Pacific Graphics 2022 N. U
metani、E. Vouga 和 C. Wojtan（客座编辑）

第40卷（2022），第7期

arXiv:2303.11757v1 [cs.CE] 21 Mar 2023

NSTO：用于调制结构生成的神经合成拓扑优化

ShengzeZhong 、arinya Punpongsanon、aisuke Iwai、osuke Sato

日本丰中市大阪大学工程科学研究生院



图1：在低计算成本下优化具有最大刚度且材料消耗受限的结构，所有结果均以彩色呈现。所提出的 *NSTO* 还能通过即时网络前馈生成插值解，例如这七个鼓壳。

摘要

自然界以有限的材料演化出蜂窝等具有优化性能的结构。通过结构拓扑优化与增材制造的协同，可以人工创建这些高效结构。然而，拓扑优化高昂的计算成本导致网格分辨率较低、求解时间较长，并产生无法满足日益增长的个人制造需求和打印能力要求的粗糙边界。因此，我们提出神经合成拓扑优化，利用自监督坐标网络优化结构，从而显著缩短计算时间；该网络将结构材料布局编码为坐标的隐式函数。通过在不同边界条件或约束下执行优化任务，进一步生成连续解空间，使用户能够即时推理出新解。我们通过数值实验和三维打印，展示了该系统在广泛使用场景中的有效性。

CCS概念

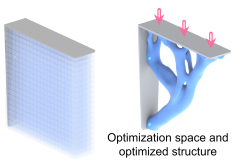
• 应用计算 → 计算机辅助设计；• 计算方法 → 形状分析； 计算机图形学；

1. 引言

自然界的演化创造了各种精巧的结构，例如荷叶和蜂窝，它们以可接受的成本实现了性能最大化。在自然的启迪下，人类创造了宏伟的结构，从马车车轮到圣家堂。随着算法的发展和计算能力的提升，对最优结构设计的研究最终发展为拓扑优化。

结构拓扑优化是一种数学方法，通过合理分配材料布局，在约束条件下使结构性能最大化。

具体而言，优化空间被离散为单元，并通过迭代填充或去除材料来逼近设计对象。尽管拓扑优化在力学和建筑学领域有广泛的工业应



用 [BS03], ，但其高昂的计算成本阻碍了普通用户将其用于个人制造，尤其是缺乏高性能硬件或云服务器的用户。为了实现边界平滑的精细结构，在高性能工作站上进行计算需要数小时乃至数天 [AALS17；LHZ*18]。频繁进行设计参数调整时，这种情况会更加严重。

我们提出了神经合成拓扑优化（NSTO），利用以下物理信息双网络，为普通用户解决这两个问题：***a***：一种基于坐标的网络，用于隐式神经表示的结构拓扑优化，能够以更短的时间计算出精细、平滑且性能具有竞争力的结构；***b***：一种自监督自动解码器网络，可在连续边界条件下进一步生成一系列结构，供用户选择。这两个网络分别称为振荡器网络和调制器网络，因为 NSTO 的工作流程与模拟音乐合成器生成、调制和滤波结构（波形）的过程相似。事实证明，与单一的基于坐标的网络相比，这种网络设计在图像和形状表示方面具有更高的重建质量 [MGB*21]。图1 展示了所提出的系统优化得到的一些结构。

振荡器网络 是一种基于坐标的网络，可在任意分辨率下表示并优化单个结构。它以坐标为输入，并输出材料空间布局，使拼接后的网络输出能够隐式形成一个结构。通过对网络输出的结构进行有限元分析，可获得物理损失函数，并利用其梯度更新网络。在推理时，会进行超分辨率（即逐体素插值），将结构表示重新采样至任意更高分辨率。

调制器网络 是一种自动解码器网络，通过逐层调制振荡器网络的权重来增强整体网络表达能力。只有在不同边界条件下优化多个结构时，才会启用该网络。在此过程中，会同时执行多个优化子任务，并期望网络学习这些子任务之间的插值解。例如，用户可以输入体积约束分别为 30% 和 70% 的子任务，并生成一个具有 50% 体积约束的新颖解。每个子任务都分配有一个潜在编码；这些潜在编码会随机初始化，并与网络权重一同输入和更新。在训练过程中，潜在编码会逐渐聚集到潜在空间中的不同位置，以标记对应的边界条件。最后，用户可以对潜在编码进行插值，从而在相应的解空间中推理出新颖结构。

我们从三个方面论证 NSTO 的合理性与必要性。通常，结构拓扑优化是一个非凸问题，其平坦的解空间会产生一系列近似最优解 [SP98]。这一特性为新算法的发育提供了充足空间，可着眼于性能[WDW16], 制造 [BTX20]或美学 [HLG19]。从技术角度看，高分辨率拓扑优化在结构性能略有提升与计算成本之间存在失衡，这表明多分辨率结构表示是一种潜在的解决方案 [ZSCM17]。从实践角度看，除了高水平的性能外，用户也关注可负担的计算成本和良好的结构外观。

我们将 NSTO 与物理方法和数据驱动方法进行比较，结果表明，NSTO 在高分辨率结构上取得了具有竞争力的优化结果，且计算时间大幅缩短。作为一种物理信息系统，它通过自监督进行训练，无需数据集生成成本，也不会产生数据驱动伪影。除了将 NSTO 与基准方法进行比较外，我们还展示了一系列应用，包括其用法和数值结果。最后，我们对优化结构进行了 3D打印，以进一步验证其可行性。

主要贡献如下：

- 为提高拓扑优化效率，振荡器网络以隐式神经形式对结构进行优化和超分辨率重建，将计算时间从数小时或数分钟缩短至数秒。
- 为提升解空间生成性能，调制器网络增强了整体表达能力，使得能够通过前馈潜在代码生成新的解空间。

2. 相关工作

本节概述与我们的方法相关的研究，包括拓扑优化的发展与计算效率，以及本文提出的拓扑优化框架所依托的神经场技术。

2.1. 拓扑优化

拓扑优化通过重新分配材料的空间布局来提升结构性能。其传统应用包括但不限于刚度增强[BPS00],固有频率降低 [Ped 00],和热传导[GBS06], ；如今，拓扑优化的应用范围不断拓展，涵盖交互式玩具、家具、乐器等产品的个性化制造。

拓扑优化有多种主流算法。显式方法，例如带惩罚项的固体各向同性材料法（SIMP） [Ben89]和双向渐进结构优化法（BESO） [HX07] 将优化空间离散为结构化网格。这些方法算法简单、收敛速度快，但由于边界模糊，会导致制造难题。基于水平集的隐式方法 [YX04]将结构参数化为等值线，以实现平滑边界，但需要重置水平集方程以确保持续更新，这会增加计算负担。此外，拓扑优化还存在不稳定性，例如棋盘格模式、网格依赖性和局部极小值。然而，这些特性反而拓宽了算法设计空间，使人们能够选择性能相近的近优结构，例如采用纹理驱动的拓扑优化进行个性化设计[HLG19], 以及仿骨填充优化 [WAWS18]。

高分辨率下的大规模拓扑优化一直是一个具有挑战性的问题 [MLR*21]。 [AALS17] 通过并行使用超级计算机，在几天内实现了十亿体素分辨率的机翼拓扑优化。 [WDW16] 开发了一种基于代数多重网格法的高性能GPU求解器，在确保收敛的同时提高求解效率，从而在

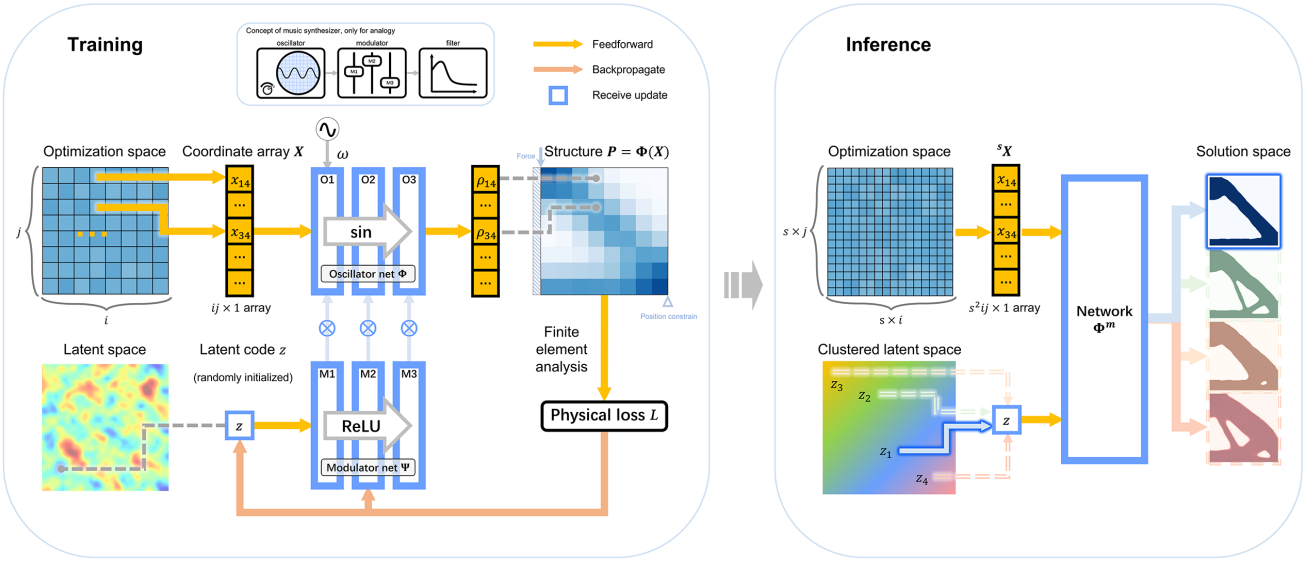


图 2： *NSTO*系统示意图。对于单个结构优化，振荡器网络从优化空间导入坐标数组$\boldsymbol{X}$，并输出结构$\boldsymbol{P}$；随后进行有限元分析以计算损失 L。对于解空间生成，调制器网络会被激活。多个子任务同时进行优化，其对应的潜在编码 z 会被随机初始化、输入，并与网络参数一起优化。在推理时，用户可以通过采用更密集的网格来对解进行超分辨率处理，并通过前馈插值后的潜在编码生成新解。上方图标用于类比说明。

使用个人计算机只需几分钟。 [LHZ*18] 提出了一种窄带拓扑优化方法，将计算集中在生成的薄结构区域，而不是对整个优化空间进行同等求解。他们使用工作站，在113.19小时内成功优化了一个十亿体素分辨率的鸟喙结构。

2.2. 神经场

神经计算为提高计算效率提供了强大的工具。一个主流趋势是训练端到端的数据驱动网络，以实现非迭代式拓扑优化 [WXP*21；WTTL20]然而，数据驱动网络的泛化能力和可解释性仍受到质疑，其优化质量也高度依赖于训练数据。

神经场近期的发展 [XTS*21] 为可视计算、信号处理和物理仿真等领域带来了新的机遇。神经场，亦称基于坐标的神经网络，是对信号进行神经隐式重参数化的一种形式。网络以离散采样位置为输入，并输出信号采样值（例如图像RGB值和音频波形）。其历史可追溯至2007年的组合模式生成网络（CPPN） [Sta07]；自2019年以来，经过一系列富有成果的研究与发展，如今它已能够表示高保真信号 [TSM*20；SMB*20；MLL*21]。在 [SMB*20；TSM*20], 的后续研究中，傅里叶域神经场展现出更强的高频表达能力，同时也实现了对网络输出进行频率调节 [DPB21]。

关于神经表示的拓扑优化， [HSG19]率先提出，拓扑的神经重参数化可提升优化质量。

CS21 [；ZLZ*21] 进一步通过经典任务验证了多种网络模型。[ZLCT21]提出了逆密度空间目标，该目标利用逐步预测的结构来引导网络拟合。

近期关于基于隐式神经表示的结构拓扑优化的研究总体仍处于早期阶段，通常尚未解决优化质量和计算成本等实际问题。首先，在优化质量方面，先前的网络难以优化高频结构细节[DT20；CS21], 而这对于承受分布外力的结构尤为重要。其次，优化收敛效果不理想：对于一项经典基准任务 [ZLZ*21]（梅塞施密特-伯尔科-布洛姆梁），需要数百次迭代，而传统显式方法只需数十次迭代 [HX07；FS20]。尽管一些研究已展现出令人振奋的进展，例如网格无关有限元分析求解器（但仍需在计算时间上作出权衡） [ZLCT21], 但由于缺乏对复杂任务下优化性能的验证与比较，其整体效果仍受到质疑。

总之，拓扑优化为高质量的结构设计提供了强大的工具。然而，其巨大的计算开销阻碍了它在普通用户中的普及。为实现计算时间与结构质量之间的整体平衡，我们提出了一种神经拓扑优化框架，可高效生成近乎最优的结构并显著缩短耗时，同时还能通过执行多目标优化和潜在空间插值，即时生成新颖的解决方案。我们进行了全面比较并开展了多种任务，以支持上述观点。

3. 神经合成拓扑优化

NSTO由三个部分组成：

• 第 3.1：采用有限元分析（有限元分析）计算结构性能的物理求解器。 • 第 3.2：以隐式神经形式表示结构、实现超分辨率的振荡器网络。 • 第 3.3：增强网络表达能力、用于多结构生成的调制器网络。

基于这三个部分的系统概述简要展示于公式 1 和图 2中。首先，振荡器网络 Φ 输入 $n\times 3$ 坐标数组 X 以生成初始结构 P。其次，结构 L 的物理损失函数P 由有限元分析求解器计算。第三，损失 L 的梯度通过反向传播 $\mathrm{BP}(L)$ 以更新网络 Φ。经过上述步骤的多次迭代后，用户可以通过输入 ${}^{s}\boldsymbol{P}$ 一个由s倍更密集网格的坐标数组，推断出超分辨率结构 ${}_{s}\boldsymbol{X}$，这与图像超分辨率方法 [CLW21]。

$$\begin{aligned} Training: &\begin{cases} \boldsymbol{P}=\Phi(\boldsymbol{X}) \\ L=\mathrm{FEA}(\boldsymbol{P}) \\ \Phi \Leftarrow \mathrm{BP}(L) \end{cases} \\ Inference: &\ {}^{s}\boldsymbol{P}=\Phi({}^{s}\boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{1}$$

调制器网络被激活，用于在不同边界条件或约束（例如体积约束）下优化多个结构，以插值求得解。双网络（即振荡器和调制器） Φ^m 输入一个潜在编码z 和一个坐标数组$\boldsymbol{X}$，并生成相应的结构$\boldsymbol{P}_i=\Phi^m(\boldsymbol{X},\ z_i)$，其中$i$ 是子任务的索引。重复执行方程1 中的步骤，以计算损失并更新网络和潜在编码。

3.1. 物理求解器

本节将建立物理损失函数L =有限元分析$(\boldsymbol{P})$及其梯度，然后介绍有限元分析所需的参数。

结构$\boldsymbol{P}$根据带惩罚的固体各向同性材料（SIMP）方法×表示为一个$i\times j$矩阵$\boldsymbol{P}_{ij}=\rho_{ij}^{\tau}$。[Ben89]。其中，每个单元的密度 $\rho\in[0,1]$ 表示材料在该位置是否存在。为了更好地理解这一点，读者可以将其想象为一幅二值图像$\boldsymbol{P}$，其二值像素值 ρ 描述了形状。惩罚因子 τ 用于促进材料密度收敛至二值，以便清楚判断是否应在该位置分配材料 [SP98]，，因为诸如 0.5 这样的中间密度在制造中实际上毫无意义。

柔度C在本研究中被选为优化对象。结构柔顺度最小化是一个热门课题，旨在设计轻质且坚固的结构，使其在相同体积和载荷下变形最小。如公式2所示，C 是所有有限元柔顺度乘以$\boldsymbol{P}$ 后的加权总和，由结构变形$\boldsymbol{U}$ 和单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}_e$构成。这里施加了体积约束，其中$V(\boldsymbol{P})=\sum\boldsymbol{P}$为结构体积，$V_0$ 为优化空间完全填充时的体积， δ 为体积分数。

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{P}}{\operatorname{argmin}} C(\boldsymbol{P})=\sum\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{U} \\ &s.t.\quad V(\boldsymbol{P})/V_0\le\delta \end{aligned} \tag{2}$$

损失函数L采用增广拉格朗日方法构造 [FG00]，，该方法将受体积约束的柔顺度最小化问题转化为无约束形式，如公式3所示。 λ 为拉格朗日乘子，其更新方式为 $\lambda_{k+1}=\lambda_k+2\sigma_k(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)^2$，； σ_k 为惩罚因子，随迭代k呈指数增长，其底数经验性地设为1.1。为避免收敛振荡，采用均方误差体积约束 $(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)^2$。因此，拉格朗日乘子项和惩罚项分别为二次项和四次项。

$$\underset{\boldsymbol{P}}{\operatorname{argmin}} L(\boldsymbol{P})=C(\boldsymbol{P})+\lambda(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)^2+\sigma(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)^4 \tag{3}$$

损失梯度 $\partial L/\partial\rho$ 相对于每个单元密度的值如公式 4所示，其中体积梯度 $dV/d\rho=1$。在第 3.2 节中，我们将基于链式法则使用该损失梯度进行网络反向传播。

$$\frac{\partial L}{\partial\rho}=-\tau\rho^{\tau-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{U}+2\lambda(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)+4\sigma(\frac{V(\boldsymbol{P})}{V_0}-\delta)^3 \tag{4}$$

在确定损失函数及其梯度后，接下来我们将按照标准有限元分析流程，介绍计算损失所需的物理参数。

首先，我们组装结构刚度矩阵 K。单元刚度矩阵 $\mathrm{K}^e=\int \mathrm{v}_e \mathrm{B}^T\mathrm{cBdv}_e$ 由应变矩阵 B、材料本构模型 c 和单元体积 v_e计算得到。在 NSTO 中，我们分别在二维和三维情况下使用矩形单元和六面体单元，每个单元都有其特定的 B、c 和 v_e。因此，K 是通过将各单元的 K_e 添加到空白 K 矩阵 [Rao17] 中对应的、具有相同自由度索引的位置，从而由 K_e 组装而成。

其次，我们通过求解大规模线性方程$\boldsymbol{U}$ （即逐元素节点位移）来获得结构变形，方程为5，其中$\boldsymbol{F}$ 为外力。在柔顺度最小化拓扑优化中，这是计算开销最大的步骤，在最新进展和我们的方法中，通常都占总计算时间的 75% 至 95%。我们采用基于图形处理器的代数多重网格法（AMGX） [NAC*15] 进行加速；在我们的实验设置中，它比解析求解器快 1 至 2 个数量级（第4.1节）。具体而言，预条件器设置为采用雅可比光滑器的多层 V 层次结构。为确保各种任务稳定收敛，收敛容差和最大迭代次数分别设为 1e − 8 和 100。尽管 AMGX 的设置还可以进一步优化，但我们强调，NSTO 关注的是隐式神经表示框架带来的效率提升，而非线性方程求解器带来的提升；NSTO 的组合式实现与先进数值求解器之间并不矛盾。

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F} \tag{5}$$

总之，本文建立并计算了用于训练网络的物理损失函数 L 及其梯度，采用的是加速代数多重网格求解器。

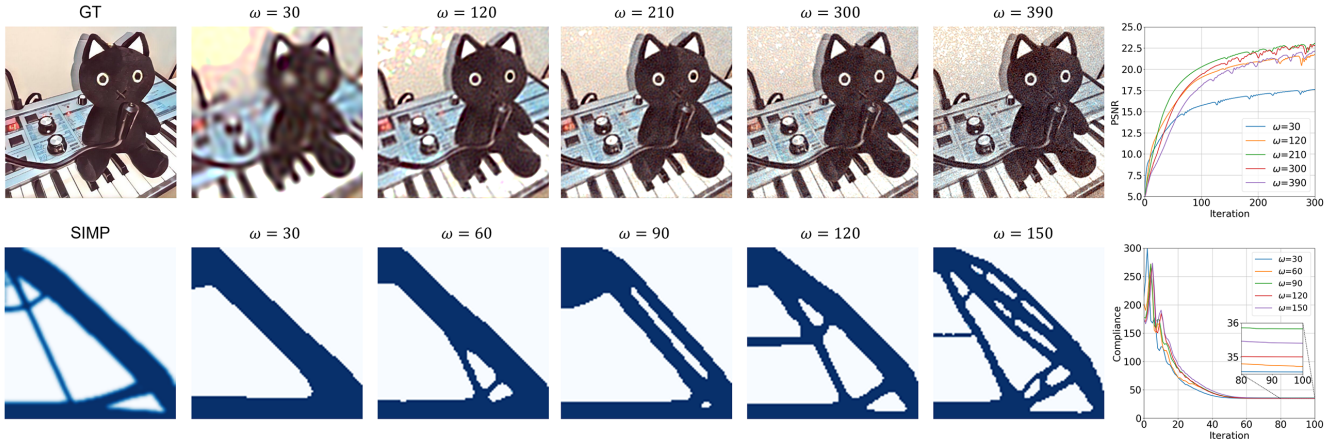


图3： 网络频率调节机制对图像拟合和拓扑优化的影响。随着超参数 ω增大，图像中的高频特征随之增加，结构也呈现相同趋势。使用峰值信噪比和柔顺度衡量解的质量。

3.2. 振荡器网络

本节重点介绍振荡器网络，该网络通过坐标对结构材料布局进行重新参数化，表示为 $\boldsymbol{P} = \Phi(\boldsymbol{X})$。随后将介绍结构超分辨率和频率调节机制。

振荡器网络采用 SIREN 网络 [SMB*20]，，即正弦激活多层感知机 [GD98]。研究已证明，该网络能够表示复杂信号 [MST*20; ZLY*21]，且其高频表达能力显著强于 ReLU 激活网络。公式 6 展示了网络逐层的输出 $\phi_i(x)$，其中 w、b 和 i 分别表示神经元的权重、偏置和层索引。网络的最后一层将输出标准化至材料密度 ρ的 $[0,1]$ 区间，例如 $\mathrm{Atan}(x) = \pi^{-1}$ 反正切 αx $+0.5$。 α是一个超参数，用于调节网络输出的敏感区间；根据经验，将其设为 $\alpha = 0.1$ 可实现更平滑的收敛。

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{w}_i\phi_{i-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i),\ \boldsymbol{w}_1 = \omega\phi_0 \tag{6}$$

因此，振荡器网络以坐标 x 为输入，并输出材料密度 ρ，从而建立一种中间模拟关系，如方程 7所示。实际应用中，会采用全批次训练 $\boldsymbol{P} = \Phi(\boldsymbol{X})$ 以实现更快的梯度下降。所有采样坐标 x在三维情况下会组合成一个 $(i \times j \times k,3)$ 数组，其中 i、j、k分别是优化空间的轴向分辨率。网络及其输出结构每个训练轮次更新一次。

$$\rho = \Phi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Atan}[\boldsymbol{w}_i(\phi_{i-1} \circ \cdots \circ \phi_0)(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}_i] \tag{7}$$

网络参数的损失函数梯度通过链式法则计算为 $\partial L/\partial \boldsymbol{w} = (\partial L/\partial \rho) \times (\partial \rho/\partial \boldsymbol{w})$。 $\partial L/\partial \boldsymbol{w}$ 使用 Autograd 计算 [PGC*17]。 $\partial L/\partial \rho$ 则通过手动计算，以避免使用代数多重网格法迭代求解 $\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$ 所导致的显著梯度计算开销。

在包括 Adam 在内的可行优化器中 [KB15],L-BFGS-B [ZBLN97]，和弹性反向传播（Rprop）[RB93], 我们选择了 Rprop，因为它在大多数情况下收敛更快任务中采用该方法，尽管其收敛稳定性低于 Adam。为平衡收敛速度与质量，我们还设置了惩罚因子 $\tau \in [1.5,3]$，如公式所示4。

在推理阶段，用户可以将优化空间离散为一个 s 倍更密集的网格 ${}_s\boldsymbol{X}$，以获得 s 倍超分辨率结构 ${}^s\boldsymbol{P}$，如图 2所示。可以把这想象成用更小的像素尺寸对图像进行离散化，从而使其边界变得平滑。

$${}^s\boldsymbol{P} = \Phi({}^s\boldsymbol{X}) \tag{8}$$

傅里叶特征网络还支持结构频率调节机制，该机制使结构频率与网络超参数 ω （在第一层中初始化）$\boldsymbol{w}_1 = \omega\phi_0$呈正相关。该机制能够生成通常需要高分辨率计算才能获得的高频结构细节，从而增强对局部结构失效的鲁棒性。用户也可以降低结构频率，以提高可制造性。在实践中，最大 ω值受到限制，以避免在超分辨率过程中生成无效结构，因为频率过高会导致信号混叠，并降低结构最优性。作为类比，我们通过图 3 所示的图像拟合任务展示这一机制：网络以像素坐标为输入，输出 RGB值，并通过均方误差训练，使其拟合真实图像。我们观察到，随着3的增大，拟合图像从欠拟合转变为过拟合。 ω

总之，振荡器网络通过将单元密度 ρ 与其坐标 x相关联，以隐式方式表示结构材料布局，从而实现结构超分辨率和频率调节。它与显式拓扑优化方法还有几处不同。首先，初始单元密度随机分布在 $\rho = 0.5$附近，因此可能比传统方法中均匀初始化的密度收敛到更多局部极小值（即优化后的结构）。其次，传统方法中的密度滤波器 [博01]被省去，因为隐式神经表示具有类似的作用，这一点将从神经切线核的角度进行讨论 [DJ21]。

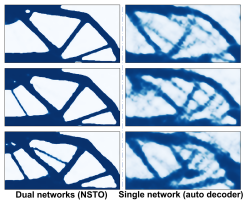
3.3. 调制器网络

本节聚焦于调制器网络，该网络用于提升变化的边界条件下多结构优化的性能，从而能够在边界条件区间内生成新颖结构。

除了优化效率之外，结构生成也是我们希望解决的第二个研究对象。在实际应用中，用户经常反复调整设计参数，以获得所需的结构，而每次调整都需要进行完整的优化。因此，我们希望网络能够针对标注了相应潜在编码z的不同边界条件，同时优化多个解，从而通过对潜在空间（即潜在编码区间）进行插值，立即生成新的解。

为此，我们同时对具有不同边界条件的结构进行优化，以生成插值解。不同的边界条件或约束会反映在损失函数L中，如公式3所示。这里，我们引入两项任务。首先，在损失函数L中指定不同的体积分数 δ，以实现变化的体积约束。其次，通过调整公式5 中的外力$\boldsymbol{F}$，使损失函数L中的柔顺度C 发生变化，从而实现变化的外力。例如，将具有潜在编码z_1, z_2和体积分数$\delta_1 = 0.3, \delta_2 = 0.7$的两个结构组成一个“数据集”，并交替进行优化。用户可以通过前馈传递插值潜在编码z_{1+z_2} [2]，获得体积为$vv_0 = 0.5$的结构。简而言之，多结构生成任务旨在最小化一个变化的损失函数，以适应不同的边界条件。——

我们尝试使用单个振荡器网络作为自解码器 [PFS*19]来完成该任务。自解码器是一个多层感知机，其输入为拼接后的坐标和潜在编码 (x,z)，输出密度 ρ，即 $\rho = \Phi(x,z)$。训练期间，随机初始化的潜在编码会与网络参数一同更新。



，因此无需像典型的变分自编码器那样进行编码 [KW14]。在推理阶段，用户可以前向传播插值潜在编码，以生成新的结构。自解码器设计简单且训练高效。然而，我们发现，单个自解码器难以胜任多结构生成任务，主要原因是网络表达能力不足。

调制器网络因此用于提升网络性能。它是一个由 ReLU 激活的多层感知机 Ψ，其规模与振荡器相同。它采用与自解码器相同的策略：潜在编码以正态分布初始化，并像「layer0」一样随网络参数更新，从而省去编码器。潜在编码用于调制振荡器网络，以增强网络的表达能力 [MGB*21]，而非自行生成结构。公式9 展示了层 $\psi_i(z)$和网络 $\Psi(z)$的输出，其中z 是潜在编码，$\boldsymbol{w}'$ 和$\boldsymbol{b}'$ 分别是该层的权重和偏置。

$$\begin{aligned}\psi_i(z) &= \mathrm{ReLU}(\boldsymbol{w}_i'\psi_{i-1}z + \boldsymbol{b}_i') \\ \Psi(z) &= \boldsymbol{w}_i'(\psi_{i-1}\circ\cdots\circ\psi_0)(z) + \boldsymbol{b}_i'\end{aligned} \tag{9}$$

算法 1神经合成拓扑优化 1：**输入：** $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{bc}$ # 坐标数组和边界条件 况

2: 输出：sP # s 倍超分辨率结构 3: 4: # 物理求解器 5: function FEA(X, bc) 6: F δ**, = bc 7: B, c,v**$_e$ **=ElemParas() # 单元相关 8: K**$^e = \int$**v**$_e$ **B**^{T}**cBdv**$_e$**9: K =组装(K**$_e$**) 10: U =代数多重网格(K, F) 11: C =** $\sum$**PU**^{T}**K**$_e$**U 12: L = C +** λ**(**$^{V(P)}$**V**$_0$ $-\delta$**)**^{2} $+\sigma$**(**$^{V(P)}$**V**$_0$ $-\delta$**)**^{4}**13: return L** $\frac{\partial L}{\partial \rho}$ **14: end function 15: 16: # 单结构优化 17: procedure TRAINOSCNET(X, bc)** 18 ___ ___ **Φ :** 19 **OscNet.initialize() # OscNet : optimizer.initialize() 20: for 训练轮次 in range(e**$_{max}$**) do 21: P =** Φ**(X) 22: L = 有限元分析(P, bc) 23:** $\Phi \Leftarrow$ **BP(L) 24: optimizer.step() 25: end for 26: return sP =** Φ**(**^{s}**X) 27: end procedure 28: 29: # 多结构优化，主算法 30: procedure TRAINMODOSCNET(X, bc)** 31 **Φ :** 32 **OscNet.initialize() # OscNet : ModNet.initialize() # 调制型 OscNet** Φ^m 33 **: optimizer.initialize() 34: for 训练轮次 in range(e**$_{max}$**) do 35: for i in enumerate(子任务) do 36: P**$_i$ **=** Φ^m**(X, z**$_i$**) 37: L = 有限元分析 (P**$_i$**, bc**$_i$**) 38:** $\Phi^m \Leftarrow$**BP(L) 39: optimizer.step() 40: end for 41: end for 42: return sP =** Φ^m**(**^{s}**X, z) 43: end procedure**

它通过将振荡器网络各层的输出与振荡器对应的输出逐元素相乘，增强了振荡器网络的表达能力；后者在图 2 中用符号 $\otimes$ 标记。作为比较，单个自解码器若输入拼接后的潜在编码和坐标 $\boldsymbol{P} = \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{z})$，则只会使该层的输出发生相移，即 $\phi_i(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{w}_{i,\ x}\phi_{i-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}_{i,\ z}\phi_{i-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i)$，因此其表达能力较弱。

双网络 Φ^m 分别以坐标x 和潜在编码z 为输入，并输出 ρ 对应z标记结构的材料密度，如公式10所示。通过训练过程中两个网络的特征图——

网络前馈的作用，我们观察到两个网络通过协作学习最优结构。在推理时，用户可以执行简单的网络前馈$\boldsymbol{P} = \Phi^m(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{z})$来推断结构，也可以对潜在编码进行插值以生成新的设计。

$$\begin{aligned}\phi_i^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) &= \psi_i(\boldsymbol{z})\sin(\boldsymbol{w}_i\phi_{i-1}^m\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i)\\ \rho = \Phi^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) &= \mathrm{Atan}[\psi_i(\boldsymbol{z})(\phi_{i-1}\circ\cdots\circ\phi_0)(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}_i]\end{aligned} \tag{10}$$

总之，引入调制器网络以增强网络的表达能力。因此，双网络（振荡器和调制器）能够在不同边界条件下执行结构生成任务，使用户能够通过对优化子任务的潜在编码进行插值和前馈，生成中间解。NSTO 的伪代码见算法 1，其中，函数有限元分析概述了物理求解器（第 3.1 节），而以下两个过程分别概述了振荡器（第 3.2 节）和双网络（第 3.3 节）的训练步骤。

4. 实验

NSTO i 从三个方面进行了实验介绍和验证 方面：

• 第 4.1节：简要介绍实验设置。 • 第 4.2节：展示 NSTO 的数值性能，包括收敛率、优化质量（柔顺度）和耗时，并与基准算法进行比较。 • 第 4.3节：展示多种应用并提供说明。通过 3D 打印结构进行可制造性验证。

4.1. 实验设置

本节介绍实验环境、网络超参数和训练方法。

NSTO 实验在台式电脑（Intel Core i9-10900KF、Nvidia RTX2080S 8GB、Ubuntu 16.04、Python 3.6）上运行，其中图形处理器决定网络规模和有限元分析分辨率。

网络超参数设置如下。为平衡显存消耗与性能，网络宽度通常设为 512，学习率固定为 1e−4。用于结构频率调节的超参数 ω 通常设为 60，并可根据分辨率和优化对象进行调整。我们通过经验将 ω 设为小于最大轴向分辨率的两倍，以避免频率过高造成的混叠。潜在编码维度设为 1D 和 2D，以便直观推断潜在空间；对于更具挑战性的任务，可以进一步提高该维度。

全批次训练通过将优化空间中所有离散化坐标组装成一个数组，并将其整体输入网络来进行，使网络输出结构的完整单元密度值。每个训练轮次执行一次前向传播、有限元分析、反向传播和网络更新。通常，优化会在数十个训练轮次后收敛，具体取决于载荷条件。

4.2. 性能

本节从两个方面介绍 NSTO 的数值性能：***a:*** 其收敛性和结构性能与基准方法的比较；***b:*** 复杂结构和边界条件任务的计算时间。

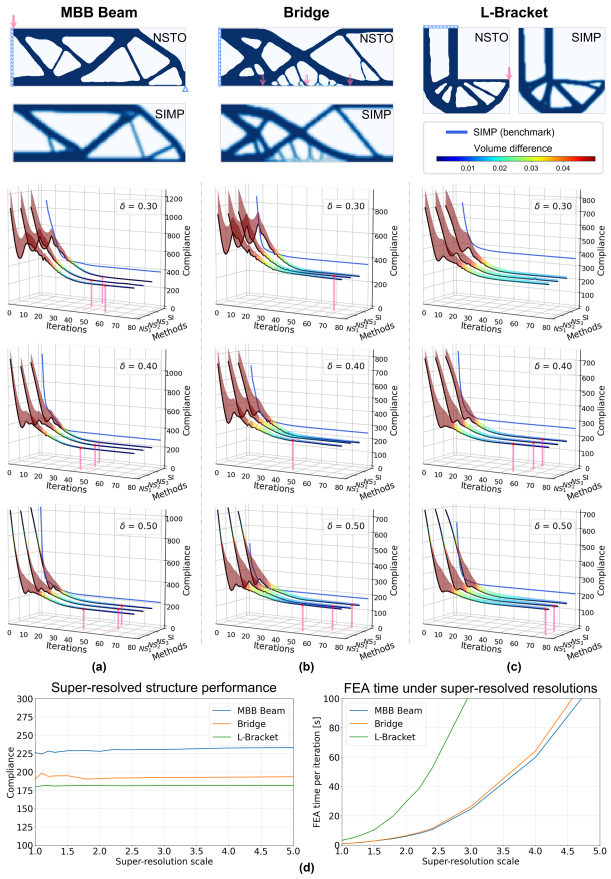


图4： *NSTO* 与 *SIMP* 在 *(a) MBB* 梁、*(b)* 桥梁和 *(c) L*形支架优化中的收敛性和性能，收敛曲线上方展示了优化结构。红色箭头表示外力，蓝色标记表示固定位置约束。*(d)* 若干超分辨率 *NSTO* 结果的性能，以及相同分辨率下普通有限元分析的迭代时间。

首先，我们比较了 NSTO 与基准 SIMP 的收敛情况和优化后的结构性能（柔顺度）[FS20]。带惩罚的固体各向同性材料（SIMP）是一种结构拓扑优化算法，因实现简单、收敛速度快，并能够优化非线性几何形状和材料，而广泛应用于学术界和工业界。它通常也被用作算法基准。为确保公平，我们采用了相同的代数多重网格有限元分析求解器 [BOS22]，以获得稳定的解，并在相同环境下进行计算；同时，通过调整密度滤波半径，为 SIMP 设置了最优配置。请注意，NSTO 与 SIMP 的初始化不同，仅仅是约束优化算法公式推导所导致的结果，而不是决定结构最优性的因素。具体而言，SIMP 的初始化策略源于其最优性准则方法施加的严格体积约束，而 NSTO 并不需要这种约束。

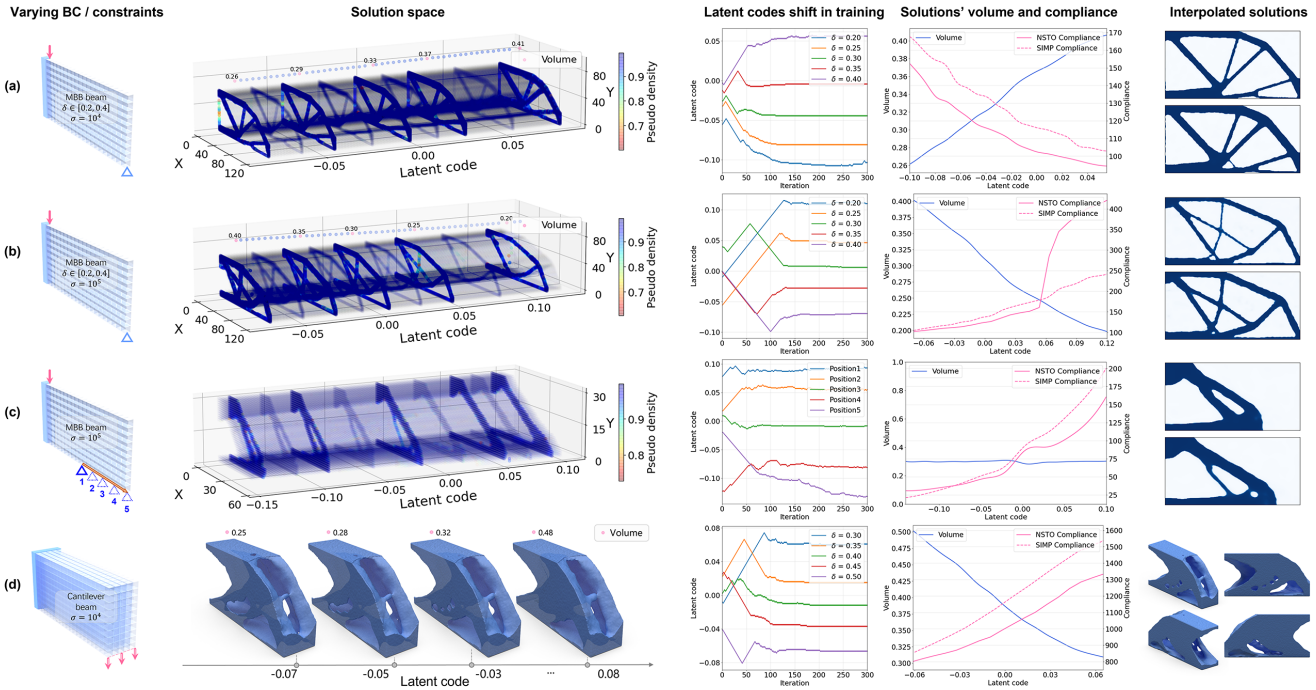


图5： 生成的解空间：*(a、b)* 不同惩罚因子 σ 下体积受约束的 *MBB* 梁；*(c)* 支撑位置变化的 *MBB* 梁；以及 *(d)* 体积受约束的悬臂梁。原始子任务以实线表示，插值解以半透明方式显示。上方的点表示体积，解空间中的颜色表示伪密度。为便于观察，边界条件或约束以三维形式展示。

表1： *80* 次迭代时 *NSTO* 和 *SIMP* 的基准解。*C* 为柔顺度，*V* 和 δ 分别为优化后的体积分数和受约束体积分数。

	MBB 梁		桥梁		L形支架	
方法	C↓	V↓ (δ)	C↓	V↓ (δ)	C↓	V↓ (δ)
NSTO (ω=60)	292.88	0.31 (0.30)	287.30	0.31 (0.30)	**223.05**	0.32 (0.30)
NSTO (ω=120)	**287.18**	0.31 (0.30)	279.65	0.31 (0.30)	223.39	0.31 (0.30)
NSTO (ω=180)	297.33	0.30 (0.30)	**267.09**	0.31 (0.30)	225.82	0.31 (0.30)
SIMP	373.89	0.30 (0.30)	343.37	0.30 (0.30)	352.10	0.30 (0.30)
NSTO (ω=60)	224.44	0.41 (0.40)	207.95	0.41 (0.40)	180.08	0.42 (0.40)
NSTO (ω=120)	226.36	0.41 (0.40)	208.18	0.41 (0.40)	**179.46**	0.42 (0.40)
NSTO (ω=180)	**221.80**	0.41 (0.40)	**190.48**	0.41 (0.40)	181.35	0.42 (0.40)
SIMP	271.00	0.40 (0.40)	241.05	0.40 (0.40)	249.39	0.40 (0.40)
NSTO (ω=60)	188.46	0.51 (0.50)	164.23	0.51 (0.50)	155.69	0.51 (0.50)
NSTO (ω=120)	186.69	0.51 (0.50)	150.46	0.51 (0.50)	155.58	0.51 (0.50)
NSTO (ω=180)	**184.79**	0.51 (0.50)	**149.47**	0.51 (0.50)	**155.06**	0.52 (0.50)
SIMP	213.80	0.50 (0.50)	174.21	0.50 (0.50)	198.46	0.50 (0.50)

NSTO 的收敛情况在三个结构拓扑优化基准场景中进行了测试 [VBO*17]：梅塞施密特-伯尔科-布洛姆（MBB）梁、桥梁和 L形支架的优化。这些场景的边界条件涵盖了集中外力、分布外力以及不规则优化空间等情况，如图4上半部分所示。具体而言，MBB 梁的两个底端固定，并承受一个作用于顶部中央的集中力。桥梁结构的两端同样固定，但其下部承受均布力表面。L形支架在一个 L 形优化空间中进行了优化，其顶部固定，右侧受到弯曲力。按照惯例，前两项任务采用对称约束以提高计算效率，因此仅优化了这些结构的一半。在实验中，MBB 梁和桥梁以 120×40 分辨率进行了优化，而 L形支架以 100×100 分辨率进行了优化。详细的边界条件设置遵循基准测试 [VBO*17]。

不同体积分数 δ 和频率超参数 ω 下的收敛结果列于图4中部。黑线和彩虹色条带分别表示当前迭代的柔顺度和体积损失。蓝线表示基准 SIMP方法的柔顺度。红点和粉色线表示 NSTO 的收敛迭代，其判据设定为：与前一次迭代相比，柔顺度差异为 0。3%，且与体积分数相比，体积差异为 1%。结果表明，在不同的 ω值下，NSTO 均以稳定的速度收敛至最优解。

对这些结构的性能进行了全面比较。如图4 和表1所示，在所有基准案例中，NSTO 的柔顺度均低于 SIMP。NSTO 解的结构边界清晰，也减少了网格后处理工作。至于体积与体积分数之间的差异，NSTO 的误差为 1%，这主要是由于增广拉格朗日方法的体积约束较为宽松。此外， $1\times$ 分辨率

结构比较方面，我们对这些解进行了超分辨率处理，以观察其形状和性能变化。结构的分辨率提高了 10 倍，但没有出现伪影，如图4上部所示。随后，我们对超分辨率结构进行了有限元分析，并观察到在测试范围内其柔顺度保持稳定（$1-5\times$ 轴向超分辨率），这验证了隐式神经表示结构优化的可行性。与结构超分辨率所需的微不足道的时间（即一次简单的网络前馈）相比，在相同分辨率下进行有限元分析耗时要长得多，如图4右下部分所示。上述结果验证了 NSTO 的首要目标，即提高普通用户进行结构拓扑优化的计算效率。我们再次强调，NSTO 致力于构建整体结构优化框架，而非其所依赖的数值有限元分析求解器。

其次，我们在三个解空间生成任务中考察了双网络：体积约束变化的 MBB 梁任务 MBB_v、支撑位置变化的 MBB 梁任务 MBB_s以及体积约束变化的三维悬臂梁任务 CB_v，如图5所示。所有任务的潜在编码均设为 1D，以便直接观察与潜在编码 $P = \Phi^m(\boldsymbol{X}, z)$ 相对应的解空间 $z: \mathbb{R}^1$。

MBB_v 任务采用变化的体积约束，生成具有中间体积的 MBB 梁，如图 5(a, b) 所示。为此，网络同时训练了五个优化子任务，其体积约束均匀分布，如 $\delta \in [0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40]$。

请注意，损失函数 L受变化约束 δ的影响；对于其他一维操控（例如改变外力），这些约束也是必要的。在训练过程中，每个子任务的潜在编码逐渐按照体积约束 δ映射到一维潜在空间中的相应位置，并与 δ呈现近似线性关系。推理阶段，我们沿 z 轴均匀采样，并计算相应输出结构的体积和柔顺度。大多数插值解的表现优于 SIMP，这与图4中的观察结果一致。我们还注意到，当对体积约束施加过大的惩罚因子 σ（方程 3）时，最优性会出现权衡，表现为图 5 (b) 中柔顺度上升，因此应避免这种情况。

MBB_s 任务采用五个等间距的固定位置约束，以生成在中间位置获得支撑的 MBB 梁，如图 5 (c) 所示。约束从底部中间移动到优化空间的右端，标记为位置 $[1, 2, 3, 4, 5]$。通过将结构变形数组 $\boldsymbol{U}$ 中对应于新固定位置的值设为 0，实现了约束的移动。与体积约束不同，固定位置约束通过柔顺度C间接影响损失。在推理阶段，生成了平滑演变的结构，展现了 NSTO 在处理更复杂约束时的生成能力。

CB_v 变体积悬臂梁生成任务旨在验证双网络在更具挑战性的三维任务中的能力，如图5（d）所示。在五个子任务的体积约束区间内 $\delta \in [0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50]$，其柔顺度低于 SIMP，这验证了解空间生成在一维潜在编码场景中的有效性。

表2： 分辨率和计算时间。$*$ 表示解空间生成任务。

物体	分辨率	V/V_0	C/C_0	迭代次数	有限元分析（秒）	总计（秒）
架子	$62\times15\times62$	0.26	1.85	71	160.37	160.55
Desk	$39\times27\times30$	0.14	22.71	166	199.92	200.33
扭转	$20\times20\times40$	0.36	0.23	241	144.54	145.20
不倒翁	$18\times15\times17$	0.07	1.00	85	15.32	15.51
阿特拉斯	$32\times32\times60$	0.34	0.44	54	135.71	135.86
吉他	240×177	0.76	1.04	311	56.41	57.12
$^*\text{MBB}_v$	120×60	[0.20, 0.40]	/	300×5	139.66	146.27
$^*\text{MBB}_s$	60×30	0.30	/	300×5	61.45	68.09
$^*\text{CB}_v$	$40\times20\times10$	[0.30, 0.50]	/	300×5	444.97	495.57
*鼓	$180\times1\times60$	0.30	/	71×8	358.67	364.98

NSTO 和 SIMP 在达摩任务中的计算时间

算法	NSTO	^{1}SIMP	^{2}SIMP	^{3}SIMP
分辨率	$18\times15\times17$	$18\times15\times17$	$36\times30\times35$	$55\times46\times53$
总计（秒）	15.51	16.03	120.37	475.56

表2介绍了 NSTO 在各种具有挑战性的任务中的总体计算时间。在这些任务中，达摩不倒翁填充优化耗时最短，仅为 15 秒；复杂的阿特拉斯雕塑耗时 135。86 秒；鼓壳解空间生成耗时 364。98 秒，共生成了 7 个鼓壳。作为参考，最新进展研究 [WDW16]开发了一种高性能 GPU 求解器，优化小猫耗时 263。33 秒，优化兔子耗时 400。36 秒，优化海王星雕塑耗时 709。16 秒。达摩任务体现了 NSTO 和 SIMP 的计算时间。在 85 次迭代内，两种方法在相同有限元分析分辨率下耗时相近。然而，SIMP 的计算时间在更高分辨率下呈立方增长（即在 $1\times$，$2\times$，$3\times$ 超分辨率下），可能会超过显存容量。

在 NSTO 中，整体刚度矩阵 K 的组装和结构变形的求解占用了大部分计算时间，而其他部分的开销可以忽略不计。例如，对于一个 240×80 分辨率的 MBB 梁优化，网络的前向传播和反向传播平均耗时分别为 0.0645 秒和 0.0766 秒。刚度矩阵组装耗时 0.486 秒，线弹性求解耗时 0.160 秒（使用 AMGX [NAC*15]），约占总计算时间的 82.04%。在不同分辨率下也观察到类似的耗时比例，约为 80% 至 90%。

总之，本文展示并分析了收敛性、优化性能和生成能力。与基准方法 SIMP 相比，NSTO 展现出较高的优化质量。调制器和振荡器网络还展示了在直接和间接变化的边界条件或约束下生成结构的能力。

4.3. 应用

本节展示了 NSTO 在个人制造中的多种应用，包括***a:*** 打印填充结构和电吉他琴身的二维优化任务；***b:*** 书架、桌子、扭转结构、达摩不倒翁„和阿特拉斯雕塑的三维优化任务；***c:*** 爵士鼓鼓壳的多结构优化。

*3D*打印填充结构旨在节省材料，同时确保结构强度。它也是个人制造中最实用的结构拓扑

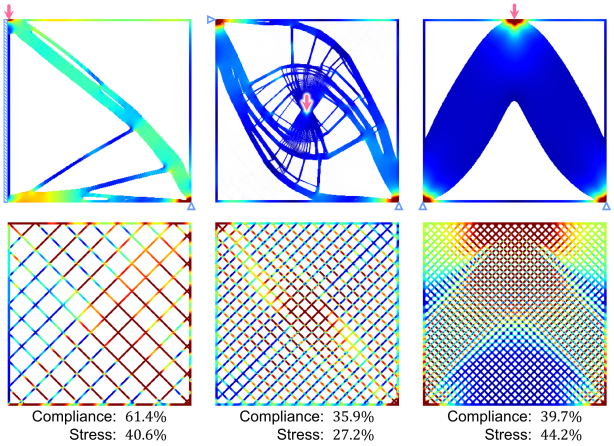


图 6： 不同填充率和边界条件下，拓扑优化结构与网格填充结构的比较。红色和蓝色分别表示高应力和低应力。



图 7： 在平面分布载荷作用下进行优化的电吉他琴身，呈现蛛网状特征。

优化应用之一。本文比较了三对拓扑优化填充结构与规则网格填充结构在不同外力作用下的表现，如图所示6。优化结构与网格填充结构的体积分数（即材料消耗量）相同：22。3%、37。7%和57。9%。与均匀网格填充结构相比，优化后的填充结构柔顺度分别降低了61。4%、35。9%和39。7%，平均应力分别降低了40。6%、27。2%和44。2%，因此能够设计出更稳健的承载结构。

吉他、长笛 [UPSW16], 金属琴 [BLT*15], 以及各种 3 D打印乐器，因其独特的外观和声学特性而由艺术家和业余爱好者制作。在此，我们对承受平面分布载荷的电吉他琴身进行了优化，如图 7所示。我们将二维优化结果向上拉伸，并与原始琴身进行布尔相交，以实现独特的设计。该方案确保了结构刚度，并展现出蛛网状的个性化特征，可能比重复性特征更坚固、更具吸引力。

我们评估了 NSTO 在无形状约束和复杂形状约束任务中的表现，涉及两类应用：书架、

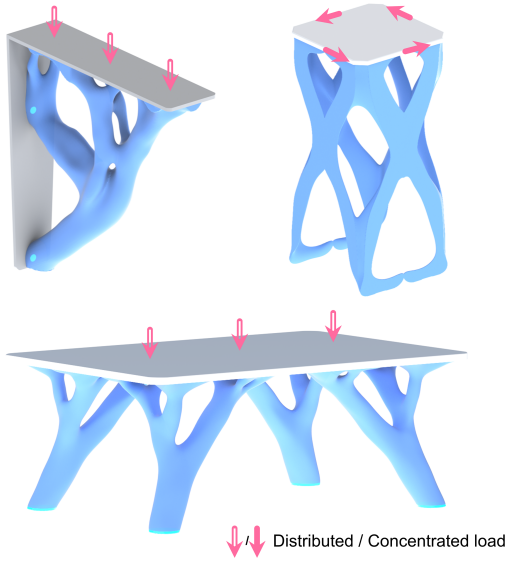


图 8： 架子、书桌和扭转结构的生成结果。红色箭头表示外部载荷的位置和类型，浅蓝色区域表示固定位置。

桌子和扭转任务，以及不倒翁娃娃和阿特拉斯雕塑任务。

书架、书桌和扭转结构依次进行了优化，如图 8 所示。这些结构处于分布力和扭矩这一具有代表性的边界条件下，且未施加形状约束。优化完成后，所有结构均使用行进立方体算法进行网格化 [LC87]。

架子在两个点处固定，并承受均布力。与集中载荷情况相比，分布载荷下的优化对象倾向于生成更多高频分支，这表明优化算法具有良好的收敛性和高频表达能力。该解显示，架子的粗壮结构延伸至固定端，而纤细结构则根植于受载表面，这验证了 NSTO 能在三维情况下生成足够丰富的高频结构细节。

书桌表面受到分布法向力作用，并由四个角支撑。为简化计算，通过约束两个对称平面上的水平自由度（竖直轴指向高度方向）来施加机械对称约束，从而对书桌的四分之一部分进行优化。所得解呈现出自然的树枝状图案，从约束位置向分布载荷处扩散。

扭转结构底部固定，并承受四个沿圆周方向施加的外力，这些外力充当扭矩。通过形状调节，将结构的四分之一部分对称映射至其余三个部分，从而形成更美观的方案。得益于 NSTO 提供的表示自由度，结构特征之间的映射还可以采用多种方式，而不局限于对称形状调节，例如多尺度结

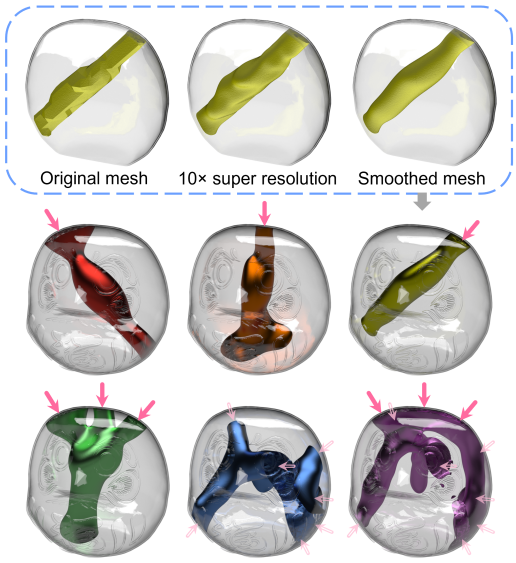


图 9： 不倒翁娃娃的优化过程，以及在各种载荷条件下得到的最终解。

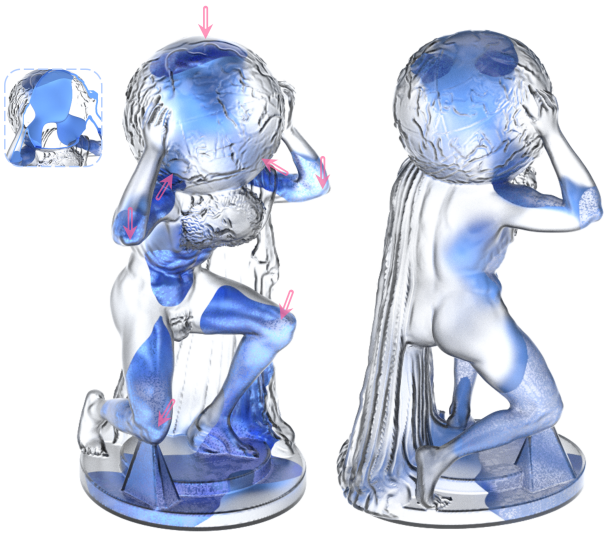


图 10： 优化后的阿特拉斯雕塑。附有剖面图，以便查看雕塑内部。

构优化 [ZSCM17] 或个性化拓扑纹理[HLG19]。简而言之，上述方案直观地展示了 NSTO 在无形状约束任务中的能力。

优化带有形状约束的结构时，首先将边界结构体素化为结构化网格。然后，将结构外部的材料密度值设为 0。为便于 3D 打印，保留一层薄壳。

不倒翁娃娃在几组外部



图 11： 鼓壳的解空间，其中直径高度比是变化的边界条件。上方图像展示了环形结构与平面结构之间的映射，下方图像展示了带有潜在编码的解。

力的作用下进行了优化，包括顶部的集中力以及作用于整个身体的离散力，如图9所示。NSTO 沿集中力的方向生成了直观的结构，而基于离散力的结构则复杂得多。图9 上半部分展示了经过优化的结构，其轴向超分辨率为 10 倍（即体素超分辨率为 1000 倍）。随后，有选择地应用了表面拉普拉斯平滑。值得注意的是，达摩不倒翁的优化仅耗时约 15 秒。

阿特拉斯雕塑 被选用于复杂形状约束优化，如图 10所示。我们在其凸起的球体和关节处施加了多向外力。我们观察到，支撑结构从接触位置生长出来，以增强局部刚度，这证明 NSTO 对复杂形状约束情形有效。

最后，如图所示，我们利用双网络在体积约束变化的条件下对鼓壳进行优化。11 鼓壳是负责承载载荷的环形薄壁结构。在承受径向张力和轴向压力的同时，鼓壳还需要轻量化，以便在振动过程中保持更强的共振，从而产生更长的延音，这也是鼓手所青睐的。为此，我们在体积约束、径向张力和轴向压力条件下对鼓壳进行优化，并将直径高度比设为动态边界条件，以便为不同尺寸的鼓找到最优设计方案。这些方案将用作鼓壳的轻质外层，以提高结构刚度，同时不影响内部空气振动。



图 12：使用熔融沉积成型 *3D* 打印机（*Ultimaker 3*）制作的 *3D* 打印拓扑优化结构。

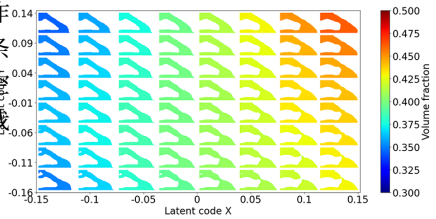
鼓壳的直径高度比从小军鼓的 5.5/14 到落地通鼓的 16/16 不等。因此，我们使用一维潜在编码，并通过 8 个子任务对方案进行优化，这些子任务的直径高度比在 $[0.3, 0.7]$ 之间均匀分布。为更有效地利用优化空间，我们将鼓壳映射为一块 $180 \times 1 \times 60$ 平板。底部约束均匀地向上移动，以调整直径高度比。在推理阶段，用户可以沿一维潜在空间滑动，并根据每个鼓的直径高度比自由选择所需方案。

使用熔融沉积成型打印机打印拓扑优化结构，以验证其可打印性，如图 12。

4.4. 局限性与未来工作

结构离散化的选择与细化会影响优化结构的超分辨率结果。具体而言，在单一分辨率下优化结构时，网络经过大量训练后可能会对当前解过拟合，从而产生与分辨率相关的伪影，例如由矩形有限元导致的锯齿状结构边界。一种可能的解决方案是使用随机数计算结构性能，例如采用蒙特卡洛积分，但这样会失去网格单元带来的求解效率 [LHZ*18]。

我们未来的工作将探索在多个边界条件或约束下优化解空间的策略。目前，我们正设



在不同体积约束和支撑位置下实现了二维解空间。该解空间呈现出约束的辐射状分布模式，因此需要更高效的轨迹计在高维情形下施加不同边界条件或约束的策略与方法。

网络频率特征与不同分辨率下结构性能之间的关系，可以作为未来另一项研究的主题。在 NSTO 中，网络频率超参数 ω 与结构细节呈正相关，从而导致柔顺度发生变化。从傅里叶空间的角度观察并优化结构性能，是一个值得探索的方向。

5. 结论

此前，大多数结构拓扑优化框架都是用于纯数值研究或工业应用，普通用户的需求与算法发展之间存在脱节。因此，我们提出了 NSTO 框架，它能够以较低的计算成本提供便于制造的最优结构，并支持新颖的结构生成。

NSTO 从分辨率方面显著提高了优化效率，以确保最优性能。它还通过自监督，仅在多个子任务的物理约束下拓展解空间。复杂边界条件下的优化结果被映射到潜在空间，因此用户无需重复拓扑优化过程，便可推导出新解。融入创造力后，用户有望优化一系列用于装饰或交互的功能结构。我们通过全面研究算法性能、与基准方法进行比较，以及考察具有复杂几何约束和边界条件的广泛任务，验证了上述主张。

致谢

我们感谢匿名审稿人提出的意见。本研究得到了 JSPS KAKENHI 项目资助（编号：JP19K20321 和 JP20H05958）、JST PRESTO 项目资助（编号：JP- MJPR19J2）以及 JST ACT-X 项目资助（编号：JPMJAX20AK）。

参考文献

[AALS17] AAGE, NIELS, ANDREASSEN, ERIK, LAZAROV, BOYAN S., and SIGMUND, OLE. “十亿体素计算形态发生：用于结构设计”。《自然》550.7674（2017），84–86。ISSN：14764687。DOI：10.1038/nature23911 2。

[Ben89] BENDSØE, M. P.“将最优形状设计视为材料分布问题”。*Struct Optim*1.4 (1989), 193–202。ISSN: 09344373。DOI: 10.1007/BF01650949 2，4。

[Ben15] BHARAJ, GAURAV, LEVIN, DAVID IW, TOMPKIN, JAMES，等。“金属琴接触声的计算设计”。ACM Transactions on Graphics (TOG) 34.6 (2015), 1–13 10.[BOS22] BELL, NATHAN, OLSON, LUKE N, and SCHRODER, JACOB。“PyAMG：Python 中的代数多重网格求解器”。《开源软件期刊》7.72 (2022), 4142 7.[Bou01] BOURDIN, BLAISE。“拓扑优化中的滤波器”。《工程数值方法国际期刊》50.9 (2001), 2143–2158 5.[BPS00] BUHL, T., PEDERSEN, C. B.W., and SIGMUND, O。“采用拓扑优化进行几何非线性结构的刚度设计”。Struct Multidiscip Optim 19.2 (2000), 93–104。ISSN: 1615147X。DOI: 10.1007/s001580050089 2.[BS03] BENDSOE, MARTIN PHILIP and SIGMUND, OLE。《拓扑优化：理论、方法与应用》。施普林格科学与商业媒体，2003 2.[BTX20] BI, MINGHAO, TRAN, PHUONG, and XIE, YI MIN。“几何自支撑约束下三维连续体结构的拓扑优化”。Addit Manuf 36 (2020), 101422。ISSN: 22148604。DOI: 10.1016/j.addma.2020.101422 2.[CLW21] CHEN, YINBO, LIU, SIFEI, and WANG, XIAOLONG。“利用局部隐式图像函数学习连续图像表示”。Proc IEEE/CVF Conf Comput Vis Pattern Recognit. 2021, 8624–8634。ISBN: 9781665445092。DOI: 10.1109/cvpr46437.2021.00852。arXiv: 2012.09161 4.[CS21] CHANDRASEKHAR, AADITYA and S URESH, KRISHNAN。“利用神经网络进行多材料拓扑优化”。计算机辅助设计 136.3 (2021), 1135–1149。ISSN: 00104485。DOI: 10.1016/j.cad.2021.103017 3.[DJ21] DUPUIS, BENJAMIN and JACOT, ARTHUR。“基于深度神经网络的拓扑优化：空间不变性与神经切线核”。arXiv 预印本 arXiv210605710 (2021)。arXiv: 2106.05710。URL: http://arxiv.org/abs/2106.05710 5.[DPB21] DOOSTI, NIKAN, PANETTA, JULIAN, and BABAEI, VAHID。“通过神经设计表示的频率调节进行拓扑优化”。Symp Comput Fabr. 2021, 1–9。ISBN: 9781450390903。DOI: 10.1145/3485114.3485124 3.[DT20]DENG, HAO and TO, ALBERT C。“基于深度表示学习（DRL）的柔顺度与应力约束设计拓扑优化”。Comput Mech 66.2 (2020), 449–469。ISSN: 14320924。DOI: 10.1007/s00466-020-01859-5 3.[FG00] FORTIN, MICHEL and GLOWINSKI, ROLAND。《增广拉格朗日方法：边值问题数值求解的应用》。Elsevier, 2000 4.[FS20] FERRARI, FEDERICO and SIGMUND, OLE。“新一代用于柔度拓扑优化的99行 Matlab 代码及其三维扩展”。《结构与多学科优化》62.4 (2020), 2211–2228 3, 7.[GBS06] GERSBORG-HANSEN, A., BENDSØE, M. P., and SIGMUND, O。“采用有限体积法求解热传导问题的拓扑优化”。Struct Multidiscip Optim 31.4 (2006), 251–259。ISSN: 1615147X。DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3 2.[GD98] GARDNER, MATT W and DORLING, SR。“人工神经网络（多层感知机）——大气科学应用综述”。《大气环境》32.14-15 (1998), 2627–2636 5。

[HLG19] HU、JINGQIAO、LI、MING 和 GAO、SHUMING。“局部控制下的纹理引导生成式结构设计”。计算机辅助设计 108（2019年），1–11。ISSN：00104485。DOI：10.1016/j.cad. 2018.10.002 2, 11.[HSG19] HOYER、STEPHAN、SOHL-DICKSTEIN、JASCHA 和 GREY-DANUS、SAM。“神经重参数化提升结构优化效果”。arXiv 预印本 arXiv190904240（2019年）。arXiv：1909.04240。网址：http://arxiv.org/abs/1909.04240 3.[HX07] HUANG、X. 和 XIE、Y. M.。“双向渐进结构优化方法的收敛网格无关解”。有限元分析与设计 43.14（2007年），1039–1049。ISSN：0168874X。DOI：10.1016/j.finel.2007.06.006 2, 3.[KB15] KINGMA、DIEDERIK P. 和 BA、JIMMY LEI。“Adam：一种随机优化方法”。第三届国际学习表征会议（ICLR 2015）会议论文集（2015年）。arXiv：1412.6980 5.[KW14] KINGMA、DIEDERIK P. 和 WELLING、MAX。“自动编码变分贝叶斯”。第二届国际学习表征会议（ICLR 2014）会议论文集（2014年）。arXiv：1312.6114 6.[LC87] LORENSEN、WILLIAM E. 和 CLINE、HARVEY E.。“移动立方体：一种高分辨率三维表面构建算法”。第14届计算机图形学与交互技术年度会议 SIGGRAPH 论文集 21.4（1987年），163–169。DOI：10.1145/37401.37422 10.[LHZ*18] LIU、HAIXIANG、HU、YUANMING、ZHU、BO 等。“稀疏网格上的窄带拓扑优化”。SIGGRAPH Asia 2018 技术论文集 37.6（2018年），1–14。ISSN：15577368。DOI：10.1145/3272127.3275012 2, 3, 12.[MGB*21] MEHTA、ISHIT、GHARBI、MICHAËL、BARNES、CONNELLY 等。“用于可泛化局部函数表示的调制周期激活函数”。arXiv 预印本 arXiv210403960（2021年）。arXiv：2104.03960。网址：http://arxiv.org/abs/2104.03960 2, 6.[MLL*21] MARTEL、JULIEN N.P.、LINDELL、DAVID B.、LIN、CONNOR Z. 等。“Acorn：用于神经场景表示的自适应坐标网络”。ACM 图形学汇刊 40.4（2021年）。ISSN：15577368。DOI：10.1145/3450626.3459785。arXiv：2105.02788 3.[MLR*21] MUKHERJEE、SOUGATA、LU、DONGCHENG、RAGHAVAN、BALAJI 等。“加速大规模拓扑优化：最新进展与挑战”。计算机方法工程档案（2021年），1–23 2.[MST*20] MILDENHALL、BEN、SRINIVASAN、PRATUL P.、TANCIK、MATTHEW 等。“NeRF：将场景表示为用于视图合成的神经辐射场”。计算机科学讲义（包括人工智能讲义子系列、生物信息学讲义）。第12346卷 LNCS。施普林格。2020年，405–421。ISBN：9783030584511。DOI：10 . 1007 / 978-3-030-58452-8 24。arXiv：2003.08934 5.[NAC*15] NAUMOV、M.、ARSAEV、M.、CASTONGUAY、P. 等。“AMGX：用于图形处理器加速代数多重网格和预条件迭代方法的库”。SIAM 科学计算期刊 37.5（2015年），S602–S626。ISSN：10957200。DOI：10.1137/140980260 4, 9.[Ped00] PEDERSEN、N. L.。“使用拓扑优化最大化特征值”。结构与多学科优化 20.1（2000年），2–11。ISSN：1615147X。DOI：10.1007/s001580050130 2.[PFS*19] PARK、JEONG JOON、FLORENCE、PETER、STRAUB、JULIAN 等。“DeepSDF：学习用于形状表示的连续符号距离函数”。IEEE 计算机学会计算机视觉与模式识别会议论文集。第2019年6月卷。2019年，165–174。ISBN：9781728132938。DOI：10.1109/CVPR.2019.00025。arXiv：1901.05103 6.[PGC*17] PASZKE、A、GROSS、S、CHINTALA、S 等。“PyTorch 中的自动微分”。（2017年）。网址：https://openreview.net/forum?id=BJJsrmfCZ 5.[Rao17] RAO、SINGIRESU S.《工程中的有限元法》。巴特沃斯-海涅曼，2017年，1–763。ISBN：9780128117682。DOI：10.1115/1.3167179 4.[RB93] RIEDMILLER、MARTIN 和 BRAUN、HEINRICH。“加速反向传播学习的直接自适应方法：RPROP算法”。1993年 IEEE 国际神经网络会议。电气电子工程师学会。1993年，586–591。ISBN：0780312007。DOI：10.1109/icnn.1993.298623 5。

[SMB*20] SITZMANN, VINCENT, MARTEL, JULIEN N. P., BERGMAN, ALEXANDER W.等。“用周期激活函数的隐式神经表示”。神经信息处理系统进展 2020年12月 (2020)。ISSN：10495258。arXiv：2006.096613, 5。

[SP98] SIGMUND, O.“拓扑优化中的数值不稳定性：一种关于处理棋盘格、网格依赖性和局部极小值的程序综述”。结构优化 16.1 (1998), 68–75。ISSN：09344373。DOI：10.1007/BF01214002 2, 4。

[Sta07] 斯坦利，肯尼斯·O . “组合式模式生成网络 - 作品：一种对发育的新颖抽象”。遗传程序与进化机器 8.2 (2007年), 131–162. ISSN: 13892576. DOI: 10.1007/s10710-007-9028-8 3.

[TSM*20] TANCIK, MATTHEW, SRINIVASAN, PRATUL P., MILDEN- HALL, BEN, 等。“傅里叶特征使网络能够学习低维域中的高频函数”。《神经信息处理系统进展》2020年12月 (2020)。ISSN：10495258。arXiv：2006.10739 3.[UPSW16] UMETANI, NOBUYUKI, PANOTOPOULOU, ATHINA, SCHMIDT, RYAN, 和 WHITING, EMILY。“Printone：用于自由形态打印管乐器设计的交互式共振模拟”。《ACM图形学汇刊》(TOG) 35.6 (2016), 1–14 10.[VBO*17] VALDEZ, S IVVAN, BOTELLO, SALVADOR, OCHOA, MIGUEL A, 等。“二维拓扑优化基准：平面应力问题中最小柔顺度和最小体积的结果”。《工程计算方法档案》24.4 (2017), 803–839 8.[WAWS18] WU, JUN, AAGE, NIELS, WESTERMANN, RUDIGER, 和 SIGMUND, OLE。“面向增材制造的填充优化——迈向类骨多孔结构”。《电气电子工程师学会可视计算与图形学汇刊》24.2 (2018), 1127–1140。ISSN：10772626。DOI：10 . 1109 / TVCG.2017.2655523。arXiv：1608.04366 2.[WDW16] WU, JUN, DICK, CHRISTIAN, 和 WESTERMANN, RUDIGER。“高分辨率拓扑优化系统”。《电气电子工程师学会可视计算与图形学汇刊》22.3 (2016), 1195–1208。ISSN：10772626。DOI：10. 1109/TVCG.2015.2502588 2, 9.[WTTL20] WANG, C., TAN, X. P., TOR, S. B., 和 LIM, C. S。“增材制造中的机器学习：最新进展与展望”。《增材制造》36 (2020), 101538。ISSN：22148604。DOI：10.1016/j. addma.2020.101538 3.[WXP*21] WANG, DALEI, XIANG, CHENG, PAN, YUE, 等。“具有可感知泛化能力的拓扑优化深度卷积神经网络”。《工程优化》(2021)。ISSN：10290273。DOI：10. 1080/0305215X.2021.1902998 3.[XTS*21] XIE, YIHENG, TAKIKAWA, TOWAKI, SAITO, SHUNSUKE, 等。“可视计算及其他领域中的神经场”。arXiv 预印本 arXiv211111426 (2021)。arXiv：2111 . 11426。URL：http : / / arxiv.org/abs/2111.11426 3.[YX04] YULIN, MEI 和 XIAOMING, WANG。“用于结构拓扑优化的水平集方法及其应用”。《先进工程软件》35.7 (2004), 415–441。ISSN：09659978。DOI：10 . 1016 / j . advengsoft.2004.06.004 2.[ZBLN97] ZHU, CIYOU, BYRD, RICHARD H, LU, PEIHUANG, 和 NOCEDAL, JORGE。“算法778：L-BFGS-B：用于大规模有界约束优化的Fortran子程序”。《ACM数学软件汇刊》(TOMS) 23.4 (1997), 550–560 5.[ZLCT21] ZEHNDER, JONAS, LI, YUE, COROS, STELIAN, 和 THOMASZEWSKI, BERNHARD。“NTopo：使用隐式神经表示的无网格拓扑优化”。arXiv 预印本 arXiv210210782 (2021)。arXiv：2102 . 10782。URL：http : //arxiv.org/abs/2102.10782 3.[ZLY*21] ZHANG, JIAKAI, LIU, XINHANG, YE, XINYI, 等。“使用分层神经表示的可编辑自由视点视频”。《ACM图形学汇刊》40.4 (2021), 1–18。ISSN：15577368。DOI：10.1145/3450626. 3459756。arXiv：2104.14786 5。

[ZLZ*21] ZHANG, ZEYU, LI, YU, ZHOU, WEIEN, 等。“TONR：一种将神经网络与拓扑优化相结合的新方法探索”。《计算方法与应用力学工程》386 (2021), 114083。ISSN：00457825。DOI：10.1016/j.cma.2021.114083 3.[ZSCM17] ZHU, BO, SKOURAS, MÉLINA, CHEN, DESAI, 和 MATUSIK, WOJCIECH。“具有微结构的双尺度拓扑优化”。《ACM图形学汇刊》36.5 (2017), 1。ISSN：15577368。DOI：10.1145/ 3095815。arXiv：1706.03189 2, 11。