arXiv:2303.11768v3 [math.GN] 7 Aug 2023

# 休雷维奇性质与维托里斯超空间

Christopher Caruvana

Abstract. 本文利用$k$-覆盖以及 Ko˘cinac 和 Scheepers 引入的可分组性概念，通过给定空间本身上的一个选择原理，刻画给定空间的紧子集所构成的 Vietoris 空间何时具有休雷维奇性质。我们指出，同一技巧还能确立另一个等价条件，用以判断一个空间的每个有限次幂是否都具有休雷维奇性质。最后，我们给出一些涉及连续函数空间的刻画，并回答 Ko˘cinac 提出的问题。

## 1. 引言

休雷维奇性质由 [11] 引入，休雷维奇曾猜想它刻画了具有 $\sigma$-紧性的性质。尽管正如 [27], 所述，这一猜想是错误的，但对休雷维奇性质的研究仍在继续。在 [15], ，Ko˘cinac 和 Scheepers 引入了可分组性概念，借助其他类型的选取原理来刻画休雷维奇性质，这些选取原理与门格尔性质相呼应。这一研究方向的一个重要组成部分，是 [23]确立的休雷维奇性质的博弈论刻画。此外，[15], 还确立了一个选择原理，它等价于一个空间的每个有限次幂都具有休雷维奇性质。这进一步丰富了在每个有限次幂中都具有某些性质的空间的刻画；关于涉及传统选取原理的其他同类刻画，参见 [9, 12, 22]。

近年来，人们得到了涉及超空间的休雷维奇性质刻画。对于某些空间类 $X$，关于 $C_p(X)$ 上某些性质的刻画已见于 [25] 和 [21]。依据 [16], 中 $\pi$-网络的推广， [5]中给出了对 $X$ 的某些超空间上的休雷维奇性质的刻画，其表述涉及 $X$ 的 $\pi$-网络的进一步广义概念。其他刻画见于 [7] 和 [26]。关于可分组性的广义形式，参见 [6]。

本文继续这项研究，利用可分组性的概念，以 $X$ 上的选择覆盖性质来刻画某些超空间上的休雷维奇性质，并扩展了 [3]中建立的一系列关系。第一个结果给出了一个一般判据，保证超空间上的休雷维奇性质与空间 $X$上的某种选择性质等价。由此，我们用 $X$ 的 $k$-覆盖和可分组性，刻画了 $X$ 的紧子集的 Vietoris 空间上的休雷维奇性质。

涉及 $X$ 有限次幂的原始刻画是通过 $\omega$-覆盖完成的，这类覆盖覆盖了 $X$的有限子集。由于 $X$ 的有限次幂显然覆盖有限子集，因此有限次幂的覆盖性质与 $\omega$-覆盖之间存在联系也就不足为奇了。然而，单凭 $X$ 的有限次幂所提供的信息，比有限子集更多。在此，我们建立了一个类似的等价关系，涉及 $\omega$-覆盖以及经过适当拓扑化的 $X$ 有限子集集。

最后，我们将证明，上文讨论的选择性性质也可以由空间 $C_p(X)$ 或 $C_k(X)$ 具有 Reznichenko 性质且具有可数（强）扇紧性来刻画。

*Date*: 2023年8月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：54D20；次要分类号：54B20, 54C35。*Key words and phrases.* 休雷维奇选择原理、维托里斯拓扑、 $\omega$-覆盖、 $k$-覆盖、可分组覆盖、Reznichenko性质、可数扇紧性、 $C_p$理论、 $C_k$理论。

## 2. Preliminaries

全文中，空间均指拓扑空间，定义和记号沿用 [8]。对于空间 $X$，我们用 $[X]^{<\omega}$ 表示 $X$ 的所有非空有限子集构成的集合，并用 $K(X)$ 表示 $X$ 的所有非空紧子集构成的集合。为避免平凡情形，在适当情况下，我们假设空间 $X$ 是无限的或非紧的。我们还假设所有空间都是豪斯多夫的。

通常，对于集合 $A$ 和 $B$，我们使用记号 $A^B$ 表示所有函数 $B \to A$组成的集合。例如， $X^\omega$ 是 $X$ 中所有序列组成的集合。处理$\omega$的有限次幂 $\omega^{n+1}$ （其中 $n \in \omega$）时，对于 $j \in n+1 = \{0, 1, \dots, n\}$，我们可能用记号$m_j$代替 $m(j)$。符号 $\langle\rangle$ 表示空序列。我们还用 $X^{<\omega}$ 表示由 $X$ 构成的有限序列的集合 $\bigcup_{n\in\omega} X^n$ ；如果基集 $X$ 用若干符号表示，我们会用$(X)^{<\omega}$ 代替$X^{<\omega}$ 以避免混淆。

拓扑算子是指定义在拓扑空间类上的函数，它会生成一组与输入的拓扑结构相关的集合。本文将用到的一些著名拓扑算子回顾如下。

- $\mathscr{T}$：对于空间 $X$， $\mathscr{T}_X$ 是所有满足 $U \neq \emptyset$ 和 $U \neq X$的开集 $U \subseteq X$ 的集合。
- $\mathcal{O}$：对于空间 $X$， $\mathcal{O}_X$ 是 $X$的非平凡开覆盖的集合；也就是说，所有满足 $X = \bigcup \mathscr{U}$的 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{T}_X$。
- $\Omega$：对于空间 $X$，$\Omega_X$ 是 $X$的 $\omega$-覆盖的集合；也就是说，所有满足以下条件的 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_X$ ，
$$(\forall F \in [X]^{<\omega})(\exists U \in \mathscr{U})\ F \subseteq U.$$
- $\mathcal{K}$：对于空间 $X$， $\mathcal{K}_X$ 是 $X$的 $k$-覆盖的集合；也就是说，所有满足以下条件的 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_X$
$$(\forall K \in K(X))(\exists U \in \mathscr{U})\ K \subseteq U.$$

定义 1. 对于空间 $X$，令 $\mathbb{K}(X)$ 表示赋予维托里斯拓扑的集合 $K(X)$；也就是说，由形如 $\{K \in \mathbb{K}(X) : K \subseteq U\}$ 和 $\{K \in \mathbb{K}(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$ 的集合生成的拓扑，其中 $U \subseteq X$ 为开集。对于 $U_1$、.....、$U_n$ 在 $X$ 中为开集，定义

$$[U_1, \dots, U_n] = \left\{ K \in \mathbb{K}(X) : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j \text{ and } (\forall j)\,[K \cap U_j \neq \emptyset] \right\}.$$

这些集合构成了 $\mathbb{K}(X)$ 上拓扑的一个基。

在处理固定的子空间 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{K}(X)$ 时，我们用 $[U_1, \dots, U_n]$ 表示 $[U_1, \dots, U_n] \cap \mathbb{Y}$。

有关维托里斯拓扑的详细论述，请参见 [19]。

定义 2。我们用 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ 表示集合 $[X]^{<\omega}$，并赋予它作为 $\mathbb{K}(X)$ 的子空间所继承的拓扑。

定义 3。对于一个空间 $X$，闭集理想是指由 $X$ 的真闭子集组成的一个集合族 $\mathcal{A}$，且满足 $[X]^{<\omega} \subseteq \mathcal{A}$，从而以下两个性质成立：

- 对于 $A$、$B \in \mathcal{A}$、 $A \cup B \in \mathcal{A}$，只要 $A \cup B \neq X$。
- 对于 $A \in \mathcal{A}$，若 $B \subseteq A$ 是闭且非空的，则 $B \in \mathcal{A}$。

这类集合通常称为理想基或有界结构（见 [10]）。

我们最感兴趣的两个闭集理想是 $[X]^{<\omega}$ 和 $K$（$X$）。

定义 4. 对于空间 $X$ 和闭集理想 $\mathcal{A}$，我们将 $\mathcal{A}$-覆盖集记为 $\mathcal{O}_X$（$\mathcal{A}$），其包含所有满足以下条件的 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_X$：

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\exists U \in \mathscr{U})\ A \subseteq U.$$

注意 $\Omega_X = \mathcal{O}_X([X]^{<\omega})$ 和 $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(K(X))$。此外，由于 $[X]^{<\omega}$和 $K(X)$ 可以通过拓扑来定义，我们或许可以将一个便捷的算子纳入上文的算子列表

不过，并非所有闭集理想都能在不引用其所属的特定拓扑的情况下定义，因此对于一般的$\mathcal{O}_X(\mathcal{A})$，我们无法省略下标。

注 5. 注意，由于我们将 $\mathcal{O}_X(\mathcal{A})$ 定义为由非平凡开覆盖组成，且 $\mathcal{A}$ 是一个闭集理想，因此每个 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{A})$ 都具有这样的性质：对每个 $\mathscr{F} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$，$\mathscr{U} \setminus \mathscr{F} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{A})$。此外，$\mathcal{O}_X(\mathcal{A})$ 的每个元素都是无限的。

定义 6. 若空间 $X$ 具有休雷维奇性质（或称 $X$ 是休雷维奇空间），则对任意序列 $\langle \mathscr{U}_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{O}_X^\omega$，都存在一个序列 $\langle \mathscr{F}_n : n \in \omega \rangle$，使得对每个 $n \in \omega$ 都有 $\mathscr{F}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$，并且

$$(\forall x \in X)(\exists m \in \omega)(\forall n \geqslant m)\ x \in \bigcup \mathscr{F}_n.$$

注意，我们避免使用常用记号 $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}, \Gamma)$，以免出现这样的复杂情况：对于某个 $n \in \omega$，$\bigcup \mathscr{F}_n = X$，或者集合 $\{\bigcup \mathscr{F}_n : n \in \omega\}$ 是有限的。

我们通常也会注意区分序列与可数集，这一点可从我们对下述定义的处理方式中看出。

定义 7（[23]）。对于拓扑算子或集族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，

- $\mathsf{Sfin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 表示以下选取原理：对于 $\mathcal{A}$ 中元素的每个序列 $\langle \mathscr{U}_n : n \in \omega \rangle$，都存在一个序列 $\langle \mathscr{F}_n : n \in \omega \rangle$，其中每个 $\mathscr{F}_n$ 都是 $\mathscr{U}_n$ 的有限子集，使得 $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{F}_n \in \mathcal{B}$。
- $\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 表示以下选取原理：对于 $\mathcal{A}$ 中元素的每个序列 $\langle \mathscr{U}_n : n \in \omega \rangle$，都存在一个序列 $\langle A_n : n \in \omega \rangle$，其中对于每个 $n \in \omega$，$A_n \in \mathscr{U}_n$，使得$\{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$。

注意，选取原理可以用量词简洁地表述：

$$\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv (\forall \mathscr{U} \in \mathcal{A}^\omega) \left( \exists \mathscr{F} \in \prod_{n\in\omega} [\mathscr{U}_n]^{<\omega} \right) \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{F}_n \in \mathcal{B}$$

and

$$\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv (\forall \mathscr{U} \in \mathcal{A}^\omega) \left( \exists A \in \prod_{n\in\omega} \mathscr{U}_n \right) \{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}.$$

我们将使用记号 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 或 $X \models \mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，表示相应的选取原理对 $X$ 成立。

注意，$\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ 是门格尔性质，而 $\mathsf{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ 是罗斯伯格性质。我们将选择原理 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Omega)$ 和 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ 分别称为 $\omega$-门格尔性质和 $k$-门格尔性质。同样，我们将选择原理 $\mathsf{S}_1(\Omega, \Omega)$ 和 $\mathsf{S}_1(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ 分别称为 $\omega$-罗斯伯格性质和$k$-罗斯伯格性质。在任何我们说 $X$ 具有 $\mathfrak{P}$ 性质的情形下，也可以说 $X$ 是 $\mathfrak{P}$。

注 8. 注意，休雷维奇性质蕴含门格尔性质。

如 [15], 所述，Gerlits 和 Nagy [9] 定义的性质（$*$）已在 [20] 中证明等价于同时具有休雷维奇性质和罗斯伯格性质。[1] 因此，按照 [15], ，我们将其作为定义。

定义 9. 如果 $X$ 同时具有休雷维奇性质和罗斯伯格性质，我们就称空间 $X$ 为 Gerlits-Nagy 空间。

休雷维奇性质有一个相应的博弈。

[1]这些结果是 相对于实数轴的子集陈述的，但这些证明也适用于更一般的情形 y.

定义 10。在空间 $X$ 上进行休雷维奇博弈，规则如下。在第 $n^{\text{th}}$ 局中，玩家一选择 $\mathscr{U}_n \in \mathcal{O}_X$，玩家二则以某个 $\mathscr{F}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ 作出回应。如果

$$(\forall x \in X)(\exists m \in \omega)(\forall n \geqslant m)\ x \in \bigcup \mathscr{F}_n.$$

否则，玩家一获胜。

与上文类似，我们避免使用 [1]，中定义的一般博弈模式 $\mathsf{G}_{\text{ufin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$；在这种情况下，博弈 $\mathsf{G}_{\text{ufin}}(\mathcal{O},\Gamma)$ 可以视为休雷维奇博弈。和之前一样，正如作者所指出的，这种表述需要谨慎处理，以涵盖覆盖该空间的有限选取。

定义 11. 玩家一在 $X$ 上的休雷维奇博弈中的策略是一个函数 n

$$\sigma : \left([\mathcal{O}_X]^{<\omega}\right)^{<\omega} \to \mathcal{O}_X.$$

如果对任意序列 $\langle \mathscr{F}_n : n \in \omega \rangle$，只要满足

$$\mathscr{F}_n \in [\sigma\left(\langle \mathscr{F}_j : j < n \rangle\right)]^{<\omega}$$

对每个 $n \in \omega$，则

$$(\exists x \in X)(\forall m \in \omega)(\exists n \geqslant m)\ x \notin \bigcup \mathscr{F}_n.$$

尽管 [23, 定理 27] 针对实数集陈述，但其证明可推广到任意空间，因此我们在此以这种一般性表述。回顾一下，证明的主要思路是利用休雷维奇性质要求空间为林德洛夫空间这一事实，然后利用与玩家一的给定策略相对应的开覆盖的可数子覆盖，让玩家二以这些可数覆盖的初始片段作出响应。在这种情形下考察整个部分对局树，我们可以在该树上应用休雷维奇性质，从而构造出一场能够击败玩家一给定策略的对局，因为休雷维奇性质会生成一个覆盖，使每个点都被选取中的除有限多个以外的所有成员覆盖。

定理 12（[23, 定理 27]）。空间 $X$ 具有休雷维奇性质，当且仅当玩家一在 $X$上的休雷维奇博弈中没有获胜策略。

文献中还广泛研究了与标准选择原理 $\mathsf{S}_{\text{fin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 和 $\mathsf{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 相对应的博弈。这里我们只回顾与本文相关的选取博弈理论要素。

定义 13. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为集族。有限选取博弈 $\mathsf{G}_{\text{fin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 按如下方式进行。在第 $n^{\text{th}}$ 轮中，玩家一选择 $A_n \in \mathcal{A}$，玩家二以 $\mathscr{F}_n \in [A_n]^{<\omega}$ 作为回应。若 $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{F}_n \in \mathcal{B}$，则玩家二获胜；否则，玩家一获胜。

定义 14. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为集族。单选取博弈 $\mathsf{G}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 按如下方式进行。在第 $n^{\text{th}}$ 轮中，玩家一选择 $A_n \in \mathcal{A}$，玩家二以 $x_n \in A_n$ 作为回应。若 $\{x_n :\ n \in \omega\} \in \mathcal{B}$，则玩家二获胜；否则，玩家一获胜。

本文只研究玩家一的两种策略类型。

定义15。我们为玩家一定义两种策略类型。

- 玩家一在 $\mathsf{G}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 中的策略是一个函数 $\sigma : (\bigcup \mathcal{A})^{<\omega} \to \mathcal{A}$。如果对于所有 $n \in \omega$，只要 $x_n \in \sigma\langle x_k :\ k < n\rangle$，就有 $\{x_n :\ n \in \omega\} \notin \mathcal{B}$，则称玩家一的策略 $\sigma$ 为获胜策略。如果玩家一有获胜策略，我们记作 $\mathrm{I} \uparrow \mathsf{G}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$。
- 玩家一的预定策略是一种只考虑当前回合数的策略。我们称这种策略为预定策略，因为玩家一不会对玩家二的着法作出反应，而只是按脚本依次执行。从形式上说，它是一个函数 $\sigma : \omega \to \mathcal{A}$。如果玩家一有获胜的预定策略，我们记作 $\mathrm{I} \uparrow_{\text{pre}} \mathsf{G}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$。

这些定义可以显而易见地推广到 $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$。

注 16. 一般而言，$\mathsf{S}_{\square}(\mathcal{A},\mathcal{B})$成立，当且仅当 $\mathrm{I}\not\gamma\mathsf{G}_{\square}(\mathcal{A},\mathcal{B})$，其中 $\square\in\{1,\mathrm{fin}\}$。参见 [4,前命题 15]。

定义 17（[15]）。设 $\mathfrak{C}$ 是一个类。若存在 $\phi\colon\ \mathscr{C}\to\omega$，使得对每个 $n\in\omega$，$\phi^{-1}(n)$都是有限的，并且对任意无限的 $J\subseteq\omega$，都有 $\bigcup\{\phi^{-1}(n)\colon\ n\in J\}\in\mathfrak{C}$，则称 $\mathscr{C}\in\mathfrak{C}$ 是可分组的。于是，我们定义

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{gp}}=\{\mathscr{C}\in\mathfrak{C}:\mathscr{C}\text{ is groupable}\}.$$

如果 $\mathfrak{O}$ 是一个拓扑算子，我们就令 $\mathfrak{O}^{\mathrm{gp}}$ 表示生成 $\mathfrak{O}_X$ 中可分组元素的拓扑算子，其中 $\mathfrak{O}_X$ 是空间 $X$。

注 18. 注意，任何可分组元素都必定是可数的。

最初，以下定理以一份较长的等价条件清单形式出现，并且都假设 $X$ 是一个 $\epsilon$-空间（即每个 $\omega$-覆盖都有一个可数子集，它是一个 $\omega$-覆盖）。然而，以下定理并不需要这一假设，因为等价关系的两个条件都蕴含空间 $X$ 是一个 $\epsilon$-空间。

定理 19（[15, 定理 16]）。对于一个空间 $X$，$X$ 的每个有限次幂都具有休雷维奇性质，当且仅当 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega,\Omega^{\mathrm{gp}})$。

## 3. Preparations

以下内容改编自 [15, 引理 9 和推论 10]，并采用相同的之字形技巧。

引理 20。对于任意序列 $\langle\mathscr{U}_n\colon\ n\in\omega\rangle$（$\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}$）的$\mathcal{A}$，存在一个序列 $\langle\mathscr{V}_n\colon\ n\in\omega\rangle$（$\mathcal{A}$）的 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}$，使得集合 $\{\mathscr{V}_n\colon\ n\in\omega\}$ 两两不相交，并且对每个 $n\in\omega$，$\mathscr{V}_n\subseteq\mathscr{U}_n$。

证明。设 $\phi_n\colon\ \mathscr{U}_n\to\omega$ 证明了 $\mathscr{U}_n$的可分组性。固定一个双射 $\beta:\omega\to\omega^2$，并采用以下记号：$\beta(j)=\langle\beta(j)_1,\beta(j)_2\rangle$。令

$$\mathscr{W}_{\beta(0)_1,\beta(0)_2}=\mathcal{A}_0=\phi^{-1}_{\beta(0)_1}(0).$$

对于 $m\in\omega$，假设我们定义了 $\mathcal{A}_m\in\left[\bigcup_{n\in\omega}\mathscr{U}_n\right]^{<\omega}$ 和 $\mathscr{W}_{\beta(m)_1,\beta(m)_2}\subseteq\mathscr{U}_{\beta(m)_1}$。Let

$$M=\min\left\{n\in\omega:(\forall k\geqslant n)\ \phi^{-1}_{\beta(m+1)_1}(k)\cap\mathcal{A}_m=\emptyset\right\}.$$

这样的 $M$ 必定存在，因为 $\mathcal{A}_m$ 是有限的，且 $\phi_{\beta(m+1)_1}$ 是有限对一的。然后定义

$$\mathscr{W}_{\beta(m+1)_1,\beta(m+1)_2}=\phi^{-1}_{\beta(m+1)_1}(M)$$

和 $\mathcal{A}_{m+1}=\mathcal{A}_m\cup\mathscr{W}_{\beta(m+1)_1,\beta(m+1)_2}$.Thi

s r递归地定义 $\{\mathscr{W}_{n,m}\colon\ n,m\in\omega\}$，其中 $\mathscr{W}_{n,m}\subseteq\mathscr{U}_n$对每个 $n,m\in\omega$都成立。令

$$\mathscr{V}_n=\bigcup\{\mathscr{W}_{n,m}:m\in\omega\}$$

并注意到 $\mathscr{V}_n\subseteq\mathscr{U}_n$。还要注意，根据 $\mathscr{U}_n$的可分组性，对每个 $n\in\omega$ 都有 $\mathscr{V}_n\in\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A})$，并且由构造可知，族 $\{\mathscr{V}_n\colon\ n\in\omega\}$ 两两不相交。□

以下是 [15, 引理 15]的推广。

引理 21. 假设 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}_X(\mathcal{A})\ \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A}))$。那么，对于任意的 $\mathcal{O}_X(\mathcal{A})$ 的序列 $\langle\mathscr{U}_n\colon\ n\in\omega\rangle$，都存在一个序列 $\langle\mathscr{F}_n\colon\ n\in\omega\rangle$，使其满足以下性质：

- $(\forall n\in\omega)\ \ \mathscr{F}_n\in[\mathscr{U}_n]^{<\omega}$,
- $\{\mathscr{F}_n:n\in\omega\}$ 两两不相交，且
- $(\forall A\in\mathcal{A})\ (\exists m\in\omega)(\forall n\geqslant m)(\exists V\in\mathscr{F}_n)\ \ A\subseteq V$.

证明。根据 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}_X(\mathcal{A})\ \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A}))$，我们可以假设每个 $\mathscr{U}_n \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A})$。然后，根据引理 20，我们可以假设 $\{\mathscr{U}_n : n \in \omega\}$ 两两不相交。固定每个 $n \in \omega$ 的一个双射枚举 $\mathscr{U}_n = \{U_{n,m} : m \in \omega\}$，并令

$$\mathscr{W}_n = \left\{ \bigcap_{j=0}^{n} U_{j,m_j} : m \in \omega^{n+1} \right\} \setminus \{\emptyset\}.$$

此外，对于 $n \in \omega$，令 $\gamma_n \colon \mathscr{W}_n \to \prod_{j=0}^{n} \mathscr{U}_j$ 为一个选择函数[2]，使得对于每个 $W \in \mathscr{W}_n$，

$$W = \bigcap_{j=0}^{n} \mathrm{proj}_j(\gamma_n(W)),$$

其中 $\mathrm{proj}_j$ 是通常的投影映射。注意，对于每个 $n \in \omega$，$\mathscr{W}_n \in \mathcal{O}_X(\mathcal{A})$，因此我们可以应用 $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}_X(\mathcal{A})\ \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A}))$ 来得到 $\mathscr{G}_n \in [\mathscr{W}_n]^{<\omega}$，使得

$$\mathscr{W} := \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{G}_n \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathcal{A}).$$

令 $\phi \colon \mathscr{W} \to \omega$ 见证 $\mathscr{W}$的可分组性，并注意

$$(\forall A \in \mathcal{A})\,(\exists m \in \omega)(\forall n \geqslant m)\,\left(\exists W \in \phi^{-1}(n)\right)\ A \subseteq W.$$

然后，对于每个 $n \in \omega$，令 $\chi_n \colon \phi^{-1}(n) \to \omega$，使得对于每个 $W \in \phi^{-1}(n)$，

$$\chi_n(W) = \min\{k \in \omega : W \in \mathscr{G}_k\}.$$

最后，设

$$\mathscr{F}_n = \left\{\mathrm{proj}_n\left(\gamma_{\chi_n(W)}(W)\right) : W \in \phi^{-1}(n)\right\} \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}.$$

由于 $\{\mathscr{U}_n : n \in \omega\}$ 两两不相交，因此集合族 $\{\mathscr{F}_n : n \in \omega\}$ 也两两不相交。为完成证明，任取 $A \in \mathcal{A}$，并令 $m \in \omega$ 满足：对每个 $n \geqslant m$，都存在某个$W \in \phi^{-1}(n)$，使得 $A \subseteq W$。注意，对于满足 $A \subseteq W$的 $n \geqslant m$和 $W \in \phi^{-1}(n)$，我们有

$$A \subseteq W \subseteq \mathrm{proj}_n(\gamma_{\chi_n(W)}(W)) \in \mathscr{F}_n.$$

证明至此完成。 □

## 4. The General Hyperspace Correspondence

现在我们将注意力限定在紧集理想上；空间$X$ 上的紧集理想是指闭集的任一理想 $\mathcal{A}$，其中 $X$ 满足 $\mathcal{A} \subseteq K(X)$。我们还用 $[X]^{\omega}$ 表示集合 $X$的可数无限子集所组成的集合。

定义22. 若一对 $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$ 满足以下条件，则称其为适当背景： $\mathfrak{T}$ 是一个拓扑空间类，且 $\mathfrak{A}$ 是一个拓扑算子：

- 对于每个空间 $X \in \mathfrak{T}$， $\mathfrak{A}_X$ 都是 $X$的紧子集构成的理想。
- 对于每个空间 $X \in \mathfrak{T}$， $\mathbb{A}(X) \in \mathfrak{T}$，其中 $\mathbb{A}(X)$ 是集合 $\mathfrak{A}_X$，带有它作为 $\mathbb{K}(X)$ 的子空间所继承的拓扑。

正如预备知识中提到的，我们将考察两种情形，并将在下文证明它们是充分的：非紧空间类以及生成所有紧子集的算子；还有所有无限空间类以及生成所有有限子集的算子。当空间 $X$ 具有无限多个紧子集，且 $\mathfrak{A}$ 是生成有限子集的算子时， $\mathbb{A}(X) = \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ 是 $\mathbb{K}(X)$ 的真子集。

现在我们对 [3,定义 4.2] 作一处修改。

[2]~~对于每个~~ $W \in \mathscr{W}_n$，集合 $\left\{\langle U_0, U_1, \ldots U_n\rangle \in \prod_{j=0}^{n} \mathscr{U}_j \colon W = \bigcap_{j=0}^{n} U_j\right\}$ 都非空，因此我们可以使用选择公理从这些集合中各选取一个元素，并将它们赋给相应的 $W \in \mathscr{W}_n$。

定义 23. 假设 $(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$ 是一个适当背景。如果算子 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}$-并下封闭，则称其满足以下性质：

- 对于每个 $K_0 \in \mathfrak{A}_X$, $\{K \in \mathbb{A}(X)\colon\ K \subseteq K_0\} \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}$。
- 对于每个 $\mathbf{K} \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}$, $\bigcup \mathbf{K} \in \mathfrak{A}_X$。

正如 [3, 引理 4.3], 所指出的，当 $\mathfrak{T}$ 是所有无限（分别为非紧）空间时，将给定空间 $X$ 的有限子集（分别为紧子集）生成出来的算子$\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}$-并下封闭。对于紧子集的情形，这可由 [19]的结果推出。

定义 24. 假设我们有一个适当背景（$\mathfrak{T},\mathfrak{A}$）。令 $\mathcal{O}(\mathfrak{A})$ 为由 $X \mapsto \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 定义的拓扑算子。若算子 $\mathfrak{A}$ 满足以下所有性质，则称其为适用的：

(S1) $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}$-并下封闭。(S2) 对每个 $X \in \mathfrak{T}$ 及每个 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$, $\{[U]\colon\ U \in \mathscr{U}\} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$。(S3) 对每个 $X \in \mathfrak{T}$ 及每个 $\mathscr{U} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$, $\{V \in \mathscr{T}_X\colon (\exists U \in \mathscr{U})\ [V] \subseteq U\} \in \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$。(S4) 对每个 $X \in \mathfrak{T}$，若 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$，则 $X$ 具有休雷维奇性质。(S5) 对每个 $X \in \mathfrak{T}$，以下条件等价：

- $\mathbb{A}(X)$具有门格尔性质。
- $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_{\text{有限}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$.
- $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$。

注意，当 $\mathfrak{T}$ 是所有非紧空间组成的类，且 $\mathfrak{A}$ 是生成紧子集的算子时，$\mathbb{A}(X) = \mathbb{K}(X)$，因此集合 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$就是 $\mathbb{K}(X)$的 $k$-覆盖集。类似地，当 $\mathfrak{T}$ 是所有无限空间组成的类，且 $\mathfrak{A}$ 是生成有限子集的算子时，$\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$就是 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$的 $\omega$-覆盖集。

定理 25. 设我们有一个适当背景$(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$，其中 $\mathfrak{A}$ 是适用的。那么，对于任意$X \in \mathfrak{T}$，以下命题等价。

(i) $\mathbb{A}(X)$具有休雷维奇性质。(ii) $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。(iii) $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。(iv) $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$, 且 $\mathcal{O}^{\mathrm{gp}}_X(\mathfrak{A}_X) = \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X) \cap [\mathscr{T}_X]^{\omega}$。

证明。注意，由 (S4) 可得蕴含关系 (ii) $\Longrightarrow$(i)。

(i) $\Longrightarrow$ (iv)：假设 $\mathbb{A}(X)$ 是休雷维奇的，并注意到 $\mathbb{A}(X)$ 是门格尔的，这意味着根据 (S5)，$X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$。因此，我们只需证明 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 的每个可数成员都是可分组的。设 $\mathscr{U} = \{U_n\colon\ n \in \omega\} \in \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$。我们按以下方式定义玩家一在相对于 $\mathbb{A}(X)$的休雷维奇博弈中的策略。令

$$\sigma(\langle\rangle) = \{[U_n] : n \in \omega\}.$$

对于 $k \in \omega$，假设我们已定义 $\langle \mathscr{G}_j\colon\ j < k\rangle$, $\langle M_j\colon\ j < k\rangle$，以及 $\sigma(\langle \mathscr{G}_j\colon\ j < k\rangle)$。对于任意

$$\mathscr{G}_k \in [\sigma(\langle \mathscr{G}_j : j < k\rangle)]^{<\omega},$$

let

$$M_k = \max\{m \in \omega : [U_m] \in \mathscr{G}_k\}.$$

然后令

$$\sigma(\langle \mathscr{G}_j : j \leqslant k\rangle) = \{[U_n] : n > M_k\}.$$

注意，根据 (S2)，$\sigma(\langle \mathscr{G}_j\colon\ j \leqslant k\rangle) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$，因为 $\{U_n\colon\ n > M_k\} \in \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$。因此，这 $\sigma$是玩家一在 $\mathbb{A}(X)$ 上进行休雷维奇博弈的策略。

根据定理 12，$\sigma$ 不可能是获胜策略。因此，存在一个序列 $\langle \mathscr{G}_j\colon\ j \in \omega\rangle$，由有限选取组成；还有一个相应的递增序列 $\langle M_j\colon\ j \in \omega\rangle$，由上述定义的自然数组成，它们

能够战胜 $\sigma$。于是，我们可以按以下规则定义 $\phi\colon\ \mathscr{U}\to\omega$

$$\phi(U_n)=\min\{k\in\omega : n\leqslant M_k\}.$$

由于 $\phi$ 显然是有限对一的，我们只需证明它具有所需的覆盖性质。因此，设$J\subseteq\omega$为无限集且 $K\in\mathfrak{A}_X$。根据我们的构造，必定存在某个 $\ell\in J$、 $\ell>0$，以及某个$W\in\mathscr{G}_\ell$，使得 $K\in W$。因此，必定存在某个 $n\in(M_{\ell-1},M_\ell]$，使得 $W=[U_n]$。注意， $\phi(U_n)=\ell$，且 $K\subseteq U_n$。也就是说， $K\subseteq U_n\in\phi^{-1}(\ell)$，由此可得 $\{U_n\colon\ n\in\omega\}$可分组。

蕴含关系 (iv) $\implies$(iii) 显然成立。

(iii) $\implies$ (i)：设 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$，并令 $\langle\mathscr{U}_n\colon\ n\in\omega\rangle$ 为 $\mathbb{A}(X)$的一个开覆盖序列。注意

$$\mathscr{U}_n^*:=\left\{\bigcup\mathscr{F}:\mathscr{F}\in[\mathscr{U}_n]^{<\omega}\right\}\in\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$$

因为 $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}$ 由紧集组成。取一个选择函数 $\gamma_{u,n}\colon\ \mathscr{U}_n^*\to[\mathscr{U}_n]^{<\omega}$，使得$\bigcup\gamma_{u,n}(U)=U$。由 (S3),

$$\mathscr{V}_n:=\{V\in\mathscr{T}_X:(\exists U\in\mathscr{U}_n^*)\ [V]\subseteq U\}\in\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X).$$

固定一个选择函数 $\gamma_{v,\ n}:\mathscr{V}_n\to\mathscr{U}_n^*$使得 $[V]\subseteq\gamma_{v,\ n}(V)$。根据引理 21，我们可以选取$\mathscr{G}_n\in[\mathscr{V}_n]^{<\omega}$，使其具有引理所保证的性质。定义

$$\mathscr{F}_n=\bigcup\{\gamma_{u,n}\circ\gamma_{v,n}(V):V\in\mathscr{G}_n\}$$

并注意到 $\mathscr{F}_n\in[\mathscr{U}_n]^{<\omega}$。

现在我们证明，选取 $\{\mathscr{F}_n:n\in\omega\}$ 见证了 $\mathbb{A}(X)$ 的休雷维奇性质。于是，设$K\in\mathbb{A}(X)$。根据我们对引理 21 的运用，可以找到 $m\in\omega$，使得对每个 $n\geqslant m$，都存在某个$V\in\mathscr{G}_n$ 满足

$$K\subseteq V\implies K\in[V]\subseteq\gamma_{v,n}(V)=\bigcup\gamma_{u,n}\circ\gamma_{v,n}(V)\subseteq\bigcup\mathscr{F}_n.$$

因此， $\mathbb{A}(X)$ 是休雷维奇的。

(i) $\implies$ (ii)：假设 $\mathbb{A}(X)$ 是休雷维奇的。根据上文得到的 (i) 与 (iii) 的等价性，我们知道 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。由 (S5) 可得 $\mathbb{A}(X)\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$。因此，我们只需证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$ 的每个可数成员都是可分组的。设 $\mathscr{U}=\{U_n\colon\ n\in\omega\}\in\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$。我们为在 $\mathbb{A}(X)$ 上进行的休雷维奇博弈中的玩家一定义一个策略。

在证明的这一部分中，我们将利用以下事实： $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$，以在属于 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 的 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 成员中找出可数子集。我们还将利用 (S3)，从 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$ 中取出成员，并用形如 $[V]$ for $V\in\mathscr{T}_X$ 的集合对其进行细化，这些集合构成 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 的元素。

首先，令 $\{V_m\colon\ m\in\omega\}\in\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 满足：对于每个 $m\in\omega$，都存在 $n\in\omega$with$[V_m]\subseteq U_n$。接着令

$$\sigma(\langle\rangle)=\mathscr{V}_{\langle\rangle}:=\{[V_m]:m\in\omega\}.$$

对于 $\mathscr{G}_0\in[\mathscr{V}_{\langle\rangle}]^{<\omega}$，定义

$$M_0=\min\{N\in\omega:(\forall W\in\mathscr{G}_0)(\exists n\leqslant N)\ W\subseteq U_n\}.$$

注意， $\{U_n\colon\ n>M_0\}\in\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$。因此，我们可以令 $\{V_{0,m}\colon\ m\in\omega\}\in\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 满足：对于每个 $m\in\omega$，都存在某个 $n>M_0$ with $[V_{0,m}]\subseteq U_n$。定义

$$\sigma(\langle\mathscr{G}_0\rangle)=\mathscr{V}_{\langle M_0\rangle}:=\{[V_{0,m}]:m\in\omega\}.$$

现在，令 $k\in\omega$ 并假设我们有 $\mathscr{G}_j$, $M_j$，其中 $j\leqslant k$，以及 $\mathscr{V}_{\langle M_j\colon\ j\leqslant k\rangle}$ 定义于 $\mathscr{V}_{\langle M_j\colon\ j\leqslant k\rangle}$是 $\mathscr{U}$ 的细化。对于 $\mathscr{G}_{k+1}\in[\mathscr{V}_{\langle M_j\colon\ j\leqslant k\rangle}]^{<\omega}$，令

$$M_{k+1}=\min\{N>M_k:(\forall W\in\mathscr{G}_{k+1})(\exists n\leqslant N)\ W\subseteq U_n\}.$$

令 $\{V_{k+1,m}:\ m\in\omega\}\in\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 满足：对于每个 $m\in\omega$，都存在某个 $n>M_{k+1}$ 使得 $[V_{k+1,m}]\subseteq U_n$. 定义

$$\sigma(\langle\mathscr{G}_j:j\leqslant k+1\rangle)=\mathscr{V}_{\langle M_j:j\leqslant k+1\rangle}:=\{[V_{k+1,m}]:m\in\omega\}.$$

这定义了休雷维奇博弈中玩家一在 $\mathbb{A}(X)$ 上的策略 $\sigma$。

根据定理 12，我们知道 $\sigma$ 不可能获胜。因此，存在一个序列 $\langle\mathscr{G}_j:\ j\in\omega\rangle$，以及相应的自然数递增序列 $\langle M_j:\ j\in\omega\rangle$，使得对于任意 $K\in\mathbb{A}(X)$，都存在某个 $m\in\omega$，使得对每个 $n\geqslant m$，$K\in\bigcup\mathscr{G}_n$。我们可以按以下规则定义 $\phi:\mathscr{U}\to\omega$

$$\phi(U_n)=\min\{k\in\omega:n\leqslant M_k\}.$$

注意，$\phi$ 显然是有限对一的。因此，我们只需证明它满足 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)})$ 可分组性的覆盖判据。令 $J\subseteq\omega$ 为无限集且 $\mathsf{K}\in\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}$。由 (S1) 可知，$\bigcup\mathsf{K}\in\mathfrak{A}_X$。必定存在某个 $\ell\in J$、$\ell>0$，以及某个 $W\in\mathscr{T}_X$，使得 $\bigcup\mathsf{K}\in[W]\in\mathscr{G}_\ell$。注意，$\bigcup\mathsf{K}\in[W]$ 意味着 $\bigcup\mathsf{K}\subseteq W$。根据构造，存在某个 $n\in(M_{\ell-1},M_\ell]$，使得 $[W]\subseteq U_n$。因此，对于任意 $K\in\mathsf{K}$，$K\subseteq\bigcup\mathsf{K}\subseteq W.$。也就是说，$K\in[W]\subseteq U_n$。由于 $K\in\mathsf{K}$ 是任意的，$\mathsf{K}\subseteq U_n\in\phi^{-1}(\ell)$。这证明了 $\mathscr{U}$ 是可分组的，因而 $\mathbb{A}(X)\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。□

现在我们给出一个博弈论刻画。

定理 26. 设 $\square\in\{1,\mathrm{fin}\}$. 假设我们有一个适当背景 $(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$，其中 $\mathfrak{A}$ 是适用的，并且对于每个 $X\in\mathfrak{T}$，

$$\mathrm{I}\underset{\mathrm{pre}}{\uparrow}\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X))\iff\mathrm{I}\uparrow\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)).$$

那么，对于任意 $X\in\mathfrak{T}$，

$$\mathrm{I}\underset{\mathrm{pre}}{\uparrow}\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X))\iff\mathrm{I}\uparrow\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X)).$$

证明. 我们只需证明，对于 $X\in\mathfrak{T}$，

$$\mathrm{I}\underset{\mathrm{pre}}{\not\uparrow}\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X))\implies\mathrm{I}\not\uparrow\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X),\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X)).$$

因此，假设 $\mathrm{I}\not\uparrow\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)\ \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X))$。由注 16 和定理 25，$X\models\mathsf{S}_\square(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$前并且 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X)=\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)\cap[\mathscr{T}_X]^\omega$。根据假设，我们可知 $\mathrm{I}\not\uparrow\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)\ \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X))$。现在，由于玩家一在该博弈中采用的任何策略 $\sigma$ 都不可能获胜，玩家二总能击败 $\sigma$；又由于 $\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)$ 的每个可数成员都是可分组的，玩家二的获胜对局总是可分组的。因此，玩家一在 $\mathsf{G}_\square(\mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)\ \mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X))$ 中没有获胜策略。□

为处理单次选择，我们需要在假设中加入更多内容。

定义 27. 设我们有一个适当背景 $(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$。若算子 $\mathfrak{A}$ 适用，且对于所有 $X\in\mathfrak{T}$，以下命题等价，则称其为超适宜：

- $\mathbb{A}(X)$ 是罗斯伯格的。
- $\mathbb{A}(X)\models\mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$.
- $X\models\mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$.

定理 28. 设我们有一个适当背景 $(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$，其中 $\mathfrak{A}$ 超适宜。那么，对于任意 $X\in\mathfrak{T}$，以下命题等价。

(i) $\mathbb{A}(X)$ 是 Gerlits-Nagy。
(ii) $\mathbb{A}(X)\models\mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。
(iii) $X\models\mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。

证明。 (i) $\Longrightarrow$(iii)：由于 $\mathbb{A}(X)$ 是休雷维奇的，定理 25 断言 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}_X) = \mathcal{O}_X(\mathfrak{A}_X)\cap[\mathscr{T}_X]^\omega$。由于 $\mathbb{A}(X)$ 是罗斯伯格的，根据超适宜定义中的判据， $X \models \mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$. 因此， $X \models \mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：根据定理 25， $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。此外，由定理 25 还可得，

$$\mathcal{O}^{\mathrm{gp}}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}(X)}(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}(X)}) \cap [\mathscr{T}_{\mathbb{A}(X)}]^\omega.$$

根据超适宜定义中的判据， $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}(\mathfrak{A}))$；再由上述恒等式可知， $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：由于 $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_1(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$ $\mathbb{A}(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})\ \mathcal{O}^{\mathrm{gp}}(\mathfrak{A}))$，这根据定理 25 说明 $\mathbb{A}(X)$ 具有休雷维奇性质。此外，根据超适宜定义中的判据， $\mathbb{A}(X)$ 具有罗斯伯格性质。□

## 5. Applications of the Hyperspace Correspondence

5.1. 紧集。文献 [3] 证明了， $\mathbb{K}(X)$ 涵盖了 $k$-Lindel¨of 和 $k$-门格尔性质在 $X$ 上的性质。值得注意的是， $k$-罗斯伯格性质不在此列。事实上， [3, 例 4.19] 指出， $\mathbb{R}$具有 $k$-罗斯伯格性质，但不具有罗斯伯格性质。由于罗斯伯格性质对闭子集具有遗传性，且 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ 的闭子空间，因此 $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ 不具有罗斯伯格性质。不过，可以利用定理 25 建立 $X$ 与 $\mathbb{K}(X)$ 在休雷维奇性质方面的关系。

我们先回顾关于 $k$-覆盖的以下事实。

引理 29（[3, 推论 4.13]）。设 $X$ 是一个空间。

- 若 $\mathscr{U}$是 $k$-覆盖 $X$，则 $\{[U]: U \in \mathscr{U}\}$ 是 $k$-覆盖 $\mathbb{K}(X)$。
- 若 $\mathscr{U}$ 是 $k$-覆盖 $\mathbb{K}(X)$，则
$$\mathscr{V} := \{V \in \mathscr{T}_X : (\exists U \in \mathscr{U})\ [V] \subseteq U\}$$
是 $k$-覆盖 $X$。

定理 30（[3, 推论 4.17]）。对于任意空间 $X$，以下条件等价：

- $\mathbb{K}(X)$ 是门格尔空间。
- $\mathbb{K}(X)$ 是 $k$-门格尔空间。
- $X$ 是 $k$-门格尔空间。

引理 31. 对任意空间 $X$，若 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$，则 $X$ 是休雷维奇空间。

证明. 假设 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$，并令 $\langle \mathscr{U}_n : n \in \omega\rangle$ 是 $X$ 的一个开覆盖序列。注意到

$$\mathscr{V}_n := \left\{\bigcup \mathscr{F} : \mathscr{F} \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}\right\} \in \mathcal{K}_X.$$

根据引理 21，我们可以为每个 $n \in \omega$ 构造满足引理所保证性质的 $\mathscr{G}_n \in [\mathscr{V}_n]^{<\omega}$。令 $\gamma_n$: $\mathscr{G}_n \to [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ 为一个选择函数，使得对每个 $V \in \mathscr{G}_n$ 都有 $V = \bigcup\gamma_n(V)$。然后定义

$$\mathscr{F}_n = \bigcup_{V\in\mathscr{G}_n} \gamma_n(V)$$

并注意到 $\mathscr{F}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$。为了完成证明，我们只需证明 $\langle \mathscr{F}_n : n \in \omega\rangle$ 满足胡雷维奇判据。因此，令 $x \in X$，并注意到 $\{x\} \in \mathbb{K}(X)$。利用引理 21，存在某个 $m \in \omega$，使得对每个 $n \geqslant m$，都有 $\{x\} \subseteq \bigcup\mathscr{G}_n$。因此，对每个 $n \geqslant m$，都存在某个$V \in \mathscr{G}_n$，使得 $x \in V$。注意，对于 $V \in \mathscr{G}_n$，

$$V = \bigcup\gamma_n(V) \subseteq \bigcup_{V\in\mathscr{G}_n}\bigcup\gamma_n(V) = \bigcup\mathscr{F}_n.$$

因此，对每个 $n \geqslant m$, $x \in \bigcup\mathscr{F}_n$。 □

我们还将用到以下博弈论结果。

**Th**定理 32（[3, 推论 4.18 和定理 4.21]）。对于任意空间 $X$ 和 $\square \in \{1,\mathbf{fin}\}$ ，

$$\mathrm{I} \underset{\mathrm{pre}}{\uparrow} \mathsf{G}_{\square}(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X) \iff \mathrm{I} \uparrow \mathsf{G}_{\square}(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X).$$

推论 33。对于任意空间 $X$，以下命题等价：

(i) $\mathbb{K}(X)$ 具有休雷维奇性质。(ii) $\mathbb{K}(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$。

(iii) $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K})$ 且 $\mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}} = \mathcal{K}_X \cap [\mathscr{T}_X]^{\omega}$。(iv) $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$。(v) 玩家一在 $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}})$ 中没有获胜策略。

证明。令 $\mathfrak{T}$ 为所有非紧空间组成的类，令 $\mathfrak{A}$ 为生成给定空间 $X$的紧子集的算子。那么 $(\mathfrak{T},\mathfrak{A})$ 是一个适当背景，因为众所周知， $X$ 是紧的，当且仅当 $\mathbb{K}(X)$ 是紧的 [19]。如上所述，根据 [19],的结果，$\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}$-并下封闭。引理 29 和 31 以及定理 30 遂可证明 $\mathfrak{A}$ 是适用的。因此，定理 25 可用于得到 (i)–(iv) 的等价性。(iv) 和 (v) 的等价性由定理 26 和 32 得出。□

如上所述， $\mathbb{R}$ 是一个 $k$-罗斯伯格空间，但 $\mathbb{K}(X)$并非罗斯伯格空间。因此，在这种情形下，我们无法应用定理 28。事实上，我们甚至可以进一步说明。

例 34. 实数轴 $\mathbb{R}$ 具有如下性质： $\mathbb{R} \models \mathsf{S}_1(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$，但 $\mathbb{K}(\mathbb{R})$并非 Gerlits-Nagy。

事实上，对于 $\langle \mathscr{U}_n : n \in \omega \rangle$ 个 $k$在 $\mathbb{R}$上的覆盖序列，选取 $U_n \in \mathscr{U}_n \setminus \{U_k : k < n\}$ 使得 $[-2^n, 2^n] \subseteq U_n$。然后定义 $\phi : \{U_n : n \in \omega\} \to \omega$ ，令 $\phi(U_n) = n$。因此， $\{U_n : n \in \omega\}$ 是可分组的。

另一方面，如前所述， $\mathbb{K}(\mathbb{R})$并非罗斯伯格空间，因此 $\mathbb{K}(\mathbb{R})$并非 Gerlits-Nagy。

因此，鉴于例 34，我们看到，推论 33 的单选择类比并未成立。尽管如此，直接应用定理 26 和 32，仍可得到以下结论。

推论 35. 对于任意空间 $X$，

$$\mathrm{I} \underset{\mathrm{pre}}{\uparrow} \mathsf{G}_1(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}}) \iff \mathrm{I} \uparrow \mathsf{G}_1(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}}).$$

5.2. 有限集。在 [3], 中已证明， $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$能够刻画 $\omega$-Lindel¨of、$\omega$-门格尔和 $\omega$-罗斯伯格性质在 $X$上的性质，正如 $X$ 的有限次幂所能做到的那样（见 [9, 12, 22]）。我们使用定理 25 将这种关系扩展到休雷维奇性质。

以下结果可视为华莱士定理 [8, Thm. 3.2.10] 的一种类似物，只不过这里讨论的是有限子集，而非有限次幂。

引理 36（[3, Cor. 4.7]）。设 $X$ 是一个空间。

- 若 $\mathscr{U}$ 是 $X$的一个 $\omega$-覆盖，则 $\{[U] : U \in \mathscr{U}\}$ 是 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$的一个 $\omega$-覆盖。
- 若 $\mathscr{U}$ 是$X_{\mathrm{fin}}(\mathcal{P})$的一个 $\omega$-覆盖，则

$$\mathscr{V} := \{V \in \mathscr{T}_X : (\exists U \in \mathscr{U})\ [V] \subseteq U\}$$

是 $\omega$ 对 $X$ 的覆盖。

定理 37（[3, 推论 4.10]）。对于任意空间 $X$，以下条件等价：

- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X)$ 是门格尔的。
- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X)$ 是 $\omega$-门格尔的。
- $X$ 是 $\omega$-门格尔。

定理 38（[24]）。对于任意空间 $X$ 和 $\square \in \{1, \mathsf{fin}\}$,

$$\mathrm{I} \underset{\text{pre}}{\uparrow} \mathsf{G}_\square(\Omega_X, \Omega_X) \iff \mathrm{I} \uparrow \mathsf{G}_\square(\Omega_X, \Omega_X).$$

推论 39. 对于任意空间 $X$，以下命题等价:

(i) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ 是休雷维奇的。(ii) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \models \mathsf{S}_{\text{fin}}(\Omega, \Omega^{\text{gp}})$。(iii) $X \models \mathsf{S}_{\text{fin}}(\Omega, \Omega^{\text{gp}})$。(iv) $X$ 的每个有限次幂都是休雷维奇的。(v) 玩家一在 $\mathsf{G}_{\text{fin}}(\Omega_X, \Omega_X^{\text{gp}})$ 中没有获胜策略。

证明。令 $\mathfrak{T}$ 为所有无限空间构成的类，令 $\mathfrak{A}$ 为生成给定空间 $X$ 的有限子集的算子。于是 $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$ 是一个适当背景。如上所述，$\mathfrak{A}$ 对 $\mathfrak{A}$-并封闭。为完成对 $\mathfrak{A}$ 适用性的证明，使用引理 36 以及定理 19 和 37。于是，定理 25 可用于得出 (i)–(iii) 等价。(iii) 与 (iv) 等价，这是定理 19 的内容。(iii) 与 (v) 等价，则由定理 26 和 38 得出。□

在这种情况下，我们可以利用定理 28，因为我们有以下结果可用。

定理 40（[3, 推论 4.11]）。对于任意空间 $X$，以下条件等价:

- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X)$ 是罗斯伯格的。
- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X)$ 是 $\omega$-罗斯伯格的。
- $X$ 是 $\omega$-罗斯伯格的。

推论 41。对于任意空间 $X$，以下条件等价:

(i) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ 是 Gerlits-Nagy。(ii) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \models \mathsf{S}_1(\Omega, \Omega^{\text{gp}})$。(iii) $X \models \mathsf{S}_1(\Omega, \Omega^{\text{gp}})$。(iv) $X$ 的每个有限次幂都是 Gerlits-Nagy。(v) 在 $\mathsf{G}_1(\Omega_X, \Omega_X^{\text{gp}})$ 中，玩家一没有获胜策略。

证明。令 $\mathfrak{T}$ 为无限空间类，$\mathfrak{A}$ 为将给定空间 $X$ 映射为其有限子集的算子。上文已证明 $\mathfrak{A}$ 是适用的。定理 40 证明了 $\mathfrak{A}$ 是超适宜的，因此可应用定理 28 得出 (i)–(iii) 等价。(iii) 与 (iv) 等价这一结论见 [15, 定理 19]。(iii) 与 (v) 等价则由定理 26 和 38 得出。□

我们以一个问题结束本节。

问题 1. 除了上面列出的例子，还有其他（超）适宜算子的自然例子吗？ $\mathfrak{A}$

## 6. Relationships with Spaces of Continuous Functions

对于空间 $X$，令 $C(X)$ 表示定义在 $X$ 上的所有连续实值函数的集合。给定 $X$ 的一个闭集理想 $\mathcal{A}$，令 $C_{\mathcal{A}}(X)$ 表示赋予一致收敛拓扑的集合 $C(X)$，其中元素取自 $\mathcal{A}$；该拓扑的基由以下形式的集合构成

$$[f; A, \varepsilon] := \{g \in C(X) : \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} < \varepsilon\}$$

对于 $f \in C(X)$、$A \in \mathcal{A}$ 和 $\varepsilon > 0$。当 $\mathcal{A} = [X]^{<\omega}$（分别为 $\mathcal{A} = K(X)$）时，我们用 $C_p(X)$（分别为 $C_k(X)$）代替 $C_{\mathcal{A}}(X)$。事实上，$C_p(X)$ 与 $X$ 上逐点收敛拓扑下连续实值函数环一致。同样，$C_k(X)$ 与 $X$ 上紧集上一致收敛拓扑下连续实值函数环一致，而后者等价于紧开拓扑。

Arhangel'skii 在 [2], 中引入了可数扇紧性的概念，并用 $C_p(X)$ 刻画了空间 $X$ 在其所有有限次幂中均为休雷维奇空间这一性质。

定义 42. 对于空间 $X$ 和 $x \in X$，令 $\Omega_{X,x} = \{A \subseteq X : x \in \mathrm{cl}(A) \setminus A\}$，其中 $\mathrm{cl}(A)$ 是 $A$ 在 $X$ 中的闭包。若空间 $X$ 在 $x$ 处具有可数扇紧性，则称其满足 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega_{X,x}, \Omega_{X,x})$。若对每个 $x \in X$， $X$ 在 $x$ 处都具有可数扇紧性，则称 $X$ 具有可数扇紧性。

我们还将讨论单选择类比。

定义 43. 对于空间 $X$ 和 $x \in X$，如果 $X$ 满足 $X \models \mathsf{S}_1(\Omega_{X,x}, \Omega_{X,x})$，则称其在 $x$ 处具有可数强扇紧致性。若对每个 $x \in X$， $X$ 在 $x$ 处都具有可数强扇紧致性，则称 $X$ 具有可数强扇紧致性。

Koˇcinac 和 Scheepers 在 [15], 中扩展了 [2] 的刻画，将所谓的 Reznichenko 性质也纳入其中；据 [18], 所述，该性质由 Reznichenko 于 1996年 在一次研讨会上提出。

定义 44. 对于空间 $X$ 和 $x \in X$， $X$ 在 $x$ 处具有 Reznichenko 性质，当且仅当 $\Omega_{X,x} \cap [X]^{\omega} = \Omega^{\mathrm{gp}}_{X,x}$。若 $X$ 在每个 $x$ 处都具有 Reznichenko 性质，我们称 $X$ 为 Reznichenko 空间。

由于 $C_{\mathcal{A}}(X)$ 是齐性的，我们可以在任意特定点讨论上述性质，并将其推广到整个空间；为方便起见，我们聚焦于 $\mathbf{0}$，即恒为 0 的函数。

结合推论 39 和 [15, 定理 21], ，我们得到:

定理45. 对任意吉洪诺夫空间 $X$，以下条件等价:

- $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ 是休雷维奇空间。
- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X) \models \mathsf{S}_{\text{有限}}(\Omega, \Omega_{\text{群}})$。
- $X \models \mathsf{S}_{\text{有限}}(\Omega, \Omega_{\text{群}})$。
- $X$ 的每个有限次幂都是休雷维奇空间。
- 玩家一在 $\mathsf{G}_{\text{有限}}(\Omega_X, \Omega_{\mathrm{gp}\,X})$ 中没有获胜策略。
- $C_p(X) \models \mathsf{S}_{\text{有限}}(\Omega_{C_p(X),\,\mathbf{0}}, \Omega_{\mathrm{gp}\,C_p(X),\,\mathbf{0}})$。
- $C_p(X)$ 是 Reznichenko 空间，并具有可数扇紧性。

类似地，结合推论 41, [14], 和 [15, 定理 26], ，我们得到:

定理 46. 对任意吉洪诺夫空间 $X$，以下条件等价:

- $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ 是 Gerlits-Nagy 空间。
- $\mathcal{P}_{\text{有限}}(X) \models \mathsf{S}_1(\Omega, \Omega_{\mathrm{gp}})$.
- $X \models \mathsf{S}_1(\Omega, \Omega_{\mathrm{gp}})$.
- $X$ 的每个有限次幂都是 Gerlits-Nagy 空间。
- 玩家一在 $\mathsf{G}_1(\Omega_X, \Omega_{\mathrm{gp}\,X})$ 中没有获胜策略。
- $C_p(X) \models \mathsf{S}_1(\Omega_{C_p(X),\,\mathbf{0}}, \Omega_{\mathrm{gp}\,C_p(X),\,\mathbf{0}})$.
- $C_p(X)$ 是 Reznichenko 空间，且具有可数强扇紧致性。

现在我们将注意力转向 $C_k(X)$。对于集合 $X$，我们用 $\wp(X)$ 表示 $X$ 的幂集。

定义47. 设 $X$ 是一个吉洪诺夫空间。我们定义 $\mathfrak{u} : C(X) \times \omega \to \mathscr{T}_X \cup \{X\}$，其规则为 $\mathfrak{u}(f,n) = f^{-1}((-2^{-n}, 2^{-n}))$。接着我们定义 $\mathbb{U} : \Omega_{C_k(X)\,\mathbf{0}} \times \omega \to \wp(\mathscr{T}_X)$，其规则为

$$\mathbb{U}(\mathscr{F}, n) = \{U \in \mathscr{T}_X : (\exists K \in K(X))(\exists f \in \mathscr{F})\ K \subseteq U \subseteq \mathfrak{u}(f,n)\}.$$

另定义 $\mathscr{D} : \mathcal{K}_X \to \wp(C(X))$，其规则为

$$\mathscr{D}(\mathscr{U}) = \{f \in C(X) : (\exists U \in \mathscr{U})\ f[X \setminus U] = \{1\}\}.$$

引理 48. 设 $X$ 是一个吉洪诺夫空间。

(i) 如果 $\mathscr{F} \in \Omega_{C_k(X),\,\mathbf{0}}$，那么，对于任意 $n \in \omega$, $\mathbb{U}(\mathscr{F}, n) \in \mathcal{K}_X$。(ii) 如果 $\mathscr{U} \in \mathcal{K}_X$，那么 $\mathscr{D}(\mathscr{U}) \in \Omega_{C_k(X),\,\mathbf{0}}$。

证明。(i)：设 $K \in K(X)$，并考虑 0 的邻域 $[\mathbf{0}; K, 2^{-n}]$。我们可以选择

$$f \in \mathscr{F} \cap [\mathbf{0}; K, 2^{-n}].$$

对每个 $x \in K$, $|f(x)| < 2^{-n}$，因此我们看到

$$\sup\{|f(x)| : x \in K\} < 2^{-n}.$$

所以 $K \subseteq f^{-1}((-2^{-n}, 2^{-n})) = \mathfrak{u}(f, n)$。若 $\mathfrak{u}(f, n) = X$，我们可以令 $U \in \mathscr{T}_X$ 使得 $K \subseteq U \subseteq \mathfrak{u}(f, n)$。于是 $U \in \mathbb{U}(\mathscr{F}, n)$。否则，$\mathfrak{u}(f, n) \in \mathbb{U}(\mathscr{F}, n)$。

(ii)：考虑 $C_k(X)$ 中 0 的任意邻域 $[\mathbf{0};\ K, \varepsilon]$。由于 $\mathscr{U} \in \mathcal{K}_X$，我们可以找到 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $K \subseteq U$。因为 $X$ 是吉洪诺夫的，我们可以找到 $f \in C(X)$，使得 $f[K] = \{0\}$ 和 $f[X \setminus U] = \{1\}$。现在，

$$f \in \mathscr{D}(\mathscr{U}) \cap [\mathbf{0}; K, \varepsilon],$$

由此完成证明。 □

我们指出，正如 [13]，中所述，[17] 已证明：$X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ 当且仅当 $C_k(X)$ 具有可数扇紧性。这一等价关系的单选择类比已在 [13] 中确立。现在，我们确立这些等价关系的可分组类比，将 $C_k(X)$ 上的 Reznichenko 性质纳入其中，从而对 [13] 的问题 4.3 作出肯定回答。为方便读者，我们给出完整证明（在有限选取的情形下）。

定理 49. 对任意吉洪诺夫空间，以下命题等价：

(i) $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$ (ii) 玩家一在 $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}})$ 中没有获胜策略。(iii) $C_k(X)$ 具有 Reznichenko 性质和可数扇紧性。(iv) $C_k(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega_{C_k(X),\,\mathbf{0}}, \Omega^{\mathrm{gp}}_{C_k(X),\,\mathbf{0}})$。

证明。(i) 与 (ii) 的等价性已在推论 33 中确立。

(i) $\Longrightarrow$ (iii)：我们首先证明 $C_k(X)$ 具有可数扇紧性。设 $\langle \mathscr{F}_n : n \in \omega \rangle$ 是一个 $\Omega_{C_k(X),\,\mathbf{0}}$ 的序列。接着令 $\mathscr{U}_n = \mathbb{U}(\mathscr{F}_n, n)$。注意，根据引理 48，$\mathscr{U}_n \in \mathcal{K}_X$。由于 $X \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$，我们可以选取 $\mathscr{G}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$，使得

$$\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{G}_n \in \mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}}.$$

根据可分组性的定义，令 $\phi : \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{G}_n \to \omega$ 为其保证存在的对象。

对每个 $n \in \omega$，定义 $\mathfrak{f}_n : \mathscr{G}_n \to \mathscr{F}_n$，使得对于 $U \in \mathscr{G}_n$，$U \subseteq \mathfrak{u}(\mathfrak{f}_n(U)\ n)$。令 $\mathscr{H}_n = \mathfrak{f}_n[\mathscr{G}_n]$，并注意到 $\mathscr{H}_n \in [\mathscr{F}_n]^{<\omega}$。

为证明 $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{H}_n \in \Omega_{C_k(X),\,\mathbf{0}}$，考虑任意一个 0 的基本邻域 $[\mathbf{0};\ K, \varepsilon]$。令 $m \in \omega$ 使得 $2^{-m} < \varepsilon$，并考虑

$$M := \max\left\{\phi(U) : U \in \bigcup_{k<m} \mathscr{G}_k\right\}.$$

根据可分组性判据，$\bigcup\{\phi^{-1}(n) : n > M\} \in \mathcal{K}_X$.因此，我们可以找到 $\ell_0 > M$和 $U \in \phi^{-1}(\ell_0)$，使得 $K \subseteq U$。由于 $\ell_0 > M$，我们知道 $U \notin \bigcup_{k<m} \mathscr{G}_k$。因此，我们可以找到 $\ell \geqslant m$，使得 $U \in \mathscr{G}_\ell$。由此可得

$$K \subseteq U \subseteq \mathfrak{u}(\mathfrak{f}_\ell(U), \ell) = \mathfrak{f}_\ell(U)^{-1}((-2^{-\ell}, 2^{-\ell})).$$

由于 $\ell \geqslant m$ 和 $2^{-m} < \varepsilon$，我们看到

$$\mathfrak{f}_\ell(U) \in [\mathbf{0}; K, \varepsilon] \cap \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{H}_n.$$

现在，我们证明 $C_k(X)$ 是 Reznichenko 性质的。设 $\mathscr{F}=\{f_n:\ n\in\omega\}\in\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}$。由推论 33 可知， $\mathbb{K}(X)$ 具有休雷维奇性质；而由定理 12 可知，玩家一在 $\mathbb{K}(X)$ 上的休雷维奇博弈中没有获胜策略。因此，我们为玩家一在 $\mathbb{K}(X)$ 上的休雷维奇博弈中定义一个策略 $\sigma$。

设 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$。对于 $K\in K(X)$，令 $\mathfrak{f}_0(K)\in[\mathbf{0};\ K,1]\cap\mathscr{F}_0$。然后令 $U_0(K)\in\mathscr{T}_X$，使得

$$K\subseteq U_0(K)\subseteq\mathfrak{f}_0(K)^{-1}((-1,1)).$$

令 $\sigma_0(\langle\rangle)=\{U_0(K):\ K\in K(X)\}$，并令 $\sigma(\langle\rangle)=\{[U]:\ U\in\sigma_0(\langle\rangle)\}$，注意到 $\sigma(\langle\rangle)$ 是 $\mathbb{K}(X)$ 的一个开覆盖。另固定一个选择函数 $\gamma_0:\ \sigma_0(\langle\rangle)\to\omega$，使得 $U\subseteq f^{-1}_{\gamma_0(U)}((-1,1))$，并注意到 $U\mapsto[U]$, $\sigma_0(\langle\rangle)\to\sigma(\langle\rangle)$ 是一个双射。

对于 $k\in\omega$，假设我们有 $\langle\mathscr{V}^*_j:\ j<k\rangle$, $\langle\mathscr{V}_j:\ j<k\rangle$, $\langle M_j:\ j<k\rangle$, $\sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:\ j<k\rangle)$,$\sigma(\langle\mathscr{V}_j:\ j<k\rangle)$, $\langle\gamma_j:\ j\leqslant k\rangle$，且 $\langle\mathscr{F}_j:j\leqslant k\rangle$ 已定义。对于任意 $\mathscr{V}_k\in[\sigma(\langle\mathscr{V}_j:\ j<k\rangle)]^{<\omega}$，令$\mathscr{V}^*_k\in[\sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:\ j<k\rangle)]^{<\omega}$，使得 $\{[U]:\ U\in\mathscr{V}^*_k\}=\mathscr{V}_k$。另外，令 $M_k=\max\gamma_k[\mathscr{V}^*_k]$ 和 $\mathscr{F}_{k+1}=\{f_n:n>M_k\}$。

对于 $K\in K(X)$，令 $\mathfrak{f}_{k+1}(K)\in[\mathbf{0};K,2^{-k-1}]\cap\mathscr{F}_{k+1}$。然后令 $U_{k+1}(K)\in\mathscr{T}_X$ 满足

$$K\subseteq U_{k+1}(K)\subseteq\mathfrak{f}_{k+1}(K)^{-1}((-2^{-k-1},2^{-k-1})).$$

定义

$$\sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:j\leqslant k\rangle)=\{U_{k+1}(K):K\in K(X)\}$$

以及 $\sigma(\langle\mathscr{V}_j:\ j\leqslant k\rangle)=\{[U]:\ U\in\sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:\ j\leqslant k\rangle)\}$。注意， $U\mapsto[U]$, $\sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:\ j\leqslant k\rangle)\to\sigma(\langle\mathscr{V}_j:j\leqslant k\rangle)$ 是一个双射。还要注意， $\sigma(\langle\mathscr{V}_j:\ j\leqslant k\rangle)$ 是 $\mathbb{K}(X)$ 的一个开覆盖，并固定一个选择函数 $\gamma_{k+1}:\ \sigma_0(\langle\mathscr{V}_j:\ j\leqslant k\rangle)\to\{n\in\omega:\ n>M_k\}$，使得

$$U\subseteq f^{-1}_{\gamma_{k+1}(U)}((-2^{-k-1},2^{-k-1})).$$

这定义了玩家一在 $\mathbb{K}(X)$ 上的休雷维奇博弈中的一个策略 $\sigma$。由于 $\sigma$ 并未获胜，存在一个选择序列 $\langle\mathscr{V}_n:\ n\in\omega\rangle$，以及一个如上所述相应的自然数递增序列 $\langle M_n:\ n\in\omega\rangle$，使得

$$(\forall K\in\mathbb{K}(X))(\exists m\in\omega)(\forall n\geqslant m)\ K\in\bigcup\mathscr{V}_n.$$

定义 $\phi:\ \mathscr{F}\to\omega$ 由 $\phi(f_n)=\min\{k\in\omega:\ n\leqslant M_k\}$。我们证明这满足可分组性的判据。设 $J\subseteq\omega$ 为无限集，并考虑 $\mathbf{0}$ 的任意邻域 $[\mathbf{0};\ K,\varepsilon]$。我们可以找到 $\ell\in J$，使得 $K\in\bigcup\mathscr{V}_\ell$，且 $2^{-\ell}<\varepsilon$。因此存在某个 $U\in\mathscr{V}^*_\ell$，使得 $K\in[U]$，也就是说 $K\subseteq U$。根据构造， $M_{\ell-1}<\gamma_\ell(U)\leqslant M_\ell$，所以 $\phi(f_{\gamma_\ell(U)})=\ell$。进一步观察

$$K\subseteq U\subseteq f^{-1}_{\gamma_\ell(U)}((-2^{-\ell},2^{-\ell})).$$

也就是说，$f_{\gamma_\ell(U)}\in[\mathbf{0};\ K,\varepsilon]$。因此， $\bigcup\{\phi^{-1}(n):\ n\in J\}\in\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}$。

蕴含关系 (iii) $\Longrightarrow$(iv) 显然成立。

(iv) $\Longrightarrow$ (i)：我们将证明 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K})$，并证明 $\mathcal{K}^{\mathrm{gp}}_X=\mathcal{K}_X\cap[\mathscr{T}_X]^\omega$；根据推论 33，这便确立了该蕴含关系。

为了证明 $X\models\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K},\mathcal{K})$，令 $\langle\mathscr{U}_n:\ n\in\omega\rangle$ 为 $X$ 的一列 $k$-覆盖。由引理 48，$\langle\mathscr{D}(\mathscr{U}_n):\ n\in\omega\rangle$ 是 $\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}$ 的一个序列。于是，对每个 $n\in\omega$，我们可以选取 $\mathscr{G}_n\in[\mathscr{D}(\mathscr{F}_n)]^{<\omega}$，使得 $\bigcup_{n\in\omega}\mathscr{G}_n\in\Omega_{C_p(X),\mathbf{0}}$。现在，对每个 $\mathscr{G}_n$，令 $\mathscr{H}_n\in[\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ 满足：对于 $f\in\mathscr{G}_n$，存在某个$U\in\mathscr{H}_n$ 使得 $f[X\setminus U]=\{1\}$。我们证明 $\bigcup_{n\in\omega}\mathscr{H}_n\in\mathcal{K}_X$。因此，令 $K\in K(X)$，并考虑 $\mathbf{0}$ 的邻域 $[\mathbf{0};K,1/2]$。我们可以找到 $n\in\omega$ 和 $f\in\mathscr{G}_n$，使得 $f\in[\mathbf{0};\ K,1/2]$。那么，对于满足 $f[X\setminus U]=\{1\}$ 的$U\in\mathscr{H}_n$，我们有 $K\subseteq U$。因此，$\bigcup_{n\in\omega}\mathscr{H}_n\in\mathcal{K}_X$。

为了证明 $X$ 的每个可数 $k$-覆盖都是可分组的，令 $\mathscr{U}=\{U_n:\ n\in\omega\}\in\mathcal{K}_X$。我们将为玩家一在 $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_X)$ 中定义一种策略。

对于每个 $K\in K(X)$ 和满足 $K\subseteq U$ 的 $U\in\mathscr{U}$，令 $f_{K,U}\in C(X)$ 满足 $f_{K,U}[K]=\{0\}$ 且$f_{K,U}[X\setminus U]=\{1\}$。由此可得

$$\mathscr{F}_0:=\{f_{K,U}:K\in K(X),U\in\mathscr{U},K\subseteq U\}\in\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}.$$

根据 $C_k(X) \models \mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}\Omega^{\mathrm{gp}}_{C_k(X),\mathbf{0}})$，我们可以找到 $\{g_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{F}_0$ 以及一个自然数递增序列$\langle M_n : n \in \omega\rangle$，使得 $\psi : \{g_n : n \in \omega\} \to \omega$ 定义为

$$\psi(g_n) = \min\{\ell \in \omega : n \leqslant M_\ell\}$$

满足可分组性条件。特别地，注意，对于任意 $K \in K(X)$，存在某个 $m \in \omega$，使得对于所有 $n \geqslant m+1$,

$$[\mathbf{0}; K, 1/2] \cap \{g_\ell : M_{n-1} < \ell \leqslant M_n\} \neq \emptyset.$$

定义 $\gamma : \omega \to \omega$，使得

$$\gamma(n) = \min\{k \in \omega : g_n[X \setminus U_k] = \{1\}\}$$

并令

$$\sigma(\langle\rangle) = \mathscr{W} := \{U_{\gamma(n)} : n \in \omega\}.$$

注意，$\sigma(\langle\rangle) \in \mathcal{K}(X)$。

对于 $k \in \omega$，假设已定义 $\langle \mathscr{V}_j : j < k\rangle$、$\langle \nu_j : j < k\rangle$、$\langle \mu_j : j < k\rangle$ 和 $\sigma(\langle \mathscr{V}_j : j < k\rangle)$。对于 $\mathscr{V}_k \in [\sigma(\langle \mathscr{V}_j : j < k\rangle)]^{<\omega}$，考虑 $\Lambda \in [\omega]^{<\omega}$，使得 $\mathscr{V}_k = \{U_{\gamma(n)} : n \in \Lambda\}$。令$\mu_k = \max\{\psi(g_n) : n \in \Lambda\}$，并令 $\nu_k = \max\{\gamma(n) : n \leqslant M_{\mu_k}\}$。现在，定义

$$\sigma(\langle \mathscr{V}_j : j \leqslant k\rangle) = \{U_n : n > \nu_k\} \cap \mathscr{W} \in \mathcal{K}_X.$$

这就完成了 $\sigma$ 的定义。根据定理 32，$\sigma$ 不可能是获胜策略。因此，存在一局游戏 $\langle \mathscr{V}_n : n \in \omega\rangle$ 由玩家二进行，并击败 $\sigma$。我们还有辅助序列 $\langle \nu_n : n \in \omega\rangle$ 和$\langle \mu_n : n \in \omega\rangle$，其定义如上。

我们证明序列 $\langle \nu_n : n \in \omega\rangle$ 和 $\langle \mu_n : n \in \omega\rangle$ 严格递增。令 $k \in \omega$，并注意到

$$\sigma(\langle \mathscr{V}_j : j \leqslant k\rangle) = \{U_n : n > \nu_k\} \cap \mathscr{W}.$$

现在，考虑 $\Lambda_0$、$\Lambda_1 \in [\omega]^{<\omega}$，使得 $\mathscr{V}_k = \{U_{\gamma(n)} : n \in \Lambda_0\}$ 且 $\mathscr{V}_{k+1} = \{U_{\gamma(n)} : n \in \Lambda_1\}$。对于 $\ell \in \Lambda_1$，注意到 $\gamma(\ell) > \nu_k$。由于 $\nu_k = \max\{\gamma(n) : n \leqslant M_{\mu_k}\}$，我们看到 $\ell > M_{\mu_k}$。因此，

$$\psi(g_\ell) > \max\{\psi(g_n) : n \in \Lambda_0\} = \mu_k$$

因此 $\mu_{k+1} > \mu_k$。此外，不等式 $\nu_k < \gamma(\ell)$ 和 $\ell \leqslant M_{\psi(g_\ell)} \leqslant M_{\mu_{k+1}}$ 表明 $\nu_k < \nu_{k+1}$。

因此，我们按如下规则定义 $\phi : \mathscr{U} \to \omega$ $(U_n) = \min\{k \in \omega : n \leqslant \nu_k\}$. 。我们证明 $\phi$ 满足可群化性判据。于是，设 $J \subseteq \omega$ 为无限集，令 $K \in K(X)$ 任意，并考虑 $[\mathbf{0}; K, 1/2]$。根据我们对 $\{g_n : n \in \omega\}$ 的定义，可以令 $j \in J$, $j > 0$，使得

$$[\mathbf{0}; K, 1/2] \cap \{g_\ell : M_{\mu_{j-1}} < \ell \leqslant M_{\mu_j}\} \neq \emptyset.$$

于是，令 $\ell \in (M_{\mu_{j-1}}, M_{\mu_j}]$，使得 $g_\ell \in [\mathbf{0}; K, 1/2]$，并注意到 $K \subseteq U_{\gamma(\ell)}$。由于 $\ell \leqslant M_{\mu_j}$，我们看到 $\gamma(\ell) \leqslant \nu_k$。此外，由于区间 $(M_{\mu_{j-1}}, M_{\mu_j}]$ 是按照 $\sigma$ 在 $j^{\text{th}}$inning 中定义的，我们知道 $\gamma(\ell) > \nu_{j-1}$。因此，$\phi(U_{\gamma(\ell)}) = j$，证明完毕。□

最后，我们给出定理 49 的单选择类比。证明从略，因为它与定理 49 的证明几乎完全相同。需要注意的关键一点是，上文对有限次选取的转移允许以相同方式转移单次选择。此外，证明中使用的推论 33 需要替换为推论 35。

定理50. 对于任意吉洪诺夫空间，以下命题等价：

(i) $X \models \mathsf{S}_1(\mathcal{K}, \mathcal{K}^{\mathrm{gp}})$ (ii) 玩家一在 $\mathsf{G}_1(\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_X^{\mathrm{gp}})$ 中没有获胜策略。(iii) $C_k(X)$ 是 Reznichenko 空间，并具有可数强扇紧致性。(iv) $C_k(X) \models \mathsf{S}_1(\Omega_{C_k(X),\mathbf{0}}, \Omega^{\mathrm{gp}}_{C_k(X),\mathbf{0}})$。

## References

[1] N. Alam 和 D. Chandra, *Some remarks on games of certain star selection principles*, Acta Math. Hung. 166 (2022年), 第 2 期, 373–392。[2] A.V. Arhangel'skii, *Hurewicz spaces, analytic sets, and fan tightness of function spaces*, Sov. Math., Dokl. 33 (1986), 396–399。[3] Christopher Caruvana 和 Jared Holshouser, *Selection games and the Vietoris space*, Topology Appl. 307 (2022年), 107772。[4] Steven Clontz, *Dual selection games*, Topology Appl. 272 (2020), 107056。[5] Ricardo Cruz-Castillo、Alejandro Ram

´ ´ ´ *Hurewicz and Hurewicz-type star se-* ırez-Paramo 和 *lection principles for hit-and-miss topology* **37** 2023 4, 1143 1153 Jesus F. Tenorio, , Filomat (), 第 – 期。[6] Pratulananda Das、Upasana Samanta 和 Debraj Chandra, *On certain generalized versions of groupability*, Topology Appl. 258 (2019), 47–57。[7] , *Some observations on Hurewicz and I-Hurewicz property*, Topology Appl. 258 (2019), 202–214。[8] Ryszard Engelking, *General Topology*, 纯数学 Sigma 丛书, 第 6 卷, Heldermann Verlag, 1989年。[9] J. Gerlits 和 Zs. Nagy, *Some properties of C(X). I*, Topology Appl. 14 (1982), 151–161。[10] Henri Hogbe-Nlend, *Bornologies and functional analysis. Introductory course on the theory of duality topology-* , *bornology and its use in functional analysis. Translated from the French by V. B. Moscatelli*

North-Holland 数学研究, 第 26 卷, Elsevier, 阿姆斯特丹, 1977年。[11] W. Hurewicz, *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems.*, Math. Z. 24 (1925年), 401–421。[12] Winfried Just、Arnold W. Miller、Marion Scheepers 和 Paul J. Szeptycki, *The combinatorics of open covers.* , Topology *II* **73** 1996 3, 241 266 Appl. (), 第 – 期。[13] Ljubiˇsa D. R. Koˇcinac, *Closure properties of function spaces*, Appl. Gen. Topol. 4 (2003年), 第 2 期, 255–261。[14] Ljubiˇsa D. R. Koˇcinac 和 Marion Scheepers, *Function spaces and a property of Reznichenko*, Topology Appl. 123 (2002), 第 1 期, 135–143。[15] , *Combinatorics of open covers. VII: Groupability*, Fundam. Math. 179 (2003年), 第 2 期, 131–155。[16] Zuquan Li, *Selection principles of the Fell topology and the Vietoris topology*, Topology Appl. 212 (2016年), 90–104。[17] Shou Lin、Chuan Liu 和 Hui Teng, *On fan tightness and strong Fréchet property for $C_k(X)$*, Adv. Math., Beijing 23 (1994年), 第 3 期, 234–237（中文）。[18] V. I. Malykhin 和 G. Tironi, *Weakly Fréchet-Urysohn and Pytkeev spaces*, Topology Appl. 104 (2000), 181–190。[19] Ernest Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Am. Math. Soc. 71 (1951年), 152–182。[20] Andrei Nowik、Marion Scheepers 和 Tomasz Weiss, *The algebraic sum of sets of real numbers with strong measure zero sets* **63** 1998 1, 301 324 ,

J. Symb. Log. (), 第 – 期。[21] Alexander V. Osipov, *A functional characterization of the Hurewicz property*, Iran. J. Math. Sci. Inform. 17 (2022年), 第 1 期, 99–109。[22] Masami Sakai, *Property C″ and function spaces*, Proc. Am. Math. Soc. 104 (1988年), 第 3 期, 917–919。[23] Marion Scheepers, *Combinatorics of open covers. I: Ramsey theory*, Topology Appl. 69 (1996年), 第 1 期, 31–62。[24] , *Combinatorics of open covers. III: Games, $C_p(X)$*, Fundam. Math. 152 (1997年), 第 3 期, 231–254。[25] , *A sequential property of $C_p(X)$ and a covering property of Hurewicz*, Proc. Am. Math. Soc. 125 ( 1997年), 第 9 期, 2789–2795。[26] Boaz Tsaban, *The Hurewicz covering property and slaloms in the Baire space* **181** 2004 3, , Fundam. 273 280 Math. (), 第 – 期。[27] , *Menger's and Hurewicz's problems: solutions from "The Book" and refinements*, 《集合论及其应用》, 集合论年度博伊西盛会, 1995—2010年, 美国爱达荷州博伊西, 普罗维登斯, 罗得岛州: 美国数学会（AMS）, 2011年, 第 211–226 页。

School of Sciences, Indiana University Kokomo, 2300 S. Washington St., Kokomo, IN 46902, United States of America.

*Email address*: chcaru@iu.edu