, \overline{c})\}$。只需证明 $|X_0|, |X_1| < 2^{\aleph_0}$。现在利用函数 $f_0(x) = (x)_0$ 和 $f_1(x) = (x)_1$, ，我们立即得到 $f_0[X] = X_0$ 和 $f_1[X] = X_1$。因此 $|X_0| \leq |X|$ 且 $|X_1| \leq |X|$。由于根据假设有 $|X| < 2^{\aleph_0}$，可知 $|X_0|, |X_1| < 2^{\aleph_0}$。

$\Leftarrow$: 假设 $\neg\mathsf{Tp}(a, \overline{c})$ 且 $\neg\mathsf{Tp}(b, \overline{c})$。存在 $\phi(x, \overline{c})$、 $\psi(y, \overline{c})$，使得$\mathcal{R} \models \phi(a, \overline{c})$、$\mathcal{R} \models \psi(b, \overline{c})$，并且若 $X = \{x : \mathcal{R} \models \phi(x, \overline{c})\}$ 且 $Y = \{y : \mathcal{R} \models \psi(y, \overline{c})\}$，则 $|X|, |Y| < 2^{\aleph_0}$。考虑公式

$$\sigma(z, \overline{c}) := (\exists x)(\exists y)(\phi(x, \overline{c}) \wedge \psi(y, \overline{c}) \wedge z = x \oplus y).$$

那么 $\mathcal{R} \models \phi(a, \overline{c})$ 和 $\mathcal{R} \models \psi(b, \overline{c})$ 蕴含 $\mathcal{R} \models \sigma(a \oplus b, \overline{c})$。令 $Z = \{z : \mathcal{R} \models \sigma(z, \overline{c})\}$。只需证明 $|Z| < 2^{\aleph_0}$。现在，由于每个 $z \in Z$ 都是形如 $x \oplus y$ 的形式，其中 $x \in X$ 且 $y \in Y$，因此可得 $|Z| \leq |X \times Y| = |X| \cdot |Y| = \max(|X|, |Y|) < 2^{\aleph_0}$。证明完毕。⊣

定理 3.6 使典型性的概念与 ML 随机性产生了相当大的偏离。例如，我们有以下直接推论。

推论 3.7 对每个实数 a 和每个非典型 b，$\mathrm{Tp}(a \oplus b) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a)$。特别地，$\mathrm{Tp}(a \oplus \emptyset) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a)$。

证明。当 $\neg\mathrm{Tp}(b)$ 时，由 3.6 可得，$\mathrm{Tp}(a \oplus b) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a) \vee \mathrm{Tp}(b) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a)$。 ⊣

推论 3.8 范兰巴尔根定理 3.5 对 $\mathcal{R}$ 中的关系 $\mathrm{Tp}(a, \overline{b})$ 不成立。也就是说，等价关系 $\mathrm{Tp}(a \oplus b) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a)$ & $\mathrm{Tp}(b, a)$ 一般来说不成立。

证明。否则，对于每个典型实数 a，我们都应有 $\mathrm{Tp}(a \oplus \emptyset) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a)$ & $\mathrm{Tp}(\emptyset, a)$，从而 $\mathrm{Tp}(\emptyset, a)$，这显然是错误的。⊣

根据 3.7，如果 a 是典型集合，那么 $a \oplus \emptyset = \{2n \text{ 也是: } n \in a\}$。这与 ML 随机集合形成鲜明对比。仅由偶数（或奇数）组成的集合不可能是 ML 随机的。利用 ML 随机集合的定义很容易证明这一点（更强结论的证明见下文定理 3.9），不过这也可以直接由 van Lambalgen 定理 3.5 得出。因为如果 $a \oplus \emptyset$ 是 ML 随机的，那么 a 就应当是随机的，而且 $\emptyset$还应当是 a-随机的，这显然不成立。

在我看来，一个 ML 随机实数的各个元素乘以 2 或任何常数 k后，就会变成非 ML 随机实数，这一事实非常违背直觉。因此，与这一事实相符且相关的 van Lambalgen 定理也同样违背直觉。另一方面，[12]指出，对于另外两种随机性概念，即施诺尔随机性和可计算随机性，van Lambalgen 定理并不成立。具体而言，如果将“ML 随机”替换为“施诺尔随机”或“可计算随机”，定理 3.5 的方向 $\Rightarrow$便不成立。关于这三个概念之间的关系，已知若 ML、SR、CR 分别表示这些实数的类，那么它们严格嵌套如下：ML CR SR。

Liang Yu ([12])认为 van Lambalgen 定理的正确性如此重要，以至于他相信它应当成为判断上述三种随机性概念中哪一种最终应被接受为“正确”概念的标准。他得出结论，Martin-L¨of 随机性才是正确的，因为只有它满足该定理。他这样解释自己的观点：

> “从哲学角度来说，随机集应当具有这样的性质：无法从它的任何一个部分获得关于另一个部分的信息。具体而言，不应从随机集的‘右部分’获得关于其‘左部分’的信息，反之亦然。换言之，随机集的‘左部分’应当是‘右部分’随机的，反之亦然。”

这个论证的问题在于“部分”一词的含义。它隐含地认为，随机集的任何部分都应当是随机的，而且相对于其他任何部分也都是随机的。但随机集为什么不能包含可定义的（或一般而言非随机的）部分呢？我认为随机集可以包含许多非随机部分。依我对随机性的直觉，如果我们把一个随机集和一个（不相交的）可定义集拼在一起，结果仍会是随机集。一般来说，如果我们把一个“坏”的实体（随机、不规则、不可定义等）与一个“好”的实体（非随机、规则、可定义）拼在一起，“坏”的实体会占上风，并破坏这个复合整体。（ [11], 考察了这一普遍观点，并表明在许多可数结构中，存在着含有大量可定义部分的不可定义集 X （称为完全非免疫集）；具体而言，对于每个可定义集 A，如果$A \cap X$ 是无限的，那么它就包含一个无限可定义子集。）

推论 3.7 有助于回答这样一个问题：典型实数类与 ML 随机、施诺尔随机和可计算随机实数类之间（就包含关系而言）是否可比较。令 TP 表示典型实数类。

定理 3.9 TP 与 ML、SR 和 CR 所有这些类均不可比较。

证明。由于 ML $\subseteq$ CR $\subseteq$ SR，只需证明 ML $\not\subseteq$ TP 且 TP $\not\subseteq$ SR。ML $\not\subseteq$ TP 可由以下事实推出：存在一个 Δ^0_2-可定义的 ML 随机实数，即蔡廷 Ω（见 [1], §8.2）。显然，Ω $\in$ ML\TP。

为证明 TP $\not\subseteq$ SR，取一个实数 $a \in$ TP。由 3.7 可得， $a \oplus \emptyset \in$ TP。只需证明 $a \oplus \emptyset \notin$ SR。我们前面已经看到 $a \oplus \emptyset \notin$ ML，但这还不够，因为 ML $\subseteq$ SR。我们必须证明存在一个施诺尔检验 $(V_n)_n$ 使得 $a \oplus \emptyset \in \bigcap_n V_n$。回想一下，施诺尔检验是满足额外要求的 ML 检验： V_n 的测度必须以可计算的方式趋于零，而不是像 ML 检验那样以半可计算的方式趋于零。也就是说，必须存在一个可计算的严格递增函数 $g : \omega \to \omega$ ，使得对每个 n， $\mu(V_n) = 2^{-g(n)}$ （而不只是 $\mu(V_n) \leq 2^{-n}$）。由于 $a \oplus \emptyset = \{2n : n \in a\}$ 只由偶数组成，我们考虑以下集合序列。（在这个论证中，当然将集合 $\not\subseteq$ 视为其特征函数。）

当然，将集合 $a \subseteq \omega$ 视为其特征函数。对每个 n，令

$$V_n = \{x \in 2^\omega : (\forall i \leq n)(x(2i+1) = a(i))\}.$$

显然 $a \oplus 0 \in \bigcap_n V_n$。因此，只需验证 $(V_n)_n$ 满足施诺尔检验所要求的条件。回忆一下，对于有限字符串 $\sigma \in 2^{<\omega}$，集合 $[\sigma] = \{x \in 2^\omega : \sigma \subset x\}$ 是 2^ω拓扑中的基本开闭集。如果 $dom(\sigma) = \{0, \ldots, n-1\}$，我们就将 σ与字符串$\sigma(0)\sigma(1) \cdots \sigma(n-1)$对应起来，并令 $|\sigma| = n$为 σ的长度。那么 $\mu([\sigma]) = 2^{-n}$。容易验证，对于每个 n，上面的集合 V_n 可写为

$$V_n = \bigcup \{[i_0 0 i_1 0 i_2 \cdots 0 i_n 0] : i_0, \ldots, i_n \in \{0,1\}\}.$$

显然，$(V_n)_n$ 是一个由开集构成的可计算序列，其中每个开集都由有限个基本集生成。具体而言，每个 V_n 都是 2^{n+1} （两两不相交）基本集 $[\sigma_m] = [i_0 0 i_1 0 i_2 \cdots 0 i_n 0]$ 的并，其中对于每个 $m < 2^{n+1}$， $|\sigma_m| = 2n+2$，因此 $\mu([\sigma_m]) = 2^{-(2n+2)}$。因此

$$\mu(V_n) = \Sigma_{m<2^{n+1}} \mu([\sigma_m]) = 2^{n+1} \cdot 2^{-(2n+2)} = 2^{-(n+1)}.$$

因此，序列 $(\mu(V_n))_n$ 以可计算的方式收敛到零，其中$g(n) = n+1$。所以 $(V_n)_n$ 是一个施诺尔检验。 ⊣

3.2 图灵可约性与跳跃运算

下一个定理表明，关系 $\mathrm{Tp}(a, \overline{c})$ 对图灵度封闭，并且对跳跃运算 $a \mapsto a'$ （两个方向上）也封闭。

定理 3.10 对任意实数 a, b, $\overline{c}$ ，以下结论均成立。

(i) $\neg\mathrm{Tp}(a, \overline{c})$ & $b \leq_T a \Rightarrow \neg\mathrm{Tp}(b, \overline{c})$。（等价地：$\mathrm{Tp}(b, \overline{c})$ & $b \leq_T a \Rightarrow \mathrm{Tp}(a, \overline{c})$。）(ii) $\mathrm{Tp}(a, \overline{c})$ & $b \equiv_T a \Rightarrow \mathrm{Tp}(b, \overline{c})$。(iii) $\mathrm{Tp}(a, \overline{c}) \Leftrightarrow \mathrm{Tp}(a', \overline{c})$,

其中 a' 是相对于 a的停机问题，即 $a' = \{e \in \omega : \Phi_e^a(e) \downarrow\}$。

证明。（ii）可由（i）直接推出。

(iii) 由于对于每个 a, $a <_T a'$，由 (i) 可知， $\neg\mathrm{Tp}(a', \overline{c}) \Rightarrow \neg\mathrm{Tp}(a, \overline{c})$。反过来，假设 $\neg\mathrm{Tp}(a, \overline{c})$。我们将证明 $\neg\mathrm{Tp}(a', \overline{c})$。于是存在$\phi(x, \overline{c})$，使得 $\mathcal{R} \models \phi(a, \overline{c})$，并且如果 $X = \{x : \mathcal{R} \models \phi(x, \overline{c})\}$，那么 $|X| < 2^{\aleph_0}$。现在，由于对每个实数 x, $x' = \{e : \Phi_e^x(e) \downarrow\}$，很容易看出，存在一个在 $\mathcal{R}$ 中可定义（不含参数）的函数 f，定义在 $\mathcal{P}(\omega)$ 上，使得

使得 $f(x) = x'$。考虑公式 $\psi(x,\overline{c})$: $=(\exists y)(\phi(y,\overline{c}) \wedge x = f(y))$。由于 $\mathcal{R} \models \phi(a,\overline{c})$ 且 $a' = f(a)$，可得 $\mathcal{R} \models \psi(a',\overline{c})$。此外，如果$Y = \{x: \mathcal{R} \models \psi(x,\overline{c})\}$，显然 $Y = f[X]$。因此 $|Y| < 2^{\aleph_0}$，因为 $|X| < 2^{\aleph_0}$。由此 $\neg\mathrm{Tp}(a',\overline{c})$。

为证明 (i)，假设 $\neg\mathrm{Tp}(a,\overline{c})$ 和 $b \leq_T a$。那么存在一个 $\phi(x,\overline{y})$，使得 $\mathcal{R} \models \phi(a,\overline{c})$ 且 $|\{x: \phi(x,\overline{c})\}| < 2^{\aleph_0}$。现在，关系 $x \leq_T y$ 表示: “x 可由一个以 y 为参数的 Σ_1^0 公式定义”，因此借助一个关于所有 Σ_1^0 谓词的 Σ_2^0 满足类，它可在 $\mathcal{R}$ 中定义。令 $\psi(x,y)$ 表示形式化 $x \leq_T y$ 的公式。那么 $\mathcal{R} \models \psi(b,a)$。考虑公式

$$\sigma(x,\overline{c}) := (\exists y)(\phi(y,\overline{c}) \wedge \psi(x,y)).$$

由于 $\mathcal{R} \models \phi(a,\overline{c})$ 且 $\psi(b,a)$，我们有 $\mathcal{R} \models \sigma(b,\overline{c})$。因此，为了证明 $\neg\mathrm{Tp}(b,\overline{c})$，只需证明 $|\{x: \mathcal{R} \models \sigma(x,\overline{c})\}| < 2^{\aleph_0}$。若 $X = \{y: \mathcal{R} \models \phi(y,\overline{c})\}$，根据假设 $|X| < 2^{\aleph_0}$。此外，对每个实数 y，集合$Y_y = \{x: \psi(x,y)\} = \{x: x \leq_T y\}$ 是可数的。因此

$$|\{x : \mathcal{R} \models \sigma(x,\overline{c})\}| \leq \Sigma_{y\in X}|Y_y| = |X| \cdot \aleph_0 = |X| < 2^{\aleph_0}.$$

⊣

3.3 下锥与一些开放问题

在最后这一部分，我们讨论一些关于实数相对典型性的开放问题。回想一下，关系 $\neg\mathrm{Tp}(x,y)$ 大致表示“x 取决于 y”，但由于传递性（很可能）不成立，它并非预序。另一方面，我们在定理 2.11 中看到，对于每个 a，集合 $\{x: \neg\mathrm{Tp}(x,a)\}$ 都是“较小的”（实际上是一个小基数集，或者在 CH 下是可数集）。这进一步强化了这样的直觉: $\{x: \neg\mathrm{Tp}(x,a)\}$ 中的元素除了相对较少之外，其“复杂性”也不应高于 a。我们将集合 $\{x: \neg\mathrm{Tp}(x,a)\}$ 称为 a 的（下）锥，并记作 $con(a)$，即

$$con(a) = \{x : \neg\mathsf{Tp}(x,a)\}.$$

我们用 TP 表示所有典型实数构成的类。因此，$\mathcal{P}(\omega)\backslash\mathrm{TP} = \{x : \neg\mathrm{Tp}(x)\}$ 是非典型实数构成的类。下面的事实将 $\mathcal{P}(\omega)\backslash\mathrm{TP}$ 与实数的锥联系起来。

事实 3.11 $\mathcal{P}(\omega)\backslash\mathrm{TP} = con(\emptyset) = \bigcap\{con(a) : a \in \mathcal{P}(\omega)\}$。

证明。根据公理 T2，对于所有 x, y, $\neg\mathrm{Tp}(x) \Rightarrow \neg\mathrm{Tp}(x,y)$，因此对于每个 a, $\mathcal{P}(\omega)\backslash\mathrm{TP} \subseteq con(a)$。所以

$$\mathcal{P}(\omega)\backslash\mathbf{TP} \subseteq \bigcap\{con(a) : a \in \mathcal{P}(\omega)\} \subseteq con(\emptyset).$$

另一方面，根据定义， $\neg$Tp(x) 意味着 $\neg$Tp($x,\emptyset$)，因此 $\mathcal{P}(\omega)\backslash$TP $=con(\emptyset)$。由此，上述三个集合相同。$\dashv$

上文关于 a 的复杂度与 con（a）中元素的复杂度之间关系的直觉，引出了以下问题：

问题 3.12： $\neg$Tp(a) & $b \in con(a) \Rightarrow \neg$Tp($b$) 是否成立?

我们已经看到（命题 3.2），公理 T7 推出 Tp(a) & $b \approx a \Rightarrow$ Tp(b)。以下问题似乎也很自然：

问题 3.13：是否存在一个实数 a，使得 Tp(a)，但是

$$(\forall x)(x \in con(a) \ \& \ b \not\approx a \ \Rightarrow \neg Tp(x))?$$

另一个我们在第 3.1 节之前就已遇到、且与问题 3.4 有关的问题，可以用锥来表述。

问题 3.14：如果 Tp(a) 且 Tp(b)，那么 $b \in con(a) \Leftrightarrow a \in con(b)$ 是否成立?

致谢 我谨感谢匿名审稿人提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] R. Downey 和 D. Hirschfeldt，《算法随机性与复杂性》，Springer，2010年。[2] A.S. Kechris 和 Y.N. Moschovakis，关于射影集的两个定理，《以色列数学杂志》12（1972年），391-399。[3] A. Kechris，可数解析集理论，《美国数学会汇刊》202（1975年），259-297。[4] M. van Lambalgen，《随机序列》，博士学位论文，阿姆斯特丹大学，1987年。[5] M. van Lambalgen，随机性的公理化，《符号逻辑杂志》55（1990年），1143-1167。[6] M. van Lambalgen，独立性、随机性与选择公理，《符号逻辑杂志》57（1992年），第4期，1274-1304。

[7] M. van Lambalgen，集合论中的独立结构，载于：《逻辑：从基础到应用》（欧洲逻辑研讨会 '93），W. Hodges、M. Hyland、C. Steinhorn 和 J. Truss（编），牛津（克拉伦登出版社），1996年，第277-311页。[8] B. Russell，《我的哲学发展》，Routledge，修订版，1995年。[9] S.G. Simpson，《二阶算术的子系统》，《数理逻辑展望》，Spinger，1999年。[10] R.M. Solovay，关于 Σ^1_2 实数集的基数，载于：《数学基础》（纪念 Kurt G¨odel 研讨会，俄亥俄州哥伦布，1966年），Springer，纽约，1966年，第58-73页。[11]A. Tzouvaras，完全非免疫集，《数学逻辑季刊》61（2015年），第1-2期，103-116。[12] Liang Yu，van Lambalgen 定理何时失效，《美国数学会会刊》135（2007年），861-864。