arXiv:2303.11818v1 [math.KT] 21 Mar 2023

混合特征情形下的 Pfister 型及 Colliot–Th´el`ene 猜想

I.A. Panin，D.N. Tyurin

摘要

设 R 是混合特征 $(0,p)$ 的正则局部环，其中 $p \neq 2$ 是素数。假设商环 R/pR 也是正则的。取定义在 R 上的非退化 Pfister 型 $Q(T_1,\dots,T_{2^m})$，以及 R 中的可逆元 c。那么方程 $Q(T_1,\dots,T_{2^m}) = c$ 在 R 上有解，当且仅当它在分式域 K 上有解。

1 引言

设 R 是分式域为 K 的正则局部环， Q 是定义在 R 上的非退化二次型，且 R 中的 c 是可逆元。在 (1977, [C-T]) 中，Colliot–Th´el`ene 猜想，方程 $Q = c$ 在 R 上有解，当且仅当它在域 K 上有解。

在（[P0]，2009）中，I.A. Panin 证明了当 R包含有理数域时的这一猜想。该证明基于 Levine–Morel 代数配边的移动引理。后来，他与 K.I. Pimenov 合作，将这一结果推广到了 R 包含任意无限域的情形（[PP1], [PP2]）。 [PP1] 中的证明仍然使用了一种复杂的工具，即使用了 de Jong 关于改变的定理的 Gabber 版本。 [PP2] 中的证明则相当“初等”。在论文 [OP]发表后，人们本可以立即发现这一证明。然而，在所有这些论文中，底域都假设为无限域。

只有在 Scully 的论文（2018,[Sc]）中，这一猜想才对所有含有域的正则局部环（尤其是含有有限域的情形）得到了证明。因此，对于所有含有域的 R ，这一猜想在正特征情形下已得到解决。

关于混合特征情形下的猜想，目前已知多少？非常少。最近，Panin 在 [P4 第 7] 节给出了一个结果。然而，这些结果是在对 R 作出相当强的假设的条件下得到的。具体而言， R 是一个 A-光滑概形的局部环 X ，满足 A-相对诺特正规化引理。

此外还有 [P5，推论 3。3] 其中，该猜想对任意

非分歧 R 都成立，前提是形式 Q 是二重 Pfister 形式。

本预印本论文旨在将所提及的结果/*P5,* 推论 *3.3*/ 推广到任意 *Pfister* 型（混合特征情形）。

我们的主要结果是以下定理：设 R 是一个混合特征 $(0,p)$ 的正则局部环，其中 $p \neq 2$ 是一个素数。假设商环 R/pR 也是正则的。取 R 上的一个非退化 Pfister 型$Q(T_1, .., T_{2^m})$，以及 R中的一个可逆元 c。那么，方程$Q(T_1, .., T_{2^m}) = c$ 在 R 上有解，当且仅当它在分式域 K 上有解。本预印本在剩余域为无限域的假设下证明了这一结果。然而，即使没有这一假设，该结果仍然成立。后者将在我们的下一篇预印本中，利用 Scully [Sc] 的主要结果加以证明。

下面给出证明的概要：假设方程 $Q = c$ 在 K上有一个解 $\tilde{}$。这意味着，对于由配对（Q, c）构造的某个辅助 Pfister 形式 Q （定义在 R上），它在 K上同位于$\tilde{}$ 。由于 Q_K 是一个 Pfister 型，因此它在 K上是双曲的。根据 Cesnavicius 最近的结果 ~[C, 推论 9.6], 形式 Q 在 R上也为双曲。现在利用下文陈述的关键几何定理，我们便可完成证明。

下面是上述关键几何定理：设 M 是局部环 R 上的一个秩为 $2n$ 的自由模，带有一个固定的非退化二次型 Q；设 N 是其秩为 $n+1$ 的自由直和项，且其限制$Q|_N$ 也非退化。则 N 含有一个幺模同位向量。第 2 节讨论了该定理最基本的情形，即 R 与某个代数闭域 k重合。一般地，我们用 k 表示局部环 R 的剩余域 $R/\mathfrak{m}R$ 。

整篇预印本中，各个域 k 的特征都不为 2。

本文结构如下。第 2 节和第 3 节分别证明关键几何定理在局部环 R 的剩余域 $k := R/\mathfrak{m}R$ 上的向量空间情形，以及在局部环 R上的自由模情形。第 4 节给出主要结果的证明。

作者感谢 POMI 国际数学中心提供的优良环境。本研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助，协议编号为 $075-15-2022-289$。

2 向量空间的情形

设 V 是一个定义在代数闭域 $k(char(k) \neq 2)$ 上的、维数为 $n \in \mathbb{N}$ 的向量空间。对于每个 $j \leqslant n$，记 X_j^V 为 V 中长度为 j 的完备旗所构成的射影簇。特别地，当 $j = 1$ 时，该簇与射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 重合，因此维数为 $n-1$。存在一个自然的满射态射

$$\pi_j = X_j^V \twoheadrightarrow X_{j-1}^V\,,\ \{L_j \supset \ldots \supset L_1\} \to \{L_{j-1} \supset \ldots \supset L_1\}\,.$$

注意，它在点 $\widetilde{L} := \{L_{j-1} \supset \ldots \supset L_1\} \in X_{j-1}^V$ 上的纤维自然同构于商向量空间 $\widetilde{V/L_{j-1}}$ 的射影化 $\mathbb{P}(V/L_{j-1})$，其维数为 $n-j+1$。因此，$\pi^{-1}(L)$ 的维数等于 $n-j$。利用纤维维数定理并对 j 进行归纳，可得以下等式：

$$dim(X_j^V) = (n-1) + \ldots + (n-j) = nj - \frac{j(j+1)}{2}\,. \tag{2.1}$$

现在假设 $n \geqslant 2$，并在 V 上固定一个非退化二次型 Q。若一个旗的每个子空间都是 Q 上的全各向同性子空间（注意，这样的子空间维数不能超过 $[\frac{n}{2}]$），则称该旗为全各向同性旗。我们用 $\mathring{X}_j^V$ 表示长度为 j 的全各向同性完备旗所构成的射影簇。显然存在一个闭嵌入 $\mathring{X}_j^V \hookrightarrow X_j^V$；当 $j = 1$ 时，它将 $\mathring{X}_1^V$ 与 $X_1^V \cong \mathbb{P}(V)$ 中由方程 $Q(v) = 0$ 定义的超平面对应起来。因此，$\mathring{X}_1^V$ 的维数为 $n-2$。

与 X_j^V 的情形一样，这里存在一个自然态射

$$\tau_j = \mathring{X}_j^V \twoheadrightarrow \mathring{X}_{j-1}^V\,,\ \{L_j \supset \ldots \supset L_1\} \to \{L_{j-1} \supset \ldots \supset L_1\}\,,$$

根据维特定理，该态射也是满射。其在 $\widetilde{\ }$ 点 $L := \{L_{j-1} \supset \ldots \supset L_1\}$ 上的纤维，同构于由所有包含 L_{j-1} 的全各向同性 j 维子空间构成的射影簇 V。根据定义，任何此类子空间都属于 $L_{j-1}^{\perp}$，因此可以将 $\tau_j^{-1}(L)$ 视为 $\mathbb{P}(L_{j-1}^{\perp}/L_{j-1})$ 中由方程 $\overline{Q}(v) = 0$ 定义的超平面。因此，$\tau_j^{-1}(L)$ 的维数等于 $n-2(j-1)-2 = n-2j$。利用纤维维数定理，并对 j 应用归纳法，可得以下等式：

$$dim(\mathring{X}_j^V) = (n-2) + \cdots + (n-2j) = nj - j(j+1)\,. \tag{2.2}$$

最后，记 $\mathring{Y}_j^V$ 为 V 中所有全各向同性 j 维子空间构成的射影簇。可以定义一个满射态射

$$\gamma_j = \mathring{X}_j^V \twoheadrightarrow \mathring{Y}_j^V\,,\ \{L_j \supset \ldots \supset L_1\} \to L_j\,,$$

其在 V 中的全各向同性子空间 L 上的纤维自然同构于 X^L_{j-1}。因此，根据公式 2.1，有等式

$$dim(X^L_{j-1}) = j(j-1) - \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j(j-1)}{2}\,.$$

应用纤维维数定理，我们得到等式

$$dim(\mathring{Y}^V_j) = nj - j(j+1) - \frac{j(j-1)}{2}\,. \tag{2.3}$$

命题 2.1 设 k 为代数闭域。设 V 为配备双曲型 Q 的 $2n$ 维 k-向量空间。设 $P \subset V$ 为 $n+1$ 维子空间，且限制 $Q|_P$ 非退化。则存在一个全各向同性的 n 维子空间 $W \subset V$，使得$dim(P \cap W) = 1$。

证明 根据公式 *2.3*，由所有全各向同性的 n 维子空间构成的射影簇 $\mathring{Y}^V_n$ 的维数等于

$$dim(\mathring{Y}^V_n) = 2n^2 - n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2}\,. \tag{2.4}$$

对于任意 $j \leqslant n$，记由所有满足 $dim(W \cap P) = j$ 的全各向同性 n 维子空间 $W \subset V$ 构成的射影簇为 Z_j。显然存在一个不交并分解

$$\mathring{Y}^V_n = Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_{[\frac{n+1}{2}]}\,.$$

对于任意 $j \leqslant [\frac{n+1}{2}]$，存在一个自然态射

$$\lambda_j : Z_j \to \mathring{Y}^P_j\,,\ W \to P \cap W\,,$$

根据维特定理，这是满射。它在点$U \in \mathring{Y}^P_j$上的纤维 λ_j^{-1}（U）与一个集合重合

$$\{W \subset V |\, dim(W) = n,\, Q|_W \equiv 0,\, W \cap P = U\}\,,$$

因此可以将其识别为一个射影子簇

$$\mathring{Y}^{U^\perp/U}_{n-1} = \{W \subset V |\, dim(W) = n,\, Q|_W \equiv 0,\, U \subset W\}\,.$$

由于 dim（$U^\perp/U$）$= 2$（$n-j$），应用公式 *2.4* 可得等式

$$dim\big(\mathring{Y}^{U^\perp/U}_{n-1}\big) = \frac{(n-j)^2 - (n-j)}{2}\,.$$

因此，纤维维数定理给出了一个估计

$$dim(Z_j) \leqslant dim(\mathring{Y}^P_j) + \frac{(n-j)^2 - (n-j)}{2}\,.$$

最后，利用公式 *2.3*，我们得到一个估计

$$dim(Z_j) \leqslant (n+1)j - j(j+1) - \frac{j(j-1)}{2} + \frac{(n-j)^2-(n-j)}{2}$$

其右侧等于

$$\frac{n^2-n}{2} - (j^2-j) = dim(\mathring{Y}_n^V) - (j^2-j)\,.$$

因此，若 $j \geqslant 2$，则有严格不等式 $dim(Z_j) < dim(\mathring{Y}_n^V)$。特别地，子集

$$Z_1 = \mathring{Y}_n^V \backslash \big(Z_2 \sqcup \cdots \sqcup Z_{[\frac{n+1}{2}]}\big)$$

在 $\mathring{Y}_n^V$ 中是开且非空的。证明至此完成。

推论 2.2 设 k 是一个无限域。设 V 是一个 $2n$ 维 k-向量空间，并配备双曲型 Q。设 $P \subset V$ 是一个 $n+1$ 维子空间，且限制 $Q|_P$ 非退化。则存在一个全各向同性的 n 维子空间 $W \subset V$，使得 $dim(P \cap W) = 1$。

证明 簇 $\mathring{Y}_n^V$ 是 k-有理的。其开子簇 Z_1 非空，因为它在 k 的代数闭包上非空。由于域 k 是无限域， Z_1 的 k-有理点集非空。由此证明了推论。

3 局部环上自由模的情形

本节中， R 和 k 分别表示一个正则局部环及其剩余域。回顾一下， $char(k) \neq 2$。

引理 3.1 矩阵 $A \in Mat_{n\times n}(R)$ 可逆，当且仅当商矩阵 $\overline{A} \in Mat_{n\times n}(k)$ 可逆。

证明 一个方向显然。假设 $\overline{A}$ 可逆。这意味着$det(\overline{A})$ 在 k中不等于零，进而意味着 $det(A)$ 不属于 R的极大理想。因此， $det(A)$ 可逆，也就是说 A 有逆元。

引理 3.2 设 M是秩为 n的自由 R-模。设 $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_r$是 k-线性向量空间 $\overline{M}$ 中的一组线性无关元素，并为每个 $\overline{u}_i$任意选取一个提升 $u_i \in M$。那么， M的子模 $U := \langle u_1, \ldots, u_r\rangle_R$是 M 的一个秩为 r的自由直和项。

证明 选取一组形如 $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_r, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{n-r}$ 的基，其中元素属于 $\overline{M}$，并为每个 $\overline{v}_j$固定一个提升 $v_j \in M$。根据中山引理，元素 $\{u_i, v_j\}$ 生成 M，使其成为一个R-模。记相应的变换矩阵为 A 。由于 $\{\overline{u}_i, \overline{v}_j\}$ 是 $\overline{M}$的一组基，商矩阵 $\overline{A}$可逆。由引理 *3.1* 可知，矩阵 A 也可逆。因此， $\{u_i, v_j\}$ 也是 M的一组基。证明完毕。

推论 3.3 自由模 R^n 的任一直和项 U 也是自由模。此外，若 $\{u_1,\dots,u_r\}$ 是 U 的一组基，则 $\{\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_r\}$ 是 $\overline{U}$ 的一组基，反之亦然。

证明 选取一个投影 $R^n \twoheadrightarrow U$。根据定义，它是满射，并且它与自然嵌入 $U \hookrightarrow R^n$ 的复合 $U \hookrightarrow R^n \twoheadrightarrow U$ 等于恒等自同构 Id_U。模去极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$后，在相应的子空间 $\overline{U}$ 中选取一组基 $\{\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_r\}$，其中该子空间属于 k^n，并固定一个位于 $U \hookrightarrow R^n$ 像中的提升 $\{u_1,\dots,u_r\}$。记 U' 为 R^n 中的子模 $\langle u_1, \dots\dots, u_r\rangle_R$。由中山引理可知，由投影 $R^n \twoheadrightarrow U$ 诱导的态射 $U' \longrightarrow U$ 是满射，这又意味着 U 和 U' 实际上作为 R^n中的 R-子模彼此相同。由引理 *3.2* 可知，U' 是一个自由模，其基为 $\{u_1,\dots,u_r\}$。

同样，若 U 是 R^n 的直和项，且 $\{u_1,\dots,u_r\}$ 是其基，则存在一个满射 R-线性态射 $R^n \twoheadrightarrow R^r$，它将 u_i 映到 R^r的标准基中第 i个元素。由于 k-线性向量空间之间相应的商态射 $k^n \twoheadrightarrow k^r$ 仍然是满射，因此 $\{\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_r\}$ 显然是 $\overline{U}$ 中的一组基。

在介绍本节的主要几何结果之前，我们先证明一个小的技术引理，它将在证明中发挥关键作用：

引理 3.4 设 M 是一个自由 R-模，配备固定的非退化二次型 Q。记 $O_R(M)$ 为 M的 R-线性正交自同构群。则自然同态 $O_R(M) \to O_k(\overline{M})$ 是满射。

证明 为方便起见，我们也用 Q 表示相应的双线性型。注意，群 $O_k(\overline{M})$ 由以下类型的反射生成

$$r_{\overline{u}} : \overline{M} \to \overline{M}\,,\ \overline{v} \to \overline{v} - \frac{\overline{Q}(\overline{u},\overline{v})}{\overline{Q}(\overline{u},\overline{u})}\overline{u}$$

其中，$\overline{u}$ 遍历满足 $\overline{Q}(\overline{u},\overline{u}) \neq 0$ 的 $\overline{M}$ 中所有元素。特别地，这意味着，对于任意这样的 $\overline{u}$ 以及它在 M 中的任意提升 $u \mapsto \overline{u}$，相应的元素 $Q(u,u)$ 不属于 R 的极大理想，因此是可逆的。由此便定义了一个良好定义的反射

$$r_u : M \to M\,,\ v \to v - \frac{Q(u,v)}{Q(u,u)}u\,,$$

它属于 $O_R(M)$，显然是反射 $r_{\overline{u}}$的一个提升。至此，证明完毕。

现在设 M 是秩为 $2n$ 的自由 R-模，其上固定有一个双曲型形式 Q。假设 $N \subset M$ 是 M 的自由直和项，且 $rk(N) = n+1$，限制 $Q|_N$ 非退化。那么相应的 k-线性向量空间 $\overline{M}$ 和 N 满足推论 2.2 的条件。事实上，若 $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ 是 N 的某个基，则由推论 3.3 可知

$\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+1}\}$ 是 $\overline{N} \subset \overline{M}$ 的一组基。由于形式 Q 在 N 上的限制非退化，相应的 R-模态射 $Q|_N^\vee \colon N \to N^\vee$ 是一个同构。因此，根据引理 3.1，限制 $\overline{Q}|_{\overline{N}}$ 非退化。最后，显然 $\overline{M}$ 上的形式 Q 也是双曲型。因此，根据推论 2.2，存在一个全各向同性的 n 维子空间 $\overline{W} \subset \overline{M}$，使得 $dim(\overline{N} \cap \overline{W}) = 1$。

命题 3.5 设 M 是秩为 $2n$ 的自由 R-模，其上固定了一个双曲型 Q 。假设 $N \subset M$ 是 M 的自由直和项，且满足$rk(N) = n+1$，并且限制 $Q|_N$ 非退化。那么存在一个R-子模 W 包含于 M 中，使得:

- W 是 M 的秩为 n 的自由直和项;
- 商态射 $M \twoheadrightarrow \overline{M}$ 将 W 满射到 $\overline{W}$;
- $Q|_W \equiv 0$。

此外， N 的子模 $W \cap N$ 将是秩为1的自由直和项。

证明 记 $\mathbb{H}_R$ 为具有标准基 $\{e, f\}$的双曲平面。由于Q 是双曲的，存在分解 $M = \mathbb{H}_R \oplus \ldots \oplus \mathbb{H}_R$。记 M中的对应基为 $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$。那么， R-子模$\langle e_1, \ldots\ldots, e_n\rangle_R \subset M$显然是 M的秩为n的自由全各向同性直和项。因此，集合 $\{\overline{e}_1, \overline{f}_1, \ldots, \overline{e}_n, \overline{f}_n\}$是 k-线性向量空间$\overline{M} = \mathbb{H}_k \oplus \ldots \oplus \mathbb{H}_k$ 的一组基，而子空间 $\langle \overline{e}_1, \ldots\ldots, \overline{e}_n\rangle_k \subset \overline{M}$是全各向同性的，且维数为 n。在 $\overline{W}$中选取一组基 $\{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n\}$。根据维特定理，存在某个 $\overline{A} \in O_k(\overline{M})$，使得对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\overline{A}(\overline{e_i}) = \overline{w_i}$。由引理 *3.4* 可知， $\overline{A}$ 有一个提升 $A \in O_R(M)$。令 $w_i := Ae_i$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。那么子模 $W := \langle w_1, \ldots\ldots, w_n\rangle_R \subset M$显然满足命题 *3.5* 的条件。

现在将 $\pi \colon N \to M/W$ 记为自然嵌入$N \hookrightarrow M$ 与商同态 $M \twoheadrightarrow M/N$的复合。模去极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$后，我们得到一个 k-线性态射 $\overline{\pi} \colon \overline{N} \to \overline{M}/\overline{W}$。其核与子空间 $\overline{N} \cap \overline{W} \subset \overline{N}$重合。由向量空间的维数定理立即可知， $\overline{\pi}$ 是满射。由中山引理可知， π 也是满射。根据引理 *3.2*， M/W 是秩为 n的自由R-模。因此， $N \cap W$ 是从秩为 $n+1$ 的自由 R-模 N 到秩为 n的自由 R-模 M/W的满射R-线性态射 π 的核。因此， $N \cap W$是 N的直和项。命题 *3.5* 的最后一个结论现在由推论 *3.3* 得出。

推论 3.6 在命题 *3.5* 的条件下，任意自由 R-模 $W \cap N$ 的生成元w，其秩为1，在 M 中都是幺模的。

证明 由命题 *3.5* 可知， $W \cap N$是 M的一个直和项。因此，根据推论 *3.3*， k 线性向量空间 $\overline{M}$ 中的元素$\overline{w}$ 不为零。固定 M 的一组包含 $\overline{w}$ 的基，然后将其提升到 M，使得 $\overline{w}$ 是 w的提升。现在由引理 *3.2* 可直接得到推论 *3.6*。

4 主要结果

下面给出本文的主要结果:

定理 4.1 设 R 是一个混合特征$(0,p)$ 的正则局部环，其中p 是一个不等于2的素数。假设商环 R/pR 也是局部正则的。固定环 R 上的一个非退化 ***Pfister*** 型 $Q(T_1,..,T_{2^m})$，以及 R 中的一个可逆元 c 。那么，方程 $Q(T_1,\dots,T_{2^m}) = c$ 在 R 上有解，当且仅当它在 R 的分式域 K 上有解。

命题 4.1 的证明很大程度上依赖于近期的 Cesnavicius 定理[C]。

我们还需要以下技术引理，该引理最初发表于 [C-T]。尽管如此，我们仍决定给出其详细证明:

引理 4.2 设 R 是一个局部环，其剩余域 k 的特征不等于2，并设 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 R 中满足 $n > 2$ 的可逆元。那么方程

$$\alpha_1 T_1^2 + \cdots + \alpha_n T_n^2 = 0 \tag{4.1}$$

在 R^n 中有幺模解，当且仅当方程

$$\alpha_1 T_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1} T_{n-1}^2 = -\alpha_n \tag{4.2}$$

在 R^{n-1} 中有解。

证明 第一个蕴含显然：$(v_1,..,v_{n-1})$ 是 ***4.2*** 的一个解，这显然意味着 $(v_1,\dots,v_{n-1},1)$ 是 ***4.1*** 的一个幺模解。

设 $v:=(v_1,\dots,v_n)$ 是 ***4.1*** 的某个幺模解。注意，如果元素 v_n 不属于 R 的极大理想，即它是可逆的，那么

$$\left(\frac{v_1}{v_n},\dots,\frac{v_{n-1}}{v_n}\right)$$

显然是 ***4.2*** 的一个解。

现在假设 v_n 不可逆。和前面一样，将与 ***4.1*** 对应的对角二次型记为 Q，并记其相关的双线性型。注意，对于任意满足 $Q(u,u)$ 在 R 中可逆的 $u:=(u_1,..,u_n)$，将反射 r_u 应用于 v 所得结果定义了另一个解

$$r_u(v) = v - \frac{Q(u,v)}{Q(u,u)}u\,,$$

4.1 的。此外，若假设 u_n 和 $Q(u,\ v)$ 在 R中均可逆，则$r_u(v)$ 也将是 ***4.2*** 的一个解，因为它的第 n 个坐标在 R中也可逆。注意，当且仅当对应的向量 $\overline{u}:=(\overline{u}_1,\ \dots,\ \overline{u}_n)\in k^n$ 满足以下不等式时，u才满足这些假设

$$\overline{Q}(\overline{u},\overline{v})\neq 0\,,\ \overline{Q}(\overline{u},\overline{u})\neq 0\,,\ \overline{u}_n\neq 0\,.$$

此外，若 k^n 中存在这样的向量 $\overline{u}$，只需将其提升到 R^n 中，即可得到所需的 u。

由于 v 是幺模的，因此至少存在一个 $i < n$，使得相应的坐标 $\overline{v}_i$ 不等于零。固定这样一个 i，并取一个不同于 i的 $j < n$。假设 $\overline{u}$ 中除索引为 i、j 和 n的坐标外，其余坐标均为零。那么上述不等式组将具有以下形式（为简便起见，我们省略上划线符号）：

$$\alpha_i v_i u_i + \alpha_j v_j u_j \neq 0\,,\ \alpha_i u_i^2 + \alpha_j u_j^2 + \alpha_n u_n^2 \neq 0\,,\ u_n \neq 0\,.$$

分别将 $\dfrac{u_i}{u_n}$ 和 $\dfrac{u_j}{u_n}$ 记为 x 和 y。那么上述方程组可简化为以下形式

$$\alpha_i v_i x + \alpha_j v_j y \neq 0\,,\ \alpha_i x^2 + \alpha_j y^2 \neq -\alpha_n\,.$$

注意，若 $\alpha_i \neq -\alpha_n$，则 $x = 1$ 和 $y = 0$ 显然满足该方程组。反之，若 $\alpha_i = -\alpha_n$，只需令 $x = 1$，并找出某个非零的 y 使其满足不等式 $\alpha_j v_j y \neq -\alpha_i v_i$。由于剩余域 k 中非零元素多于两个，因此总能找到这样的 y。证明至此完成。

现在我们给出定理 4.1 的证明。第一个蕴含显然成立。假设方程 $Q(T_1, \ldots, T_{2^m}) = c$ 在 K 上有解。那么方程 $Q(T_1, \ldots, T_{2^m}) - cT_{2^m+1} = 0$ 在 K 上也有某个非平凡解 $(a_1, \ldots, a_{2^m+1})$。根据引理 4.2，第二个蕴含的证明可归结为在 R 上求出方程 $\widetilde{\ } Q(T_1, \ldots, T_{2^m}) - cT_{2^m+1} = 0$ 的某个幺模解。记 $Q(T_1, \ldots, T_{2^{m+1}})$ 为 Q 与 Pfister 型 $\langle 1, -c\rangle$ 的张量积。则向量 $\widetilde{\ }(a_1, \ldots, a_{2^m+1}, 0, \ldots, 0)$ 是方程 $Q(T_1, \ldots, T_{2^{m+1}}) = 0$ 在 $\sim K$ 上的一个解。由于 Q 是 Pfister 型，这意味着它在 K 上是双曲的。根据 Cesnavicius [C，推论 9.6]，形式 Q 在 R 上也为双曲。令 $M = R^{2^{m+1}}$，并取由 M 的前 $2^m + 1$ 个基元素生成的自由 R-子模 $N \subset M$。那么数对 (M, N) 满足命题 3.5 的条件。特别地，推论 3.6 中的幺模同位元素 w 给出了方程 $Q(T_1, \ldots, T_{2^m}) - cT_{2^m+1} = 0$ 在 R 上的一个幺模解。定理 4.1 的证明至此完成。

推论 4.3 设 $Q(T_1, \ldots, T_{2^m})$ 是定理 *4.1* 中的 *Pfister* 型。那么，S_Q 由该形式Q表示的所有可逆元 $c \in R^*$ 的集合是 R^*中的一个乘法子群。

证明 假设元素 $c_{1,2} \in R^*$ 可由 Q表示，也就是说，方程 $Q = c_1$ 和 $Q = c_2$ 在 R上有解。由于 *Pfister* 型在域上具有乘法性，这意味着方程 $Q = c_1 c_2$ 在 K 上有解。根据定理 *4.1*，该方程在 R上也有解。因此，$c_1 c_2$ 可由 Q 表示，从而 S_Q 对乘法封闭。如果

方程 $Q = c$ 有一个解 v，那么 $Q(c^{-1}v) = c^{-2}Q(v) = c^{-1}$。因此， S_Q 对取逆封闭。最后，由于 Q 是一个 *Pfister* 型，方程 $Q = 1$ 总有解。证明至此完成。

参考文献

[B-F/F/P] Bayer-Fluckiger E., First U., Parimala R. 关于经典群的 Grothendieck– Serre 猜想（2019）。预印本[C] Cesnavicius K. 准分裂非分歧情形下的 Grothendieck-Serre 猜想，预印本（2021）。可见 https: // arxiv.org/abs/2009.05299v2.[C-T] J.-L.Colliot-Th ´el `ene. 正则半局部环上的二次型。《二次型研讨会》，第 2 卷（蒙彼利埃，1977年）。《法国数学会通报》回忆录第 59 号，（1979年），13–31.[C-T/S] Colliot-Th ´el `ene J.-L., Sansuc J.-J. 正则概形上的乘法型群的上同调。《巴黎科学院报告》A-B 系列 287.6（1978年），A449–A452.[C-T/O] Colliot-Th ´el `ene J.-L., Ojanguren M. 局部平凡的主齐性空间，《IHÉS 数学出版物》75（1992年），第 2 期，97–122.[FP] Fedorov R., Panin I. 关于含无限域的半局部正则环上主丛的 Grothendieck–Serre 猜想的证明，《高等科学研究所数学出版物》，第 122 卷，2015年，169–193 页。[Fe1] Fedorov R. 混合特征下主丛的 Grothendieck-Serre 猜想，《美国数学会汇刊》，即将出版（2021年），arXiv:1501.04224v3[Fe2] Fedorov R. 关于主丛的 Grothendieck-Serre 猜想及其推广，《代数与数论》，即将出版（2021年），arXiv:1810.11844v2[F] First U. 带对合的阿祖马亚代数的 Witt 群的一个 8 周期正合列，（2019年）。预印本[OP] Ojanguren M., Panin I. 有理平凡的厄米空间是局部平凡的，《数学杂志》237（2001年），181–198。[PSV] Panin, I.; Stavrova, A.; Vavilov, N. 关于约化群概形上主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想：I，《Compositio Mathematica》151（2015年），535–567。[P0] Panin, I. 有理各向同性二次空间是局部各向同性的。《数学发明》176，397–403（2009年）。

[P1] *Panin, I.* 良好三元组与约化群概形上主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想，《杜克数学杂志》，2019年，168:2，351–375；[P2] *Panin, I.* 两个纯性定理与关于主 G-丛的 Grothendieck-Serre 猜想，《数学文集》，2020年，211:12，1777–1794。[P3] *Panin, I.* 关于含域的正则局部环上主丛的 Grothendieck–Serre 猜想的证明，《消息数学》，2020年，84:4，780–795。[P4]*Panin, I.* 混合特征下的移动引理及其应用。arxiv.org，2202.00896v1。[P5] *Panin, I.* 关于 SL1,D 的混合特征情形下的 Grothendieck–Serre 猜想。arxiv.org，2202.05493v1。[PP1] *Panin, I., Pimenov K.* 有理各向同性二次空间是局部各向同性的：II。《数学文献》特刊：安德烈·A·苏斯林六十华诞，515–523，（2010年）。[PP2] *Panin, I., Pimenov K.* 有理各向同性二次空间是局部各向同性的：III。《圣彼得堡数学杂志》，2015年，27:6，234–241[PS] *Panin, I.; Suslin, A.* 关于格罗滕迪克有关阿祖马亚代数的猜想，《圣彼得堡数学杂志》，9，第4期，851–858（1998年）[Po] *Popescu, D.* 一般奈隆消奇化与逼近，《名古屋数学杂志》104（1986年），85–115。[Sc] *S. Scully* 有限剩余域半局部环上二次型的阿廷–斯普林格定理。《美国数学会会刊》146（2018年），1–13。