arXiv:2303.11796v1 [math.CT] 21 Mar 2023

无界扭曲复形

Rina Anno 和 Timothy Logvinenko

Abstract. 我们定义无界扭曲复形和双复形，将 DG 范畴[BK90]上的（有界）扭曲复形这一概念加以推广。这些概念需要相对于另一个 DG 范畴$\mathcal{B}$来考察，后者需允许可数直和和移位。由此得到的无界扭曲复形 DG 范畴具有一个全忠实的卷积函子，映入模-$\mathcal{B}$；若后者允许微分变换，该函子便经由$\mathcal{B}$进行因子分解。作为应用，我们用扭曲复形重新表述 A_∞-结构的定义，使其适用于任意幺半 DG 范畴或 DG 双范畴。

1. Introduction

Bondal 和 Kapranov [BK90] 引入了 DG 范畴中对象的扭曲复形这一概念，并将其用作研究和构造三角范畴的 DG 增强的工具。DG 范畴 A 上的单侧扭曲复形，可以看作是其同伦范畴 H^0(A) 中对象的有界复形在 A 中的提升。该提升包含复形中的映射、使连续映射的复合为零的同伦，以及更高阶同伦。除了 H^0(A) 中的对象复形外，这些数据还指定了其卷积的选取，以及一组用于计算该卷积的 Postnikov 系统 [AL21, §2.4]。取 A 上单侧扭曲复形所成的范畴，是取 H^0(A) 的三角包的一种 DG 实现。如今，扭曲复形在研究 DG 范畴及其模时已无处不在 [Kel06] [To¨e11][LO10][AL19][Bar22]。

本文将扭曲复形的概念推广到包含无界复形的情形。作者在实际工作中需要这一推广，并原以为推广过程会很直接。结果却发现其中涉及许多微妙之处。本文旨在记录这些细节，以供他人参考。我们还给出最初考虑的应用：用扭曲复形重述 A_∞-结构[Kel01][LH03][Lyu03] 的定义。这样便可将它们与微分 m_1 分离开来，并使其能够在任意幺半 DG 范畴中运作。

现在我们更详细地介绍本文的结果。在§2 中，我们回顾原始定义 :

定义 1.1 ([BK90]). 一个 扭曲复形由 DG 范畴$\mathcal{A}$ 上的以下数据组成

- $\forall\, i \in \mathbb{Z}$，A 的一个对象 a_i，且仅对有限个 i 非零，
- $\forall\, i,\ j \in \mathbb{Z}$，A 中一个次数为 $i-j+1$ 的态射 $\alpha_{ij}\colon a_i \to a_j$，

满足

$$(-1)^j d\alpha_{ij} + \sum_k \alpha_{kj} \circ \alpha_{ik} = 0. \tag{1.1}$$

扭曲复形条件可作如下理解。我们有 Yoneda 嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$。考虑对象 $\oplus a_i[-i]$ 属于 $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$。和 $\sum \alpha_{ij}$是它的 1 次端同态。令 d_{nat} 为 $\oplus a_i[-i]$上的自然微分。条件（1.1）等价于 $d_{nat} + \sum \alpha_{ij}$ 的平方为零。

换言之，扭曲复形所包含的数据会将 d_{nat} 变为 $\oplus a_i[-i]$上的新微分。由此得到的 Mod -A 中的新对象称为扭曲复形 (a_i, α_{ij}) 的卷积。对于形如 $a_0 \to a_1$ 的特殊情形，卷积就是锥构造。

次数 n 态射 $(a_i, \alpha_{ij}) \to (b_i, \beta_{ij})$ 扭曲复形的对象族$\{f_{ij}\}$ 态射 $f_{ij}: a_i \to b_j$属于 $\mathcal{A}$，次数为 $n + i - j$。它们的复合与微分定义如下，以确保卷积成为所得 DG 范畴 Tw $\mathcal{A}$到 Mod-$\mathcal{A}$中的全忠实嵌入，见定义 2.2。事实上，将模 $\oplus a_i[-i]$ 赋给对象族 $\{a_i\}$这一操作决定了扭曲复形及其态射定义的其余部分。

这些定义可以推广到无限对象族 $\{a_i\}$ ，从而得到无界扭曲复形的一种“朴素”概念 $\{a_i, \alpha_{ij}\}$，见定义 3.2。此时和 $\sum \alpha_{ij}$ 是无限的，并且不一定定义 $\oplus a_i[-i]$ 在 Mod -$\mathcal{A}$中的 1 次端同态，因此我们将此作为一项附加条件。这意味着对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，仅有有限多个 $\alpha_{ij} \neq 0$；扭曲复形态射的分量 f_{ij} 也有类似的条件。我们仍有 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}\,\mathcal{A} \hookrightarrow$ Mod-$\mathcal{A}$。

然而，“朴素”的范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$A 往往并非我们想要的。首先，当 A 不是小范畴时，范畴 Mod-A 并非良定义。$\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$A 的定义仍然有效，但要得到卷积函子，我们需要扩大宇宙，使 A 成为小范畴。更重要的是，即使 A 是小范畴，它也可能存在其对象的可数个移位直和 $\oplus a_i[-i]$ 。

主要的微妙之处在于，无限直和与 Yoneda 嵌入 A $\hookrightarrow$Mod -A 不交换，这一点不同于有限直和（例 3.1）。因此，赋给扭曲复形 (a_i, α_{ij}) 的直和 $\oplus a_i[-i]$ 可以在 Mod -A 中取，也可以在 A 中取。前者得到“朴素”的范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$A，后者则得到严格更大的范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{A}}$A；在该范畴中，只要 $\sum \alpha_{ij}$ 仍是 A 中 $\oplus a_i[-i]$ 的自同态，任意 $i \in \mathbb{Z}$ 都可以有无限多个非零的 α_{ij} 。$\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$ A 与 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{A}}$A 之间的差异仅在于无界扭曲复形。若 A 允许微分变换（定义 3.5），卷积函子取值于 A。上述考量均适用于 A = Mod -C 且 C 为小范畴的情形（例 3.3）。

这促使我们§3，在此我们定义相对于嵌入的无界扭曲复形$\mathcal{A}$ 到另一个 DG 范畴$\mathcal{B}$:

定义 1.2 （参见定义3.4）。设$\mathcal{A}$ 是一个 DG 范畴，它全忠实嵌入到一个 DG 范畴$\mathcal{B}$ 中，而后者具有可数直和与移位。

相对于 B 的 A 上的无界扭曲复形由以下各项组成:

- $\forall\, i \in \mathbb{Z}$，一个 A 的对象 a_i ，
- $\forall\, i, j \in \mathbb{Z}$，一个次数为 $i - j + 1$ 的 A 中的态射 $\alpha_{ij}: a_i \to a_j$，

满足

- $\sum \alpha_{ij}$ 是 B 中 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$ 的自同态，
- 扭曲复形条件（1.1）。

相对于 B，A 上的无界扭曲复形的 DG 范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}$(A) 以唯一的方式定义，使得卷积函子是全忠实的

$$\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{B}, \tag{1.2}$$

which 将任意 (a_i, α_{ij}) 映射为 $\oplus a_i[-i]$，并将其自然微分修改为 $\sum \alpha_{ij}$.

任意如上所述的 B 允许进行微分变换，当且仅当它允许无界扭曲复形的卷积。在这种情况下，对于任意 A $\subseteq$ B，卷积

函子 (1.2) 取值于 $\mathcal{B}$ (引理 3.7）。因此，我们可以使用非小范畴上的无界扭曲复形，而不会遇到集合论方面的问题。

在 §4 中，我们朝另一个方向推广扭曲复形，并定义 A 上的扭曲双复形（定义 4.1）。这类对象是双分次扭曲复形。为了处理无界情形，我们再次固定 A 到某个 DG 范畴 B 的一个嵌入。我们将由此得到的无界扭曲复形范畴记为 $\mathrm{Twbi}^{\pm}{}_{\mathcal{B}}(A)$。扭曲双复形既不是由其行构成的扭曲复形，也不是由其列构成的扭曲复形。只有经过符号扭转后，它才成为扭曲复形。我们将其明确写成一对函子

$$\mathcal{C}\mathrm{xrow}, \mathcal{C}\mathrm{xcol}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{A}\right)\right) \to \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

我们关联这两个函子的像，并证明若只考虑单侧扭曲复形和双复形，则二者都成为同构（命题 4.3）。

最后，在 §5 中，我们给出心中设想的主要应用：用扭曲复形的语言重新表述并推广 A_∞-代数和模的定义 [LH03，§2] 。这样便无需显式处理运算 m_1 （微分），并使这些定义适用于任意 DG 单体范畴 $\mathcal{A}$ （或更一般地，DG双范畴）。

在§5.1 中，我们给出了由此得到的定义。这些定义都要求将 A_∞-运算的条/余巴构造视为扭曲复形。由于这些构造涉及无穷多个对象，我们需要无界扭曲复形理论。在条构造中，从扭曲复形的每个元素出发的箭头数量有限。因此，我们对 A_∞-代数或 A_∞-模的定义，不依赖于用于定义无界扭曲复形的环境范畴 $\mathcal{B}$ 。而在余巴构造中，情况不再如此，$\mathcal{B}$ 的选择会产生影响。我们在[AL23] 中进一步研究了这些定义；其中的§3.2 详细阐述了它们如何推广经典定义[LH03, §2] [Lyu03]。

在 §5.2 中，我们考察 A_∞-模的扭曲复形。按照 §5.1 的记法，令 Nod$_\infty$-A 表示幺半 DG 范畴 A 中某个 A_∞-代数 A 上的 A_∞-模范畴。我们定义 Nod$_\infty$-A 上的扭曲复形时，既不相对于 Mod -(Nod$_\infty$-A)，也不相对于 Nod$_\infty$-A。相反，我们将 A 嵌入一个余完备闭幺半 DG 范畴 B 中，该范畴具有无界扭曲复形的卷积，并相对于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$定义扭曲复形，其中 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$是 B 中 A_∞-A-模的范畴。由于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$同样具有无界扭曲复形的卷积（推论 5.14），Nod$_\infty$-A 上的扭曲复形的卷积取值于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$。我们总可以令 B = Mod -A，并赋予其诱导的幺半结构 [GKL21, §4.5]。不过，例如对于某个模范畴中的 A_∞-模，我们可能需要作出不同选择。

然后，我们运用在 §4 中发展出的扭曲双复形技术，证明 A_∞-模的扭曲复形以一种能够对其底层对象的扭曲复形赋予 A_∞-模结构的方式，给出了相应范畴的全忠实嵌入（命题 5.12）。由此可得，DG 范畴Nod$_\infty$-A 上的 A_∞-模的 A_∞-代数 A 是预三角化的（分别地，容许无界扭曲复形的卷积），当且仅当我们所研究的 DG 单体范畴 $\mathcal{A}$是如此（分别地，确实容许）（推论 5.13）。

在附录中，我们描述了 A_∞-模的结构同伦传递。我们知道 [Gen22] 中有一种无界扭曲复形 DG 范畴的替代定义。该定义忽略了我们所考虑的微妙之处，因为它对扭曲复形中的微分 α_{ij} 以及其态射的分量 f_{ij} 不施加任何有限性条件。由此得到的范畴不具有卷积函子，更适用于与我们的目的不同的研究。

致谢：我们感谢 Sergey Arkhipov、Alexander Efimov 和 Dmitri Kaledin 提供了有益的讨论。第一作者感谢堪萨斯州立大学在撰写本文期间提供了富有启发性的研究环境。第二作者也要感谢卡迪夫大学和波恩马克斯·普朗克数学研究所。

2. Preliminaries

2.1. DG 范畴。 关于 DG-范畴、DG 模以及相关技术概念的简要介绍，我们请读者参阅综述 [AL17], §2-4。其他不错的资料来源有 [Kel94], [To¨e07], [To¨e11], 以及 [LO10]。

我们总结本文相关的关键概念。全文中，我们都在一个固定的集合宇宙 $\mathbb{U}$ 内工作，该宇宙包含一个无限集。我们还固定所采用的基域或交换环 k 。

我们将 Mod -k 定义为由 $\mathbb{U}$-小的 k-模复形构成的范畴。它是一个余完备闭对称幺半范畴，其幺半运算为 $\otimes_k$ ，单位元为 k。DG 范畴是一个以 Mod -k为底的富化范畴。特别地，任何 DG 范畴都是局部小的。

若 DG 范畴 A 是小的，我们用 Mod -A 表示（右）A-模构成的 DG 范畴。这些模是函子 $\mathrm{A}^{\mathrm{opp}} \to$ Mod -k，因此 Mod -A $=$ DGFun($\mathrm{A}^{\mathrm{opp}}$, Mod -$k$)。注意，若 A 不是小的，则 Mod -A 没有意义。它甚至不是上述意义下的 DG 范畴——其态射空间不再是小的，因而不属于 Mod -k。

我们总可以将宇宙 $\mathbb{U}$扩大为一个宇宙 $\mathbb{V}$ ，使得 A 是小的。这样会扩大 Mod -k，因此 Mod -A 取决于 $\mathbb{V}$的选择。不过，在本文中，我们只将 Mod -A 用作 A 上扭曲复形卷积的目标。就此而言， $\mathbb{V}$ 的选择并不重要——我们在 Mod -A 中唯一涉及的部分，是对带有修改后的微分的 A 中对象的移位取可数直和。

因此，当 A 不是小的时，我们所说的 Mod -A，是指在 $\mathbb{U}$的某个适当扩张 $\mathbb{V}$ 中取的 A 的模范畴。此外，本文中的构造（例如相对于 DG 范畴 B 所取的 A 上扭曲复形范畴的构造），正是为了在 A 不是小的情况下，能够用更合适的对象替代 Mod -A。

2.2. 关键同构。 设 $\mathcal{A}$是一个 DG-范畴，令 $E, F \in$ Mod -$\mathcal{A}$ 以及 $i, j \in \mathbb{Z}$。扭曲复形理论 [BK90]（我们将在 §2.3 中概述）关键取决于一个同构的选择

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, F)[j-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i], F[j]). \tag{2.1}$$

最简单的这类同构是：

定义 2.1. 设 A 为一个 DG-范畴， $E, F \in$ Mod -A 且 $i, j \in \mathbb{Z}$。定义分次 k-模之间的同构

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, F)[j-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i], F[j]) \tag{2.2}$$

它将任意 $f \in \mathrm{Hom}^p{}_{\mathcal{A}}(E, F)$ 映射为其自身，并将其视为 $\mathrm{Hom}^{p-j+i}(E[i], F[j])$ 的一个元素。换言之，遗忘分次后，在每个 $a \in$A 上的每个纤维中，映射 $\psi(f)$ 与 f 是相同的 k-向量空间映射。

注意， ψ 与这些微分不兼容：

$$d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i], F[j])} \circ \psi = (-1)^i \psi \circ d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,F)[j-i]}.$$

至少有两种自然的方法可以解决这个问题。定义

$$\psi_1, \psi_2 \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,F)[j-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i], F[j])$$

是将 $f \in \mathrm{Hom}^p{}_{\mathcal{A}}(E,F)$ 映到 $(-1)^{ip}\psi(f)$ 和 $(-1)^{i(p-j+i)}\psi(f)$ 的映射。两者的区别在于，我们将 i 乘以 f在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,F)$ 中的次数，还是它在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,F)[j-i]$ 中的次数。

ψ_1 和 ψ_2 都是 DG k-模的同构。然而，它们与复合不相容。具体来说，设 E、F、$G \in$ 属于 Mod -A，且 i、j、$k \in \mathbb{Z}$，那么例如，同构

$$\psi_1(E,i,G,k) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,G)[k-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i], G[k])$$

并非 $\psi_1(E,i,F,j)$ 与 $\psi_1(F,j,G,k)$ 的复合。另一方面， ψ 虽然与微分不相容，却与复合相容。

扭曲复形理论及其基本定义取决于同构（2.1）的选择。扭曲复形的 DG 范畴 $\mathrm{Tw}(\mathcal{A})$的定义方式旨在确保存在一个全忠实函子 $\mathrm{Tw}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$ 称为卷积，参见 §2.3。该函子利用同构（2.1）定义，因此，选择不同的同构会导致 $\mathrm{Tw}(\mathcal{A})$的定义公式不同。

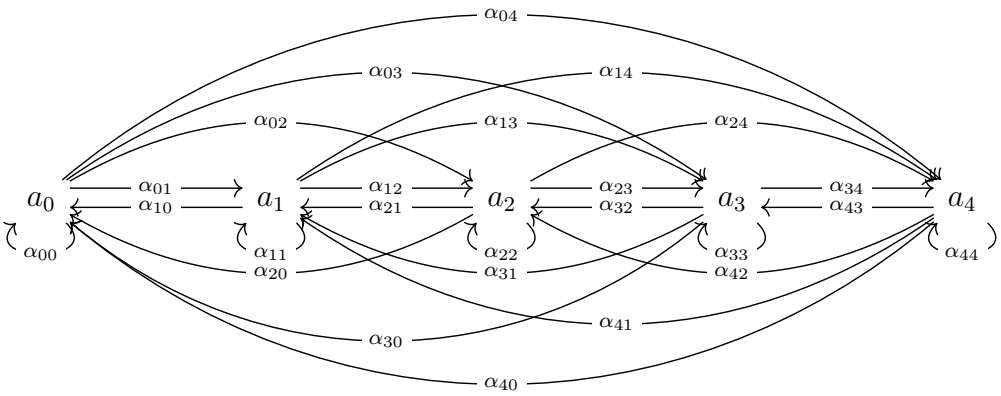
与微分 ψ 不相容，使得这些公式中每次出现微分时都要引入一个简单的符号 $d_{\mathcal{A}}$ （属于 $\mathcal{A}$），参见 (2.3) 和 (2.5)。另一方面， ψ_1 与 ψ_2 不相容，使得同样的公式中每次复合两个 $\mathcal{A}$ 中态射时都要引入一个复杂的符号。

定义扭曲复形时，我们选择使用分次模同构 ψ，将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,F)[j-i]$与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E[i],F[j])$视为相同。我们固定这一选择，并在以下各节中默认使用。

2.3. 有界扭曲复形。 这里我们概述一些关于通常的有界扭曲复形的已知事实。这一概念最初由 Bondal 和 Kapranov 在 [BK90] 中引入：

定义 2.2. DG 范畴 A 上的扭曲复形是由以下元素组成的集合

- $\forall\, i \in \mathbb{Z}$，A 的一个对象 a_i，且仅对有限多个 i 非零，
- $\forall\, i,j \in \mathbb{Z}$，A 中的 $i-j+1$ 次 $\alpha_{ij} \colon a_i \to a_j$态射，



满足该条件

$$(-1)^j d\alpha_{ij} + \sum_k \alpha_{kj} \circ \alpha_{ik} = 0. \tag{2.3}$$

将 A 上的扭曲复形所构成的 DG 范畴 Tw(A) 定义为

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{Tw}(\mathcal{A})}\big((a_i,\alpha_{ij}),(b_i,\beta_{ij})\big) := \bigoplus_{q,k,l\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^q_{\mathcal{A}}(a_k,b_l) \tag{2.4}$$

其中，每个 $f \in \mathrm{Hom}^q{}_{\mathcal{A}}(a_k,b_l)$ 的次数为 $q+l-k$，且

$$df := (-1)^l d_{\mathcal{A}} f + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\beta_{lm}\circ f - (-1)^{q+l-k} f\circ\alpha_{mk}\right), \tag{2.5}$$

其中 $d_{\mathcal{A}}$ 是 A 中态射上的微分。

该定义确保 Tw(A) 同构于 Mod -A 的全子范畴，该子范畴由底层分次模形如 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$ 且只有有限个 $a_i \in$A 非零的 DG A-模组成。事实上：

- 扭曲复形条件（2.3）等价于 $d_{nat} + \sum_{i,\ j}\alpha_{ij}$ 是其上的另一种微分 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$。这里 d_{nat} 是其自然微分。
- Hom 复形（2.5）定义为具有相同底层分次k-模，即

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}}\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} a_k[-k], \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} b_l[-l]\right) = \bigoplus_{k,l\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\bullet-l+k}_{\mathcal{A}}(a_k,b_l)\,. \tag{2.6}$$

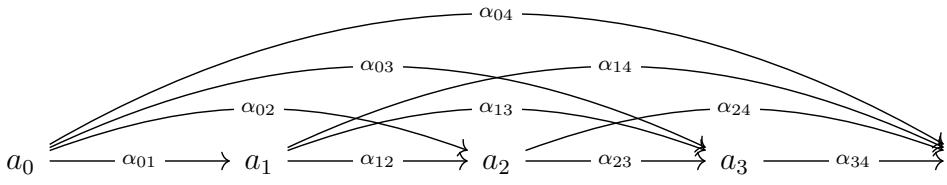
而微分（2.5）的定义使其在此识别下与给两个直和赋予新的微分后在（2.6）上得到的微分相一致。

因此，我们有一个全忠实的卷积函子

$$\mathrm{Conv}\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$$

它将每个 (a_i,α_{ij}) 映到赋有新微分 $d_{nat}+\sum\alpha_{ij}$ 的 A-模 $\oplus a_i[-i]$。注意，一旦固定了将分次模 $\oplus a_i[-i]$ 赋给任意集合 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 的对应关系，这个函子的存在性便可用作范畴 Tw(A) 的定义。

若对所有 $i \geq j$ 都有 $\alpha_{ij}=0$，则称扭曲复形为单侧的。



(2.7)

若 (a_i,α_{ij}) 是 A 上的单侧扭曲复形，则 (a_i,α_{ij}) 是 H^0(A) 上的一个（通常意义下的）复形。因此，单侧扭曲复形可视为 H^0(A) 中通常复形到 A 的同伦提升。Tw(A) 中由单侧扭曲复形组成的全子范畴称为 A 的预三角包，记作 Pre-Tr(A)。若 DG 范畴 A 到 Pre-Tr(A) 的自然嵌入 $\hookrightarrow$ 是拟等价（分别为等价），则称 A 为预三角化的（分别为强预三角化的）。

“预三角化”一词的由来是，H^0(Pre-Tr(A)) 是 H^0(Mod-A) 中 H^0(A) 的三角化包，事实上，对于将 A 嵌入预三角化 DG 范畴 B 的任意全忠实嵌入，它也是任意 H^0(B) 的三角化包。

3. Unbounded twisted complexes

本节将§2.3 中的概念推广到无界扭曲复形。这种推广似乎很直接，但关于无限直和却存在一些微妙之处。与有限直和不同，无限直和并非所有 DG-函子都保持。特别是，Yoneda 嵌入并不保持无限直和

$$\Upsilon\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}, \qquad a \mapsto \mathrm{Hom}_A(-,a) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$$

我们在定义扭曲复形的卷积时隐式地用到了这一点。

例 3.1. 设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 A 中的对象，且 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i$ 在 A 中存在。那么

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Upsilon(a_i) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,a_i),$$

$$\Upsilon\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i),$$

它们是两个不同的 A-模，前者是后者的严格子模。令 $b \in$ A，从 $\Upsilon(b)$ 到前一个模的态射是 $b \to a_i$ 的有限和。另一方面，从 $\Upsilon(b)$ 到后一个模的态射，是从 b 到 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i$ 的态射，其中包含一些 $b \to a_i$ 的无限和。特别地，若 $b = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i$，则 Id_b 是 Id_{a_i} 的无限和。

要定义由 A 中对象 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 构成的无界扭曲复形，我们需要选择在哪个范畴中取无限直和 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$。我们总可以在 Mod-A 中这样做。然后，按照前面的步骤，我们得到如下定义。在该定义中，我们允许存在无限多个非零对象 a_i；但对于扭曲微分和扭曲复形的态射，我们都不允许从任何一个对象 a_i 出现无限多个非零映射：

定义 3.2（“朴素”版本）。DG 范畴 A 上的无界扭曲复形由以下内容组成

- $\forall\, i \in \mathbb{Z}$，A 中的一个对象 a_i
- $\forall\, i,\ j \in \mathbb{Z}$，A 中的一个次数为 $i-j+1$ 的态射 $\alpha_{ij}\colon a_i \to a_j$

满足

- 对任意 $i \in \mathbb{Z}$，只有有限多个 α_{ij} 非零，
- 扭曲复形条件（2.3）。

定义 A 上无界扭曲复形的 DG 范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$(A) 如下：

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}(\mathcal{A})}\big((a_i,\alpha_{ij}),(b_i,\beta_{ij})\big) := \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^q_{\mathcal{A}}(a_k,b_l) \tag{3.1}$$

其中 Hom 的次数 $^q\mathcal{A}(a_k,b_l)$ 为 $q+l-k$，微分由 (2.5) 定义。

与之前一样，这会得到全忠实的卷积函子

$$\mathrm{Conv}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}.$$

原则上，对于任意 DG 范畴 A，我们只能作出这一定义。事实上，除非另有明确说明，我们用 $\mathrm{Tw}^{\pm}$(A) 表示 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$(A)。

然而，在某些情况下，将 $\mathrm{Tw}^{\pm}$(A) 定义得比 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}$(A 更大是有用的):

例 3.3. 设 A = Mod -C，其中 C 是某个小 DG 范畴。将可表 A-模 $\Upsilon(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i])$ 赋给一组 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，而非不可表的 A-模 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Upsilon(a_i[-i])$。由此得到 $\mathrm{Tw}^{\pm}$(A) 的定义，它与上文的朴素定义类似，只是我们允许从单个对象 a_i 产生无限多个

扭曲微分 α_{ij}，只要 $\sum \alpha_{ij}$ 在 A 中定义了 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$ 的自同态；扭曲复形的态射也类似。与之前一样，该定义确保我们有全忠实的卷积函子 $\mathrm{Tw}^{\pm}(\mathcal{A}) \hookrightarrow$ Mod-A。然而，由于 $\mathcal{A}$ = Mod -C 在微分变换下封闭，这个卷积可经由 Yoneda 嵌入分解。因此我们有全忠实函子

$$\mathrm{Conv}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}.$$

事实上，它是一个等价，因为它有一个右逆——典范嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Tw}^{\pm}(\mathcal{A})$，该嵌入将任意 $a \in \mathcal{A}$ 映到其自身，并将其视为集中在零次的平凡扭曲复形。因此我们看到，$\mathcal{A}$ = Mod -C 在 $\mathrm{Tw}^{\pm}(\mathcal{A})$ 中对所有无界扭曲复形的卷积封闭。

最后，即使 $\mathcal{A}$ 不具备所有小直和，也可能存在比 Mod-$\mathcal{A}$更适合取这些直和的范畴。例如，$\mathcal{A}$ 可能是某个 Mod-$\mathcal{C}$ 的全子范畴，其中包含某些无限直和，但并非全部。另一个例子——事实上，正是它促使我们进行这些考量——见 §5.2。因此我们作如下定义：

定义 3.4. 设 A 是一个 DG 范畴，并且全忠实嵌入到一个具有可数直和与移位的 DG 范畴 B 中。

相对于 B 的 A 上的无界扭曲复形由以下对象组成

- $\forall\, i \in \mathbb{Z}$，A 中的一个对象 a_i，
- $\forall\, i, j \in \mathbb{Z}$，A 中次数为 $i - j + 1$ 的态射 $\alpha_{ij}\colon a_i \to a_j$，

满足

- $\sum \alpha_{ij}$ 是 B 中 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} a_i[-i]$ 的一个自同态，
- 扭曲复形条件（2.3）。

通过如下定义，定义相对于 B 的 A 上无界扭曲复形的 DG 范畴 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$：

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}\big((a_i, \alpha_{ij}), (b_i, \beta_{ij})\big) := \mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{B}}\Big(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} a_k[-k], \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} b_l[-l]\Big) \tag{3.2}$$

及其自然分次，以及由（2.5）定义的微分。

在 B 的选择显而易见或已固定的情况下，我们将 $\mathrm{Tw}^{\pm}(\mathcal{A})$ 记作 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$。和之前一样，我们的定义确保存在一个全忠实的卷积函子

$$\mathrm{Conv}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{B}.$$

我们有如下全忠实嵌入构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\ I\ } & \mathcal{B} \\ \downarrow{\scriptstyle \Upsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \Upsilon} \\ \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A} & \xhookrightarrow{\ I^*\ } & \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{B}. \end{array} \tag{3.3}$$

由于所有 DG-函子都保持有限直和，因此我们看到，对于有界扭曲复形，映入 Mod-B 的卷积函子就是通常映入 Mod -A 的卷积函子与 I^* 的复合。

注意，令 $\mathcal{B}$ = 模-$\mathcal{A}$ 可得 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{naive}(\mathcal{A})$，其卷积取值于 模-$\mathcal{A}$。另一方面，当我们有 $\mathcal{A}$ = 模 -$\mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}$ 是某个小 DG-范畴时，令 $\mathcal{B}$ = $\mathcal{A}$ 可得例 3.3 中构造的范畴，其卷积取值于 模-$\mathcal{A}$，并经由 $\mathcal{A}$。

定义 3.5. 若对所有 $b \in B$ 以及 $f \in \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{B}}(b,b)$，其中 $df + f^2 = 0$ 是模范畴 -B 中的模，其底层分次模为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,b)$，微分为 $d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,\ b)} + f$，且该模可表，则称 DG 范畴 B 允许微分变换。

定义 3.6. 若一个 DG 范畴 B 具有可数直和和移位，且卷积函子 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(B) \hookrightarrow$ 模范畴 -B 经由 $B \hookrightarrow$ 模范畴 -B 分解，则称 B 允许无界扭曲复形的卷积。

我们无需指定 B 允许对哪些无界扭曲复形进行卷积，因为要使卷积可表，无限直和必须在 B 本身中取。因此，我们需要考虑相对于 B 本身的无界扭曲复形。

如果 B 允许无界扭曲复形的卷积，那么卷积

$$\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{B}$$

必然是一个等价。它是全忠实的，并且有一个右逆，该右逆将任意 $b \in B$ 映到其自身，并将其视为零次的平凡扭曲复形。

引理 3.7. 设 B 是一个具有可数直和和移位的 DG-范畴。以下条件等价：

(1) B 允许微分变换。(2) B 允许无界扭曲复形的卷积。(3) 将任意 $b \in B$ 映为其自身（视为零次的平凡扭曲复形）的嵌入 $B \hookrightarrow \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(B)$ 是一个等价。(4) 对于任意嵌入到 B 中的 DG-范畴 A，$\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(A) \to$ 模范畴 -B 经由 $B \hookrightarrow$ Mod -B 分解。

证明。(1) $\Rightarrow$(2)：这与例 3.3 中的论证相同。

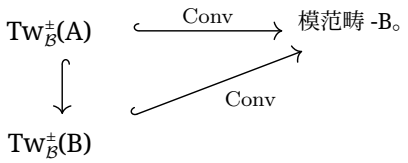
(2) $\Leftrightarrow$(3)：复合

$$\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{B}$$

是 Yoneda 嵌入。因此，$\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(B) \hookrightarrow$ 模范畴 -B 经由 Yoneda 嵌入分解，当且仅当 $B \hookrightarrow \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(B)$ 有右拟逆。一个全忠实函子有右拟逆，当且仅当它是等价。

(2) $\Leftrightarrow$ (4)：

“若”方向显然。“唯若”方向则由以下全忠实函子构成的交换三角形得出：



(2) $\Rightarrow$ (1)：

设 $b \in B$ 且 $f \in \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{B}}(b,b)$，其中 $df + f^2 = 0$。那么，由 b 构成、位于次数 0 的复形，带有一个从 f b 到其自身的微分，是一个扭曲复形。它在模范畴 -B 中的卷积与 b 具有相同的分次模，且微分为 $d_b + f$。由于 B 存在扭曲复形的卷积，它是可表的。□

最后，对于 $\mathrm{Tw}^{+}(A)$ 的任意版本，我们将 $\mathrm{Tw}^{+}(A)$ 和 $\mathrm{Tw}^{-}(A)$ 分别定义为其由所有有界上方扭曲复形和所有有界下方扭曲复形组成的满子范畴。我们还将 Pre-$\mathrm{Tr}^{\pm}(A)$、Pre-$\mathrm{Tr}^{+}(A)$，

以及 Pre-Tr⁻(A) 定义为 Tw±(A)、Tw⁺(A) 和 Tw⁻(A) 中由单侧扭曲复形组成的满子范畴。

4. Twisted bicomplexes

以下是扭曲复形这一概念的一种自然推广：

定义 4.1. DG 范畴 A 上的扭曲双复形 (a_{ij}, α_{ijkl}) 包含

- $\forall\, i,j \in \mathbb{Z}$，A 中的一个对象 a_{ij}，仅对有限多个数对 (i,j) 非零，
- $\forall\, i,j,k,l \in \mathbb{Z}$，一个次数为 $(i+j) - (j+k) + 1$ 的态射 $\alpha_{ijkl}\colon a_{ij} \to a_{kl}$，属于 A，且满足

$$(-1)^{k+l} d\alpha_{ijkl} + \sum_{m,n} \alpha_{ijmn} \circ \alpha_{mnkl} = 0. \tag{4.1}$$

定义 A 上扭曲双复形的 DG 范畴 Twbi(A) 如下：

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{Tw}(\mathcal{A})}\big((a_{ij},\alpha_{ijkl}),(b_{ij},\beta_{ijkl})\big) := \bigoplus_{q,k,l,m,n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^q_{\mathcal{A}}(a_{kl}, b_{mn}) \tag{4.2}$$

其中每个 $f \in \mathrm{Hom}^q{}_{\mathcal{A}}(a_{kl}, b_{mn})$ 的次数为 $q + (m+n) - (k+l)$，且

$$df := (-1)^{m+n} d_{\mathcal{A}} f + \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \left(\beta_{mnpq} \circ f - (-1)^{q+(m+n)-(k+l)} f \circ \alpha_{pqkl}\right), \tag{4.3}$$

其中 $d_{\mathcal{A}}$ 是 A 中态射上的微分。

我们将每个 a_{ij} 的指标 i 和 j 分别视为行指标和列指标。若 $l \le j$ 时满足 $\alpha_{ijkl} = 0$（分别地，若 $k \le i$ 时满足 $\alpha_{ijkl} = 0$），则称扭曲双复形是水平单侧的（分别地，垂直单侧的）。若扭曲双复形既是垂直单侧的又是水平单侧的，则称其为单侧的。

“朴素”范畴 Twbi±(𝒜)、Twbi⁺(𝒜) 和 Twbi⁻(𝒜) 分别由全无界、下无界和上无界扭曲双复形构成，其定义方式与 $\mathcal{B}$ 相对于另一个 DG 范畴的版本一样，均类似于第 §3 节中扭曲复形的定义。我们还用 Twbi^{vos}、Twbi^{hos} 和 Twbi^{os} 表示由单侧扭曲双复形构成的满子范畴。

最后，我们注意到，扭曲双复形范畴自然同构于扭曲复形的扭曲复形范畴，但有两种不同的方式：符号扭曲行的复形和符号扭曲列的复形。对于这一结果，需要将 $\mathcal{A}$ 上的扭曲复形视为相对于某个$\mathcal{B}$ 而言；该范畴允许无界扭曲复形的卷积，参见引理 3.7。当 $\mathcal{B}$ = Mod-$\mathcal{C}$ 是某个 DG-范畴 $\mathcal{C}$时，这一点总是成立。

定义 4.2。设 A 是一个 DG 范畴，并固定其到某个 DG-范畴 B 中的嵌入，其中 B 允许无界扭曲复形的卷积。定义

$$\mathcal{C}\mathrm{xrow}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) \to \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{C}\mathrm{xcol}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) \to \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}), \tag{4.5}$$

如下。设 (E_i, α_{ik}) 是 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}))$ 的一个对象。记

- $E_{i,\,j}$ 表示每个 E_i 的对象，而 $\alpha_{i,\,jl}\colon E_{i,\,j} \to E_{i,\,l}$ 表示其微分。
- $\alpha_{ik,\,jl}\colon E_{i,\,j} \to E_{k,\,l}$ 表示 $\alpha_{ik}\colon E_i \to E_k$ 的分量。

接着我们定义：

- Cxrow(E_i, α_{ik}) 为扭曲双复形，其第 ij 个对象为 $E_{i,\,j}$ 其第 $ijkl$ 个微分为 $\alpha_{ik,\,jl}$ 若 $i \ne k$，且 $\alpha_{ii,\,jl} + (-1)^i \alpha_{i,\,jl}$ 若 $i = k$。
- 将 Cxcol(E_i, α_{ik}) 定义为扭曲双复形，其第 ij 个对象为 $E_{j,\,i}$ 第 $ijkl$ 个微分为 $\alpha_{jl,\,ik}$ 若 $j \ne l$ 且 $\alpha_{jj,\,ik} + (-1)^j \alpha_{j,\,ik}$ 若 $j = l$。

类似地，设 $f:(E_i,\alpha_{ik}) \to (F_i,\beta_{ik})$ 是 $\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{B}(\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{B}(\mathrm{A}))$ 中的一个态射。记 f_{ik} 为其 $E_i \to F_k$ 分量，则 $f_{ik,\ jl}$ 表示该对象的 $E_{i,\ j} \to F_{k,\ l}$ 分量。接下来定义：

- $\mathbf{Cxrow}(f)$ 表示其 $ijkl$ 次分量为 $f_{ik,\ jl}$ 的双复形映射，
- $\mathbf{Cxcol}(f)$ 表示其 $ijkl$ 次分量为 $f_{jl,\ ik}$ 的双复形映射。

换言之，$\mathbf{Cxrow}(E_i,\alpha_{ik})$ 是一个双复形，其第 i 行是扭曲复形 $(-1)^i E_i$，并且我们还将 α_{ii} 的所有分量加入其微分中。对于 $i \neq j$，第 i 行与第 j 行之间的微分是 α_{ij} 的分量。类似地，$\mathbf{Cxcol}(E_i,\alpha_{ik})$ 是一个双复形，其各列为经α_{ii} 修改的 $(-1)^i E_i$，列间微分则为 α_{ij}。对于态射，这两个函子都只是将复形的复形之间的态射映射为具有相同分量的双复形态射。

根据我们对 B 的假设，卷积函子将 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A})$ 全忠实地嵌入 B 中。因此我们有一个双重卷积函子：

$$\mathrm{Conv}\,\mathrm{Conv}\colon \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) \hookrightarrow \mathcal{B}. \tag{4.6}$$

命题 4.3. 设 A 是一个 DG 范畴，它有一个到 DG 范畴 B 的全忠实函子，且 B 允许无界扭曲复形的卷积。设 $(E_i,\alpha_{ik}) \in \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}))$。则：

(1)定义 4.2 中的函子 $\mathcal{C}\mathrm{xrow}$ 和 $\mathcal{C}\mathrm{xcol}$ 良定义。它们赋予对象 $\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right)$ 的数据满足扭曲双复形条件 (4.1)，且其微分之和是 B 中一个态射的有限性条件也成立。它们赋予态射的数据满足其分量之和是 B 中一个态射的有限性条件。$\mathcal{B}$。$\mathcal{B}$。

(2) 以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) & \xrightarrow{\mathrm{Conv}\,\mathrm{Conv}} & \mathcal{B}. \\ {\scriptstyle \mathcal{C}\mathrm{xrow}\ \ or\ \ \mathcal{C}\mathrm{xcol}}\big\downarrow & \nearrow_{\mathrm{Conv}} & \\ \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) & & \end{array} \tag{4.7}$$

(3) 以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathrm{xrow}} & \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}). \\ {\scriptstyle \mathcal{C}\mathrm{xcol}}\big\downarrow & \nearrow_{Reflect} & \\ \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) & & \end{array} \tag{4.8}$$

这里，Reflect 是 $\mathrm{Twbi}^{\pm}\ \mathcal{B}(\mathrm{A})$ 的一个自逆自同构，它沿对角线反射该对象：双复形 (E_{ij},α_{ijkl}) 被映为 $(E_{ji},(-1)^{\delta_{ik}+\delta_{jl}}\alpha_{jilk})$，而态射 (f_{ijkl}) 被映为 (f_{jilk})。

(4) 函子 Cxrow 限制为同构

$$\mathcal{C}\mathrm{xrow}\colon \mathrm{Pre\text{-}Tr}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Twbi}^{\pm,vos}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}),$$

而 Cxcol 限制为同构

$$\mathcal{C}\mathrm{xcol}\colon \mathrm{Pre\text{-}Tr}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Twbi}^{\pm,hos}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

这两个函子都限制为同构

$$\mathcal{C}\mathrm{xrow},\mathcal{C}\mathrm{xcol}\colon \mathrm{Pre\text{-}Tr}^{\pm}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{Pre\text{-}Tr}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Twbi}^{\pm,os}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

证明。计算很直接。 □

由此得到的 Pre-Tr$^{\pm}{}_{\mathcal{B}}$(Pre-Tr$^{\pm}{}_{\mathcal{B}}$(A)) 的“单值化”Cxrow^{-1} ○ Cxcol 是一个非平凡的自等价，它将一个复形的复形拆分，从另一个方向切分所得对象和微分的双分次数据，用相同的数据生成另一个复形的复形，同时对纯水平微分和垂直微分进行符号扭转。

5. Application: A_∞-structures in monoidal DG categories

我们设想，无界扭曲复形的主要用途是重新表述并推广 A_∞-代数和模的定义[LH03，§2]：我们在任意 DG 单体范畴$\mathcal{A}$ （或更一般地，在 DG 双范畴）中定义这些结构。这样便无需显式处理运算 m_1，即微分。

传统上， A_∞-代数形式体系是为 DG 范畴**Mod**-k 中的对象定义的；该范畴由 k-模的 DG 复形构成，其自然幺半结构由复形的张量积给出[LH03，§2]。在 **Mod**-k 中，每个对象的内微分，也就是它作为 k-模复形的微分，是该对象的一个 1 次自同态。因此，它可以成为 A_∞-代数或 A_∞-模在**Mod**-k中的定义的一部分。但若我们在任意幺半 DG 范畴$\mathcal{A}$中工作，情况便不再如此。在**Mod**-$\mathcal{A}$ 中，对象的内微分并不表现为其 1 次自同态。此外，如果我们想尝试建立可在 A_∞-形式体系$\mathcal{A}$ 本身中使用的形式体系，那么其中的对象并不具有内微分。

扭曲复形的语言解决了这两个问题。它隐式地将 $\mathcal{A}$ 中的对象嵌入为 **Mod**-$\mathcal{A}$ 中的 Hom 复形。这些对象确实具有内微分：即 $d_{\mathcal{A}}$ 的微分。$\mathcal{A}$扭曲复形条件（2.3）涉及 $d_{\mathcal{A}}$，并使得我们可以在对象 A_∞上定义 $a \in \mathcal{A}$ -代数或模结构，同时仅显式引用运算 $\{m_i\}_{i\geq 2}$。

由此得到的定义都要求相应的 A_∞-运算的条（或余巴）构造成为一个扭曲复形。这些扭曲复形必须是无界的，因此需要本文所发展的理论及其细微之处。我们注意到，在条构造中，从扭曲复形的每个元素出发的箭头数量都是有限的。因此，我们对 A_∞-代数或 A_∞-模的定义，不依赖于用于定义无界扭曲复形的环境范畴$\mathcal{B}$ 。另一方面，在余巴构造中，情况不再如此，因而 $\mathcal{B}$ 的选择至关重要。当我们考虑 A_∞-模在 §5.2 中的扭曲复形时，还会看到这些微妙之处的另一个例子。

在§5.1 中，我们给出了将在下文进一步研究的关键定义 [AL23]。感兴趣的读者可参阅§3.2，以进一步了解这些定义对经典定义的推广方式，见 [LH03，§2]。

在 §5.2 中，我们运用 §4 中发展的扭曲双复形技术，证明了关于 A_∞-模的扭曲复形的若干定理。我们首先将一个 A_∞-模的扭曲复形与其底层对象所成扭曲复形上的一个 A_∞-模结构联系起来。这使我们能够证明：在一个 A_∞-代数 A 上， A_∞- 模的 DG 范畴 Nod$_\infty$-A 是强预三角化的（分别地，预三角化的），当且仅当我们所处的 DG 单体范畴 A 具有相应性质。因此，若我们将 A 扩展为带有诱导的幺半结构 [GKL21, §4.5] 的 Mod -A，那么其中所有 A_∞-代数上的 A_∞-模范畴都会成为强预三角化的。

5.1. 定义。在本节中，我们始终假设所处的 DG 单体范畴 A 配备了一个固定选定的单体嵌入

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$$

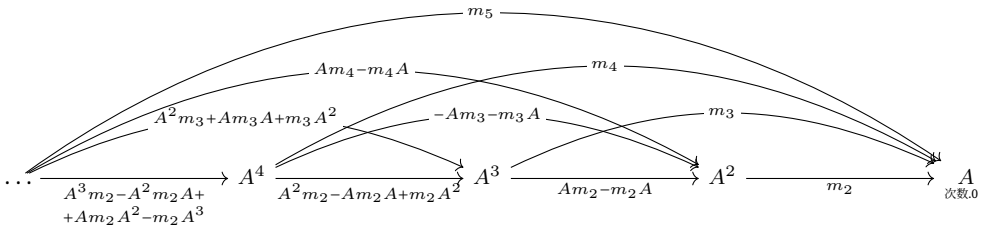
进入一个闭单体 DG 范畴 $\mathcal{B}$，它允许无界扭曲复形的卷积。注意，我们总可以令 $\mathcal{B}$ = Mod-$\mathcal{A}$ 带有诱导的幺半结构 [GKL21，§4。5], 必要时扩大宇宙，以应对 $\mathcal{A}$不是小范畴的情形。于是，所有关于 $\mathcal{A}$ 的无界扭曲复形都相对于这个环境范畴 $\mathcal{B}$定义。

要求 B 对无界扭曲复形的卷积封闭，这一条件在全文中都可以替换为：B 对有界上方扭曲复形的卷积和/或有界下方扭曲复形的卷积封闭。

定义 5.1。设 A 是一个幺半 DG 范畴，设 $A \in$A，且设 $\{m_i\}_{i\geq 2}$ 是一族次数为 $2-i$ 的态射 $A^i \to A$。

A 的（非增广）条构造 $B^{na}_\infty(A)$ 是由对象组成的集合A^{i+1}，其中每个 $i \geq 0$ 都置于次数 $-i$，并配有次数为 $k-1$ 的映射 $d_{(i+k)i}\colon A^{i+k} \to A^i$，其定义如下：

$$d_{(i+k)i} := (-1)^{(i-1)(k+1)} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{jk} \operatorname{Id}^{i-j-1} \otimes m_{k+1} \otimes \operatorname{Id}^j . \tag{5.1}$$



(5.2)

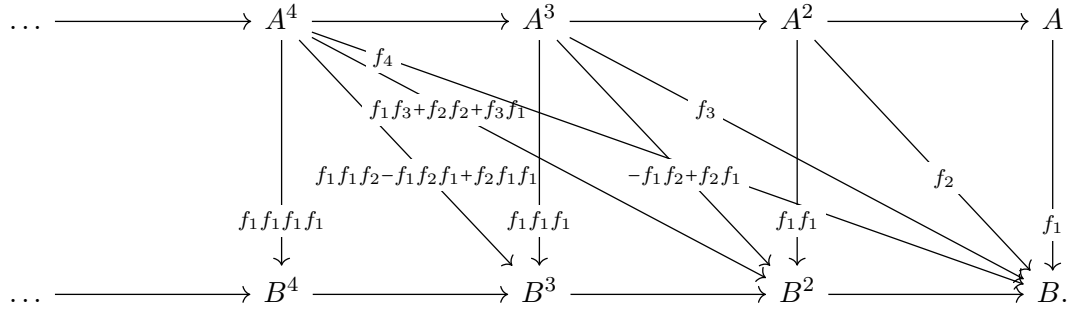
定义 5.2. 设 A 是一个幺半 DG 范畴。A 中的一个 A_∞-代数 (A, m_i) 是一个对象 $A \in$ A，并配备运算 $m_i\colon A^i \to A$，对所有 $i \geq 2$，它们都是 A 中次数为 $2-i$ 的态射，使得其非增广条构造 $B^{\mathrm{na}}_\infty(A)$ 是 A 上的一个扭曲复形。

我们以类似的方式定义 A 中 A_∞-代数之间的态射：

定义 5.3. 设 (A, m_k) 和 (B, n_k) 是 A 中的 A_∞-代数。设 $(f_i)_{i\geq 1}$ 是一组次数为 $1-i$ 的态射 $A^i \to B$。

条构造 $B_\infty(f_\bullet)$ 是 Pre-Tr$^-$(A) 中的态射 $B^{\mathrm{na}}_\infty(A) \to B^{\mathrm{na}}_\infty(B)$，其 $A^{i+k} \to B^i$ 分量为

$$\sum_{t_1+\dots+t_i=i+k} (-1)^{\sum_{l=2}^{i}(1-t_l)\sum_{n=1}^{l} t_n} f_{t_1} \otimes \dots \otimes f_{t_i}.$$



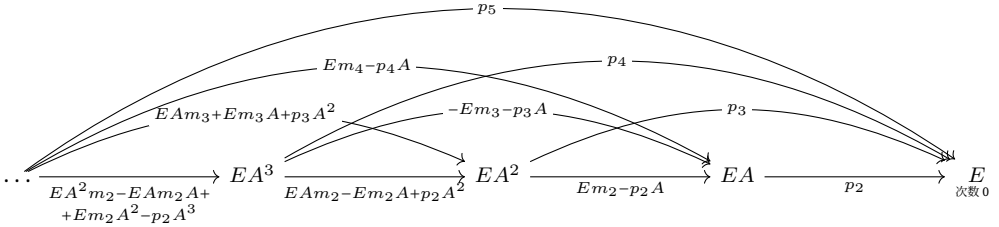
定义 5.4. A_∞ 代数的一个态射 $f_\bullet\colon (A, m_k) \to (B, n_k)$ 是由一组 $(f_i)_{i\geq 1}$ 次数为 $1-i$ 的态射 $A^i \to B$ 构成的集合，其条构造是一个闭的 0 次扭曲复形态射。

我们以类似的方式定义此类 $(A, m_\bullet)$ 上的左、右 A_∞-模:

定义 5.5. 设 (A, m_i) 是幺半 DG 范畴 A 中的一个 A_∞-代数。设$E \in \mathsf{A}$，并设 $\{p_i\}_{i\geq 2}$ 是一组次数为 $2-i$ 的态射 $E \otimes A^{i-1} \to E$。

(E, p_i) 的右模条构造 $B_\infty(E)$ 由对象 $E \otimes A^i$组成，其中 $i \geq 0$ 置于次数 $-i$，以及次数为 $1-k$ 的映射 $E \otimes A^{i+k-1} \to E \otimes A^{i-1}$，其定义如下:

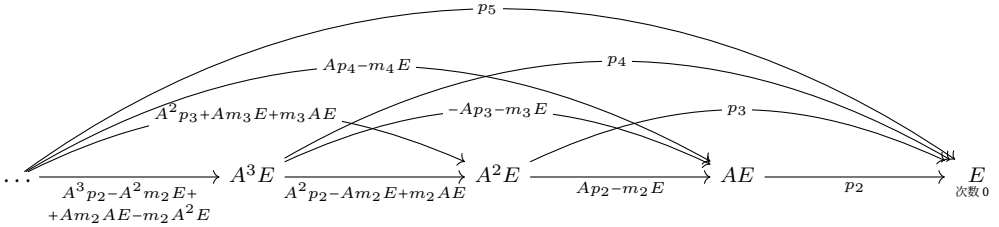
$$d_{(i+k)i} := (-1)^{(i-1)(k+1)} \left(\sum_{j=0}^{i-2} \left((-1)^{jk} \operatorname{Id}^{i-j-1} \otimes m_{k+1} \otimes \operatorname{Id}^{j} \right) + (-1)^{(i-1)k} p_{k+1} \otimes \operatorname{Id}^{i-1} \right). \tag{5.3}$$



(5.4)

定义 5.6. 对于 $E \in \mathsf{A}$ 和一组 $\{p_i\}_{i\geq 2}$ 次数为 $2-i$ 的态射$A^{i-1} \otimes E \to E$，其左模条构造 $B_\infty(E)$ 由对象 $A^i \otimes E$ 组成，其中所有 $i \geq 0$ 均置于次数 $-i$，并配有次数为 $1-k$ 的映射 $A^{i+k-1} \otimes E \to A^{i-1} \otimes E$，定义如下

$$d_{(i+k)i} := (-1)^{(i-1)(k+1)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left((-1)^{jk} \operatorname{Id}^{i-j-1} \otimes m_{k+1} \otimes \operatorname{Id}^{j} \right) + \operatorname{Id}^{i-1} \otimes p_{k+1} \right). \tag{5.5}$$



(5.6)

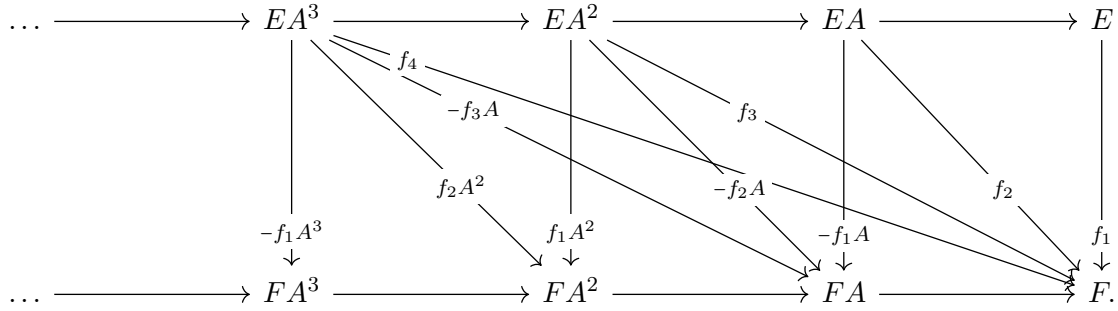
定义 5.7. 设 A 为一个幺半 DG 范畴，且 (A, m_i) 是 A 中的一个 A_∞-代数。关于 A 的右（分别为左） A_∞-模 (E, p_i) 是一个对象 $E \in \mathsf{A}$ 和一组 $\{p_i\}_{i\geq 2}$，其次数为 $2-i$ 的态射 $E \otimes A^{i-1} \to E$（分别为 $A^{i-1} \otimes E \to E$），满足 $B_\infty(E)$ 是一个扭曲复形。

定义 5.8. 设 A 为一个幺半 DG 范畴，且 (A, m_i) 是 A 中的一个 A_∞-代数。设 (E, p_k) 和 (F, q_k) 是 A 中 A 上的右 A_∞-模。

右 A_∞-A-模之间的次数为 j 的态射 $f_\bullet\colon (E, p_k) \to (F, q_k)$ 是由一组 $(f_i)_{i\geq 1}$ 次数为 $j-i+1$ 的态射 $E \otimes A^{i-1} \to F$ 构成的。其条构造 $B_\infty(f_\bullet)$ 是 Pre-Tr$^-$(A) 中的态射 $B_\infty(E) \to B_\infty(F)$，其分量为

$$E \otimes A^{i+k-1} \to F \otimes A^{i-1} \colon (-1)^{j(i-1)} f_{k+1} \otimes \operatorname{Id}^{i-1}.$$

我们以 $f_\bullet$ 为奇数次的情形为例：



对应的左 A_∞-模定义仅在符号上有所不同：

定义 5.9. 设 A 为一个幺半 DG 范畴，且 (A, m_i) 是 A 中的一个 A_∞-代数。设 (E, p_k) 和 (F, q_k) 是 A 中 A 上的左 A_∞-模。

左 A_∞-A-模之间次数为 j 的态射 $f_\bullet\colon (E, p_k) \to (F, q_k)$ 是一族 $(f_i)_{i\geq 1}$ 次数为 $j-i+1$ 的态射 $A^{i-1}\otimes E \to F$。其条构造 $B_\infty(f_\bullet)$ 是 Pre-Tr$^-$(A) 中的态射 $B_\infty(E) \to B_\infty(F)$，其分量为

$$A^{i+k-1}\otimes E \to A^{i-1}\otimes F\colon (-1)^{(j+k)(i-1)}\operatorname{Id}^{i-1}\otimes f_{k+1}.$$

我们以唯一能使左、右模的条构造成为从这些范畴到 Pre-Tr$^-$(A) 的忠实 DG 函子的方式，定义 A 上左模和右模的 DG 范畴：

定义 5.10. 设 A 是一个幺半 DG 范畴，且 A 是 A 中的一个 A_∞-代数。定义 A 中右 A_∞-A-模的 DG 范畴 Nod$_\infty$-A 如下：

- 其对象是 A 中的右 A_∞-A-模，
- 对任意 $E, F \in \operatorname{Ob}\operatorname{Nod}_\infty A$，复形 $\operatorname{Hom}^\bullet_{\operatorname{Nod}_\infty A}(E, F)$由 A_∞-态射 $f_\bullet\colon E \to F$ 及其自然分次构成。微分和复合由相应的扭曲复形态射的复合定义。
- $E \in \operatorname{Nod}_\infty A$ 的恒等态射是态射 $(f_\bullet)$，其中 $f_1 = \operatorname{Id}_E$，且 $f_{\geq 2} = 0$ 对应的扭曲复形态射为 $\operatorname{Id}_{B_\infty(E)}$。

A 中左 A_∞-A-模的 DG 范畴 A-Nod$_\infty$ 以类似方式定义。

类似的定义也适用于 A_∞-余代数和 A_∞-余模，见 [AL23，§6]。

5.2. 关于 A_∞-模的扭曲复形。 在幺半 DG 范畴 A_∞上的A_∞-代数模的概念 $(A, m_\bullet)$ 是我们在 $\mathcal{A}$ 中定义的，见 §5.1 它与通常的概念有几处不同；通常的概念对应于 $\mathcal{A} = \mathbf{Mod}\text{-}k$。

其中一点是，通常的 A_∞-模的 DG-范畴是强预三角化的，而在我们的一般情形下，Nod$_\infty$-A 不一定如此。本节将证明，Nod$_\infty$-A 是强预三角化的，当且仅当 A 是强预三角化的。

首先，我们需要明确约定。与 §5.1 中一样，我们假设幺半 DG 范畴 $\mathcal{A}$ 带有一个到闭单体 DG 范畴 $\mathcal{B}$ 的单体嵌入，后者具有无界扭曲复形的卷积。回忆一下，我们总可以令 $\mathcal{B} = \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$，并赋予其诱导的幺半结构 [GKL21，§4.5]，

我们定义 Tw$^\pm$ $\mathcal{A}$ 和 Tw$^\pm\mathcal{B}$ 相对于 $\mathcal{B}$。因此，Tw$^\pm$ $\mathcal{A}$和 Tw$^\pm\mathcal{B}$ 中的扭曲复形可以有无穷多个微分和/或态射分量从单个对象中产生，但前提是它们的和仍定义了 $\mathcal{B}$中的一个态射。由引理 3.7可知，由于 $\mathcal{B}$ 允许无界扭曲复形的卷积，因此卷积函子 Tw$^\pm\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}$ 是一个等价。

令 $(A, m_\bullet)$ 为 A 中的一个 A_∞-代数。在 §5.1 中，我们定义 DG 范畴 Nod$_\infty$-A，其对象为 A 中的右 A_∞-A-模。利用单体嵌入，我们可以将 $(A, m_\bullet)$ 视为 B 中的一个 A_∞-代数。我们用 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 表示 B 中右 A_∞-A-模所成的范畴。注意，我们有典范嵌入 Nod$_\infty$-$A \hookrightarrow$ Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$。

现在我们想要定义 Tw$^{\pm}$Nod$_\infty$-A。“朴素”的定义会给出一个映入 Mod - (Nod$_\infty$-A) 的卷积，但这并不是我们想要使用的范畴。相反，我们有一个从 Nod$_\infty$-A 到 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 的嵌入，并且希望将 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 作为 Nod$_\infty$-A 的扭曲复形卷积的目标。

范畴 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 对移位和直和封闭，因为 B 具有这些性质。事实上，$(E, p_\bullet)[n] = (E[n], (-1)^n p_\bullet)$，且 $\oplus_i (E_i, p_{i\bullet}) = (\oplus_i E_i, \sum_i p_{i\bullet})$。为了说明 $\sum_i p_{i\bullet}$ 定义了一个 A_∞- 模结构在 $\oplus_i E_i$ 上，请注意，由于 B 是闭幺半群，其幺半结构与无限直和可交换。因此，我们相对于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 定义 Tw$^{\pm}$ Nod$_\infty$-A 和 Tw$^{\pm}$Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$。这给出了两个映入 Mod - (Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$) 的全忠实卷积函子。现在我们要证明 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 允许无界扭曲复形的卷积，从而两个卷积函子都取值于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$。

为此，我们将在下文证明，A_∞-模的一个扭曲复形会在 A 的对象所构成的底层扭曲复形上定义一个 A_∞-模结构。不过首先，我们要定义这种结构。范畴 Tw$^{\pm}$A 先验地并非单体范畴，因为 A 上两个扭曲复形的张量积应以 A 中对象的直和为对象。这些直和先验地在 A 中并不存在，但在 B 中确实存在。事实上，Tw$^{\pm}$B 是一个与 B 等价的单体范畴。

定义 5.11. 令 $A^{\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{A}}$ 表示视为 Tw$^{\pm}$ A 中一个平凡扭曲复形的 A。将 Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{A}}$ 定义为 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$ 的全子范畴，它由这样的 A_∞-模组成：其 B 中的底层对象属于 Tw$^{\pm}$A $\subseteq$ Tw$^{\pm}$B $\simeq$ B。

具体而言，Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{A}}$ 的一个对象是 A 上的扭曲复形 (E_i, α_{ij})，连同次数为 $2-k$ 的扭曲复形态射

$$p_k \colon (E_i \otimes A^{k-1}, \alpha_{ij} \otimes \mathrm{Id}) \to (E_i, \alpha_{ij})$$

使得它们的右模巴构造是一个由扭曲复形组成的扭曲复形（$E_i \otimes A^{k-1}, \alpha_{ij} \otimes \mathrm{Id}$）。

现在我们可以陈述本小节的主要结果：

命题 5.12。存在以下 DG-范畴的全忠实嵌入：

$$\Phi \colon \mathrm{Tw}^{\pm}\left(\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A\right) \hookrightarrow \mathbf{Nod}_\infty\text{-}A^{\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{A}}, \tag{5.7}$$

$$\Phi \colon \mathrm{Tw}^{\pm}\left(\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A^{\mathcal{B}}\right) \hookrightarrow \mathbf{Nod}_\infty\text{-}A^{\mathcal{B}}. \tag{5.8}$$

这些嵌入保持扭曲复形的有界性和单侧性。我们可以用 Tw^{+}、Tw^{-}、Tw、Pre-Tr$^{\pm}$、Pre-Tr^{+}、Pre-Tr^{-} 或 Pre-Tr 中的任意一个替换 Tw$^{\pm}$。

注意，嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ 以及卷积函子 Tw$^{\pm}\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ 从（5.7）的左端和右端分别诱导出到（5.8）的左端和右端的全忠实函子。我们在下文证明中对 Φ 的构造确保（5.7）是（5.8）的限制。

证明。 条构造函子 $B_\infty : \mathbf{Nod}_\infty\text{-}A \to \text{Pre-Tr}^{-}\mathcal{A}$ 诱导出一个函子 Tw$^{\pm}(B_\infty)$:Tw$^{\pm}$ $\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A \to \mathrm{Tw}^{\pm}\left(\mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{A}\right)$。将其与 $\mathcal{C}$xcol（见定义 4.2）复合，得到一个函子

$$\mathcal{C}\mathrm{xcol} \circ \mathrm{Tw}^{\pm}(B_\infty) \colon \mathrm{Tw}^{\pm}\left(\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A\right)) \to \mathrm{Twbi}^{\pm}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

类似地，将 B_∞:Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^\pm(\mathcal{A})} \to$ Pre-Tr$^-$(Tw$^\pm$(A)) 与 Cxrow 复合，得到

$$\mathcal{C}\mathrm{xrow} \circ B_\infty : \mathbf{Nod}_\infty\text{-}A^{\mathrm{Tw}^\pm(\mathcal{A})} \to \mathrm{Twbi}^\pm_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

函子 B_∞、Cxcol 和 Cxrow 都是对象上的单射且忠实。因此，Cxcol $\bigcirc$Tw$^\pm(B_\infty)$ 和 Cxrow $\bigcirc B_\infty$ 也具有这些性质。

这个证明基于这样一个观察：自同构 σ 将 Cxcol $\bigcirc$Tw$^\pm(B_\infty)$ 的像映入 Cxrow $\bigcirc B_\infty$ 的像中。该自同构作用于 Twbi$^\pm$ $_{\mathcal{B}}$(A)，将每个微分 α_{ijkl} 和态射分量 f_{ijkl} 都乘以 $(-1)^{ij+kl}$。因此，存在唯一函子 Φ，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tw}^\pm(\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A) & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathrm{xcol}\circ\mathrm{Tw}^\pm(B_\infty)} & \mathrm{Twbi}^\pm_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathbf{Nod}_\infty\text{-}A^{\mathrm{Tw}^\pm(\mathcal{A})} & \xrightarrow{\mathcal{C}\mathrm{xrow}\circ B_\infty} & \mathrm{Twbi}^\pm_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}). \end{array} \tag{5.9}$$

具体而言，Φ 可描述如下。设 $((E_i, p_{i\bullet})\ \alpha_{ij\bullet}) \in$ Tw$^\pm$(Nod$_\infty$-A)。令 P_{k+1}:$(E_i, \alpha_{ij1}) \otimes A^k \to (E_i, \alpha_{ij1})$ 为这样一个扭曲复形态射，其分量为 $(-1)^{ik}\alpha_{ijk} + \delta_{ij}(-1)^{i(k+1)}p_{i,k+1}$。那么

$$\Phi((E_i, \alpha_{ij\bullet})) = ((E_i, \alpha_{ij1}), P_\bullet) \tag{5.10}$$

$$\Phi((f_{ij\bullet})) = \left((-1)^{i\bullet} f_{ij\bullet}\right). \tag{5.11}$$

将上述内容作为 Φ （5.7）中的定义后，现在可以通过直接计算验证 Φ 是良定义的，并且它使（5.9）交换。其全忠实性由（5.11）立即得出。

同样的双复形论证也适用于 Tw$^\pm$（Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$），由此通过相同的公式（ Φ（5.8）中的定义与（5.10）和（5.11）相同；基于同样的理由，该定义是良定义的且全忠实。

□

由此可知，Nod$_\infty$-A 是预三角化的，当且仅当 A 是预三角化的：

推论 5.13. 自然嵌入

$$\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A \hookrightarrow \mathrm{Tw}^\pm(\mathbf{Nod}_\infty\text{-}A) \tag{5.12}$$

是等价（分别为拟等价）的，当且仅当 A $\hookrightarrow$ Tw$^\pm$(A) 是等价（分别为拟等价）的。若将 Tw$^\pm$ 替换为其任一子范畴 Tw$^\bullet$ 或 Pre-Tr$^\bullet$，结论同样成立。

注意，A $\hookrightarrow$ Tw$^\pm$A 从来不是等价。设 $\{a_i\}$ 是一个微分全为零的扭曲复形。我们相对于 Mod -A 定义 Tw$^\pm$ A，因此，从某个 $b \in$ A 到 $\{a_i\}$ 的任一态射都只有有限多个非零分量 $b \to a_i$，所以它不可能有右逆。因此，根据上述推论，Nod$_\infty$-A绝不包含相对于 Nod$_\infty$-$A^{\mathcal{B}}$取的无界扭曲复形的卷积。

证明。如果将 Tw$^\pm$ 替换为其任意一个满子范畴 Tw$^\bullet$ 或 Pre-Tr$^\bullet$，本证明中的所有论证仍完全相同。

“如果”：由于（5.12）是全忠实的，因此若其与（Nod$_\infty$-$A \hookrightarrow$ Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^\pm\mathcal{A}}$（5.7）的复合也具有这一性质，那么它就是一个等价（分别为拟等价）。

如果 A $\hookrightarrow$ Tw$^\pm$ (A) 是一个等价，那么 Nod$_\infty$-$A \hookrightarrow$ Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^\pm}$A 显然也是。如果 A $\hookrightarrow$ Tw$^\pm$ (A) 只是一个拟等价，那么 Nod$_\infty$-$A \hookrightarrow$ Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^\pm}$A 也是一个拟等价，但这需要更多工作。令 $((E_i, \alpha_{ij})\ p_\bullet) \in$ Nod$_\infty$-$A^{\mathrm{Tw}^\pm}$ A。根据假设，(E_i, α_{ij}) 在 Tw$^\pm$ (A) 中同伦等价于某个 $F \in$ A。通过结构的同伦传递（定理 A.2），我们可以将 A_∞-结构 $p_\bullet$

从 (E_i, α_{ij}) 传递到 F。由此，我们得到一个 A_∞-A-模 $(F, q_\bullet)$，它与 $((E_i, \alpha_{ij})\ p_\bullet)$ 同伦等价，正如所需。

“仅当”：遗忘函子 Nod_∞-$A \to \mathrm{A}$ 有一个右逆：函子 $\mathrm{A} \to \mathrm{Nod}_\infty$-$A$，它将任意对象 $a \in \mathrm{A}$ 映射为 $(a, p_\bullet)$，其中 $p_i = 0$ 对所有 i 均成立；并将任意态射 $f: a \to b$ 映射为 $(f_\bullet)$，其中 $f_1 = f$，且 $f_i = 0$ 对 $i > 1$ 成立。□

由于 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{Tw}^{\pm}\mathcal{B}$ 是一个等价，采用推论 5.13 中的相同论证可得：

C推论 5.14。Nod_∞-$A^{\mathcal{B}}$ 有无界扭曲复形的卷积 .

由引理 3.7可知，Nod_∞-A 和 Nod_∞-$A^{\mathcal{B}}$ 中的无界扭曲复形的卷积取值于 Nod_∞-$A^{\mathcal{B}}$，正如所需。

Appendix A. Homotopy transfers of structure for A_∞-modules

在 [Mar06]Markl 描述了（通常的）A_∞交换环上的 - 代数的结构的同伦传递。本节将给出其在 A_∞-范畴上的 - 模 A_∞的类比。详细写下这一内容的原因之一，是为了确信它对我们关于 A_∞DG 单体范畴中的 A_∞-代数上的 - 模这一新概念$\mathcal{A}$ （在§5中介绍）同样适用。

另一个原因是，模态射的条构造不同于代数态射的条构造，它是可加的。因此，我们可以用条构造给出简单明确的传递公式。

首先，我们描述经典 A_∞-模的结构的同伦传递。

设 A 是交换环 k 上一个小的 A_∞-范畴，其含义见 [LH03]。照例，记 $k_{\mathcal{A}}$ 为与 A 具有相同对象的极小 k- 线性范畴：当 $a \neq b$ 时，$\mathrm{Hom}^{k_{\mathcal{A}}}(a, b)$ 为 0；当 $a = b$ 时，$\mathrm{Hom}^{k_{\mathcal{A}}}(a, b)$ 为 k。分次 $k_{\mathcal{A}}$-$k_{\mathcal{A}}$-双模的范畴具有由 $\otimes_k$ 给出的自然幺半结构。A_∞-范畴 A 可自然地视为该范畴中的一个 A_∞-代数，而 A_∞-A-模则可视为分次 $k_{\mathcal{A}}$-模范畴中该代数上的 A_∞-模。

就我们的目的而言，将 A 视为范畴 $k_{\mathcal{A}}$-Mod-$k_{\mathcal{A}}$ 中的一个 A_∞-代数更为自然，该范畴由微分分次 $k_{\mathcal{A}}$-$k_{\mathcal{A}}$-双模构成。换言之，通常所称的运算 m_1，在这里成为微分分次 $k_{\mathcal{A}}$-$k_{\mathcal{A}}$-双模 A 的微分这一内在数据。于是，这个微分分次双模上的 $m_\bullet$ A_∞-代数结构由以下 $k_{\mathcal{A}}$-Mod-$k_{\mathcal{A}}$ 映射构成

$$m_i: \mathcal{A}^{\otimes_k i} \to \mathcal{A} \qquad , \deg(m_i) = 2 - i,\ i \geq 2.$$

记 $B_\infty\mathcal{A}$为 A 的条构造 LH03，§1.2。2]。它是一个微分分次余代数，属于$k_{\mathcal{A}}$-Mod-$k_{\mathcal{A}}$ 作为分次余代数，它与自由张量余代数相同 $\oplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}^{\otimes_k i}$。

设 P 是 A 上的右 A_∞-模。我们再次将其视为一个微分分次 $k_{\mathcal{A}}$-模，其 A_∞ 结构由以下 Mod-$k_{\mathcal{A}}$ 映射给出

$$\mu_i : P \otimes_k \mathcal{A}^{\otimes_k (i-1)} \to P, \qquad \deg(\mu_i) = 2 - i,\ i \geq 2.$$

记 $B_\infty P$为 A 的条构造 [LH03，§2.3。3]。它是一个微分分次$B_\infty\mathcal{A}$-余模；作为分次余模，它与自由余模相同 $P \otimes_k B_\infty\mathcal{A}$。

假设存在另一个 $k_{\mathcal{A}}$-模 Q 以及两个态射

$$f: P \to Q,$$

$$g: Q \to P,$$

在 Mod-$k_{\mathcal{A}}$ 中，使得 $gf = \mathrm{Id} + dh$，其中某个次数为 -1 的映射 $h : P \to P$ 满足该条件。

定理 A.1. A_∞-结构的同伦传递从 P 到 Q 存在：

(1) $\nu_\bullet$ 上的右 A_∞-模结构 A 在 Q上；

(2) 一个闭的零次 A_∞-模映射 $\phi_\bullet : P \to Q$ 扩张 f；(3) 一个闭的零次 A_∞-模映射 $\psi_\bullet : P \to Q$ 扩张 g；(4) 一个次数为 -1 的 A_∞-模映射 $H_\bullet : P \to P$ 扩张 h，使得

$$\psi_\bullet \circ \phi_\bullet = \mathrm{Id} + d(H_\bullet).$$

为证明这一点，我们将条构造用作从下列 DG-范畴到 DG-范畴的全忠实嵌入： A_∞-$\mathcal{A}$-模到 DG-$B_\infty\mathcal{A}$-余模。参见[LH03，§2.3。3]。下面简要概述。设 E 和 F 是两个 A_∞-$\mathcal{A}$-模。设 $x_\bullet : E \to F$ 是一个次数为 n 的 A_∞-模态射。根据定义，它是由任意一族次数为 $n+1-i$ 的映射组成的

$$x_i : E \otimes_k \mathcal{A}^{\otimes_k (i-1)} \to F \qquad i \geq 1,$$

in Mod-$k_\mathcal{A}$。这样的集合等价于一个次数为 n Mod-$k_\mathcal{A}$ 映射的数据

$$x_\bullet : B_\infty E \to F,$$

因为作为分次模， $B_\infty E$ 就是 $E \otimes_k B_\infty \mathrm{A}$。根据自由分次余模的泛性质， $k_\mathcal{A}$-模态射与下列对象之间存在一一对应关系

$$B_\infty E \to F,$$

DG-B_∞A-余模的态射

$$B_\infty E \to B_\infty F.$$

它将 $x_\bullet$ 映到映射

$$\bar{x} : E \otimes_k B_\infty \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \Delta} E \otimes_k B_\infty \mathcal{A} \otimes_k B_\infty \mathcal{A} \xrightarrow{x_\bullet \otimes \mathrm{Id}} F \otimes_k B_\infty \mathcal{A}, \tag{A.1}$$

反之，将任意 DG-B_∞A-余模态射 $\bar{x}$ 映射为

$$x_\bullet : E \otimes_k B_\infty \mathcal{A} \xrightarrow{\bar{x}} F \otimes_k B_\infty \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \epsilon} F.$$

这里， Δ 和 ϵ 分别是 B_∞A 的余乘法和余单位。

证明。按照我们的约定， P 上的 A_∞-结构 $\mu_\bullet$ 是由一组 μ_i （ $i \geq 2$）构成的。将其视为一个次数为一的 A_∞-态射 $\mu_\bullet : P \to P$ 的数据，且满足 $\mu_1 = 0$。条构造 $B_\infty P$ 上的微分为

$$\bar{\mu} + d_{\mathrm{nat}},$$

其中 $\bar{\mu}$ 是 A_∞-态射 $\mu_\bullet$ 的条构造，依据式（A.1），而 d_{nat} 是张量积 $P \otimes_k B_\infty \mathcal{A}$上的自然微分。于是有

$$(\bar{\mu} + d_{\mathrm{nat}})^2 = \bar{\mu}^2 + \bar{\mu} \circ d_{\mathrm{nat}} + d_{\mathrm{nat}} \circ \bar{\mu} = \bar{\mu^2} + d(\bar{\mu}),$$

因此

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{\mu}) = -\bar{\mu}^2.$$

这里， d_{nat}(–)表示作为 $P \otimes_k B_\infty A$的自同态的微分，与作为 $B_\infty P$的自同态的微分相对。

现在定义

$$\bar{\rho} = \bar{\mu} + \bar{\mu}\bar{h}\bar{\mu} + \bar{\mu}\bar{h}\bar{\mu}\bar{h}\bar{\mu} + \ldots$$

其中， $\bar{h}$是将 h视为严格的 A_∞-态射所得的条构造。注意，

$$\overline{\rho h \mu} = \overline{\mu h \rho} = \overline{\rho} - \overline{\mu},$$

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{\rho}) = \bar{\rho}^2 - \bar{\rho}\overline{dh}\bar{\rho}.$$

由于

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{h}) = \overline{dh} = \overline{g}\overline{f} - \mathrm{Id},$$

我们得出结论

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{\rho}) = -\bar{\rho}\bar{g}\bar{f}\bar{\rho}.$$

定义 DG-B_∞A-模态射 $\bar{\nu}\colon Q \otimes_k B_\infty\mathsf{A} \to Q \otimes_k B_\infty\mathsf{A}$ 如下：

$$\bar{\nu} = \bar{f}\bar{\rho}\bar{g}.$$

由于 f 和 g 均为次数 0 的闭元，我们有

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{\nu}) = \bar{f}d_{\mathrm{nat}}(\bar{\rho})\bar{g} = -\bar{f}\bar{\rho}\bar{g}\bar{f}\bar{\rho}\bar{g} = -\bar{\nu}^2.$$

因此我们有

$$(\bar{\nu} + d_{\mathrm{nat}})^2 = 0,$$

因此，$\bar{\nu} + d_{\mathrm{nat}}$ 在 $Q \otimes_n B_\infty\mathsf{A}$ 上定义了一个新的微分。设 $\nu_\bullet$ 为 Q上的相应 A_∞-A-模结构。

接下来定义

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \bar{f}(\mathrm{Id} + \bar{\rho}\bar{h}),\\
\bar{\psi} &= (\mathrm{Id} + \bar{h}\bar{\rho})\bar{g},\\
\bar{H} &= \bar{h}(\mathrm{Id} + \bar{\rho}\bar{h}) = (\mathrm{Id} + \bar{h}\bar{\rho})\bar{h}.
\end{aligned}$$

我们有：

$$d\overline{f} = (\overline{\nu} + d_{\mathrm{nat}})f - f(\overline{\mu} + d_{\mathrm{nat}}) = \overline{\nu}\overline{f} - \overline{f}\overline{\mu} + d_{\mathrm{nat}}(f) = \overline{f}\overline{\rho}\overline{g}\overline{f} - \overline{f}\overline{\mu} = \overline{f}(\overline{\rho}\overline{g}\overline{f} - \overline{\mu}).$$

类似地：

$$\begin{aligned}
d\overline{g} &= \cdots = (\overline{\mu} - \overline{g}\overline{f}\overline{\rho})\overline{g},\\
d\overline{h} &= \cdots = \overline{\mu}\overline{h} + \overline{h}\overline{\mu} + \overline{g}\overline{f} - \mathrm{Id},\\
d(\mathrm{Id} + \overline{\rho}\overline{h}) &= \cdots = \left(\overline{\mu} - \overline{\rho}\overline{g}\overline{f}\right)\left(\mathrm{Id} + \overline{\rho}\overline{h}\right),\\
d(\mathrm{Id} + \overline{h}\overline{\rho}) &= \cdots = \left(\overline{\mu} - \overline{g}\overline{f}\overline{\rho}\right)\left(\mathrm{Id} + \overline{h}\overline{\rho}\right),
\end{aligned}$$

因此，我们最终计算得

$$\begin{aligned}
d(\bar{\phi}) &= d\left(\overline{f}\right)\left(\overline{\rho}\overline{h} + \mathrm{Id}\right) + \overline{f}\,d\left(\overline{\rho}\overline{h} + \mathrm{Id}\right) =\\
&= \overline{f}\left(\overline{\rho}\overline{g}\overline{f} - \overline{\mu}\right)\left(\overline{\rho}\overline{h} + \mathrm{Id}\right) + \overline{f}\left(\overline{\mu} - \overline{\rho}\overline{g}\overline{f}\right)\left(\mathrm{Id} + \overline{\rho}\overline{h}\right) = 0,\\
d(\bar{\psi}) &= \cdots = 0,\\
d(\overline{H}) &= \cdots = \overline{\psi\phi} - \mathrm{Id},
\end{aligned}$$

如所愿。 □

由此可知，沿同伦等价传递结构会得到一个与之同伦等价的 A_∞-模：

推论 A.1. 若 f 和 g 互为逆同伦等价，则沿着 (f, g) 对 $(P, \mu_\bullet)$ 进行结构的同伦传递所得到的 A_∞-A-模 $(Q, \nu_\bullet)$ 与 $(P, \mu_\bullet)$ 同伦等价。

证明。 作为定理 A.1 中构造的结构的同伦传递的一部分，我们得到了一个闭的零次 A_∞- 态射

$$\phi_\bullet\colon (P, \mu_\bullet) \to (Q, \nu_\bullet)$$

延拓 f，即 $\phi_1 = f$。因此 ϕ_1 是 DG-$k_{\mathcal{A}}$-模之间的同伦等价，因此 $\phi_\bullet$ 是 A_∞-$\mathcal{A}$-模之间的同伦等价[LH03，2.4.1。1]。 □

我们用来证明定理 A.1 的方法可以轻松推广到 A_∞-代数和 A_∞-模这一概念；它们是在 §5 中引入的：

定理 A.2。设 $(A, m_\bullet)$ 是幺半 DG 范畴 A 中的一个 A_∞-代数。设 $(a, p_\bullet) \in \mathrm{Nod}_\infty\text{-}A$。设 b 是 A 中的一个对象。假设存在 A 中的态射 $f: a \to b$ 和 $g: b \to a$，使得 $gf = \mathrm{Id} + dh$，其中 $h: a \to a$ 是一个次数为 -1 的态射。

于是，存在从 $(a, p_\bullet)$ 到 b 的 A_∞-结构的同伦传递：

(1) b 上的 A_∞-A-模结构 $q_\bullet$；(2) 一个闭的 0 次 A_∞-A-模态射 $\phi_\bullet : (a, p_\bullet) \to (b, q_\bullet)$，它延拓了 f；(3) 一个闭的 0 次 A_∞-A-模态射 $\psi_\bullet : (b, q_\bullet) \to (a, p_\bullet)$，它延拓了 g；(4) 一个 -1 次的 A_∞-A-模态射 $H_\bullet : (a, p_\bullet) \to (a, p_\bullet)$，它延拓了 h，且满足

$$\psi_\bullet \circ \phi_\bullet = \mathrm{Id} + d(H_\bullet).$$

证明。对于 A_∞-A-模，条构造在 §5.1 中被定义为一个 DG-函子

$$B_\infty : \mathbf{Nod}_\infty(T) \to \text{Pre-Tr}^-(\mathcal{A}).$$

取 a 上的 A_∞-T-模结构的数据 $p_\bullet$，并将其视为一个带有 $p_1 = 0$ 的 A_∞-A-模态射的数据。令 $\bar{p}$ 为其条构造：

$$\bar{p} : B_\infty(a, p_\bullet) \to B_\infty(a, p_\bullet).$$

现在考虑两个扭曲复形：$B_\infty(a, p_\bullet)$ 和 $B_\infty(a, 0)$。它们具有相同的对象。将 $d_{\mathrm{nat}}(-)$ 记作这样一种运算：对 $B_\infty(a, p_\bullet)$ 的自同态求微分时，将其视为 $B_\infty(a, 0)$ 的自同态。由于 $B_\infty(a, p_\bullet)$ 上的微分是 $B_\infty(a, 0)$ 上的微分与 $\bar{p}$ 之和，我们有

$$d_{\mathrm{nat}}(\bar{p}) = -\bar{p}^2.$$

现在我们可以沿用证明定理 A.1时相同的方法和计算，只需将所有的条构造替换为扭曲复形，而非微分分次余模。□

推论 A.2. 若 f 和 g 在 A 中互为逆同伦等价，则沿着 (f, g) 对 $(a, p_\bullet)$ 进行结构的同伦传递所得到的 A_∞-A-模 $(b, q_\bullet)$ 与 $(a, p_\bullet)$ 同伦等价。

References

[AL17] Rina Anno 和 Timothy Logvinenko，《球面 DG-函子》，《欧洲数学会杂志》19 (2017), 2577–2656, arXiv:1309.5035.[AL19]，$\mathbb{P}^n$-函子，arXiv:1905.05740, 2019.[AL21] ———，模的 Bar 范畴与张量函子的同伦伴随，《国际数学研究通知》2021 (2021), no. 2, 1353–1462, arXiv:1612.09530.[AL23]，A_∞-结构在 DG 幺半范畴中的强同伦幺元性，2023.[Bar22] Federico Barbacovi，《两个球面扭曲的复合》，《国际数学研究通知》(2022).[BK90] Alexei Bondal 和 Mikhail Kapranov，《增强三角范畴》，Mat. Sb. 181 (1990), no. 5, 669–683.[Gen22] Francesco Genovese，《无界扭曲复形上的 T-结构》，arXiv:2206.12724, (2022).[GKL21] Ádám Gyenge, Clemens Koppensteiner 和 Timothy Logvinenko，《一个范畴的海森堡范畴》，arXiv:2105.13334, (2021).[Kel94] Bernhard Keller，《导出 DG 范畴》，Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1994), no. 1, 63–102.[Kel01] ———，《A-无穷代数与模导论》，Homology Homotopy Appl. 3 (2001), no. 1, 1–35, arXiv:math/9910179.[Kel06] ———，《关于微分分次范畴》，《国际数学家大会论文集》，西班牙马德里，2006, vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, arXiv:math/0601185, pp. 151–190.

[LH03] Kenji Lef`evre-Hasegawa, 《关于 A_∞-范畴》, 博士论文, Universit´e Denis Diderot – Paris 7, 2003, arXiv:math/0310337.[LO10] Valery A. Lunts 和 Dmitri O. Orlov, 《三角范畴增强的唯一性》, 《美国数学会杂志》23 (2010), 853–908, arXiv:0908.4187.[Lyu03] Volodymyr Lyubashenko, 《 A_∞-范畴的范畴》, Homol. Homotopy Appl. 5 (2003), no. 1, Homol. Homotopy Appl., arXiv:math.CT/0210047.[Mar06] Martin Markl, 《转移（强同伦结合）结构》, 第 25 届冬季学校“几何与物理”论文集, 巴勒莫数学学会, 2006, pp. 139–151.[To¨e07] Bertrand To¨en, 《dg-范畴的同伦理论与导出莫里塔理论》, Invent. Math. 167 (2007), no. 3, 615–667, arXiv:math/0408337.[To¨e11] ———, 《DG-范畴讲义》, 《代数与拓扑K理论专题》, 数学讲义, vol. 2008, 施普林格·柏林·海德堡, 2011, pp. 243–302。电子邮箱：ranno@math.ksu.edu

Department of Mathematics, Kansas State University, 138 Cardwell Hall, Manhattan, KS 66506, USA

电子邮箱地址：LogvinenkoT@cardiff.ac.uk

School of Mathematics, Cardiff University, Senghennydd Road, Cardiff, CF244AG, UK