arXiv:2303.11808v1 [math.NT] 21 Mar 2023

具有本原自同构群的正则 dessins

ˇ GARETH A. JONES 和 Martin Macaj

摘要。我们对满足以下条件的绘图 $\mathcal{D}$ 进行分类：其自同构群 G 在三个临界值之一上方的点集上忠实且本原地作用（不失一般性地说，即通常二部图表示中的黑色顶点）。我们证明，这些绘图全都是广义帕利绘图，其中黑色顶点是有限域 $\mathbb{F}_q$ 的元素，而 G 是仿射群 $AGL_1(q)$ 的一个子群。利用此前与 Streit 和 Wolfart 得出的结果，我们确定绝对伽罗瓦群在这些绘图上的轨道，证明它们全都定义在某些分圆域上，并在一些特殊情形下给出定义方程。若放宽忠实作用这一条件，则只可能得到这些绘图的循环正则覆盖。

1. 引言

每个绘图都是某个正则绘图（具有最大可能对称性）的商，且商是通过其自同构群的一个子群取得的，因此，绘图研究在很大程度上可以归结为正则绘图及其自同构群的研究。遗憾的是，正则绘图数量极其庞大（这源于双生成元有限群数量众多），几乎不可能对它们进行系统研究。它们都具有这样的性质：自同构群在三个临界点集中的每一个上都传递作用；这些集合是 Belyˇı 函数在临界值上的纤维。然而，若我们通过要求在至少一个此类集合上的作用为本原作用（不保持任何非平凡等价关系）来加强这一传递性条件，那么只会出现一个非常特殊且易于理解的绘图族，即广义帕利绘图（当作用还忠实时）及其循环正则覆盖（当作用不忠实时）。

如果一个绘图 $\mathcal{D}$ 的自同构群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ 在黑色顶点集合上的作用是本原或忠实的，我们就称该绘图为本原或忠实绘图。（本文中，我们将绘图表示为曲面上的二部图，其顶点涂成黑色或白色；通过对绘图应用适当的对偶，可以将关于黑色顶点的论述替换为类似的关于白色顶点或面中心的论述。）我们的主要结果如下：

定理 1.1. 正则绘图是本原且忠实的，当且仅当它是广义帕利绘图。

在广义帕利绘图 $\mathcal{D}$ 中，黑色顶点与有限域 $\mathbb{F}_q$ 的元素相对应，该域的阶为 $q = p^d$（其中 p 为某个素数），且自同构群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ 是 1 维仿射群 $AGL_1(q)$ 的一个子群，在该域上本原作用。等价地，G 是一个

2010年数学主题分类。主要分类号 20B25；次要分类号 05C10、14H57、20B15。关键词与短语：正则绘图、自同构群、本原、广义帕利绘图。

半直积 $T \rtimes S$，其中 T 是平移子群（阶为 q 的初等阿贝尔群），而 S 是 $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ 的乘法群 $\mathbb{F}_q$ 的一个子群，在该域上的作用是 $GL_d(p)$ 的不可约子群，因此 d 是 p 模 n 的乘法阶，其中 $n = |S|$。G 的标准生成元为 x、y 和 z，其中 x 是 S 的生成元，y 是 $G \setminus S$ 的任意元素，而 $z = (xy)^{-1}$。因此，黑色顶点的度为 n，而白色顶点和面的度数，以及绘图的类型和亏格，取决于 y 所在的 T 的哪个陪集 Tx^c。特别地，若 $q \equiv 1$ 模 (4)，且 $n = (q-1)/2$、$c = n/2$，则 S 是 $\mathbb{F}_q$中的二次剩余群，白色顶点的度为 2；因此，若忽略这些顶点，所得嵌入图就是 Paley 图 P_q，其中当且仅当两个顶点之差为二次剩余时，它们才相邻。

关于 Paley 图的起源，参见 [6]。Lim 和 Praeger 在 [12], 中引入了广义 Paley 图，Jones 则在 [5] 中研究了广义帕利映射。这些地图在 Jones 和 Maˇcaj 于 [8] 对具有本原自同构群的正则地图进行分类时发挥了重要作用。广义帕利绘图可视为将其自然推广到可定向正则超地图。

对于给定的 n 和不整除 n 的素数 p，非同构广义 Paley 绘图 $\mathcal{D}$ 的数量为 $n\phi(n)/d$，其中 ϕ 是欧拉函数；对于每个 $c \in \mathbb{Z}_n$ 的选择，都有 $\phi(n)/d$ 个绘图。这些 $\phi(n)/d$ 个绘图在孔操作群 H_j 的作用下传递地置换，其中 j 与 n 互素。根据 Jones、Streit 和 Wolfart [9] 的先前结果，它们构成绝对伽罗瓦群 $Gal\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ 作用于的轨道，并定义在分圆域（即 n 次单位根的分圆域）的一个特定子域上，具体而言，是 p 的分裂域。这使我们能够为这些绘图的若干特殊情形给出定义方程。

在介绍儿童画背景并给出一些简单示例之后，本文在第 4–7 节阐述并确定广义帕利绘图的基本性质，并在第 8 节给出更多示例；第 9 节则以 $n = 7$ 和 $p = 29$ 为例，展示其中一些技巧。主要定理在第10节证明。第 11 和第 12 节讨论伽罗瓦共轭与定义方程，第 13 节简要讨论非忠实本原 dessins。第 14 节处理一个与数论有关的技术问题。

2. 儿童画

这里只简要概述儿童画理论；更多详情见 [10]。根据贝利定理，紧黎曼曲面 $\mathcal{S}$ 可以定义为代数数域上的代数曲线，当且仅当它存在一个贝利函数，也就是一个非常数亚纯函数 $\beta : \mathcal{S} \to \Sigma = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，且至多有三个临界值。必要时对 Σ 施加莫比乌斯变换，可假设这些临界值为 0、1 和 ∞。于是，β 可以用一个儿童画 $\mathcal{D}$组合表示，即定义在 $\mathcal{S}$ 上的二部图，其黑色和白色顶点分别位于 0 和 1 上方的点处，边位于单位区间 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 上；这些边与覆盖 β的各层一一对应，而各面则对应于 ∞上方的点，称为面中心。（有时，将 $\mathcal{D}$ 扩展为三部图也很有用，其中红色顶点位于 ∞ 上方，边位于 $\mathbb{R}$上方。）

自同构群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ of $\mathcal{D}$ 是 β的覆盖变换群，在边上半正则地作用。若 $\mathcal{D}$ 是正规覆盖，或者等价地，G

在边上正则作用，我们就称 为正则。此时 G 在黑色顶点、白色顶点和面中心上都是传递的，因此所有黑色顶点和白色顶点的度数分别相同，为 n 和 m，所有面都是 2l 边形，其中 l 为某个数。三元组 (n, m, l) 称为 $\mathcal{D}$的类型。于是 G 有生成元 x、y、z（分别是绕相邻的黑色顶点、白色顶点和面中心旋转），满足

$$x^n = y^m = z^l = xyz = 1.$$

若 $m \leq 2$，可以忽略 $\mathcal{D}$ 的白色顶点（或者更确切地说，将它们视为其关联边上的普通点），从而得到一个定向地图 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{D})$，其中顶点是 $\mathcal{D}$ 的黑色顶点，面保持不变，边则是 $\mathcal{D}$ 中与每个白色顶点关联的边的并集。将绘图转换为地图的第二种方法适用于每个绘图 $\mathcal{D}$：忽略顶点颜色，将 $\mathcal{D}$ 视为同一曲面上的无色地图 $\mathcal{D}^\circ$。

3. 简单示例

首先，我们考察一些关于本原作用和忠实作用的简单示例。

例1 令 $\mathcal{D}$ 为类型 (1, m, m) 的正则平面绘图，它将完全二部图 $K_{m,1}$ 嵌入，其中 $m \geq 1$为某个整数。它有一个白色顶点，通过一条边分别与 m 个黑色顶点相连。我们称之为 $\mathcal{D}$ m 星绘图，并记作 $\mathcal{S}t_m$。相应的贝蒂函数 $\Sigma \to \Sigma$ 为 $z \mapsto 1 - z^m$。自同构群 G 是一个阶为 m 的循环群 C_m，由 $z \mapsto e^{2\pi i/m}z$ 生成。该群在黑色顶点（ $\mathbb{C}$ 中的 1 的 m 次根）上具有传递性和忠实性，并且当且仅当 m 是素数时，在这些顶点上作用本原。图1展示了 $\mathcal{S}t_5$。

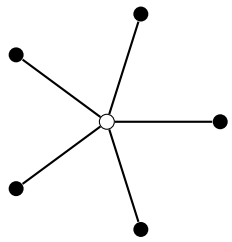

图1. 星形绘图 $\mathcal{S}t_5$

引理 3.1. 设 $\mathcal{D}$ 为一个自同构群为 G 的正则绘图。当且仅当对于某个 $m \geq 1$有 $\mathcal{D} \cong \mathcal{S}t_m$ 时，G 在 $\mathcal{D}$ 的黑色顶点上正则作用（因而忠实作用）。

证明。星形绘图显然具有这一性质。反过来，若 G 在 $\mathcal{D}$ 的黑色顶点上正则作用，那么由于 G 也在边上正则作用，边数必定与黑色顶点数相同，因此后者的度都必须为 1；又因嵌入图是连通的，所以只能有一个白色顶点，因此该图是某个 m 的完全二部图 $K_{m,1}$。在同构意义下，这个双色图作为绘图只有唯一的嵌入，即 $\mathcal{S}t_m$。

□

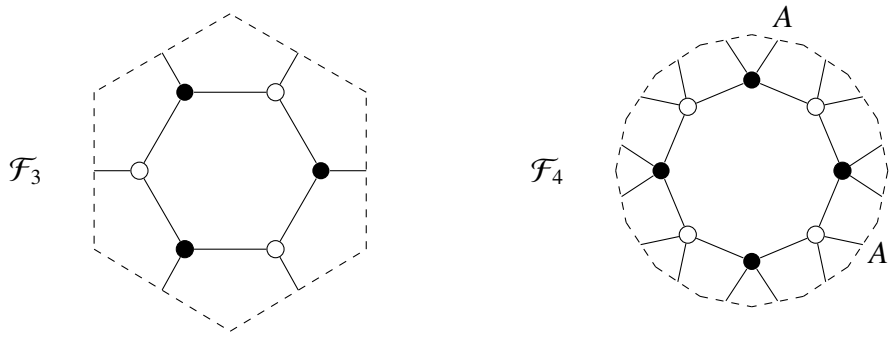

图2。费马绘图 $\mathcal{F}_3$ 和 $\mathcal{F}_4$。

例 2 度为 n 的费马绘图 $\mathcal{F}_n$ 是正则的，类型为 (n, n, n)，亏格为 $(n-1)(n-2)/2$，其中

$$G = \langle x, y \mid x^n = y^n = [x, y] = 1 \rangle \cong C_n \times C_n.$$

该嵌入图是完全二部图 $K_{n,\ n}$。绘图 $\mathcal{F}_3$ 和 $\mathcal{F}_4$ 见图2：在 $\mathcal{F}_3$ 的情形中，外六边形的相对边被识别，从而形成一个环面；而在 $\mathcal{F}_4$ 的情形中，外十六边形的边被识别，A 与 A 对应，其余边则按显然的 D_4 对称方式对应，从而得到一个亏格为 3 的曲面。

自同构群 G 在 n 个黑色顶点、n 个白色顶点以及 n 个面上均传递作用，但作用并非忠实。G 的这些作用的核分别是由典范生成元 x、y 和 $z := (xy)^{-1}$生成的循环子群，因此在每种情形下，G 都诱导出一个正则作用的置换群 $G \cong C_n$。当且仅当 n 为素数时，这三种作用各自都是本原的。G 的这三种作用的核的交是平凡的，因此 G 在全部 3n 个临界点集合上的非传递作用是忠实的。

例 3 阶为 8 的四元数群 Q_8，在自同构意义下有唯一一个由阶为 4 的元素 x、y、z 组成的生成三元组，且满足 $xyz = 1$。它们确定了一个类型为 (4, 4, 4)、亏格为 2、自同构群为 $G \cong Q_8$ 的正则绘图 $\mathcal{Q}$。图3 展示了这一绘图，其中外六边形的相对边彼此粘合。该绘图有两个黑色顶点、两个白色顶点和两个面，每一对都由 G 互换。在每种情形下，该作用都是本原的，其核是 G′ 的换位子群（也是中心），阶为 2，由图形中心处的半周旋转生成。相应的超地图是 Conder 的正则超地图普查 [2] 中的 RPH2.4。商 $\mathcal{Q}/G'$ 是费马绘图 $\mathcal{F}_2$，即 $K_{2,2}$ 在球面上的一个嵌入。

例4 前面的例子可以推广到所有奇素数，不过自同构群的结构略有不同。对于任意素数 $p > 2$，令

$$G = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{p+1} \rangle \cong C_{p^2} \rtimes C_p$$

是阶为 p^3、指数为 p^2的唯一非阿贝尔群。每个元素都可唯一写成 $a^i b^j$，其中 $i \in \mathbb{Z}_{p^2}$ 且 $j \in \mathbb{Z}_p$；当且仅当 i 与 p 互素时，其阶为 p^2。换位子

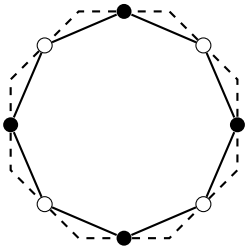

图3。绘图 $\mathcal{Q}$（将外八边形的对边识别起来）。

子群 G′（也是中心）为 $\langle a^p\rangle \cong C_p$，且 $G/G' \cong C_p \times C_p$。取标准生成元 $x = a$、$y = ab$ 和 $z = (xy)^{-1} = a^{-2(p+1)}b^{-1}$，其阶为 p^2，由此得到一个类型为 (p^2,p^2,p^2)、亏格为 $(p-1)^2(p+2)/2$ 的正则绘图 $\mathcal{D}_p$。其自同构群 G 在 p 个黑色顶点、p 个白色顶点以及 p 个面上均作本原作用。这些作用的核，即 G 中指数为 p 的正规子群 ⟨x⟩、⟨y⟩ 和 ⟨z⟩，都包含 G′；因此 G 在 $\mathcal{D}_p$ 的 3p 个特殊点上的作用并不忠实，其核为 G′。此绘图 $\mathcal{D}_p$ 是费马绘图 $\mathcal{D}_p/A' \cong \mathcal{F}_p$ 的一个正则 p 重覆盖，次数为 p，在其全部 3p 个临界点处分歧；当 $p = 3$或 5 时，相应的超地图在 [2]中编号为 RPH10.32 或 RPH56.70。

4. 广义帕利绘图

为了给出更多例子并引入一个重要定义，我们需要以下引理:

引理 4.1. 设 G 是某个素数幂 $q = p^d$对应的仿射群 $AGL_1(q)$ 的子群。那么，G 在域 $\mathbb{F}_q$ 上本原作用，当且仅当

$$G = G_S := \{t \mapsto at + b \mid a \in S,\ b \in \mathbb{F}_q\}$$

存在乘法群 $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$中一个阶为 n 的子群 S，其中 $n = d = 1$，或者 $n > 1$，且 S 满足以下等价条件:

(a) S 在 $\mathbb{F}_q$ 上的乘法作用是 $GL_d(p)$ 的一个不可约子群；(b) S 生成 $\mathbb{F}_q$ 的加法群；(c) p 模 (n) 的乘法阶为 d。

证明是初等的，唯一需要说明的是：若 G 是本原的，则它在 $\mathbb{F}_q$上传递，因此其阶可被 q 整除，故包含 $AGL_1(q)$ 中唯一的 Sylow p-子群，即阶为 q 的平移子群 $T = \{t \mapsto t + b \mid b \in \mathbb{F}_q\}$。注意，$G_S$ 是 $T \rtimes S$ 的半直积，其中 T 通过平移在 $\mathbb{F}_q$ 上正则作用，而稳定子 $S = G_0$ 固定 0，并通过乘法在 $\mathbb{F}_q$ 上作用。当 $n = d = 1$ 时，$G_S = T \cong C_p$。

我们可以利用这一结果构造更广泛的一类本原绘图。设 $G = G_S$，其中 S 满足引理 4.1 的条件。由于 $\mathbb{F}_q^*$ 是循环的，其子群 S 也必为循环群，因此取 S 的任意生成元 x。若 y 是 $G \setminus S$ 中的任意元素，则 $G = \langle x, y\rangle$，因为作为本原群 G 的点稳定子，S 是 G 的极大子群。因此，我们可以取 G 的生成三元组 (x, y, z)，其中 $z := (xy)^{-1}$，从而定义一个正则绘图 $\mathcal{D}$，使 $\mathrm{Aut}\ \mathcal{D} \cong G$。黑色顶点

$\mathcal{D}$（度为 n）与陪集 ⟨x⟩ = S 对应，因而也与 $\mathbb{F}_q$的元素对应；在这两种情形下，G 都以自然方式作用于它们，因此 G 在其上忠实且本原地作用。我们将这样的绘图称为 $\mathcal{D}$ 广义帕利绘图，因为这一构造是广义帕利映射概念在绘图中的自然推广（参见 [5] 或 [10, 第 9.1.1]节）。

我们将称 n、p 和 d 分别为 $\mathcal{D}$的度、域特征和维数。（当然，域特征 p 不应与 $\mathcal{D}$的欧拉示性数 χ 混淆。）令 GP(n) 和 GP(n, p) 分别表示所有度为 n 的广义帕利绘图，以及其中域特征也为 p 的绘图所构成的集合。因此，GP(1) 包含本原星形图 $\mathcal{S}t_m$，其中 m = p 为素数。另一个简单的特殊情形如下：

例5 令 $\mathcal{D} \in$ GP(2)，则 n = 2，d = 1，S = {±1} ⊆ $\mathbb{F}_p^*$ 为某个奇素数 q = p，且 G 是二面体群 D_p。若取 y ∈ T = C_p，则 $\mathcal{D}$ 是一个类型为 (2, p, 2) 的正则绘图，它将完全二部图 $K_{p,\,2}$ 嵌入 Σ中；该图有 p 个黑色顶点，位于 p 次单位根处，还有两个白色顶点，分别位于 0 和 ∞处；每对黑色与白色顶点之间由一条径向边连接；面中心则由黑色顶点乘以 $e^{\pi i/p}$得到。（该绘图由$\mathcal{S}t_p$ 及其关于球面 Σ赤道平面的反射组成。）若取 y ∈G \T = D_p \C_p，则$\mathcal{D}$ 是其对偶图，类型为 (2, 2, p)，白色顶点与面中心互换，边沿单位圆排列。无论哪种情形，自同构群 G 都由 z ↦ $e^{2\pi i/p}$z 和 z ↦ z 生成，并在黑色顶点上忠实地本原作用。图4展示了$\mathcal{B}_5$的平面图（其无穷远处有一个 5 度白色顶点），以及 $\mathcal{B}_5^{12}$ 的平面图。

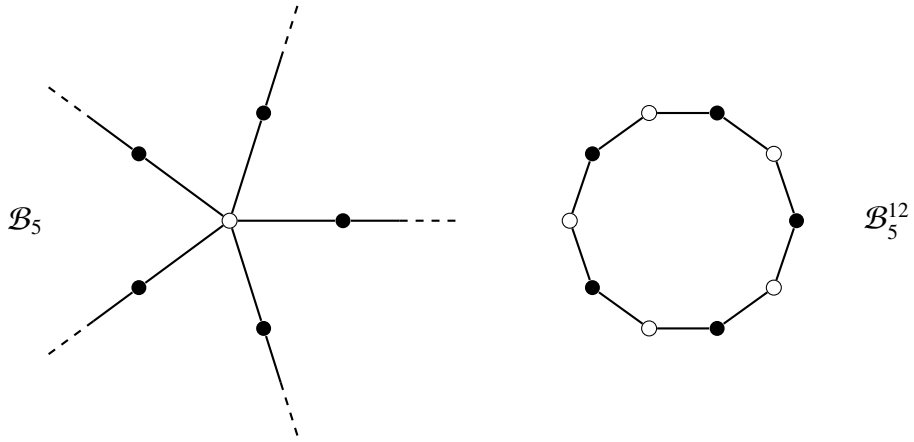

图4. 绘图 $\mathcal{B}_5$（在无穷远处有一个白色顶点）和 $\mathcal{B}_5^{12}$。

下一个例子更有启发性。

例 6 设 q = 13 且 n = 6，使得 S 是 $\mathbb{F}_{13}$中二次剩余（非零平方）的群。该群由元素 4 生成，因此我们可以定义 x : t ↦ 4t。若在 $\mathbb{F}_{13}$ 中取任意 b , 0，使 y : t ↦ –t +b，则 x 和 y 生成 $AGL_1(13)$ 中指数为 2 的唯一子群 G = $AHL_1(13) \cong C_{13} \rtimes C_6$。由于 y 和 z := $(xy)^{-1}$ 的阶分别为 2 和 3，我们得到一个可定向正则图

$\mathcal{D}$ 类型为 (6, 2, 3)，其自同构群为 G。由于白色顶点的度均为 2，我们可以忽略它们，并将 $\mathcal{D}$ 视为一个 6 度三角映射 $\mathcal{M}$。该映射有 13 个顶点、39 条边和 26 个面，因此其亏格为 1；图示见图 5，其中外六边形的相对两边相粘合，形成一个环面。 $\mathcal{M}$ 的顶点标记为 $\mathbb{F}_{13}$的元素，0 的邻点依次为 S 的生成元 4 的各次幂。该地图（$\{3,6\}_{3,\ 1}$ 按 Coxeter 和 Moser [3, 第 8 节.4] 的记号）是手性的，其镜像可类似地用 S 的生成元 $4^{-1} = 10$ 构造；两种情况下，嵌入图都是 Paley 图 P_{13}。

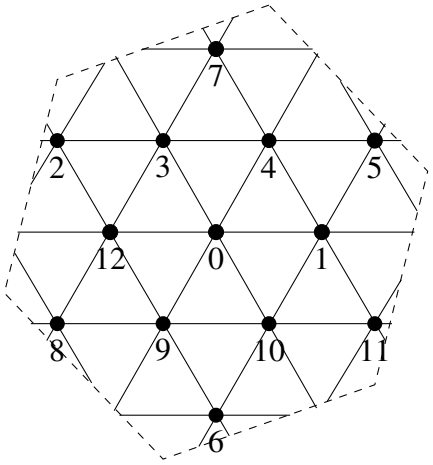

图 5. Paley 图 P_{13} 在环面上的嵌入。

广义帕利绘图的重要性在于定理 1.1：该定理断言，正则绘图 $\mathcal{D}$ 是本原且忠实的，当且仅当它是广义帕利绘图。在第10节证明这一点之前，我们先考察这类绘图的基本性质。

定义 $\mathcal{D}$ 的颜色常数为 $c = c(x, y) = c(\mathcal{D}) \in \mathbb{Z}_n$，若 $y \in T\, x^c$；对于每个 $c \in \mathbb{Z}_n$，令 GP(n, p, c) 表示满足 $c(\mathcal{D}) = c$ 的绘图 $\mathcal{D} \in$ GP(n, p) 集合。若取 $c = 0$，也就是说，选择 y 为 T 的一个非单位元（如 $\mathcal{B}_p$ 所示，见例4），则 y 的阶为 p，而 $z := (xy)^{-1}$ 的阶为 n，因此 $\mathcal{D}$ 的类型为 (n, p, n)。此时有 $q = p^d$ 个黑色顶点和面，以及 $nq/p = np^{d-1}$ 个白色顶点，所以 $\mathcal{D}$ 的欧拉示性数为

$$\chi = nq\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{p} - 1\right) = p^{d-1}(2p + n - np)$$

且亏格为 $g = 1 - \frac{\chi}{2}$。如果取 $c = -1$，那么 y 的阶为 n，而 z（T 的一个元素）的阶为 p，因此得到一个类型为 (n, n, p) 的绘图，其中 χ，且亏格与 $c = 0$ 相同（参见例4中的 $\mathcal{B}_p^{[2]}$）。然而，如果取某个 c 0, -1，那么 y 的阶与 x^c 相同，即 $m = n/\gcd(n, c)$，而 z 的阶为 $l = n/\gcd(n, c + 1)$，因此 $\mathcal{D}$的类型为 (n, m, l)，且

$$\chi = nq\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} - 1\right) = q\,(1 + \gcd(n, c) + \gcd(n, c + 1) - n)$$

且 $g = 1 - \frac{\chi}{2}$。

若 $m = 2$，则忽略其白色顶点后，$\mathcal{D}$ 可视为一张地图。这当且仅当 $c = 0$ 且 $p = 2$时成立，此时 $\mathcal{D}$ 的类型为 (n, 2, n)，亏格为 $1 + 2^{d-2}(n - 4)$，且 n 为奇数；或者 $c = n/2$ 且 n 为偶数，此时 p 为奇数，$\mathcal{D}$ 的类型为 (n, 2, l)，其中当 $n \equiv 0$ 或 2 mod (4) 时，$l = n$ 或 n/2。在后一种情况下，亏格分别为 $1 + q(n - 4)/4$ 或 $1 + q(n - 6)/4$。

GP(n, p) 中的两个广义帕利绘图 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 同构，当且仅当它们的标准生成对 x, y 和 x′, y′ 在 Aut G 下等价。该群同构于 $A\Gamma L_1(q) = AGL_1(q) \rtimes \mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$，并通过共轭作用于其正规子群 G；G 被视为 $AGL_1(q)$ 的一个子群。因此，$\mathcal{D} \cong \mathcal{D}'$ 当且仅当

- $x' = x^\gamma$ 对某个 $\gamma \in \mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q \cong C_d$;
- $c(x', y') = c(x, y)$，即 $y' \in T(x')_c$，其中 $y \in T\,x_c$。

若记 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{P}(x, c)$，则有 $\mathcal{P}(x, c) \cong \mathcal{P}(x', c)$，当且仅当 x 与 x′ 是伽罗瓦共轭的，且 $c = c'$。由引理 4.1 的条件 (b) 可知，$\mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$ 在 S 的生成元 x 上半正则作用，因此它在这些生成元上有 $\phi(n)/d$ 个轨道；另一方面，c 有 n 种选择，因此我们有：

命题 4.2. 对每个整数 $n \geq 1$ 以及每个与 n 互素的素数 p，有 $|GP(n, p)| = n\phi(n)/d$，其中对每个 $c \in \mathbb{Z}_n$，都有 $|GP(n, p, c)| = \phi(n)/d$；这里 d 是 p 模 (n) 的乘法阶。

$\mathcal{D} = \mathcal{P}(x, c)$ 的镜像是广义帕利绘图 $\mathcal{D} = \mathcal{P}(x^{-1}, c)$，它与 $\mathcal{D}$ 属于同一个集合 GP(n, p, c)。于是，当且仅当 $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}$ 时，$\mathcal{D}$ 是实的，也就是说，相应的超地图是完全正则的；当且仅当某个 $\gamma \in \mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$ 使 x 取逆时，这种情况才会发生。由于 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$ 由弗罗贝尼乌斯自同构 $t \mapsto t^p$ 生成，我们有：

命题 4.3。绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p)$ 要么全都是实的，要么全都构成手性对，具体取决于 -1 是否同余于 p 的某个幂模 (n)。

注意，若 $p^i \equiv -1$ 模 (n)，则 $p^{2i} \equiv 1$ 模 (n)，因此，要么 $n = 2$ 且 p 为奇数，要么 $n > 2$，d 为偶数且 $i \equiv d/2$ 模 (d)。令 $\mathbb{Z}_n^*$ 表示模 (n) 的可逆元乘法群，并令 $\mathbb{Z}_{n,p}^*$ 表示由（p 的同余类）生成的、阶为 d 的 $\mathbb{Z}_n^*$ 子群。于是，命题 4.3 表明，inGP(n, p) 中的绘图是实的还是手性的，取决于 $-1 \in \mathbb{Z}_{n,p}^*$ 与否。

为了刻画满足 $-1 \in \mathbb{Z}_{n,p}^*$ 的数对 n、p，设 $n_r = r^{e_r}$（r 为素数，$e_r \geq 1$）是 n 的分解中出现的素数幂，并令 d_r 为 p 模 (n_r) 的乘法阶。那么我们有如下结论：

命题 4.4. 存在某个 i 使得 $p^i \equiv -1$ mod (n) 当且仅当所有整除 n 的素数 $r > 2$ 对应的阶 d_r 具有相同的 2-部分 $2^k \geq 2$，其中当 $n_2 \geq 2$ 时，$p \equiv -1$ mod (n_2)，且 $k = 1$ 当 $n_2 \geq 4$ 时成立。在这些情况下，若有某个素数 $r > 2$ 整除 n，则同余 $p^i \equiv -1$ mod (n) 由 $i = \mathrm{lcm}\,\{d_r/2 \mid r > 2\}$满足；否则由 $i = 1$满足。

例如，若 $p = 2$，则当 $n = 3$ 和 $n = 5$时，这些条件均成立；但当 $n = 15$时则不成立：阶 $d_3 = 2$ 和 $d_5 = 4$ 均为偶数，但它们的 2-部分不同。更明确地说，$2^i \equiv -1$模 (3) 当且仅当 i 为奇数，而 $2^i \equiv -1$ 模 (5) 当且仅当 $i \equiv 2$ 模 (4)，这两个条件互不相容。不过，若 $p = 2$ 且 $n = 99$，则 $d_3 = 6$ 和 $d_{11} = 10$ 均为偶数，且具有相同的 2-部分，因此当 $i = 15$时，这些条件成立。

这里 p 是否为素数并不重要：与广义帕利绘图的许多其他性质一样，这些条件仅取决于 p 模 (n) 的同余类。当然，狄利克雷定理表明，$\mathbb{Z}_n^*$ 中的每个同余类都包含无穷多个素数。

To a为了避免冗长的讨论，命题 4.4 的证明推迟到第 1 节 4.

警告。若一个绘图是实的，则它具有反射，因此其底层黎曼曲面是对称的。然而，反过来并不成立：例如，例 6 中的绘图（其中一个见图 5）是手性的，而它们的黎曼曲面——六边形环面——却是对称的。

5. 地图上的运算

对于每个阶为 2 或 3 的置换 π of $\{0,1,2\}$，都存在一种对偶或三重性运算 D^π，作用于绘图，通过重新命名来置换黑色顶点、白色顶点和面中心的集合 V_0, V_1 和 V_2。这些运算构成群 $\Omega \cong S_3$，其元素为作用于绘图的运算 D^π：$\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^\pi$，并保持绘图所在的曲面及其自同构群，同时置换其类型中的三个周期。若 Ω 中保持 $\mathcal{D}$ 不变的子群的阶为 k，则 $\mathcal{D}$ 属于 Ω 的一个轨道，该轨道包含 6/k 个两两不同构的绘图。

对偶运算 D^{12}：$\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^{12}$ 将白色顶点与面互换，并保持每个集合 GP(n, p) 不变。由于 $\mathcal{D}^{12} = \mathcal{P}(x, c')$，其中 $1 + c + c' = 0$ 属于 $\mathbb{Z}_n$，可知 $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{12}$ 当且仅当 n 为奇数且 $c = (n-1)/2$。另两种对偶运算——将黑色顶点与白色顶点互换，或将黑色顶点与面互换——并不保持所有广义帕利绘图构成的集合。例如，若 $\mathcal{D} \in GL(n, p, c)$，那么 $\mathcal{D}$ 的黑白对偶 $\mathcal{D}^{01}$ 是广义帕利绘图，当且仅当 $c \in \mathbb{Z}_n^*$；此时 $\mathcal{D}^{01} \in GP(n, p, c^{-1})$，其中 c^{-1} 表示 c 模 (n) 的乘法逆元。特别地，$\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{01}$ 当且仅当某个 $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G = A\Gamma L_1(q)$ 中的元素将 G 的标准生成元 x 和 y 互换。现在需要考虑两种情况。若 $c = 1$，则对于某些 a , 1 和 b , 0，x 和 y 的形式分别为 $t \mapsto at$ 和 $t \mapsto at + b$；此时通过 $t \mapsto -t + b(1-a)^{-1}$的共轭作用可将它们互换。若 c , 1，则 x 和 y 被互换，当且仅当存在 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$ 中的某个元素将 x 和 x^c 互换；这等价于 d 为偶数且 $p^{d/2} \equiv c$ 模 (n)。类似地，$\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{02}$ 当且仅当 $c' = 1$（等价地，$c = -2$），或 d 为偶数且 $p^{d/2} \equiv c'\ (= -1 - c)$ 模 (n)。

互逆的三元性运算 D^{012} 和 D^{210} 通过循环置换 G 的标准生成元 x、y、z 来作用，因此，$\mathcal{D}$ 在其中一个（从而也在另一个）运算下保持不变，当且仅当存在某个 $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ 诱导这一 3-循环。若 $c = 1$，则 α 的存在意味着 $c' = 1$，因此 $n = 3$；于是 $d \le 2$，故 $\alpha \in AGL_1(q)$。由于 p 与 $n = 3$ 互素，α 必具有形式 $t \mapsto at + b$，其中元素 $a \in S$ 的乘法阶为 3。反过来，给定任意 y、$x \in T$ x，都存在这样一个自同构 α，它诱导所需的 3-循环，因此 $\mathcal{D}$ 在三元性运算下保持不变。若 c , 1，则仿照对偶的论证可知，$\mathcal{D}$ 在三元性运算下保持不变，当且仅当 d 能被 3 整除，且 $c \equiv p^{d/3}$ 或 $p^{2d/3}$ 模 (n)。综上所述，我们得到：

命题 5.1。设 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$。那么

- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{12}$ 当且仅当 n 为奇数且 $c = (n-1)/2$；
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{01}$ 当且仅当 $c = 1$，或者 $p_{d/2} \equiv c$ 模 (n) 且 d 为偶数；
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{02}$ 当且仅当 $c = -2$，或者 $p_{d/2} \equiv -1 - c$ 模 (n)，其中 d 为偶数；

- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{012}$，等价地 $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{210}$，当且仅当 $n = 3$ 且 $c = 1$，或者 $p_{d/3}$ 或 $p^2{}_{d/3} \equiv c$ 模 (n)，其中 d 可被 3 整除。

推论 5.2. 绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$ 在 Ω 中全部六种运算下均保持不变，当且仅当 $n = 3$ 且 $c = 1$。

孔操作 H_j ($j \in \mathbb{Z}_n^*$) 作用于所有度为 n 的地图构成的集合：保持嵌入图不变，并将（单值化群中）每个顶点周围边的循环旋转替换为其 j 次幂。这些操作保持自同构群不变，但通常会改变亏格，因为它们会改变面。（例如，H_2 将二十面体与大十二面体互换；后者有五边形面，亏格为 4。）只要 j 与 n 和 m 均互素，就可以将这些操作用于类型为 (n, m, l) 的正则绘图，把它们的黑白顶点颜色忽略并视作地图。对于 c , 0 的绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$，这适用，因为此时 m 整除 n；所得结果是另一个绘图 $H_j(\mathcal{D}) \in GP(n, p, c)$。若 $c = 0$，使得 $\mathcal{D}$ 的类型为 (n, p, n)，则可以改为应用 $D^{12} \circ H_j \circ D^{12}$, ，因为 $\mathcal{D}^{12}$ 的类型为 (n, n, p)。若 x 和 x′ 都是 S 的生成元，则对于某个与 n 互素的 j，有 $x' = x^j$，因此我们有：

命题 5. 3. 运算群 H_j ($j \in \mathbb{Z}_n^*$) 在每个集合 GP(n, p, c) 上传递作用 .

每个绘图的稳定子，因此也是该作用的核，是由 H_p 生成的阶为 d 的子群 $\{H_j \mid j \in \mathbb{Z}^*_{n,\ p}\}$。

最重要的洞运算适用于所有度数 n，即 H_{-1}：通过沿一条边反射，将每个地图或绘图替换为其镜像。由于此运算的阶为 2，且与 Ω 中的运算可交换，因此我们得到一个作用于地图和绘图的运算群 $\Omega^* = \langle \Omega, H_{-1} \rangle \cong S_3 \times C_2 \cong D_6$。如果 Ω 中保持 $\mathcal{D}$ 不变的子群的阶为 k^*，那么 $\mathcal{D}$ 属于 Ω 的一个轨道，该轨道由 $12/k^*$ 个两两不同构的绘图组成。特别地，如果 $\mathcal{D}$ 是实的（即 $H_{-1}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{D}$），那么 Ω 的该轨道中的所有其他绘图也都是实的，因此 $k^* = 2k$，且 Ω 与 Ω^* 的轨道相同；否则，$k^* = k$，且 Ω^* 的轨道是 Ω 的轨道与其镜像的互不相交并集。利用命题 4.3 和推论 5.2，我们得到：

推论 5.4。绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$ 在 Ω^* 中的全部十二种运算下均保持不变，当且仅当 $n = 3$、$p \equiv 2 \bmod (3)$ 且 $c = 1$。

例7 对于每个满足 $p \equiv 2 \bmod (3)$ 的素数 p，都存在唯一的绘图 $\mathcal{D} \in GP(3, p, 1)$。它的类型为 (3, 3, 3)，亏格为 1。由于 $d = 2$，它的自同构群为 $G \cong T \rtimes C_3$，其中 $T \cong C_p^2$。这些绘图中最小的一个（$p = 2$）展示在图6中：左侧是双色地图，右侧则是三色嵌入图，并在 $\beta^{-1}(\infty)$ 处标出红色顶点，以凸显它在 Ω^*下的完整对称性；两幅图中，外六边形的相对边均相互粘合，构成一个环面。更一般地，三角群 $\Delta = \Delta(3, 3, 3)$ 在 $\mathbb{C}$上通过等距变换作用，其平移子群 $\Delta_0 \cong \mathbb{Z}^2$ 的指数为 3；而 $\mathcal{D}$ 由 Δ_0 中指数为 p^2 、由其 p 次幂生成的子群一致化。关于 GP(3) 中的绘图，更多内容见第 8 节的例9。

尽管这些绘图 $\mathcal{D} \in GP(3, p, 1)$（其中 $p \equiv 2 \bmod (3)$）是唯一在整个群 Ω^*作用下保持不变的广义帕利绘图，但也有其他绘图具有这一性质，例如费马绘图。（事实上，自由群中任何有限指数的特征子群

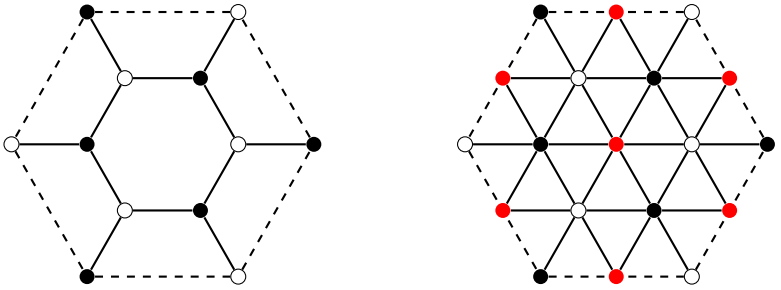

图6。一个 Ω* 不变环面绘图的两种视图。

F_2 都能一致化一个这样的绘图；对于 $\mathcal{F}_n$，该子群由 n 次幂和换位子生成。）另一个极端是，许多广义帕利绘图仅在 Ω*中的恒等运算下保持不变。其中包括 GP(6, p, 3) 中类型 (6, 2, 3) 的手性环面 dessin（其中 $p \equiv 1 \bmod (6)$ 为素数）；图7展示了其中一对手性绘图之一（$p = 7$），并将其绘制为地图。

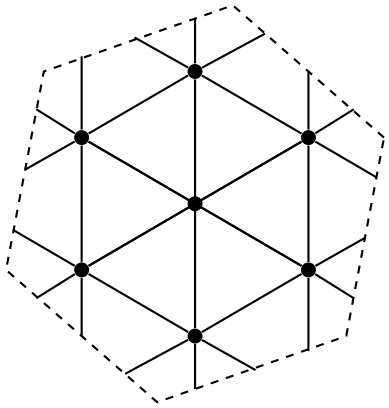

图7。一个类型为 (6,2,3) 的手性绘图，以地图形式绘制。

理解群 Ω* 的作用之所以重要，一个原因在于，在 Conder 的普查中，正则和可定向正则地图及超地图 [2], 的每个条目都代表 Ω* 的一个轨道。一般而言，每个轨道中非同构对象的数量并未给出，不过可以根据其中提供的自同构群表示式，经过一些计算工作推导出来。本文所给出的不变性结果为广义帕利绘图中的这一问题提供了另一种解决方法。

我们已经讨论了在 Ω 中的运算下的不变性，而命题 4.3 讨论了 H_{-1}，因此只剩下 H_{-1} 与对偶和三重性运算的复合，它们的阶分别为 2 和 6。例如 $H_{-1}(\mathcal{D}^{12}) = (H_{-1}(\mathcal{D}))^{12} = \mathcal{P}(x^{-1}, c')$，并且当且仅当 $-1 \in \mathbb{Z}_{n,\,p}^{*}$ 且 $c = (n-1)/2$（其中 n 为奇数）时，它与 $\mathcal{D}$ 同构。

当且仅当存在某个 $\alpha \in \mathrm{Aut}G$ 交换 x 和 y^{-1} 时，$H_{-1}(\mathcal{D}^{01}) \cong \mathcal{D}$。若 $c = -1$，使得 $y^{-1} \in T\,x$，则可如 D^{01} 的情形那样，通过适当的对合的共轭作用实现这一点，其中

c = 1。若 c −1，则当且仅当 $p^{d/2} \equiv c^{-1} \bmod (n)$ 且 d 为偶数时成立。类似地，当且仅当 c = 0，或 $p^{d/2} \equiv (-1-c)^{-1} \bmod (n)$ 且 d 为偶数时，$H_{-1}(\mathcal{D}^{02}) \cong \mathcal{D}$。最后，$\mathcal{D}$ 在互逆运算 $H_{-1} \circ D^{012}$ 和 $H_{-1} \circ D^{210}$（其阶为 6）下保持不变，当且仅当它在它们的立方 H_{-1} 以及平方 D^{012} 和 D^{210}，下保持不变。因此，根据命题 4.3 和 5.1，这当且仅当 (a) $-1 \in \mathbb{Z}^*_{n,p}$，且满足以下条件之一：(b1) n = 3 且 c = 1；或 (b2) $p^{d/3}$ 或 $p^{2d/3} \equiv c \bmod (n)$，且 d 能被 3 整除。现在，(a) 与 (b1) 等价于 $\mathcal{D} \in GF(3, p, 1)$，且 $p \equiv 2 \bmod (3)$；而 (a) 与 (b2) 等价于 d 能被 6 整除，且 $c \equiv p^{d/3}$ 或 $p^{2d/3} \bmod (n)$，并且 $p^{d/2} \equiv -1 \bmod (n)$。当然，我们已经在推论 5.2 和 5.4 中遇到第一个条件，即 $\mathcal{D} \in GF(3, p, 1)$，且 $p \equiv 2 \bmod (3)$；而第二个条件则在例如 n = 7、$p \equiv 3$ 或 5 mod (7)，且 c = 2 或 4 时成立。

这证明了以下命题 5.1 的类似结论：

命题 5.5。设 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$。那么

- $\mathcal{D} \cong H_{-1}(\mathcal{D}^{12})$ 当且仅当 n 为奇数且 $c = (n-1)/2$；
- $\mathcal{D} \cong H_{-1}(\mathcal{D}^{01})$ 当且仅当 c = 1，或 $p_{d/2} \equiv c^{-1}$ 模 (n)，其中 d 为偶数；
- $\mathcal{D} \cong H_{-1}(\mathcal{D}^{02})$ 当且仅当 c = 0，或 $p_{d/2} \equiv (-1-c)^{-1}$ 模 (n)，其中 d 为偶数；

当且仅当以下任一条件成立：• $\mathcal{D} \cong H_{-1}(\mathcal{D}^{012})$，或等价地，$\mathcal{D} \cong H_{-1}(\mathcal{D}^{210})$：$\mathcal{D} \in GF(3, p,1)$，其中 $p \equiv 2 \bmod (3)$；或者 d 能被 6 整除，且 $c \equiv p_{d/3}$ 或 $p^2{}_{d/3} \bmod (n)$，并且 $p_{d/2} \equiv -1 \bmod (n)$。

还可以问，哪些绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$ 在所有孔操作 H_j for $j \in \mathbb{Z}^*_n$ 下保持不变。根据命题 5.3，这等价于 GP(n, p, c) 只包含一个绘图（在同构意义下），也就是说，$\phi(n)/d = 1$。由于 d 是 p 在模 (n) 下的乘法阶，这又等价于 $\mathbb{Z}^*_n$ 是以 p 为生成元的循环群。现在已知（例如参见 [7, 定理 6.11],），$\mathbb{Z}^*_n$ 是循环群当且仅当 n = 1、2、4、r^e 或 $2r^e$，其中 r 是奇素数；此时生成元的个数为 $\phi(\phi(n))$。由于我们假设 $n \geq 2$，因此：

命题 5.6。以下条件等价：

- 绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$ 在所有孔操作 H_j 下均保持不变，其中 $j \in \mathbb{Z}^*_n$；
- GP(n, p, c) 只包含一个绘图；
- p 在模 (n) 下的乘法阶为 $d = \phi(n)$；
- $\mathbb{Z}^*_n$ 是以 p 为生成元的循环群；
- n = 2、4、r^e 或 $2r^e$，其中 r 是奇素数，且 p 生成 $\mathbb{Z}^*_n$。

例如，n = 18 满足这些条件，且 $\phi(\phi(18)) = \phi(6) = 2$ 个生成类，即 $p \equiv 5$ 和 $p \equiv 11$ 模 (18)。注意，如果这些条件成立，那么它们适用于 GP(n, p) 中所有 n 个绘图。

借用正则地图理论中的一个术语，我们将一个正则绘图定义为：若它在 Ω^* 及所有相关孔操作下保持不变，则称其为万花筒式。由推论 5.4 和命题 5.6 可得：

推论5.7。GP(n, p, c) 中的一个绘图 $\mathcal{D} \in$ 是万花筒式，当且仅当 n = 3、$p \equiv 2$ 模 (3) 且 c = 1。

有关这些绘图的更多信息，请参见例7。

6. 对白色顶点和面中心的作用

任意广义帕利绘图 $\mathcal{D}$ 的自同构群 G 在黑色顶点上本原作用。当且仅当白色顶点的稳定子是 G 的极大子群时，G 在白色顶点上本原作用。若 $c \neq 0$，则这些稳定子是 $\langle x^c \rangle$ 的共轭元，因此当且仅当 c 是模 (n) 的单位时，该作用才是本原的。然而，若 $c = 0$，则这些稳定子是 T 的循环子群，因此当且仅当 n 是素数且 $d = 1$，也就是说，$p \equiv 1$ 模 (n) 时，该作用才是本原的。

同样的论证也适用于面中心，但我们必须将 c 替换为 $c' = -1 - c$，或等价地替换为 $c + 1$。因此，我们有：

命题 6.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个广义帕利绘图，其自同构群为 G。那么，G 在 $\mathcal{D}$ 的白色顶点（分别为面中心）上作用本原，当且仅当以下条件之一成立：

(a) c（或 $c + 1$）是模 (n) 的单位，或者 (b) n 是素数，

$p \equiv 1$ 模 (n)，且 $c = 0$（或 $c = -1$）。

当且仅当满足以下条件之一时，除黑色顶点外，G 在白色顶点和面中心上也本原作用：

(1) c 和 $c + 1$ 都是模 (n) 的单位，或者 (2)

n 是素数，$p \equiv 1$ 模 (n)，且 $c = 0$ 或 -1。

条件 (1) 意味着 n 为奇数；反过来，若 n 为奇数，则取 $c = 1$即可满足该条件。

7. 商绘图

若 $\mathcal{D}$ 是一个自同构群为 G 的广义帕利绘图，则 $\mathcal{D}$ 有一个商绘图 $\mathcal{D}$/T，其中 T 是 G 的平移子群，是一个阶为 $q = p^d$ 的初等阿贝尔群。由于 T 在 $\mathcal{D}$的黑色顶点上传递作用，因此该绘图只有一个黑色顶点。由于 T 是 G 的正规子群，$\mathcal{D}$/T 是一个正则绘图，其自同构群为 $G/T \cong S \cong C_n$，其中 n 是 $\mathcal{D}$的度。若$\mathcal{D}$ 的颜色常数为 c，0 或 -1，则覆盖 $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$/T 是光滑的，因此 $\mathcal{D}$/T 与 $\mathcal{D}$具有相同的类型，且其亏格为

$$\frac{1}{2}(1 - \gcd(n, c) - \gcd(n, c + 1) + n).$$

然而，若 $c = 0$ or -1，使得 $\mathcal{D}$ 的类型为 (n, p, n) 或 (n, n, p)，则覆盖在白色顶点或面中心处分歧；在这些情况下，$\mathcal{D}$/T 的类型为 (n, 1, n) 或 (n, n, 1)，并且同构于 $\mathcal{S}t^{01}{}_n$ 或 $\mathcal{S}t^{02}{}_n$，二者的亏格均为 0。

例 8 若 $n = 6$，则当 $c = 0$、1、.....、5 属于 $\mathbb{Z}_6$ 时，$\mathcal{D}$/T 的亏格依次为 0、2、1、1、2、0。

在每种情况下，$\mathcal{D}$/T 作为一个指数为 n 的阿贝尔自同构群正则绘图，都是费马绘图 $\mathcal{F}_n$ 的正则商。现在，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{F}_n$ 同构于 $C_n \times C_n$，其标准生成元 x、y 和 z 作用于费马曲线上的点 [u、v、w]，分别将 u、v 或 w 乘以 $\zeta_n := \exp(2\pi i/n)$（因此 $xyz = 1$，因为 u、v 和 w 是齐次坐标）。于是，$\mathcal{D}$/T 是 $\mathcal{F}_n$ 关于子群 $\langle x^c y^{-1}、x^{c'} z^{-1} \rangle$ 的商，其中 $1 + c + c' = 0$ 属于 $\mathbb{Z}_n$。

8. 更多示例

在例 5 中，我们相当非正式地处理了 $n = 2$ 的情况。现在可以运用上述一般论证来处理下一个情形。

例9 设 $n = 3$。若 $p \equiv 1 \bmod (3)$，则 $d = 1$，因此 GP(3, p) 中有 $n\phi(n)/d = 6$ 个绘图，每个 $c \in \mathbb{Z}_3$对应一对手性对；而若 $p \equiv 2 \bmod (3)$，则 $d = 2$，因此有 3 个实 dessin，每个 $c \in \mathbb{Z}_3$ 对应一个。当 $c = 0$ 或 2 时，这些绘图的类型分别为 (3, p, 3) 或 (3, 3, p)，其亏格在 $p \equiv 1$ 或 $2 \bmod (3)$ 时分别为 $(p-1)/2$ 或 $(p-1)(p-2)/2$；而当 $c = 1$ 时，它们的亏格为 1，类型为 (3, 3, 3)。这些类型为 (3, 3, 3) 的环面 dessin $\mathcal{T}_p$ 是类型为 (3, 3, 3) 的泛覆超地图的商，通过对三角群$\Delta(3, 3, 3)$中包含于其平移子群且商为 C_p^d的正规子群 M 取商而得到；若 $p \equiv 1 \bmod (3)$，因而 $d = 1$，则有两个这样的子群，它们在扩展三角群中共轭；而若 $p \equiv 2 \bmod (3)$，因而 $d = 2$，则有一个这样的子群，且它在该群中正规。自对偶性和自三重对偶性为：

- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{12}$ 当且仅当 $c = 1$；
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{01}$ 当且仅当 $c = 1$，或者 $p \equiv 2$ 模 (3)，且 $c = 2$；
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{02}$ 当且仅当 $c = 1$，或者 $p \equiv 2$ 模 (3)，且 $c = 0$；
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{012} \cong \mathcal{D}^{210}$ 当且仅当 $c = 1$。

例如，若 $p = 2$，当 $c = 0$ 时，我们有四面体（白色顶点位于其边的中点），而当 $c = 2$ 时，则有其类型为 (3, 3, 2) 的对偶；此外，当 $c = 1$时，还有一个类型为 (3, 3, 3) 的实环面绘图 $\mathcal{T}_2$，此前已在图6中展示。若 $p = 5$，则有类型为 (3, 5, 3) 和 (3, 3, 5)、亏格为 6 的实绘图（对应的超地图见 [2] 中的 RPH6.1），以及一个实环面绘图 $\mathcal{T}_5$。然而，若 $p = 7$，则有三对手性对，其中两对位于克莱因四次曲线上，亏格为 3，类型分别为 (3, 7, 3) 和 (3, 3, 7)（见 CH3.1）；此外还有一对 $\mathcal{T}_7$ 和 $\mathcal{T}_7$，亏格为 1。类型为 (3, 3, 7) 和 (3, 3, 3) 的这些绘图表示希伍德图的嵌入，其中黑白顶点分别对应范诺平面的点和直线 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$（见 [15]）。绘图 $\mathcal{T}_7$ 展示于图 8；外六边形的相对两边粘合后形成一个环面。类型为 (3, 3, 7) 的一对手性对中的一个展示于图 9；外部十四边形的边相互粘合，A 与 A 对应，其余边则按 C_7 对称性对应。

情形 $n = 4$ 类似，因此略去。较大的 n 值则展现出更多有趣的现象。

例 10 令 $n = 7$，则 $|GP(7, p)|$ 如下：

- 若 $p \equiv 1 \bmod (7)$，则 $d = 1$，因此有 42 个绘图；
- 若 $p \equiv 6 \bmod (7)$，则 $d = 2$，因此有 21 个绘图；
- 若 $p \equiv 2$ or 4 mod (7)，则 $d = 3$，因此每种情形下有 14 个绘图；
- 若 $p \equiv 3$ or 5 mod (7)，则 $d = 6$，因此每种情形下有 7 个绘图。

若 $p \equiv 3$，且模 (7) 余 5 或 6，则 $p^{d/2} \equiv -1$ 模 (7)，因此根据命题 4.3，绘图 $\mathcal{D} \in GP(7, p)$ 均为实的；而若 $p \equiv 1$，且模 (7) 余 2 或 4，则它们构成手性对。若 $c = 0$ 为或 6，则 $\mathcal{D}$ 的类型为

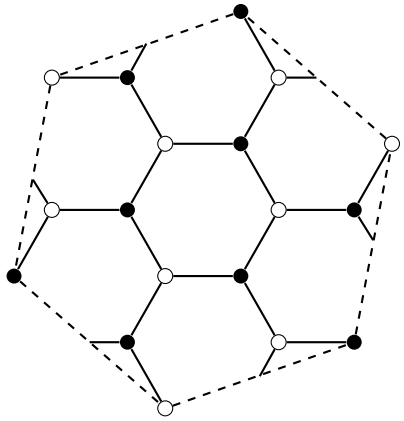

图 8. 绘图 $\mathcal{T}_7$。

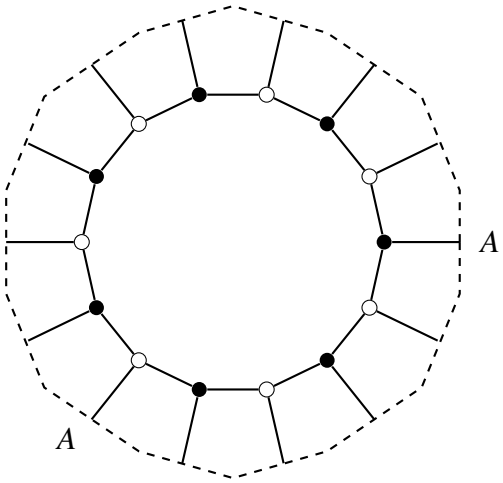

图 9. 一个亏格 3、类型为（3,3,7）的广义帕利绘图。

分别为 (7, p, 7) 或 (7, 7, p)；无论哪种情况， $\chi = \mathrm{p}^{d-1}(7 - 5\mathrm{p})$，因此 $\mathcal{D}$ 的亏格为

$$g = \frac{1}{2}\left(5p^d - 7p^{d-1} + 2\right).$$

然而，如果 c 不等于 0 或 6，那么 $\mathcal{D}$ 具有类型（7, 7, 7），且亏格为

$$g = 2p^d + 1.$$

应用命题 5.1，我们得到：

- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{12}$ 当且仅当 c = 3;
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{01}$ 当且仅当 c = 1，或 c = 6 且 p ≡ 3，模 (7) 同余于 5 或 6;
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{02}$ 当且仅当 c = 5，或 c = 0 且 p ≡ 3，模 (7) 同余于 5 或 6。
- $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^{012} \cong \mathcal{D}^{210}$ 当且仅当 c = 2 或 4，且 p ≡ 2模 (7) 同余于 3、4 或 5。

我们依次考察六个满足 $p \equiv 0 \bmod (7)$ 的同余类。首先设 $p \equiv 1 \bmod (7)$，于是 42 个绘图 $\mathcal{D} \in GP(7, p)$ 构成 21 对手性对，每个 $c \in \mathbb{Z}_7$对应三对。若 $c = 0$ 或 6，这些绘图的类型为 (7, p, 7) 或 (7, 7, p)，亏格 $g = 5(p-1)/2$；这 12 个绘图与 6 个类型为 (p, 7, 7) 的对偶绘图（它们不是广义帕利映射）在 Ω^*的作用下构成三个长度为 6 的轨道，每个绘图都与其相应对偶的镜像同构。例如，若 $p = 29$，则 $g = 70$，这三个轨道对应 Conder 的普查 [2], 中的 CH70.8、CH70.9 和 CH70.10 条目；每个条目分别代表上述三种类型中的一对手性对。（有关支持这些及其他类似论断的计算细节，请参见下一节。）GP(7, p) 中剩余的 30 个绘图满足 $c = 1$、2、3、4 或 5，类型均为（7, 7, 7），亏格为 $2p + 1$；它们构成三个长度为 6 的轨道，每个轨道由 $c = 1$、3 和 5 各自对应的一对手性对组成；此外还有一个长度为 12 的轨道，由 $c = 2$ 和 4 各自对应的三对手性对组成。例如，若 $p = 29$，这四个轨道对应 [2], 中的 CH59.11–14 条目，其中最后一个轨道的长度为 12。

若 $p \equiv 2$ 或 4 mod (7)，则 $d = 3$；每种情况下都有 14 个绘图，组成 7 对手性对，每个对应一个 $c \in \mathbb{Z}_7$。若 $c = 0$ 或 6，相应的一对类型为 (7, p, 7) 或 (7, 7, p)，亏格为 $g = (5p^3 - 7p^2 + 2)/2$；再加上一对类型为 (p, 7, 7)、不属于 GP(7, p) 的手性对，它们组成一个长度为 6 的轨道。例如，若 $p = 2$，因此 $g = 7$，该轨道对应于 [2], 中的 C7.2，其中 $c = 0$对应的一对被视为地图，给出了完全图 K_8的可定向正则嵌入的 Edmonds 对。（从历史上看，这是首次发现亏格 g、且 $g > 1$ 的一对手性地图。）若 $c \neq 0$ 或 6，相应的一对类型为（7, 7, 7），亏格为 $g = 2p^3 + 1$；这十个绘图分为两个轨道，长度分别为 6（各含一对，其中 $c = 1$、3 和 5）和 4（对应 $c = 2$ 和 4）。例如，若 $p = 2$，这些轨道分别对应于 [2]中的 CH17.7 和 CH17.8。

若 $p \equiv 3$ 或 5 mod (7)，则 $d = 6$，且每种情况下都有七个绘图，全部为实绘图，每个 $c \in \mathbb{Z}_7$对应一个。若 $c = 0$ 或 6，它们的类型为 (7, p, 7) 或 (7, 7, p)，亏格为 $(5p^6 - 7p^5 + 2)/2$；若 $c \neq 0$ 或 6，它们的类型为（7, 7, 7），亏格为 $2p^6 + 1$。对于每个 p，这七个绘图分属 Ω 的三个轨道：一个长度为 2，对应 $c = 2$ 或 4；一个长度为 3，对应 $c = 1$、3 和 5；另一个长度为 3，对应 $c = 0$ 和 6，此外还有第三个类型为 (p, 7, 7) 的绘图，它不是广义帕利绘图。在所有情况下，即使 $p = 3$，亏格也过大，因此相应的超地图不会出现在 [2] 中。

最后，若 $p \equiv 6$ 模 (7)，则 $d = 2$，共有 21 个绘图，且全部为实绘图；对于每个 $c \in \mathbb{Z}_7$，各有三个绘图，分别对应 $\mathbb{Z}_7^*$ 的生成元 $x^{\pm 1}$ 的三个互为逆元的对。若 $c = 0$ 或 6，它们的类型为 (7, p, 7) 或 (7, 7, p)，亏格为 $(5p^2 - 7p + 2)/2$；若 $c \neq 0$ 或 6，它们的类型为类型（7, 7, 7），亏格为 $2p^2 + 1$。Ω 有一个长度为 6 的轨道，由 $c = 2$ 或 4 的绘图组成；其余 15 个绘图以及另外三个类型为 (p, 7, 7) 的绘图，则构成六个长度为 3 的轨道。同样，亏格过大，因此无法在 [2] 中列出相应的超地图。

作为比较，我们简要考察一个 n 为合数的例子，此时可以出现更多种类型：

例 11 令 $n = 8$，则 $|GP(8, p)|$ 如下：

- 若 $p \equiv 1 \bmod (8)$，则 $d = 1$，有 32 个手性绘图；
- 若 $p \equiv 3$ 或 5 mod (8)，则 $d = 2$，两种情况下各有 16 个手性绘图；
- 若 $p \equiv 7$ 模 (8)，则 $d = 2$，且有 16 个实 dessin。

若 $c = 0$ 或 7，则 $\mathcal{D}$ 的类型分别为 (8, p, 8) 或 (8, 8, p)；两种情况下 $\chi = 2p^{d-1}(4-3p)$，因此 $\mathcal{D}$的亏格为

$$g = 1 - \frac{\chi}{2} = 3p^d - 4p^{d-1} + 1.$$

因此，若 $p \equiv 1 \bmod (8)$，则 $d = 1$ 且 $g = 3(p-1)$；例如，若 $p = 17$，则 $g = 48$（见 [2]中的 CH48.4–6）。若 $p \equiv 3$、5 或 7 mod (8)，则 $d = 2$ 且 $g = (3p-1)(p-1)$；例如，若 $p = 3$、5 或 7，则 $g = 16$、56 或 120（前两种情况见 CH16.1 和 CH56.5–6）。

若 $c = 1$、2、5 或 6，则 $\mathcal{D}$ 的类型为 (8, 8, 4) 或 (8, 4, 8)，分别对应 c 为奇数或偶数。我们有 $\chi = -4p^d$，因此当 $p \equiv 1 \bmod (8)$ 时，$g = 2p + 1$；否则 $g = 22p^2 + 1$。例如，若 $p = 17$，则 $g = 35$（CH35.4–8）；若 $p = 3$，则 $g = 19$（CH19.8–9）；若 $p = 5$，则 $g = 51$（CH51.21-24）；若 $p = 7$，则 $g = 99$（RPH99.21–25）。

若 $c = 3$ or 4，则 $\mathcal{D}$的类型分别为 (8, 8, 2) 或 (8, 2, 8)，其中 $\chi = -2p^d$，因此当 $p \equiv 1 \bmod (8)$ 时，$g = p + 1$；否则 $g = p^2 + 1$。例如，若 $p = 17$，则 $g = 18$（Paley 映射的手性对 C18.1）；若 $p = 3$，则 $g = 10$（K_9的自对偶 Biggs 嵌入的手性对 C10.3）；若 $p = 5$，则 $g = 26$（C26.1）；若 $p = 7$，则 $g = 50$（R50.7）。

例 12 我们在上述例子中考察过的度数 $n = 2$、3、7 和 8 都具有这样的性质：$n + 1$ 是素数幂。更一般地，若 $n = p^e - 1$，其中 p 为某个素数，则对于绘图 $\mathcal{D} \in \mathrm{GP}(n, p)$，有 $d = e$，且 $G \cong \mathrm{AGL}_1(q)$，其中 $q = p^e$。事实上，由于 $\mathrm{AGL}_1(q)$ 在 $\mathbb{F}_q$上双重传递作用，但没有具有这一性质的真子群，因此这些是仅有的 G 在黑色顶点上传递作用且忠实的双重传递正则绘图。此外，若 $c = 0$ 且 $p = 2$，或 n 为偶数且 $c = n/2$，则 $m = 2$，而 $\mathcal{D}$（忽略白色顶点后）是一个地图 $\mathcal{M}$，具体来说，是 Biggs 在 [1]中构造的完全图 K_q 的可定向正则嵌入之一。例如，若 $n = 10$ 且 $c = 5$，则有 K_{11}, 的 Biggs 嵌入的两个手性对 C12.1 和 C12.2 $\mathcal{M}$，它们对应于类型为 (10, 2, 5)、亏格为 12 的绘图 $\mathcal{D}$；若 $n = 15$ 且 $c = 0$，则有 K_{16}, 的 Biggs 嵌入手性对 C45.2，它对应于类型为 (15, 2, 15)、亏格为 45 的绘图。

同样，若 $2n = p^e - 1$（其中 p 为某个素数，且必为奇数），则绘图 $\mathcal{D} \in \mathrm{GP}(n, p)$ 也有 $d = e$，但此时 G 是 $\mathrm{AGL}_1(q)$ 中指数为 2 的子群 $\mathrm{AHL}_1(q)$。若 n 为偶数，使得 $q \equiv 1 \bmod (4)$，且 $c = n/2$，则 $\mathcal{D}$ 对应于 [5] 中讨论的一种定向正则 Paley 地图 $\mathcal{M}$。例如，若 $n = 6$，我们得到 Paley 图 P_{13}, 的一个环面嵌入手性对，其中一个已在图 5 中展示。

9. 典型计算

通过对 [2] 中给出的 $G = \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ 的表示进行阿贝尔化，可以确定其中出现的广义帕利绘图的 c 值，从而确定商绘图 $\mathcal{D}/T$（它们具有相同的 c 值）。已知 n、p 和 c 后，第 5 节中的不变性结果便可给出 Ω^* 轨道的长度，该长度对应于 [2], 中的每一项，也就是它所代表的非同构绘图数量；这些信息在原文中并未给出。

例 13 作为说明， [2] 中的 CH70.8、CH70.9 和 CH70.10 条目表示 Ω^* 的轨道，其中包含亏格为 70、类型为 (7,7,29) 的可定向正则手性超图。按我们的术语，这些还包括 GP(7,29,c) 中的绘图 $\mathcal{D}$，其中 $c = 0$ 或 6（见第 8 节中的例 10。

在 CH70.8 的情形下，关于 $\mathcal{D}$ 的自同构群 G，以标准生成元 x 和 y（或按 [2] 中的记号写作 R 和 S）表示的定义关系为：

$$x^{-1}y^{-1}x^2y^2 = x^{-7} = y^{-1}x^{-1}yx^2yx^{-1}y^{-1} = 1.$$

将这些关系阿贝尔化后，从第一个关系可得 $xy \in G' = T$，因此 $y \in T x^{-1}$，进而 $c = -1 = 6$ 属于 $\mathbb{Z}_7$。在 CH70.9 的情形中，我们得到 c 的相同取值，其关系为

$$x^{-7} = xyx^3y^3 = y^{-1}x^{-1}yx^2yx^{-1}y^{-1} = y^{-7} = 1,$$

以及 CH70.10，其关系为

$$x^{-7} = y^{-1}x^{-1}yx^2yx^{-1}y^{-1} = x^{-1}y^2x^2y^{-1}xy = y^{-7} = 1.$$

由于 $c = 6$，第 5 节中的不变性结果表明，Ω^* 中保持这些 (7, 7, 29) 类型绘图的运算只有 $H_{-1} \circ \mathcal{D}^{01}$ 和恒等运算，因此 Ω^* 中包含它们的轨道 CH70.8、CH70.9 和 CH70.10 的长度为 12/2 = 6。应用三重性可知，这些轨道中的每一个都包含一对 (7, 7, 29) 类型和一对 (7, 29, 7) 类型的广义帕利绘图手性对（后者的 $c = 0$），以及一对 (29, 7, 7) 类型的绘图，这些绘图不是广义帕利绘图。

为了确定哪些广义帕利绘图 $\mathcal{D}$ 属于这些轨道中的哪一个，我们需要知道在每种情况下 x 如何作用于 V，或者等价地，通过共轭作用如何作用于 T。若定义 $t := xy$，使得 $T = \langle t \rangle$，$y = x^{-1}t$ 且 $y^{-1} = t^{-1}x$，则 CH70.8 的第二个关系变为

$$1 = x^{-1}.t^{-1}x.x^2.x^{-1}t.x^{-1}t = x^{-1}t^{-1}x^2tx^{-1}t = (t^{-1})^x t^{x^{-1}} t = t^{-r+r^{-1}+1},$$

其中我们定义 $r \in \mathbb{F}_{29}$ by $t^x = t^r$。因此 $-r + r^{-1} + 1 = 0$ 属于 $\mathbb{F}_{29}$，所以解等价的二次方程 $r^2 - r - 1 = 0$ 可得 $r = -5$ 或 6，而其中只有 $r = -5$ 满足 $r^7 = 1$，正如第二个关系所示。（第三个关系没有提供有用信息。）因此，绘图 $\mathcal{D}$ 在 GP(7, 29, 6) 中由 x 对 T 的作用 $x\colon t \mapsto t^{-5}$ 所定义。由于 −5 在 $\mathbb{F}_{29}$ 中的乘法逆元是 −6，镜像 $\mathcal{D} = H_{-1}(\mathcal{D})$ 中的作用由 $t \mapsto t^{-6}$ 给出。应用对偶运算 D^{12}，得到 CH70.8 中第二对手性广义帕利绘图，其类型为 (7, 29, 7)，且 $c = 0$。类似的计算表明，在 CH70.9 中，相应的手性对 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 的 r 分别为 −4 和 7；在 CH70.10 中，它们的 r 分别为 −9 和 −13。这涵盖了 $\mathbb{F}_{29}^*$ 中所有阶为 7 的元素，因而也涵盖了 GP(7, 29, 6) 和 GP(7, 29, 0) 中每个绘图的全部 $\phi(7)/d = 6$。

对于 GP(7, 29, c) 中 $c = 1$、2、……、5 的绘图，也可以采用类似的论证；这些绘图的类型为（7, 7, 7），亏格为 59，对应于 [2] 中的条目 CH59.11–14。（同样，参见第 8 节中的例 10。）代表 CH59.11 的绘图 $\mathcal{D}$ 的自同构群 G 的定义关系为

$$x^{-7} = x^{-1}y^{-1}x^{-2}yxy^{-1} = xy^{-1}x^{-2}y^{-3} = 1.$$

阿贝尔化后，可得 $y \in T x^5$，因此 $c = 5$。由此可知，Ω^* 中保持 $\mathcal{D}$ 不变的唯一非恒等运算是 D^{02}，所以该轨道的长度为 12/2 = 6。若定义 $t := yx^2 \in T$，使得 $y = tx^{-2}$ 且 $y^{-1} = x^2t^{-1}$，则第二个关系给出

$$1 = x^{-1}.x^2t^{-1}.x^{-2}.tx^{-2}.x.x^2t = xt^{-1}x^{-2}txt = (t^{-1})^{x^{-1}}t^x t = t^{-r^{-1}+r+1}$$

其中 $t^x = t^r$。因此 $-r^{-1} + r + 1 = 0$ 属于 $\mathbb{F}_{29}$，所以 $r^2 + r - 1 = 0$，得出 $r = 5$ 或 -6，而其中只有 $r = -6$ 满足 $r^7 = 1$。因此，在 $\mathcal{D}$ 中，x 对 T 的作用由 $t \mapsto t^{-6}$给出；在 $\mathcal{D}$ 中，则由 $\overline{t} \mapsto t^{-5}$给出。该轨道中的另外四个广义帕利绘图（其中 $c = 1$ 和 3）可通过对这对绘图施加三元性运算得到。

在 CH59.12 的情形下，定义关系为……我们得到相同的 c 值，因此轨道的长度和结构也相同；

$$x^{-7} = xy^{-1}x^3yxy^{-1} = y^{-7} = x^{-1}yx^{-3}y^{-1}x^2y^{-1} = 1,$$

而在 CH59.13 的情形下，定义关系为...

...

$$x^{-7} = xyx^3y^{-2}x = yxyx^2y^{-1}xy = 1.$$

在这些情形下，x 分别以 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 的对方式作用于 T，其中 $r = -4$、7 和 -9、-13。（注意，我们现在已经涵盖了 $\mathbb{F}_{29}^*$ 中所有六个阶为 $n = 7$ 的元素 r，因此也涵盖了 S 对 T 的所有非平凡作用。）

然而，在 CH59.14 中，定义关系

$$x^{-7} = xy^{-1}x^{-2}yx^{-1}y = y^2x^{-2}yxy = 1$$

意味着 $c = 2$。在这种情况下，Ω^* 中没有非恒等运算能使 $\mathcal{D}$ 保持不变，因此该轨道的长度为 12。要找出其他十个绘图，必须对数对 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ 应用 Ω 中所有的对偶和三元性运算；这些绘图的 c = 1、2 或 4。在 $\mathcal{D}$ 中，x 在 T 上的作用为 $t \mapsto t^{-6}$；而在 $\mathcal{D}$中，则为 $t \mapsto t^{-5}$。

在这个例子中，参数 n、p 较小，尤其是 d 较小，因而情况比较有利。一般来说，如果这些参数较大，特别是当 T 和 V 在 $\mathbb{F}_p$上的维数为 $d > 1$ 时，计算就会繁琐得多，因此需要使用计算机工具。

10. 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1，我们需要了解弗罗贝尼乌斯群这一概念。它是一种传递置换群，其中任意两点的稳定子都是平凡群，但任意单点的稳定子都非平凡（也就是说，该群不是正则作用）。每个弗罗贝尼乌斯群 G 都是正规子群 N（即弗罗贝尼乌斯核；根据 Thompson 的一个定理，它是幂零群）与点稳定子 G_0（即弗罗贝尼乌斯补群）的半直积 $N \rtimes G_0$。关于弗罗贝尼乌斯群的更多背景知识，参见 [4, §V.8] 或 [14]。

命题 10.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个本原正则绘图，其自同构群为 G，黑顶点集为 V。那么，G 在 V 上作用的核 K 是 G 的循环正规子群，并且满足以下条件之一：

(a) $\overline{G} = G/K$ 是素数次正则群；或 (b) G 是一个弗罗贝尼乌斯群，且 K 包含于 G 的中心。

证明。顶点 $v \in V$ 的稳定子 G_v 是循环群，且 K 包含于其中，因此 K 也是循环群。由于 $\mathcal{D}$ 是本原的，这些稳定子是 G 的极大子群。“具有相同稳定子”构成一个 G-不变等价关系，因此这些稳定子要么全都相同，要么两两不同。如果它们全都相同，因而都等于 K，那么 G 是 V 上的正则置换群

，由本原性可知其次数为素数。因此，我们可以假设不同顶点 v、w ∈ V 的稳定子互不相同。这些稳定子是阿贝尔群，所以它们之交的中心化子 $C_G(G_v \cap G_w)$ 同时包含 G_v 和 G_w，因而等于 G；于是 $G_v \cap G_w$ 位于 G 的中心。由于稳定子 G_u (u ∈ V) 彼此共轭，$G_v \cap G_w$ 固定每个黑色顶点，因此包含于 G 在 V 上作用的核 $K = \cap_{u \in V} G_u$。显然 $G_v \cap G_w \geq K$，因此 $G_v \cap G_w = K$，从而 K 包含于 G 的中心。在由 G 在 V 上诱导的置换群 $\overline{G} = G/K$ 中，每一对顶点 v、w 的稳定子 $\overline{G_v} \cap \overline{G_w} = (G_v \cap \overline{G_w})/K$ 都是平凡群。由于 $G_v > K$，我们有 $\overline{G_v} > 1$，因此 G 是一个弗罗贝尼乌斯群。□

例 14 为说明在情形 (a) 中 K 不一定是中心子群，令

$$G = \langle x, y \mid x^n = y^p = 1,\ x^y = x^r \rangle \cong C_n \rtimes C_p,$$

其中 r 是 $\mathbb{Z}_n^*$ 中的一个 p 阶元素。于是，对于一个由标准生成元 x 和 y 生成的正则绘图 $\mathcal{D}$，$G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$。其中有 p 个度为 n 的黑色顶点，以及 n 个度为 p 的白色顶点。现在，G 在黑色顶点上的作用是本原的，并诱导出一个正则置换群 $\overline{G} = G/K \cong C_p$，其核为 $K = \langle x \rangle$；K 是循环的，但不是 G 的中心子群。例如，若 p = 2 且 r = −1，则 $G \cong D_n$，而 $\mathcal{D}$ 作为地图来看，是球面上的 n 度双面体（或沙滩球）。

定理 1.1 的证明。根据其构造，广义帕利绘图是本原且忠实的；对每个素数 p，p 星绘图也如此。

反过来，如果一个正则绘图 $\mathcal{D}$ 是本原且忠实的，那么 $\overline{G} = G$；由命题 10.1 可知，这是一个正则群或弗罗贝尼乌斯群。在前一种情况下，引理 3.1 表明 $\mathcal{D}$ 是星形地图，因此我们可以假设 G 是一个弗罗贝尼乌斯群。

与任何弗罗贝尼乌斯群一样，G 的 Frobenius 核 N 是一个幂零正规子群，在 V 上正则作用。由于 G 本原作用，N 是特征单的（否则它会包含 G 的一个非平凡正规子群，因而也包含一个传递子群作为真子群），因此它是若干同构单群的直积。由于 N 是幂零群，这些单群必为素数阶循环群，所以 N 是初等阿贝尔群，其阶为 $q = p^d$，其中 p 是某个素数；我们可以将 N 看作域 $\mathbb{F}_p$ 上的 d 维向量空间。由于 N 在 V 上正则作用，我们可以将 V 与 N 等同，并令 N 通过平移作用于自身。Frobenius 补群 G_0，（即向量 0 的稳定子）通过共轭作用于向量空间 V，作为 $GL_d(p)$ 的一个子群；由于 G 本原作用，该作用不可约。由于 G_0 是阿贝尔群，由舒尔引理可知，可以将 V 与域 $\mathbb{F}_q$ 的加法群等同，并将 G_0 与乘法群 $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ 的一个子群 S 等同；S 生成 V（例如参见 [4, Satz II.3.10]，其中 f = 1）。于是，$G = V \rtimes G_0$ 在 V 上作为 $AGL_1(q)$ 的一个本原子群作用，如引理 4.1 所述。$\mathcal{D}$ 的黑色顶点对应于子群 $G_0 = S$ 的陪集，而顶点 0 周围边的循环次序由 S 的生成元 x 的连续幂给出，因此 $\mathcal{D}$ 是一个广义帕利绘图，如例 3 所述。□

11. 伽罗瓦作用

绝对伽罗瓦群 $\Gamma = \mathrm{Gal}\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ 作用于绘图的同构类，并保持其自同构群和类型。因此，它作用于广义帕利绘图 $\mathcal{D}$ 的集合，并保持其度 n 和特征 p。回顾一下，对于给定的 n 和 p（且 p 不整除 n），

共有 $n\phi(n)/d$ 个绘图，其中每个颜色常数 $c \in \mathbb{Z}_n$对应 $\phi(n)/d$ 个，d 是 p 模 n 的乘法阶。事实上，Γ 也保持 c 的值不变。其原因之一是，注意到 Γ 在商绘图 $\mathcal{D}/T$ 的集合上诱导出一个作用，因为阶为 $q = p^d$ 的平移群 T 是 $G := \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$的特征子群。这些是具有阿贝尔自同构群（同构于 C_n）的正则绘图，因此它们定义在 $\mathbb{Q}$ 上（见 [17]），从而在 Γ下保持不变。由于 c 的取值与这些绘图的同构类一一对应，因此它们也在 Γ作用下保持不变。因此，对于每个三元组 n、p 和 c，Γ都作用于具有这些参数的广义帕利绘图集合 $GP(n, p, c)$。

问题：是否有更直接的证明表明 c 在 Γ下是不变量?

由于孔操作群 $H_j\,(j \in \mathbb{Z}_n^*)$ 在这些集合 $GP(n, p, c)$ 上传递作用，因此根据 [9, 定理 2]，它们是 Γ 在广义帕利绘图上的轨道，并且该轨道中的每个绘图 $\mathcal{D}$ 都定义在分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的一个子域 K 上，其中$\zeta_n := e^{2\pi i/n}$：具体而言，K 是子群 $H = \{j \in \mathbb{Z}_n^* \mid H_j(\mathcal{D}) \cong \mathcal{D}\}$ 的不动域；我们以通常的方式将 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Z}_n^*$ 等同。（这推广了 [5]中关于广义帕利地图的类似结果；另见 [10, 第 9.1 节1]。）该轨道的长度是此扩张的次数$|K : \mathbb{Q}| = \phi(n)/d$。命题 5.6 告诉我们该次数何时为 1，因此有：

命题 11.1. 绘图 $\mathcal{D} \in GP(n, p, c)$ 当且仅当 $n = 2$、4、r^e 或 $2r^e$（其中 r 是奇素数）且 p 生成 $\mathbb{Z}_n^*$ 时，定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

12. 方程

一个重要且困难的问题，是如何将有关绘图的组合数据转化为定义方程。即使正则绘图具有群论优势，这也只在少数几个简单情形的族中得以实现：例如参见 [10, 第 9 节。2], 其中一个这样的族由广义帕利绘图构成。

例 15 假设 $\mathcal{D} \in GP(n, p)$，其中 $p \equiv 1 \bmod (n)$，因此 $d = 1$，且 G 是亚循环群 $C_p \rtimes C_n$。若取 $c = 0$，则 $\mathcal{D}$ 的类型为 (n, p, n)，亏格为 $(n-2)(p-1)/2$；嵌入图是完全二部图 $K_{p,n}$，其中有 p 个黑色顶点和 n 个白色顶点，其度数分别为 n 和 p。在 $GP(n, p, 0)$ 中有 $\phi(n)$ 个这样的绘图 $\mathcal{D}$，每个对应于 $\mathbb{F}_p^*$中一个阶为 n 的元素 x。正如第 11 节所述，这些 $\phi(n)$ 个绘图在孔操作 $H_j\,(j \in \mathbb{Z}_n^*)$ 以及绝对伽罗瓦群的作用下传递地互相置换；绝对伽罗瓦群的作用为 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}_n^*$。因此，只需给出其中一个绘图的定义方程，且方程系数属于 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$，因为其余绘图的方程可通过伽罗瓦共轭得到。这里的有利之处在于，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}/T$ 的循环覆盖，而后者是黎曼球面 Σ上的一个绘图。事实上，$\mathcal{D}/T = \mathcal{S}t^{01}{}_n$，在 0 处有一个度为 n 的黑色顶点，并在 1 的 n 次单位根处有度为 1 的白色顶点，p 层覆盖在这些位置分歧。在 [9] 的例4中，利用这些事实给出了仿射模型（仅对记号做了少量修改）：

$$w^p = \prod_{j=1}^{n} \left(z - \zeta_n^j\right)^{u^j},$$

对于其中一条底层曲线，以变量 w、z ∈ ℂ表示，其中 x 在 $\mathbb{F}_p$ 上的作用为 t ↦ t^x = ut，且 u ∈ $\mathbb{Z}_n^*$。相应的 Belyĭ 函数 (w, z) ↦ z^n 是覆盖 $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/T = \mathcal{S}t^{01}{}_n$，(w, z) ↦ z，与 $\mathcal{S}t^{01}{}_n$ 的 Belyĭ 函数 z ↦ z^n 的复合。G 的标准生成元公式见 [9]；阶为 p 的自同构显而易见，但阶为 n 的自同构则需要仔细计算。用其他本原 n 次单位根替换 ζ_n，即可得到此伽罗瓦轨道中的其余曲线和绘图。（本例也在 [10, 第 9.2 节4], 中讨论，其中为简便起见，假定 n 为素数。）通过使用对偶 D^{12}, 并以 z/(z − 1) 替换变量 z，可以将此结果扩展到伽罗瓦轨道 GP(n, p, −1)。

问题。当 c = 0 or −1时，使得 $\mathcal{D}/T$ 的亏格为 0，能否将这些结果推广到 d = 1 的情形，即 d > 1? 一个简单的例子是四面体，即唯一的绘图 $\mathcal{D} \in$ GP(3, 2, 0)：它位于球面 Σ上，其中 d = 2 且 G ≅ $A_4 \cong V_4 \rtimes C_3$, , 其 Belyĭ 函数为

$$\beta(z) = -64\frac{(z^3-1)^3}{(z^3-8)^3 z^3}.$$

（Magot 和 Zvonkin 在 [13]中给出了这个以及球面上的许多其他 Belyĭ 函数。）能否为其他满足 p ≡ 2 mod (3) 的素数 p，找出唯一绘图 $\mathcal{D} \in$ GP(3, p, 0) 的定义方程？它们都给出 d = 2（且亏格为 (p − 1)(p − 2)/2，G ≅ $V_{p^2} \rtimes C_3$）？

13. 非忠实作用

在第 3 节中，我们看到了 G 在黑色顶点上，或更普遍地在所有特殊点上的一些非忠实作用的例子。对于地图，Li 和 Sir´aˇn [11] 已对非忠实作用进行了全面研究，他们的大多数结果也适用于绘图，因此这里我们只给出几个例子，以说明绘图上的这类作用与忠实作用之间的关系。

若 $\mathcal{D}$ 是一个正则绘图，其自同构群 G 在黑顶点集 V 上的作用是本原但不忠实的，那么命题 10.1 表明，G 在 V 上作用的核 K，即稳定子 G_v (v ∈ V) 的交，是 G 的一个循环正规子群；若 G/K 是弗罗贝尼乌斯群，则 K 包含于 G 的中心。现在，G/K 在 $\mathcal{D}$/K 的顶点集 V/K = V 上忠实且本原地作用，因此由定理 1.1 可知，$\mathcal{D}$/K 是一个广义帕利绘图。于是，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$/K 的一个 k 层正则循环覆盖，在其黑色顶点处发生分歧（也可能在其白色顶点和／或面中心处发生分歧），其中 k = |K|。例如在例 2 中，若 $\mathcal{D}$ 是费马绘图 $\mathcal{F}_n$，则核 K 是 G = $C_n \times C_n$ 的子群 ⟨x⟩ ≅ C_n，它固定 n 个黑色顶点，并循环置换 n 个白色顶点和 n 个面，因此 $\mathcal{D}$/K 是星形绘图 $\mathcal{S}t_n$（见例 1）；n 层正则覆盖 $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/K$ 在 $\mathcal{S}t_n$ 的黑色顶点处分歧，但在其白色顶点或面中心处不分歧。在例 3 和例 4 中，核 K 是 G 的换位子群 G′，而 $\mathcal{D}$/K 是一个本原费马绘图 $\mathcal{F}_p$；在这种情况下，p 层覆盖在 $\mathcal{F}_p$ 的全部 3p 个特殊点处分歧。

也可以反过来进行这一过程，构造非忠实本原 dessins

$\mathcal{D}$ 来自一个非忠实本原绘图 $\mathcal{D}$，设 $\mathcal{D}$ = GP(n, p, q)，其自同构群 G = T ⋊ S 与前文相同。设 S˜是一个阶为 kn 的循环群，其中 k ∈ ℕ，因此存在一个满同态 θ : S˜ → S，并且˜设 G = T ⋊S，其中 S 对 T 的作用由 S 的作用与 θ复合而成。于是，S 中阶为 k 的唯一˜子群 K = ker θ 是 G 的一个中心循环子群，并且 θ 可扩展为一个

满同态 $\theta : G \to G$，其核为 K，因此 G/K $\cong$ G。若取 S 的一个生成元 x，使得$\theta(x) = x$，并取任意元素 $y \in \tilde{\theta}^{-1}(y) \setminus S$，则它们生成 G，从而确定一个本原正则 绘图 $\mathcal{D}$，它是 $\mathcal{D}$ 的一个循环覆盖，其中 K 是 G 在黑色顶点上的作用的核 $= \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$。这样的绘图有 q 个，度为 kn；白色顶点和面的数量及度数，以及因此 $\mathcal{D}$的类型和亏格，取决于 y 的选取。

例16 若 k 与 G 的阶 nq 互素，则由 Schur–Zassenhaus 定理，G 由 K 扩张得到的扩张可分裂。由于 K 位于 G 的 = 中心，因此 G $\times$ G $\times$ K，故 D 是 $\mathcal{D}$ 与一个正则绘图 $\mathcal{K}$ 的直积（最小公覆盖）；该绘图有一个黑色顶点，其自同构群为 K $\cong C_k$。这样的绘图有 k 个 $\mathcal{K}$，每个对应于将 y 选为 K 的标准生成元 x 的一个幂；例如，取 y = 1 可得 $\mathcal{K} = \mathcal{S}\mathrm{t}^{01}{}_k$。

例17 对任意奇素数 p，GP(2, p, 0) 中唯一的绘图 $\mathcal{D}$ 是例5中的球面绘图 $\mathcal{B}_p$，类型为 (2, p, 2)，其自同构群 G $\cong D_p$ 在 p 个黑色顶点（以及 p 个面）上作本原且忠实的作用。这里 S $\cong C_2$, , 因此我们可以取 S 为 任意偶数阶 2k > 2的循环群，并有唯一的满同态 θ： S $\to$ S。为得到一个覆盖 $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$，我们需要为某个偶数 c $\in \mathbb{Z}_{2k}$选择 $y \in T$ $x^c \setminus S$。例如，若 c = 0，则 $y \in T$，因此 $\tilde{\mathcal{D}}$ 的类型为 (2k, p, 2k)，亏格为 p − 1；黑色顶点和面中心处有分支，而白色顶点处没有分支。对于 p = 3、5、7、11 和 13， [2] 中的相应超地图分别为 RPH2.2、RPH4.9、RPH6.5、RPH 10.18 和 RPH12.4。若 c , 0，则 $\mathcal{D}$ 的类型为 (2k, m, l)，其中 m 和 l 分别是 y 和z 的阶；例如，若 c = 2，使得 $y = t\,x^2 = x^2t$，其中 $t \in T$ 是非恒等元，则m = lcm (k, p)。

14. 附录：命题 4.4 的证明

显然，当且仅当对 n 的分解中出现的每个素数幂 $n_r = r^{e_r}$（r 为素数），都有 $p^i \equiv -1 \bmod (n)$ 当且仅当 $p^i \equiv -1 \bmod (n_r)$。

若 r > 2，则 $\mathbb{Z}^*_{n_r}$ 是循环群，而 −1 是其唯一的对合，因此 $p^i \equiv -1 \bmod (n_r)$ 当且仅当 $i \equiv d_r/2 \bmod (d_r)$，其中 p 在 $\mathbb{Z}^*_{n_r}$中的阶为偶数 d_r。若 r = 2，则只要 $n_2 = 4$，上述结论同样适用；但若 $n_2 > 4$，则 $\mathbb{Z}^*_{n_2} = \langle 5\rangle \times \langle -1\rangle \cong C_{n_2/4} \times C_2$（例如参见 [7, 定理 6.10], ），这是一个有三个对合的非循环群， $\pm 5^{n_2/8} = n_2/2 \pm 1$ 且 −1。在这种情况下，以及 $n_2 = 4$时，$p^i \equiv -1 \bmod (n_2)$ 当且仅当 $p \equiv -1 \bmod (n_2)$ 且 i 为奇数；当 $n_2 = 2$ 时，可以省略 i 为奇数这一要求。综上，$p^i \equiv -1 \bmod (n)$ 当且仅当

a) 对于每个奇数 r，若 p 在 $\mathbb{Z}^*_{n_r}$ 中的阶 d_r 为偶数，则 $i \equiv d_r/2$ 模 (d_r)；b) 若 n 为偶数，则 $p \equiv -1$ 模 (n_2)，其中 i 可为任意整数，或当 $n_2 = 2$ 或 $n_2 > 2$ 时为任意奇数 i。

(a) 中的同余要求：对于每个奇数 r，i 都是 $d_r/2$ 的奇数倍。因此，当且仅当所有这些 d_r 在其分解中的 2-部分 $2^k \geq 2$ 相同时，存在同一个 i 满足这些条件；此时可取 i 为奇数 r 对应的整数 $d_r/2$ 的最小公倍数。若 $n \equiv 0 \bmod (4)$，则 (b) 意味着 i 必须为奇数，因此根据 (a)，对于每个奇数 r，$d_r \equiv 2 \bmod (4)$，也就是说，k = 1。若 n . 0 mod 4，则 (b) 对 p 不作任何限制，但 p 必须与 n 互素。

致谢

作者谨向 Rub´en Hidalgo 致谢，感谢他提出的一些非常有帮助的意见并指出错误。第二作者感谢 APVV 研究基金 APVV-19-0308 以及 VEGA 研究基金 1/0423/20 和 1/0727/22 提供的支持。

参考文献

[1] N. L. Biggs，《可定向曲面上完全地图的分类》，Rend.Mat.(6) 4 (1971), 645–655。[2]M. D. E. Conder，《欧拉示性数为 −1 至 −200 的正则地图与超地图》，J. Com- bin. Theory Ser. B 99 (2009), 455–459；相关计算数据列表见 http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/hypermaps.html。[3] H. S. M. Coxeter 和 W. O. J. Moser，《离散群的生成元与关系》，Springer。[4] B. Huppert，《有限群 I》，Springer-Verlag，柏林 / 海德堡 / 纽约，1967。[5] G. A. Jones，《广义 Paley 映射的刻画与伽罗瓦共轭》，J. Combin.Theory Ser. B 103 (2013), 209–219。[6] G. A. Jones，《Paley 与 Paley 图》，载于：《代数图论中的同构、对称性与计算》（比尔森 2016），Springer Proc. Math. Statistics 305 (2020)，第 155–183 页。亦见 arXiv:1702.00285 (math.HO)。[7] G. A. Jones 和 J. M. Jones，《初等数论》，Springer，1998。[8] G. A. Jones 和 M. Maˇcaj，《具有本原自同构群的正则地图》，已提交；包含更多计算数据的扩展版本见 arXiv:2303.02493。[9] G. A. Jones、M. Streit 和 J. Wolfart，《Wilson 地图运算在正则绘图和定义域的分圆域上的应用》，Proc.LondonMath.Soc.(3) 100 (2010), 510–532。[10] G. A. Jones 和 J. Wolfart，《黎曼曲面上的儿童画》，Springer，尚，2016。ˇ[11] C. H. Li 和 J. Sir´aˇn，《其群在顶点、边或面上不忠实作用的正则地图》，Europ.J.Com- bin.26 (2005), 521–541。[12] T K. Lim 和 C. E. Praeger，《关于广义 Paley 图及其自同构群》，MichiganMath.J.58 (2009), 293–308。[13] N. Magot 和 A. Zvonkin，《阿基米德立体的贝利函数》，DiscreteMath.217 (2000), 249–271。[14] D. S. Passman，《置换群》，W. A. Benjamin，纽约–阿姆斯特丹，1968。[15] D. Singerman，《亏格 3 的克莱因黎曼曲面与有限射影平面的正则嵌入》，Bull.Lon- donMath.Soc.18 (1986), 364–370。[16] J. G. Thompson，《有限群的正规 p-补》，Math.Z.72 (1960), 332–354。[17] J. Wolfart 和 B. M¨uhlbauer，《具有阿贝尔自同构群的正则绘图》，载于：J. Sander、J. Steuding 和 R. Steuding（编），《从算术到 ζ 函数》，Springer，尚，2016，第 527–533 页。

南安普顿大学数学科学学院，南安普顿 SO17 1BJ，英国 电子邮箱：
G.A.Jones@maths.soton.ac.uk

斯洛伐克布拉迪斯拉发夸美纽斯大学数学、物理与信息学学院 电子邮箱：
macaj@dcs.fmph.uniba.sk