arXiv:2303.11845v2 [math.QA] 2 Oct 2023

与等变编织张量范畴的 α-诱导相关的弗罗贝尼乌斯代数

Mizuki Oikawa *

东京大学数理科学研究科，驹场，东京 153-8914，
日本 电子邮箱： moikawa@ms.u-tokyo.ac.jp

谨以此文献给 *Yasuyuki Kawahigashi*，祝贺他六十华诞

摘要

设 G 为一个群。对于等变编织多张量范畴中给定的 G-等变 Frobenius 代数，我们给出 G-等变 α-诱导的范畴论定义；这推广了共形网的 G-扭曲表示的 α-诱导。对于球形 G-编织融合范畴中的给定 G-等变 Frobenius 代数，我们构造一个 G-等变 Frobenius 代数，并称之为 G- 等变 α- 诱导 Frobenius 代数。该代数位于一个适当定义的范畴中，我们称之为中性双范畴。这一构造推广了 Rehren 的 α-诱导 Q-系统的构造。最后，我们定义球形 G-编织融合范畴中 G-等变 Frobenius 代数的 G-等变 full center 概念，并证明它确实与相应的 G-等变 α-诱导 Frobenius 代数相一致，从而推广了 Bischoff、Kawahigashi 和 Longo 的一个定理。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **3**
2.1 双范畴上的群作用 .3 2.2 等变编织张量范畴 .9 2.3 等变弗罗贝尼乌斯代数 .14

3 等变 α-诱导 18 3.1 等变弗罗贝尼乌斯代数双范畴上的群作用. . . . . 18 3.2 等变的范畴论定义 α-诱导 .21 **4 等变 α-诱导 Frobenius 代数** 24 4.1 G-编织张量范畴的中性双范畴 .24 4.2 等变 α-诱导 Frobenius 代数 .27 **5 等变 full center** 38

5.1 G-等变 Frobenius 代数的等变 full center. 38 5.2 等变 α-诱导 Frobenius 代数作为等变 full center. 41

1 引言

在有理共形场论中，我们可以从手征共形场论构造二维共形场论。从数学上说，这相当于寻找非负整数

*作者获得了日本学术振兴会科研费资助项目编号 JP23KJ0540 的资助。

系数的组合，使复上半平面上的某些函数在模群 $SL(2,\ \mathbb{Z})$的作用下保持不变。这样的组合称为模不变量。众所周知， $SU(2)$ Wess–Zumino–Witten 模型的模不变量具有 A-D-E 分类，即它们对应于单边Dynkin图 [CIZ87][Kat87]。

在代数量子场论的框架中，手征共形场论由共形网建模。当共形网 $\mathcal{A}$ 满足名为完全有理性[KLM01，定义 8], 时，它会产生一个模张量范畴，作为其 Doplicher–Haag–Roberts（DHR）范畴 [DHR71][DHR74],，本文将其记作 Rep $\mathcal{A}$，见 [KLM01，推论37]。在这种情况下，模不变量可以表述为以 Rep 的简单对象为指标、系数为非负整数的矩阵 $\mathcal{A}$ ，且这些矩阵与模张量范畴的 S 和 T 矩阵对易。

B¨ockenhauer、Evans 和 Kawahigashi [BE98][BE99a][BE99b][BEK99][BEK00]证明了， α-诱导 [LR95, 命题 3.9] 是一种用于构造模不变量的强大范畴工具。具体而言，给定完全有理共形网 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ 的有限指数标准扩张 $\mathcal{A}$ [LR95, 第 3] 节，该扩张的 α-诱导会为每个 DHR 端同态 λ （属于 $\mathcal{A}$ ）指定一些（未必是 DHR）端同态 $\alpha^{\pm}$（λ）属于 $\mathcal{B}$，并且$\langle \alpha^{+}(\lambda)\ \ \alpha^{-}(\mu)\ \rangle := $对于简单对象 λ 和 μ，Hom($\alpha^{+}(\lambda)\ \ \alpha^{-}(\mu)$) 的维数是一个模不变量矩阵 [BEK99, 定理 5.7]。此外，Rehren [Reh00] 证明了该矩阵是物理的，即他在 Rep $\mathcal{A} \boxtimes$ (Rep $\mathcal{A}$)$^{\mathrm{rev}}$中构造了一个交换 Q-系统$\bigoplus_{\lambda,\ \mu}\langle \alpha^{+}(\lambda)\ \ \alpha^{-}(\mu)\ \rangle$；Kong 和 Runkel [KR09, 定理 3.22] 以及 Bischoff、Kawahigashi 和 Longo [BKL15, 命题 5.2] 证明了，任何物理模不变量矩阵都可以通过这种方式得到。

当群 G 作用于 $\mathcal{A}$时，我们可以考虑 G-扭曲表示的概念 $\mathcal{A}$，它推广了 $\mathcal{A}$ [M¨ug05]的 DHR 端同态概念。近期，Nojima α提出了针对 G-扭曲表示的诱导，我们称之为 G-等变 α-诱导Noj [对此进行了介绍20]。因此，自然可以期待 G-等变 α-诱导在某种意义上也是构造模不变量的有力工具。本文推广了上述若干经典结果，为这一预期提供了一些依据。事实上，在某些情况下，我们的构造能够产生不动点网的模不变量 $\mathcal{A}^{G}$ （定理4.25）。

本文的主要结果有两方面。首先，我们将 Rehren 的构造中 α-诱导 Q-系统 [Reh00] 推广到 G-等变 α-诱导（定理 4.15）。事实上，该定理可以在纯代数的框架下表述。具体而言，我们为分裂球形 G-编织融合范畴中的中性、对称、特殊、简单 G-等变 Frobenius 代数，构造了 G-等变 α-诱导 Frobenius 代数（术语见第 2.2 和 2.3 小节）。为此，我们必须引入分裂半单 G-编织多张量范畴的中性双范畴这一概念，并将其作为环境范畴（定义 4.7）。其次，我们推广了 [BKL15，命题 4.18],；这一结果是通过α-诱导刻画物理模不变量的一项重要内容 [BKL15，命题 5.2]。具体而言，我们引入了非零维数的分裂球形 G-编织融合范畴中中性、对称、特殊 G-等变 Frobenius 代数的 G-等变 full center 概念（定义 5.11），并证明当二者均有定义时，它确实与相应的 G-等变 α-诱导 Frobenius 代数一致（定理 5.25）。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾配备群作用的双范畴和多张量范畴的预备知识。特别地，我们回顾群的 G-辫多张量范畴和 G-等变弗罗贝尼乌斯代数的概念 G。我们还引入了带群作用的双范畴之间的一种适当的等价概念。在第3节中，我们给出 G-等变 α-诱导的范畴论定义。为此，我们定义 G 在 G-等变弗罗贝尼乌斯代数双范畴上的作用。在第4节中，我们定义分裂半单 G-辫多张量范畴的中性双范畴，并构造G-等变 α-诱导弗罗贝尼乌斯代数。最后，在第5节中，我们定义 G-等变 full center 的概念，并证明 G-等变 α-诱导弗罗贝尼乌斯代数与 G-等变 full center 相一致。

2 预备知识

2.1 双范畴上的群作用

在本小节中，我们回顾幺半范畴上的群作用以及双范畴上的群作用的概念，并给出带群作用的双范畴之间一种适当的等价概念。事实证明，该概念等价于 [BGM19]中引入的概念。此外，我们证明了双范畴上 G-作用的相干定理，见定理2.6，另见 [BGM19，定理 3。1]。

群 G 在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的作用 是一个幺半函子，它从由 G 的元素构成、且只有恒等态射的幺半范畴–G 映射到 $\mathcal{C}$上的幺半自函子范畴。

本文还需考虑双范畴上的群作用（见下文第 3.1 和 5.2 小节）。关于双范畴的基本概念，参见例如 [Lei04，第 1.5] 节。这里固定我们的记号： $\mathcal{C}$ 的 1-胞的复合记为 $\otimes_{\mathcal{C}}$ 或 $\otimes$，因为我们将双范畴视为幺半范畴的推广，并且通常省略。结合约束记为 $a^{\mathcal{C}}$。单位记为 $\mathbf{1}^{\mathcal{C}}$，左、右单位约束分别记为 $l^{\mathcal{C}}$ 和 $r^{\mathcal{C}}$。伪函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由一个 0-胞之间的映射 F、函子 $F_{A,B}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A)\ F(B))$（对 $A,B\in\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$）、自然同构 $J^F_{A,B,C}\colon F_{B,C}(-)\otimes F_{A,B}(-)\ \cong F_{A,C}(-\otimes -)$（对 $A,B,C\in\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$）以及 $\varphi^F_A\colon \mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F(A)}\cong F_{A,A}(\mathbf{1}^{\mathcal{C}}_A)$（对 $A\in\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$）组成。伪自然变换 $\tau\colon F\to F'$ 由 1-胞 $\tau^0_C\colon F(C)\to F'(C)$（对 $C\in\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$）以及可逆 2-胞 $\tau_\lambda\colon \tau^0_{C'}F(\lambda)\cong F'(\lambda)\tau^0_C$（对 1-胞 $\lambda\colon C\to C'$）组成。伪自然变换的纵向复合和横向复合（另见 [BGM19，第 1.1] 节）分别记为 $\circ$ 和
$*$.

通过以“所有图表均交换”的形式陈述伪函子的相干定理 [Gur13，第2.3小节。3]我们可以看出，对 $a^{\mathcal{C}}$、$l^{\mathcal{C}}$ 以及双范畴 $r^{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{C}$ 的 J^F与伪函子 φ^F的 F 分量进行纵向和横向复合所得到的 2-态射确实是典范的，因此可以省略这些 2-态射。特别地，我们可以省略双范畴的三范畴中的约束。我们还可以在双范畴的三范畴中引入一些图示表示，这些表示仅在本小节中使用。伪自然变换表示为一支自上而下的箭头，而伪自然变换的纵向和横向复合则分别表示为箭头的纵向和横向连接。请注意，进行横向连接时，无需留意相对的纵向位置，因为伪自然变换之间的比较约束（见 [BGM19，第1节。1]）由相干性保证是典范的。

群 G 在双范畴 $\mathcal{C}$ 上的作用是一个幺半伪函子（即幺半双范畴之间的三同态，见 [GPS95，第 2 章和 3]），从 G 到自函子范畴 End($\mathcal{C}$)；其中 G 表示将 G 视为幺半双范畴，而 End($\mathcal{C}$)表示从 $\mathcal{C}$ 到其自身的伪函子所构成的幺半双范畴，见 [BGM19，第 1.1 节和 2]。更明确地说， G 在 $\mathcal{C}$ 上的作用 γ 由以下对象构成：伪函子（双等价） $\gamma(g)$，从 $\mathcal{C}$ 到其自身；伪自然等价 χ^γ_g、$_h$： $\gamma(g)\ \gamma(h)\ \simeq\gamma(gh)$；伪自然等价 ι^γ： $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\simeq\gamma(e)$；以及可逆修正 $\omega^\gamma_{g,h,k}\colon \chi^\gamma_{gh}{}_f\circ(\chi^\gamma_g{}_h * \mathrm{id}_{\gamma(f)})\cong\chi^\gamma_g{}_{hf}\circ(\mathrm{id}_{\gamma(g)}*\chi^\gamma_h{}_f)$， $\kappa^\gamma_g\colon \chi^\gamma_e{}_g\circ(\iota^\gamma * \mathrm{id}_{\gamma(g)})\ \cong\mathrm{id}_{\gamma(g)}$，以及 $\zeta^\gamma_g\colon \chi^\gamma_g{}_e\circ(\mathrm{id}_{\gamma(g)}*\iota^\gamma)\ \cong\mathrm{id}_{\gamma(g)}$，其中 g、h、$k\in G$。图示来说，用一个有两个输入 $\gamma(g)$ 和 $\gamma(h)$、一个输出 $\gamma(gh)$ 的分叉表示 $\chi^\gamma_g{}_h$；用一个有一个输出 $\gamma(e)$ 的小圆圈表示 ι^γ。于是， ω^γ、κ^γ 和 ζ^γ 分别对应于弱意义下代数的结合性、左单位性质和右单位性质，并满足五边形公理和三角形公理 [GPS95，定义 3.1]。

对于 $\mathcal{C}$ 和 $g\in G$ 的 1-胞 λ，1-胞 $\gamma(g)(\lambda)$ 通常记作 ${}^g\lambda$。此外，在本文中， ${}^g\lambda\mu$ 表示 ${}^g(\lambda)\otimes\mu$，其中 $g\in G$ 为对象， λ 和 μ 为 1-胞； ${}^gf\otimes f'$ 表示 ${}^g(f)\otimes f'$，其中 $g\in G$ 为对象， f 和 f' 为 2-胞。

带单位的（严格）2-范畴之间的态射概念（见 [BGM19，定义 2。1]）群作用由 [BGM19，定义 2。3]给出。这里，我们在一般情形下定义等价的概念。

首先，回顾一下，对于双等价 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们可以取一个伪函子 $F^{-1}\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，并配有伪自然等价 $\mathrm{ev}^F\colon F^{-1}F\simeq\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathrm{coev}^F\colon\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\simeq FF^{-1}$。为此，固定由以下数据组成的结构：0-态射 $F^{-1}(D)\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$、等价 1-胞 $\mathrm{coev}^{F\,0}_{D}{}_{\cdot}\colon D\to F(F^{-1}(D))$，以及 $\mathrm{coev}^{F\,0}_{D}{}_{\cdot}$ 的左伴随逆 $(\mathrm{coev}^{F\,0}_{D}{}_{\cdot})^\vee$（即 $\mathrm{coev}^{F\,0}_{D}$ 在双范畴 $\mathcal{D}$ 中的左对偶，其中求值和

余求值映射）对应于 $D \in$ 对象($\mathcal{D}$)，以及 $F^{\vee}_{C、C'}$ 的左伴随函子 $F_{C,\text{ 对应于 }C'}$，C、$C' \in$ 对象($\mathcal{C}$)，例如参见 [Lei04，命题 1.5。13]。这些数据也记作 F^{-1}，并称为 伴随逆 F。通过标准的对偶性论证，另一种伴随逆的选择只会得到一个与之拟自然等价的伪函子 F^{-1}。伪自然等价 ev^F 和 coev^F 与双范畴中的对偶性情形一样，用弧来图示表示。它们的伴随逆则用方向相反的弧表示。

我们还回顾一下，我们有一个自然同构 $J^{F^{\vee}}_{A,B,C}: F^{\vee}_{B,C}(-) \otimes F^{\vee}_{A,B}(-) \cong F^{\vee}_{A,C}(- \otimes -)$，其中 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$；以及一个同构 $\varphi^{F^{\vee}}_{A}: \mathbf{1}^{\mathcal{C}}_{A} \cong F^{\vee}_{A,A}(\mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F(A)})$，其中 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，它们满足与伪函子相同的相干条件。事实上，它们的定义如下：令 $(J^{F^{\vee}}_{A\,B,,C})_{\lambda,\mu} \coloneqq F^{\vee}_{A,C}((\overset{\frown}{\text{求值}}^{F}_{\lambda})^{-1} \otimes (\overset{\frown}{\text{余求值}}^{F}_{\mu})^{-1}) \circ (\overset{\sim}{\text{求值}}^{F}_{F^{\vee}_{B},C}(\lambda)^{F^{\vee}_{A},B}(\mu))^{-1}$，其中 $\lambda: F(B) \to F(C)$ 且 $\mu: F(A) \to F(B)$；并令 $\varphi^{F^{\vee}}_{A} \coloneqq (\overset{\sim}{\text{求值}}^{F}_{\mathbf{1}^{\mathcal{C}}_{A}})^{-1}$，其中 $\overset{\sim}{\text{求值}}^{F}_{\nu}$ 和 $\overset{\frown}{\text{余求值}}^{F}_{\nu}$ 分别表示 $F_{A,B}$ 的求值映射和余求值映射在 $\nu: F(A) \to F(B)$ 下的分量。然后，与伪函子的情形一样，我们可以省略 $J^{F^{\vee}}$ 和 $\varphi^{F^{\vee}}$。根据 $J^{F^{\vee}}$ 和 $\varphi^{F^{\vee}}$ 的定义、$\overset{\sim}{\text{求值}}$与 $\overset{\frown}{\text{余求值}}$的自然性，以及 F 的共轭方程，可以看出 $\overset{\sim}{\text{求值}}$和 $\overset{\frown}{\text{余求值}}$是幺半的，即对于 $\lambda: F(B) \to F(C)$ 和 $\mu: F(A) \to F(B)$，有 $\overset{\frown}{\text{余求值}}^{F}_{\lambda\mu} = \overset{\frown}{\text{余求值}}^{F}_{\lambda} \otimes \overset{\frown}{\text{余求值}}^{F}_{\mu}$；并且 $\overset{\frown}{\text{余求值}}^{\mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F}}_{A} = \mathrm{id}^{\mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F}}_{A}$（$\overset{\sim}{\text{求值}}$也有类似结论），其中 $(J^{F^{\vee}}_{A\,B,,C})_{\lambda,\mu}$ 和 $\varphi^{F^{\vee}}_{A}$ 均已省略。

给定一个双等价 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，我们可以通过固定 F 的一个伴随逆 F^{-1}，并令 $\mathrm{Ad}(F)(H) \coloneqq FHF^{-1} \in \mathrm{End}(\mathcal{D})$，将 $H \in \mathrm{End}(\mathcal{C})$ 传递到 $\mathrm{End}(\mathcal{D})$。

引理 2.1. 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是双范畴之间的一个双等价。那么，$\mathrm{Ad}(F): \mathrm{End}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}(\mathcal{D})$ 可以视为一个幺半伪函子。对 F 选择另一个伴随逆，只会得到一个幺半等价的幺半伪函子（即存在一个具有相同 1-胞的三重等价）。

证明。设 $H, K, L, H', K' \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$，且设 $\sigma \in \mathrm{Hom}(H, H')$、$\tau \in \mathrm{Hom}(K, K')$ 和 $\rho \in \mathrm{Hom}(H', H'')$。定义函子 $\mathrm{Ad}(F)_{H,H'}$ 如下：

$$\mathrm{id}_F * - * \mathrm{id}_{F^{-1}} : \mathrm{Hom}(H, H') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ad}(F)(H), \mathrm{Ad}(F)(H')).$$

定义 $J^{\mathrm{Ad}(F)}_{\rho,\sigma}: \mathrm{Ad}(F)(\rho) \circ \mathrm{Ad}(F)(\sigma) \cong \mathrm{Ad}(F)(\rho \circ \sigma)$，以及 $\varphi^{\mathrm{Ad}(F)}_{H}: \mathrm{id}_{\mathrm{Ad}(F)(H)} \cong \mathrm{Ad}(F)(\mathrm{id}_H)$ 为典范同构；由相干性，$\mathrm{Ad}(F)$ 构成一个伪函子。定义伪自然等价 $\chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{K,H}{}^{0}_{,} \coloneqq \mathrm{id}_{FH} * \mathsf{ev}^F * \mathrm{id}_{KF^{-1}}: \mathrm{Ad}(F)(H)\,\mathrm{Ad}(F)(K) \simeq \mathrm{Ad}(F)(HK)$，并定义可逆修正 $\chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{\sigma\tau,}{}^{0}_{,K'}: \chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{,H'} \circ (\mathrm{Ad}(F)(\sigma) * \mathrm{Ad}(F)(\tau)) \cong \mathrm{Ad}(F)(\sigma * \tau) \circ \chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{K,H}{}^{0}_{,}$，为典范同构；由相干性，它们给出伪自然等价 $\chi^{\mathrm{Ad}(F)} \coloneqq (\chi^{\mathrm{Ad}(F),0}_{,}, \chi^{\mathrm{Ad}(F)}): \mathrm{Ad}(F)(-) \circ \mathrm{Ad}(F)(-) \simeq \mathrm{Ad}(F)(- \circ -)$。令 $\iota^{\mathrm{Ad}(F)} \coloneqq$ 余评价$^{F}_{0}: \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{Ad}(F)(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) = FF^{-1}$。定义修正 $\omega^{\mathrm{Ad}(F)}_{H\,K\,L,,}: \chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{,HK}{}^{0}_{,L} \circ (\chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{,H}{}^{0}_{,K} * \mathrm{id}_{\mathrm{Ad}(F)(L)}) \cong \chi_{\mathrm{Ad}(F),H}{}^{0}_{,KL} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Ad}(F)(H)} * \chi^{\mathrm{Ad}(F}_{L})_{K}{}^{0}_{,})$ 为典范同构；由相干性，它们给出可逆修正 $\omega^{\mathrm{Ad}(F)}: \chi^{\mathrm{Ad}(F)} \circ (\chi^{\mathrm{Ad}(F)} * \mathrm{id}_{\mathrm{Ad}(F)}) \cong \chi^{\mathrm{Ad}(F)} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Ad}(F)} * \chi^{\mathrm{Ad}(F)})$。于是，根据相干性，GPS95 中的公理（HTA1），定义 3.1] 成立。

令 $f_D \coloneqq$ 余评价$^{F}_{D}{}^{0}_{,}$，其中 $D \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$。记 $F^{\vee}(\lambda)$ 为 $F^{\vee}_{C,\,C'}(\lambda)$，其中 $\lambda \in$ 属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C)\ F(C'))$，且 $C,\ C' \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$。根据构造，对于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中的 $C \in$，$\mathsf{ev}^{F\,0}_{C} = F^{\vee,}(f^{\vee}_{F(C)})$，因此我们可以定义一个可逆 2-胞腔

$$\xi^{F}_{C} : ((\mathrm{id}_F * \mathsf{ev}^F) \circ (\mathsf{coev}^F * \mathrm{id}_F))^{0}_{C} = F(\mathsf{ev}^{F,0}_{C})\mathsf{coev}^{F,0}_{F(C)} = FF^{\vee}(f^{\vee}_{F(C)})f_{F(C)} \to (\mathrm{id}_F)^{0}_{C} = \mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F(C)}$$

使其等于 $\mathsf{ev}^{f_{F(C)}}((\overset{\frown}{\text{余评价}}^{F}_{f^{\vee}_{F(C)}})^{-1} \otimes \mathrm{id}_{f_{F(C)}})$。根据构造，对于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,\ D')$ 中的 $\lambda \in$，$F^{-1}(\lambda) = F^{\vee}(f_{D'}\lambda f^{\vee}_{D})$，因此我们也可以定义一个可逆 2-胞腔

$$\tilde{\xi}^{F}_{D} : ((\mathsf{ev}^F * \mathrm{id}_{F^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \mathsf{coev}^F))^{0}_{D} = \mathsf{ev}^{F,0}_{F^{-1}(D)}F^{-1}(\mathsf{coev}^{F,0}_{D}) = F^{\vee}(f^{\vee}_{FF^{-1}(D)}f_{FF^{-1}(D)}f_D f^{\vee}_{D})$$
$$\to (\mathrm{id}_{F^{-1}})^{0}_{D} = \mathbf{1}^{\mathcal{C}}_{F^{-1}(D)}$$

对于 $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，有 $F^{\vee}(\mathsf{ev}^{f_{FF^{-1}(D)}} \otimes \mathsf{coev}^{-1}_{f_D})$。我们证明 ξ^F和 $\tilde{\xi}^F$确实是修正。为此，回顾 $\mathsf{coev}^{F}_{\nu} = (\overset{\frown}{\mathsf{coev}}^{F}_{\nu} \otimes \mathrm{id}_{f_D})(\mathrm{id}_{f_{D'\lambda}} \otimes \mathsf{ev}^{-1}_{f_D})$ 对于 $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$，以及 $\mathsf{ev}^{F}_{\rho} =$

$(\tilde{\mathrm{ev}}_\rho^F \otimes \mathrm{id}_{F^\vee(f_{F(C)}^\vee)}) F^\vee(\mathrm{ev}^{f_{F(C')}} \otimes \mathrm{id}^{F(\rho) f_{F(C)}^\vee})$ 按构造适用于 $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$。接着，直接计算可知，$\xi^F$ 和 $\tilde{\xi}^F$ 是修正。

然后，对 $H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$，令 $\kappa_H^{\mathrm{Ad}(F)} := \xi^F * \mathrm{id}_{HF^{-1}}$ 和 $\zeta_H^{\mathrm{Ad}(F)} := \mathrm{id}_{FH} * \tilde{\xi}^F$。由相干性，它们定义了修正 $\kappa^{\mathrm{Ad}(F)}: \chi^{\mathrm{Ad}(F)} \circ (\iota^{\mathrm{Ad}(F)} * \mathrm{id}^{\mathrm{Ad}(F)}) \cong \mathrm{id}^{\mathrm{Ad}(F)}$ 和 $\zeta^{\mathrm{Ad}(F)}: \chi^{\mathrm{Ad}(F)} \circ (\mathrm{id}^{\mathrm{Ad}(F)} * \iota^{\mathrm{Ad}(F)}) \cong \mathrm{id}^{\mathrm{Ad}(F)}$。要验证这些修正满足 GPS95 中定义 3.1], 的公理（HTA2），只需证明 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi^F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_F)$。为此，注意到对于 $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，比较 $F \circ (\mathrm{id}_{F^{-1}F} * \mathrm{ev}^F) \cong \mathrm{ev}^F \circ (\mathrm{ev}^F * \mathrm{id}_{F^{-1}F})$ 的分量为 $F^\vee(\mathrm{ev}^{f_{F(C)}} \otimes (\widetilde{\mathrm{coev}}^{f_F^\vee}(C))^{-1} \otimes \mathrm{id}_{FF^{-1}F(C)})$。于是，只需证明 $\mathrm{ev}^{f_{F(C)}} \otimes \mathrm{id}^{f_F^\vee(C) f_{F(C)}} = \mathrm{id}^{f_F^\vee(C) f_{F(C)}} \otimes \mathrm{ev}^{f_{F(C)}}$；这由 $f_F^\vee(C)$ 是伴随逆可得。因此，$\mathrm{Ad}(F)$ 是一个幺半伪函子。

最后，我们证明，另选一个伴随逆 F_2^{-1}，会得到一个等价的幺半伪函子 $\mathrm{Ad}_2(F)$。令 $\tilde{f}_D$ 表示 $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ 的余评价 $\mathrm{coev}_D^{F\,0}$，其中 F_2^{-1}，并令 $F_2^\vee$ 表示 $F^\vee$，其中 F_2^{-1}。此外，令 coev_2^F 和 ev_2^F 分别表示 F_2^{-1} 的余评价 coev^F 和评价 ev^F。对于 $H \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$，令 $\eta_H^0 := \mathrm{id}_{FH} * \tau: \mathrm{Ad}(F)(H) \simeq \mathrm{Ad}_2(F)(H)$，其中 $\tau: F^{-1} \simeq F_2^{-1}$ 表示由 $\mathrm{coev}_2^F(\mathrm{coev}^F)^\vee: FF^{-1} \simeq FF_2^{-1}$ 得到的伪自然等价，而 $^\vee$ 则表示 $\mathrm{End}(\mathcal{D})$ 中的一个左伴随逆，此逆由对偶性得到。对于 $H, H' \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$ 以及 $\sigma \in \mathrm{Hom}(H, H')$，定义 $\eta_\sigma: \eta_{H'}^0 \circ \mathrm{Ad}(F)(\sigma) \cong \mathrm{Ad}_2(F)(\sigma) \circ \eta_H^0$ 为典范同构；由相干性，它给出一个伪自然等价 $\eta = (\eta^0, \eta): \mathrm{Ad}(F) \simeq \mathrm{Ad}_2(F)$。然后，对于 $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，定义一个可逆 2-胞腔

$$\begin{aligned}\alpha_C : (\mathrm{ev}_2^F \circ (\tau * \mathrm{id}_F))_C^0 &= F_2^\vee(\tilde{f}_{F(C)}^\vee) F^\vee(f^\vee_{FF_2^{-1}F(C)} f_{FF_2^{-1}F(C)} \tilde{f}_{F(C)} f_{F(C)}^\vee f^\vee_{FF^{-1}F(C)} f_{FF^{-1}F(C)}) \\ &\to \mathrm{ev}_C^{F,0} = F^\vee(f_{F(C)}^\vee)\end{aligned}$$

待定

$$F^\vee((\mathrm{ev}_{\tilde{f}_{F(C)}} \otimes \mathrm{id}_{f^\vee_{F(C)}})(\mathrm{id}_{\tilde{f}^\vee_{F(C)}} \otimes \mathrm{ev}_{f_{FF_2^{-1}F(C)}} \otimes \mathrm{id}_{\tilde{f}_{F(C)} f^\vee_{F(C)}} \otimes \mathrm{ev}_{f_{FF^{-1}F(C)}}))(\beta_{\tilde{f}^\vee_{F(C)}} \otimes \mathrm{id}_{\tau^0_{F(C)}}),$$

其中，β 表示典范同构 $F_2^\vee \cong F^\vee$。容易验证，α 确实是一个修正 $\mathrm{ev}_2^F \circ (\tau * \mathrm{id}_F) \cong \mathrm{ev}^F$。对于 $H, K \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$，定义 $\Pi_{H,K}: \chi^{\mathrm{Ad}_2}(F\ 0)_{,K} \circ (\eta_H^0 * \eta_K^0) \cong \eta^0_{HK} \circ \chi^{\mathrm{Ad}(F)}_{K,H}$ 为 $\mathrm{id}_{FH} * \alpha * \mathrm{id}_K * \mathrm{id}_\tau$，由此得到一个修正 $\Pi: \chi^{\mathrm{Ad}_2(F)} \circ (\eta * \eta) \cong \eta \circ \chi^{\mathrm{Ad}(F)}$，这是由相干性保证的。然后，由相干性可知，$\eta$ 和 Π 满足 [GPS95，第 21–22] 页中的条件。最后，定义 M: $\eta^0_{\mathrm{id}_\mathcal{C}} \circ \iota^{\mathrm{Ad}(F)} \cong \iota^{\mathrm{Ad}_2(F)}$ 为图 1 中各修正的合成，其中 ξ_2^F 表示 F_2^{-1} 对应的 $\tilde{\xi}^F$。注意，例如，ξ^F 确实表示 $(\xi^F * \mathrm{id}_{F_2^{-1}}) \otimes \mathrm{id}^{\mathrm{coev}_2^F}$ 等。然后，由 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi_2^F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\tilde{\xi}_2^F * \mathrm{id}_F)$ 可知，η, Π 和 M 满足 [GPS95，第 23–24] 页中的条件。因此，(η, Π, M) 是一个幺半自然等价 $\mathrm{Ad}(F) \simeq \mathrm{Ad}_2(F)$。□

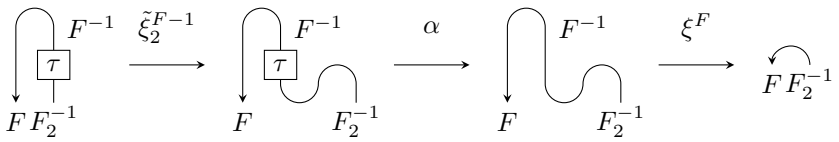


图 1：一个修正 M

注记 2.2。上述证明表明，双等价确实是一个 2-可对偶拟函子，符合三范畴版本的 [CP22，定义 5.1 和 6。1]。

定义 2.3。设 $(\mathcal{C}, \gamma^\mathcal{C})$ 和 $(\mathcal{D}, \gamma^\mathcal{D})$ 是由双范畴及群 G 的作用组成的对。$(\mathcal{C}, \gamma^\mathcal{C})$ 与 $(\mathcal{D}, \gamma^\mathcal{D})$ 之间的 G-双等价 是由双等价 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和幺半等价 $\eta^F: \mathrm{Ad}(F) \circ \gamma^\mathcal{C} \simeq \gamma^\mathcal{D}$ 组成的对 $F = (F, \eta^F)$。

双范畴之间存在 G-双等价，并不取决于对 F^{-1} 的选择，这由引理2.1得出。

引理 2.4。G-双等价确实是一种等价关系。

证明。根据相干性，$\mathrm{Ad}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{id}^{\mathrm{End}(\mathcal{C})}$ 作为幺半伪函子成立，故自反性显然。下面证明传递性。设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是双等价。固定 F^{-1} 和 H^{-1}，令 $(HF)^{-1}(E) := F^{-1}H^{-1}(E)$，$\mathrm{coev}_E^{HF\,0}, := H(f_{H^{-1}(E)})h_E$，以及 $(\mathrm{coev}_E^{HF\,0},)^\vee := h_E^\vee H(f^\vee_{H^{-1}(E)})$，其中 $E \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E})$，且 $f := \mathrm{coev}^{F,0}$ 和 $h := \mathrm{coev}^{H,0}$，并令 $(HF)^\vee := F^\vee H^\vee$。那么，对于 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, E')$，有一个可逆 2-胞腔

$$F^\vee(\widetilde{\mathrm{ev}}^H_{f_{H^{-1}(E)}} \otimes \mathrm{id}_{H^{-1}(\lambda)} \otimes \widetilde{\mathrm{ev}}^H_{f^\vee_{H^{-1}(E)}}) : (HF)^{-1}(\lambda) = F^\vee(H^\vee H(f_{H^{-1}(E')})H^{-1}(\lambda)H^\vee H(f^\vee_{H^{-1}(E)})) \\ \to F^{-1}H^{-1}(\lambda) = F^\vee(f_{H^{-1}(E')}H^{-1}(\lambda)f^\vee_{H^{-1}(E)}),$$

它定义了一个伪自然等价 $\tau\colon (HF)^{-1} \simeq F^{-1}H^{-1}$。此外，我们定义一个可逆 2-胞

$$(\mathrm{ev}^H \circ \mathrm{Ad}(H)(\mathrm{ev}^F) \circ (\tau * \mathrm{id}_{HF}))^0_C = F^\vee(f^\vee_{F(C)}f_{F(C)}H^\vee(h^\vee_{HF(C)})f^\vee_{H^{-1}HF(C)}) \\ \to \mathrm{ev}^{HF,0}_C = F^\vee(H^\vee(h^\vee_{HF(C)})\overset{H}{H}{}^\vee H(f^\vee_{H^{-1}HF(C)}))$$

令 $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 为 $F^\vee((\mathrm{id}_{H^\vee}(h^\vee_{HF}(C)) \otimes (\ \tilde{}\mathrm{ev}^{f^\vee_{H^{-1}HF}(C)}_{H^\vee}(h^\vee_{HF}(C)))^{-1})(\mathrm{ev}^{f_{F(C)}} \otimes \mathrm{id}_{H^\vee}(h^\vee_{HF}(C)))^{f^\vee_{H^{-1}HF}(C)}))$，这确实定义了一个修正 $\mathrm{ev}^H \circ \mathrm{Ad}(H)(\mathrm{ev}^F) \circ (\tau * \mathrm{id}_{HF}) \cong \mathrm{ev}^{HF}$。于是，如引理 2.1 证明的最后部分所示，我们得到一个幺半等价 $\mathrm{Ad}(HF) \simeq \mathrm{Ad}(H)\,\mathrm{Ad}(F)$，因此 G-双等价具有传递性。最后，我们证明对称性。根据目前的论证，对于一个双等价 F，$\mathrm{Ad}(F^{-1}F) \simeq \mathrm{Ad}(F^{-1})\,\mathrm{Ad}(F)$ 是幺半伪函子，因此只需证明：对于双等价 $F, F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若有一个伪自然等价 $\tau\colon F \simeq F$，则存在一个幺半等价 $\mathrm{Ad}(F) \simeq \mathrm{Ad}(\tilde{F})$。定义 $\tilde{\tau}\colon F^{-1} \simeq \tilde{F}^{-1}$ 为 $(\mathrm{ev}^F *\mathrm{id}_{\tilde{F}^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \tau^\vee *\mathrm{id}_{\tilde{F}^{-1}}) \circ \tilde{} (\mathrm{id}_{F^{-1}} *\mathrm{coev}^F)$。此外，根据图 2 定义一个可逆修正 $\alpha\colon \mathrm{ev}^F \circ (\tilde{\tau} * \tau) \cong \mathrm{ev}^F$。然后，如引理 2.1 的证明所示，令 $\eta_H := \tau *\mathrm{id}_H * \tilde{\tau}$，并令 $\Pi_{H,K} := \mathrm{id}_{FH} * \alpha *\mathrm{id}_{KF^{-1}}$，其中 $H, K \in \mathrm{Obj}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$，由此得到一个伪自然等价 η 和一个可逆修正 Π，它们满足 [GPS95，第 21–22] 页中的条件。根据图 3 定义一个修正 M。利用 τ 的对偶性，可以看出 $\tilde{}(\eta, \Pi, M)$ 是一个幺半等价 $\mathrm{Ad}(F) \simeq \mathrm{Ad}(F)$。

□

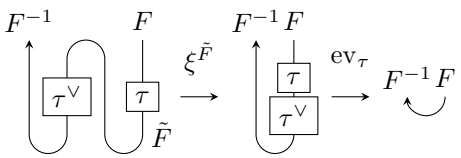


图 2：一个修正 α

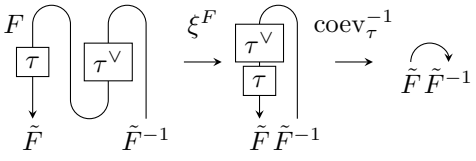


图 3：一个修正 M

根据定义 [GPS95，第 3 节，3], 对于一个 G-双等价 $F\colon (\mathcal{C}, \gamma^{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, \gamma^{\mathcal{D}})$，幺半等价 η^F 由伪自然等价 $\eta^F_g\colon \mathrm{Ad}(F)(\gamma^{\mathcal{C}}(g)) \simeq \gamma^{\mathcal{D}}(g)$、可逆修正 $\Pi^F_{g,h}\colon \chi_g^{\gamma^{\mathcal{D}}},_h \circ (\eta^F_g * \eta^F_h) \cong \eta^F_{gh} \circ \mathrm{Ad}(F)(\chi_g^{\gamma^{\mathcal{C}}},_h) \circ \chi^{\mathrm{Ad}(F)},_{\gamma^{\mathcal{C}}\ g}\ {}^0_{\gamma^{\mathcal{D}}}(\ )\ (h)$（适用于 $g, h \in G$）以及可逆修正 $M^F\colon \eta^F_e \circ \mathrm{Ad}(F)(\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}}) \circ \iota^{\mathrm{Ad}(F)} \cong \iota^{\gamma^{\mathcal{D}}}$ 组成。令 η^F_g 用一个三输入 $F, \gamma^{\mathcal{C}}(g)$ 和 F^{-1}、一个输出 $\gamma^{\mathcal{D}}(g)$ 的叉形图表示。

接下来，我们将我们的定义与 [BGM19，定义 2.3]中的定义进行比较。假设给定一个 G-双等价 $F\colon (\mathcal{C}, \gamma^{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, \gamma^{\mathcal{D}})$。那么，利用对偶性，我们得到 $\tilde{\eta}^F_g\colon F\gamma^{\mathcal{C}}(g) \simeq \gamma^{\mathcal{D}}(g)F$ for $g \in G$：具体而言，令 $\tilde{\eta}^F_g := (\eta^F_g *\mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_{F\gamma^{\mathcal{C}}(g)} *(\mathrm{ev}^F)^\vee)$。此外，根据图 4 和图 5，我们可以定义可逆修正 $\tilde{\Pi}^F_{g,h}\colon (\chi_g^{\gamma^{\mathcal{D}}},_h *\mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_{\gamma^{\mathcal{D}}(g)} *\tilde{\eta}^F_h) \circ (\tilde{\eta}^F_g *\mathrm{id}_{\gamma^{\mathcal{C}}(h)}) \cong \tilde{\eta}^F_{gh} \circ (\mathrm{id}_F * \chi_g^{\gamma^{\mathcal{C}}}{}_{,h})$ for $g, h \in G$ and $\tilde{M}^F\colon \tilde{\eta}^F_e \circ (\mathrm{id}_F * \iota^{\gamma^{\mathcal{C}}}) \cong \iota^{\gamma^{\mathcal{D}}} *\mathrm{id}_F$。通过一些标准计算，可以验证它们满足图 6、7 和 8 中的条件；不过请注意，在验证图 8 时，我们使用了 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi^F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\tilde{\xi}^F *\mathrm{id}_F)$。反之，给定一个双等价 F 以及一个满足图 6、7 和 8 中条件的三元组 $(\tilde{\eta}^F, \tilde{\Pi}^F, \tilde{M}^F)$，我们可以通过令 $\eta^F_g := (\mathrm{id}_{\gamma^{\mathcal{D}}(g)} *(\mathrm{coev}^F)^\vee) \circ (\tilde{\eta}^F_g *\mathrm{id}_{F^{-1}})$ for $g \in G$，并根据图 9 和图 10 定义 $\Pi^F_{g,h}$ for $g, h \in G$ and M^F，构造三元组 (η^F, Π^F, M^F)。利用下面的引理验证 [GPS95，第 24]页中的条件，可知 (F, η^F, Π^F, M^F) 是一个 G-双等价。

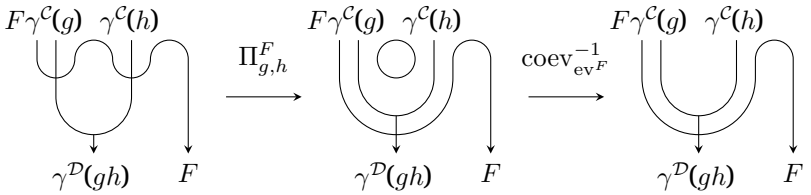


图 4：由 Π^F 构造 $\tilde{\Pi}^F$

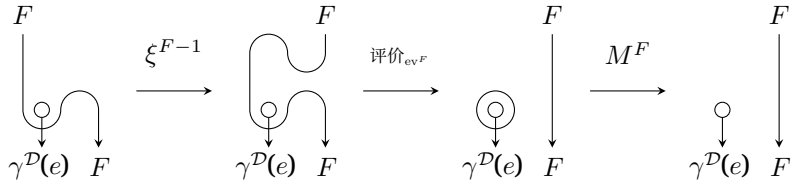


图 5：由 M^F构造 $\tilde{M}^F$

引理 2.5。对于双等价 F，我们有$(\xi^F * \mathrm{id}_{F^{-1}}) \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} = (\mathrm{id}_F * \tilde{\xi}^F) \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{coev}_{F}}$.

证明。我们已在引理 2.1 的证明中证明了 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi^F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_F)$。然后，由 $(\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi^F))(\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} * \mathrm{id}_F)) = (\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} \otimes (\tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_F))(\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} \xi^F))$，可得 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} * \mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} \xi^F)$，因此 $\mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \xi^F * \mathrm{id}_{F^{-1}F}) \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} * \mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{\mathrm{ev}^F} *$评价$^F \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}F} * \tilde{\xi}^F * \mathrm{id}_F) \otimes (\mathrm{id}_{F^{-1}} * \mathrm{id}_{\mathrm{coev}^F} * \mathrm{id}_F)$。因此，我们可以将 $\xi^{F-1} * \tilde{\xi}^{F-1}$ 与陈述中的修正复合，从而得到所述结论。 □

因此，我们也可以将一个 G-等价定义为一个元组 $(F, \tilde{\eta}^F, \tilde{\Pi}^F, \tilde{M}^F)$，其满足图6、7 和 8中的条件；当作用是幺半时，这一定义化为 [BGM19，定义 2。3] 。

在 th 接下来，为方便起见，我们以“所有图表都可交换”的形式陈述双范畴上群作用的相干定理 [BGM19，定理 3。1] e 的形式下。

定理 2.6。设 $\mathcal{C}$ 是一个带有群 G作用 $\gamma^{\mathcal{C}}$ 的双范畴。按以下规则递归定义字的集合 $W = \bigsqcup_{n\geq 0} W_n$： $\mathbf{1}^{\mathcal{C}}_C, (\chi^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g\ h},)^0_C, (\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}})^0_C \in W_0$，其中 C为任意 0-胞；以及 $g, h \in G, - \in W_1$，$\otimes \in W_2, \gamma^{\mathcal{C}}(g) \in W_1$，其中 $g \in G$ 和 $w'((w_i)_i) \in W_{\sum_i n_i}$，其中 $w' \in W_n$ 且 $(w_i)_{i=1}^n$为满足 $w_i \in W_{n_i}$的族。将与字 $w \in W_n$ 自然对应的函子 $\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}$再次记为 w，其中 $\mathcal{C}^0$ 表示仅有一个对象及其恒等态射的范畴。按以下规则递归定义态射集合 I： $a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, J^{\gamma^{\mathcal{C}}}(g)$ 和 $\varphi^{\gamma^{\mathcal{C}}}(g)$ 的分量属于 I；$(\chi^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g\ h},)_\lambda$ 和 $(\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}})_\lambda$，其中 λ为任意 1-胞，且 $g, h \in G$属于 I, $\omega^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g\ h}, , k, \kappa^{\gamma^{\mathcal{C}}}_g, \zeta^{\gamma^{\mathcal{C}}}_g \in I$，其中$g$, $h, k \in G$, $f^{-1} \in I$，其中 $f \in I$, $f \circ f' \in I$，其中 f；若定义良好，则 $f' \in I$；以及 $w((f_i)_i) \in I$，其中 $w \in W_n$且 $(f_i)_{i=1}^n \subset I$。那么，对于任意 $w, w' \in W_n$ 及 1-胞 $(\lambda_i)_{i=1}^n$，若存在，则 I中的 2-胞 $w((\lambda_i)_i) \to w'((\lambda_i)_i)$ 是唯一的。

证明。根据 [BGM19 定理 3.1], 的证明，存在一个 G-双等价 F，将 $\mathcal{C}$ 映到一个带有严格作用 $\gamma^{\mathcal{D}}$的 2-范畴 $\mathcal{D}$（见 [BGM19，定义 2.2]），使得每个等价 1-胞实际上都是同构。我们将 F视为上述数据 $(F, \tilde{\eta}^F, \tilde{\Pi}^F, \tilde{M}^F)$。我们递归地按以下规则定义 2-胞 $C^v_{(\lambda_i)_i}$（其中 $v \in W_n$）和 1-胞 $(\lambda_i)_{i=1}^n$： $C^{\mathbf{1}^{\mathcal{C}}_C} := (\varphi^F_C)^{-1}$: $F(\mathbf{1}^{\mathcal{C}}_C) \cong \mathbf{1}^{\mathcal{D}}_{F(C)}$，其中 $C \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$; $C^{\otimes}_{\lambda\ ,\mu} := (J^F_{\lambda,\mu})^{-1}$: $F(\lambda\mu) \cong F(\lambda)F(\mu)$，其中 λ 和 μ 是 $\mathcal{C}$中的 1-胞； $C^{\gamma^{\mathcal{C}}(g)\ \lambda} := \mathrm{id} \otimes (\tilde{\eta}^F_g)_\lambda$: $F\gamma^{\mathcal{C}}(g)(\lambda) \cong ((\tilde{\eta}^F_g)^0_{C'})^{-1}\gamma^{\mathcal{D}}(g)F(\lambda)(\tilde{\eta}^F_g)^0_C$，其中 $\lambda \in$属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$，且 $g \in G$, $C^{(\chi^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g,h})^0_C} := \mathrm{id} \otimes (\tilde{\Pi}^F_{g,h})^{-1}_C$: $F((\chi^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g\ ,h})^0_C) \cong ((\tilde{\eta}^F_{gh})^0_C)^{-1}\gamma^{\mathcal{D}}(g)((\tilde{\eta}^F_h)^0_C)(\tilde{\eta}^F_g)^0\gamma^{\mathcal{C}}(h)(C)$，其中 $C \in$属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，且 $g, h \in G$, $C^{(\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}})^0_C} := \mathrm{id} \otimes \tilde{M}^F_C$: $F((\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}})^0_C) \cong ((\tilde{\eta}^F_e)^0_C)^{-1}$，其中 $C \in$属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，且 $C^{v((w_i)_i)}(\lambda_i)_i := v((C^{w_i}_{\lambda_i})_i) \circ C^v_{(w_i(\lambda_i))_i}$，其中 $v \in W_n$、$(w_i)_{i=1}^n \subset W$ 和 1-胞 $(\lambda_i)_{i=1}^n$。

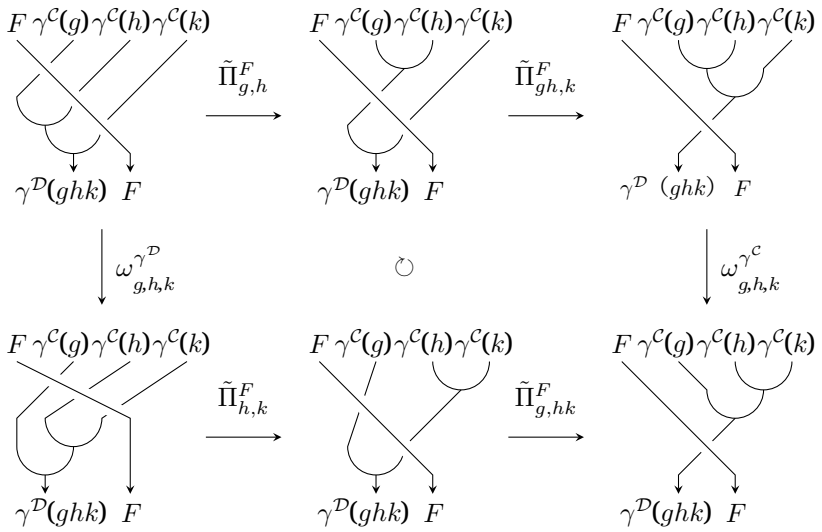


图 6: ω 的相干性

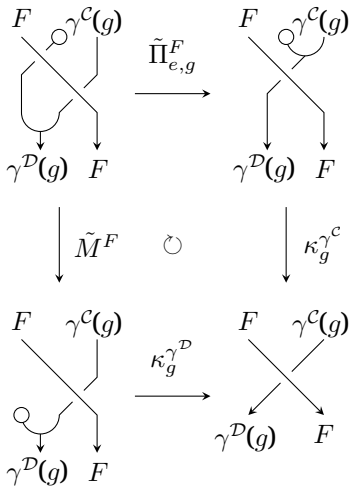


图 7: κ 的相干性

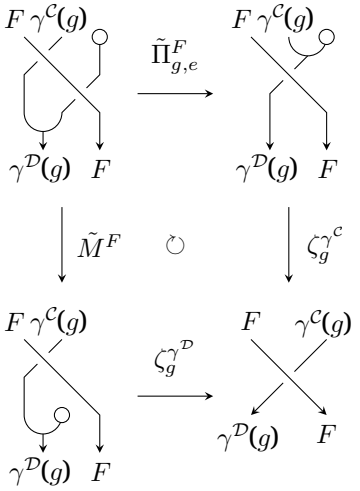


图 8: ζ的相干性

我们证明，对于任意 2-胞 f: $w((\lambda_i)_i) \to w'((\lambda_i)_i)$，都有 $C^{w}_{(\lambda_i)_i} = C^{w'}_{\lambda_i(\,)_i} \circ F(f)$；该 2-胞唯一确定 f。只需在 f是 I的生成元时证明这一点。对于 $a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, J^{\gamma^{\mathcal{C}}}(g)$ 和 $\varphi^{\gamma^{\mathcal{C}}}(g)$，结论成立，因为 F 是伪函子，且对于任意$g \in G$， $\tilde{\eta}^F_g$是伪自然变换；这是标准结果。对于 $(\chi^{\gamma^{\mathcal{C}}}_g, _h)_\lambda$和 $(\iota^{\gamma^{\mathcal{C}}})_\lambda$，结论成立，因为 $\tilde{\Pi}^F_{g,h}$和 $\tilde{M}^F$是修正。对于 $\omega^{\gamma^{\mathcal{C}}}_{g\ h}, _{,k}, \kappa^{\gamma^{\mathcal{C}}}_g$ 和 $\zeta^{\gamma^{\mathcal{C}}}_g$，结论可由图 6、7 和 8 得出。

□

得益于这一定理，本文此后可以省略 I 中的 2-胞。最后，我们回到幺半范畴的情形。

定义 2.7。设（$\mathcal{C}$，$\gamma^{\mathcal{C}}$）和（$\mathcal{D}$，$\gamma^{\mathcal{D}}$）是带有群 G 作用的幺半范畴。一幺半 G-等价 是一个 G-双等价，并带有幺半自然同构 η^F_g: $\mathrm{Ad}(F) \circ \gamma^{\mathcal{C}}(g) \cong \gamma^{\mathcal{D}}(g)$（参见 [EGNO15，定义 2.4。8]）以及相同的 Π^F和 M^F。

正如我们已经看到的，我们可以给出一个带有$\tilde{\eta}^F$的幺半 G-等价的等价定义，其中 $\tilde{\Pi}^F$和 $\tilde{M}^F$相同。具体而言，我们可以将 G-双等价定义为对（F，$\tilde{\eta}^F$），满足$\tilde{\eta}^F_{gh} = (\mathrm{id} * \tilde{\eta}^F_h) \circ (\tilde{\eta}^F_g * \mathrm{id})$，其中 g，$h \in G$和$\tilde{\eta}^F_e = \mathrm{id}$；这里我们省略了一些自然

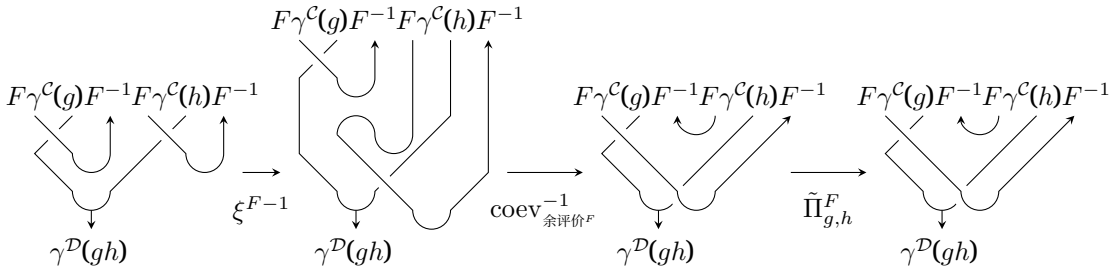


图 9：由 $\tilde{\Pi}^F$ 构造 Π^F

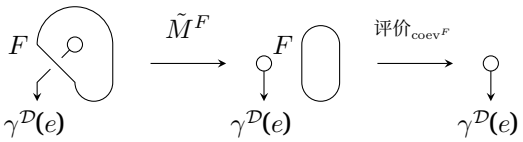


图10：由 $\tilde{M}^F$构造 M^F

由定理 2.6给出的同构。由于这些方程不包含伴随逆 F^{-1}，我们可以给出以下定义，它复现了 [Gal17第 3 节1] 中对含单位作用的定义。

定义2.8。设$(\mathcal{C},\gamma^{\mathcal{C}})$和$(\mathcal{D},\gamma^{\mathcal{D}})$是带有群 G作用的幺半范畴。一个幺半 G-函子是由幺半函子 F和幺半同构族 $\tilde{\eta}^F$ 组成的对$(F,\tilde{\eta}^F)$，其中 $\tilde{\eta}^F_g\colon F\gamma^{\mathcal{C}}(g)\cong\gamma^{\mathcal{D}}(g)F$对 $g\in G$ 成立，且当 $g,h\in G$和$\tilde{\eta}^F_e=$ id时，$\tilde{\eta}^F_{gh}=(\mathrm{id}*\tilde{\eta}^F_h)\circ(\tilde{\eta}^F_g*\mathrm{id})$。

根据定义，幺半 G-函子是幺半 G-等价，当且仅当它作为函子是一个等价。也可以定义 G-伪函子的概念，从而得到 [BGM19，定义2。3]，通过将图6、7和8中的 F 替换为一般的伪函子，不过本文不需要这样做。

2.2 等变编织张量范畴

在本小节中，我们回顾 G-交叉多张量范畴和 G-编织多张量范畴的概念。

我们关于张量范畴理论的术语遵循 [EGNO15]中的用法。特别地，多张量范畴在域 k 上是一个局部有限的 k-线性阿贝尔刚性幺半范畴，其幺半积为双线性，如 [EGNO15定义 4.1 所述。1]。张量函子 是一个正合忠实的k-线性幺半函子，如 [EGNO15定义 4.2 所述。5]。

注2.9。如 [M¨ug05注 2.11]，所述，尽管代数量子场论中出现的张量范畴没有零对象，但由于我们只关注其刚性子范畴，而这些子范畴是半单的，因此我们通过添加一个零对象，将此类子范畴视为阿贝尔范畴。注意，这样的范畴上的线性函子自动正合。

当 $\mathcal{C}$ 还进一步是多张量范畴时，作用 G 是一个幺半函子，从G 到 $\mathcal{C}$ 上张量自同构所成的幺半范畴。当 $\mathcal{C}$ 还进一步具有枢轴结构（例如参见[EGNO15，定义 4.78]）时，枢轴作用 G 是一个幺半函子，从 G 到 $\mathcal{C}$ 上枢轴张量自同构所成的幺半范畴。回顾一下，幺半函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 在满足枢轴时称为枢轴的，其中 $\delta^{\mathcal{D}}F=F\delta^{\mathcal{C}}$，这里 $\delta^{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$的枢轴结构。

首先，我们回顾多张量范畴上的分次 这一概念。设 $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ 为一个加性范畴族。其直和 $\mathcal{C}=\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}_i$ 是一个加性范畴，并带有一族加性函子 $\{I_i:\mathcal{C}_i\to\mathcal{C}\}_{i\in I}$，满足如下泛性质：对于任意加性范畴 $\mathcal{D}$ 及一族加性函子 $\{F_i\colon\mathcal{C}_i\to\mathcal{D}\}_{i\in I}$，存在一个加性函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$及一族自然同构 $\sigma^F=\{\sigma^{F,i}\colon FI_i\cong F_i\}_{i\in I}$，使得对于任意其他这样的对 $(\tilde{F},\tilde{\sigma}^F)$ 以及一族自然变换 $\{\tau^i\colon F_i\to\tilde{F}_i\}_{i\in I}$，都存在唯一的自然变换

$\tau\colon\ F \to \tilde{F}$满足 $\tau^i \circ \sigma^{F,\ i} = \sigma^{\tilde{F},\ i} \circ \tau I_i$对于任意 $i \in I$。这样的范畴 $\mathcal{C}$总是存在：事实上，我们可以将 $\mathcal{C}$ 明确构造为由对象族组成的范畴，其中除有限多个分量外，其余分量均为零，参见例如 [EGNO15，第 1.3] 节。根据泛性质，范畴 $\mathcal{C}$ 在唯一等价意义下是唯一的。我们确实可以令 $\sigma^{F,\ i}$取为恒等函子；在这种情况下，我们将根据泛性质得到的自然变换 τ称为原自然变换族 $\{\tau^i\}_{i\in I}$的扩张。

我们也可以等价地将直和 $\mathcal{C} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 定义为一个加性范畴，它以 $\mathcal{C}_i$'s 为子范畴，并满足每个对象都是 $\mathcal{C}_i$'s 中对象的直和；对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)$ 和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_j)$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu) = \{0\}$，且 $i \neq j$。事实上，上述显式构造满足这一性质；反之，通过分解 $\mathcal{C}$ 中的对象，我们可以得到一个从$\mathcal{C}$ 到 $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}_i$的加性等价。

集合 $\mathrm{Homog}(\mathcal{C}) := \bigcup_{i\in I} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)$ 中的对象称为齐次对象。如果 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)$，我们记作 $\partial_{\mathcal{C}}\lambda = i$，或简记为 $\partial\lambda = i$。由于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i) \cap \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_j)$ 由 $\mathcal{C}$中关于 $i \neq j$的零对象组成，∂在非零对象上是单值的。

根据定义，我们总能将一个对象分解为齐次对象的直和。下面的引理表明，这样的分解（我们称之为齐次分解）本质上是唯一的。

引理 2.10. 设 λ 是一个 I-分次多张量范畴中的对象，并设 $\lambda = \bigoplus_{i\in F} \lambda_i = \bigoplus_{j\in F'} \lambda'_j$ 是通过两种方式作出的分解，其有限子集分别为 F 和 F'，且均属于 I。那么，对每个 $i \in F \cap F'$，$\lambda_i \cong \lambda'_i$作为子对象相同（也就是说，存在一个同构 $f \in \mathrm{Hom}(\lambda_i, \lambda'_i)$，使得 $\iota_i = \iota'_i \circ f$；其中 ι_i 和 ι'_i 分别表示将 λ_i 和 λ'_i 嵌入 λ 的态射），并且这一子对象同构唯一。此外，对每个 $i \in F \setminus F'$，$\lambda_i \cong 0$；对每个 $j \in F' \setminus F$，$\lambda'_j \cong 0$。

证明。令 p_i和 p'_i分别表示分解 $\lambda = \bigoplus_i \lambda_i$和 $\lambda = \bigoplus_j \lambda'_j$的投影，并令 ι_i和 ι'_j表示相应的包含映射。由于 $p_i \circ \iota'_j = 0$和 $p'_j \circ \iota_i = 0$对 $i \in F$和 $j \in F' \setminus \{i\}$成立，因此对每个 $i \in F \cap F'$，都有 $(p_i \circ \iota'_i) \circ (p'_i \circ \iota_i) = \sum_{j\in F'} p_i \circ \iota'_j \circ p'_j \circ \iota_i = \mathrm{id}_{\lambda_i}$，类似地，$(p'_i \circ \iota_i) \circ (p_i \circ \iota'_i) = \mathrm{id}_{\lambda'_i}$。此外，$\iota'_i \circ p'_i \circ \iota_i = \sum_{j\in I} \iota'_j \circ p'_j \circ \iota_i = \iota_i$，这表明对每个 $i \in F \cap F'$，$p'_i \circ \iota_i \in \mathrm{Hom}(\lambda_i,\ \lambda'_i)$ 是子对象同构。由$p'_i \circ \iota'_i = \mathrm{id}_{\lambda'_i}$可得唯一性。当 $i \in F \setminus F'$时，我们有 $p_i = \sum_{j\in F'} p_i \circ \iota'_j \circ p'_j = 0$。于是 $\mathrm{id}_{\lambda_i} = p_i \circ \iota_i = 0$，因此 $\lambda_i \cong 0$。类似的论证可得 $j \in F' \setminus F$时的 $\lambda'_j \cong 0$。 □

以下这些概念由 [Tur00第 2] 节和 [Kir04定义 2.1],提出，正是我们感兴趣的内容。

定义 2.11. 设 G 为一个群。多张量范畴 $\mathcal{C}$ 的一个 G-分次是其分解为直和 $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$，其中由 $\{\mathcal{C}_g\}_{g\in G}$ 个 $\mathcal{C}$ 的阿贝尔全子范畴组成，且对任意 $g, h \in G$，有 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g) \otimes \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_h) \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{gh})$。带有 G-分次的多张量范畴称为 G-分次多张量范畴。G-分次多张量范畴之间的 G-分次张量函子是一个张量函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，对每个 $g \in G$，都有 $F(\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)) \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_g)$。

一个 G-交叉多张量范畴是由一个枢轴 G-分次多张量范畴 $\mathcal{C}$ 与其上的一个 G 对 $\mathcal{C}$ 的枢轴作用 $\gamma^{\mathcal{C}}$ 构成的对 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \gamma^{\mathcal{C}})$，满足对 $g, h \in G$，有 $\gamma^{\mathcal{C}}(g)(\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_h)) \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{ghg^{-1}})$。$G$-交叉多张量范畴之间的 G-交叉函子是一个张量 G-函子（即一个幺半G-函子，它作为幺半函子也是张量函子，参见定义 2.8），并且是 G-分次且枢轴的。如果一个 G-交叉函子作为函子是等价，则称其为 G-交叉等价。

G-辫编多张量范畴是由一个 G-交叉多张量范畴$\mathcal{C}$ 和一族同构 $b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu} : \lambda\mu \cong {}^{g}\mu\lambda$（其中 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，且该族关于 λ 和 μ 自然）组成的对 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, b^{\mathcal{C}})$，并满足 ${}^{h}b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu} = b^{\mathcal{C}}_{{}^{h}\lambda,{}^{h}\mu}$，$b^{\mathcal{C}}_{\lambda_1\lambda_2,\mu} = (b^{\mathcal{C}}_{\lambda_1,{}^{g_2}\mu} \otimes \mathrm{id}_{\lambda_2}) \circ (\mathrm{id}_{\lambda_1} \otimes b^{\mathcal{C}}_{\lambda_2,\mu})$ 以及 $b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu_1\mu_2} = (\mathrm{id}_{{}^{g}\mu_1} \otimes b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu_2}) \circ (b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu_1} \otimes \mathrm{id}_{\mu_2})$，其中 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$、$\lambda_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_1})$、$\lambda_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_2})$、$\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 且 $g, h, g_1, g_2 \in G$；这里我们根据定理 2.6 省略了一些同构。我们称 $\mathcal{C}$的 G-辫编为 $b^{\mathcal{C}}$。两个 G-辫编多张量范畴$\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$之间的 G-辫编函子，是指一个 G-交叉函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使得对于$\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 且 $g \in G$，有 $F(b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu}) = ((\tilde{\eta}^F_g)_\mu \otimes \mathrm{id}_{F(\lambda)}) \circ b^{\mathcal{D}}_{F(\lambda)\ F(\mu)}$。若一个 G- 辫编函子是 G- 交叉等价，则称其为 G- 辫编等价。

对于一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$，我们可以通过定义同构族 $b^{\mathcal{C}-}$ 来得到$b^{\mathcal{C}-}_{\mu\lambda,} := b^{\mathcal{C}-1}_{\lambda,\ \mu} : {}^{g}\mu\lambda \cong \lambda\mu$，其中 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 且 $g \in G$。我们称 $b^{\mathcal{C}-}$ 为 $b^{\mathcal{C}}$ 的反向。

注意，对于一个 G-分次多张量范畴 $\mathcal{C}$，我们自动有 $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_e)$。对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$，我们还有 $\lambda^\vee$，${}^\vee\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g^{-1}})$。$\mathcal{C}_e$ 中的对象称为中性。

对于一个 G-交叉多张量范畴 $\mathcal{C}, \lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C}) \setminus \{0\}$ 和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们令 ${}^\lambda\mu$ 表示 ${}^{\partial\lambda}\mu$。虽然当 λ 为零时，$\partial\lambda$ 没有定义，但即使 λ 可能为零，我们也经常写作 ${}^\lambda\mu$，因为我们使用这一记号主要是为了考察当 λ 为零时会变为零的态射。于是，对于 λ_1，$\lambda_2 \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，有 ${}^{\lambda_1\lambda_2}\mu = {}^{\lambda_1}({}^{\lambda_2}\mu)$，因为 $\partial(\lambda_1\lambda_2) = \partial\lambda_1\partial\lambda_2$。对于 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们令 ${}^\lambda\mu$ 表示 ${}^{(\partial\lambda)^{-1}}\mu$。这些记号也适用于态射。

代数量子场论中出现的多张量范畴确实是一个 *-多张量范畴，即一个以 $\mathbb{C}$ 为底域的多张量范畴，带有一个反变、严格幺半、反线性的对合自函子 *，该函子在对象上是恒等映射且具有正性，参见 [M¨ug03，第2节。4]。请注意，我们在定义中假设了刚性。对于群 γ 的作用 G 于一个 *-多张量范畴，我们总是假设 $\gamma(g)$ 与 *-对合对任意 $g \in G$ 均可交换。对于一个 G-编织 *-多张量范畴中，我们总是假设 G-辫编的分量是酉的。

这里给出一个启发性例子：G-辫编（*-）张量范畴。设 $\mathcal{A}$ 是一个不可约的 M¨obius 协变网（定义在 S^1 上），且在 $\mathbb{R}$ 上满足 Haag 对偶性，参见例如 [KL04a，第 2] 节以及[BE98，第2.2] 节中的定义。众所周知，[DHR71，第 II 和 IV 节] [FRS89] [FG90]（另见 [BE98，第 2]节），有限指数 Doplicher–Haag–Roberts（DHR）端同态的范畴 $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}$ 构成一个辫编 *-张量范畴。

定义2.12。设 $\mathcal{A}$ 是定义在 S^1 上的 M¨obius 协变网。$\mathcal{A}$ 的自同构群 定义为

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) := \{g \in \mathcal{U}(H_\mathcal{A}) \mid g\mathcal{A}(I)g^{-1} = \mathcal{A}(I) \text{ for } \forall I \in \mathcal{I} \text{ and } g\Omega_\mathcal{A} = \Omega_\mathcal{A}\},$$

其中，$\mathcal{U}$ 表示酉算子群，$H_\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{A}$的希尔伯特空间，$\mathcal{I}$ 表示 S^1中区间的集合，而 $\Omega_\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{A}$的真空。我们不考虑拓扑。群同态 $G \to$Aut($\mathcal{A}$)称为 G 在 $\mathcal{A}$上的作用 。若作用是单射，则称其为忠实的 。

注记 2.13. 对于任意 $I \in \mathcal{I}$，伴随作用 Ad : 自同构群($\mathcal{A}$) $\to$ 自同构群($\mathcal{A}(I)$) 由 Reeh–Schlieder 性质可知是单射。

以下概念定义于 [M¨ug05，定义 2。8]。

定义2.14. 设 $\mathcal{A}$ 是 S^1 上具有群 G 的作用 β 的 Möbius 协变网。对于$g \in G$，若 $\mathcal{A}_\infty$ 的端同态 $\lambda := \bigcup_{I\in\mathcal{I}_\mathbb{R}} \mathcal{A}(I)$（其中 $\mathcal{I}_\mathbb{R}$ 表示 $\mathbb{R}$ 中有界区间的集合）满足 g 局域化于 $I \in \mathcal{I}_\mathbb{R}$，当且仅当 $\lambda|_{\mathcal{A}(I'_\mathrm{L})} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(I'_\mathrm{L})}$ 且 $\lambda|_{\mathcal{A}(I'_\mathrm{R})} = \mathrm{Ad}\,\beta(g)|_{\mathcal{A}(I'_\mathrm{R})}$，其中 I'_L（分别为 I'_R）表示 I 的开补集 I' 的左（分别为右）连通分支。若一个 g 局域化的 $\tilde{}$ 端同态 λ 满足：对任意 $I \in \mathcal{I}_\mathbb{R}$，存在酉元 $u \in \mathcal{A}_\infty$，使得 Ad $u \circ \lambda$ 局域化于 I，则称其为 $\mathcal{A}$ 的 g-扭曲 DHR 端同态。刚性 g 扭曲 DHR 端同态的 * 范畴记为 g-Rep $\mathcal{A}$，而 * 张量范畴 G-Rep $\mathcal{A} := \bigoplus_{g\in G} g$-Rep $\mathcal{A}$ 的对象称为 $\mathcal{A}$ 的 G-扭曲 DHR 端同态。

注记 2.15. 在 [M¨ug05，定义 2.8], 范畴 G- Rep $\mathcal{A}$ 被定义为由 g- Rep $\mathcal{A}$在 End $\mathcal{A}_\infty$中的对象生成的范畴，并假设作用 β是忠实的，以确保g- Rep $\mathcal{A}$彼此不相交。这里，我们从一开始就将 G- Rep $\mathcal{A}$ 定义为直和范畴，因此作用 β 无需满足忠实性。

作用 β由 G 在 $\mathcal{A}$ 上诱导出在 *-张量范畴 G- Rep $\mathcal{A}$ 上的伴随作用：${}^g\lambda :=$Ad $\beta(g) \circ \lambda \circ$ Ad $\beta(g^{-1})$，其中 $\lambda \in G$- Rep $\mathcal{A}$ 和 $g \in G$，这使得 G- Rep $\mathcal{A}$ 成为一个 G-交叉 *-张量范畴。若此外 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Haag 对偶性，则范畴 G- Rep $\mathcal{A}$ 将通过G-编织 *-张量范畴转化为 [M¨ug05，定理 2.21], 另见 [Noj20，第 3] 节。当 G 平凡时，该论证可恢复经典的 DHR理论。

我们回到一般理论。这里汇集一些关于 G-辫编多张量范畴的图形演算。我们的图示记法沿用 [BEK99] 中的记法，即幺半范畴中的态射表示为一个自上而下的箭头。现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-辫编多张量范畴。我们不画出定理2.6中的同构。对于 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，$b^\mathcal{C}_{\lambda,\,\mu}$ 所对应的 G-辫编分量用图11中的交叉表示。反向的分量$b^{\mathcal{C}-}_{\mu\,\lambda}$，用图12中的反向交叉表示。

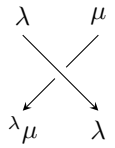


图 11： G-辫编 $b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\ \mu}$

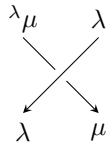


图 12：反向的 $b^{\mathcal{C}-}_{\mu\ \lambda,}$

的自然性 $b^{\mathcal{C}}$ 用图13表示，其中我们可以假设 $\partial\lambda = \partial\lambda'$，因为否则等式中的态射为零。对 $b^{\mathcal{C}-}$ 也有类似的表示。第一个 G-辫编公理指出，${}^{h}b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\ \mu}$ 和 ${}^{}b^{\mathcal{C}}_{{}^{h}\lambda,\ {}^{h}\mu}$ 由同一个图表示。关于 $b^{\mathcal{C}}$ 的第二和第三条公理见图14。

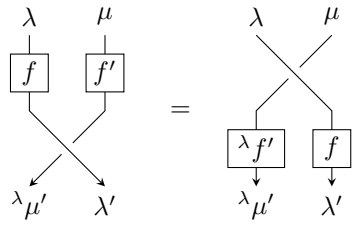


图 13： G-辫编的自然性

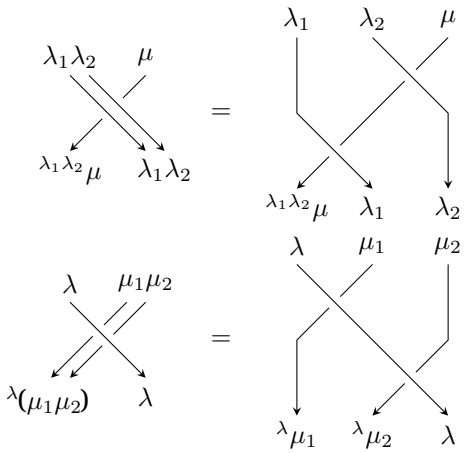


图 14： G-辫编的公理 $b^{\mathcal{C}}$

由于 ${}^{g}\mu$ 和 ^{g}余评价$_{\mu}$ (相应地，评价${}^{g}\mu$ 和 ^{g}评价$_{\mu}$，右对偶的情形也类似）在 $\mu \in$ 对象$(\mathcal{C})$ 上由同一个图表示，且 $g \in G$ (例如参见 [EGNO15，练习 2.10。6]），因此，例如，我们可以通过图 15 以及图 13 和 14进行计算。

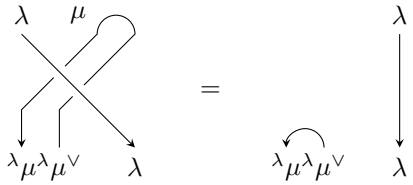


图 15：移动一条弧

下面的引理是 G-等变版本，见 [BEK99，图 27]。

引理 2.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织多张量范畴。设 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，并设 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}$。则图 16 中的等式成立。

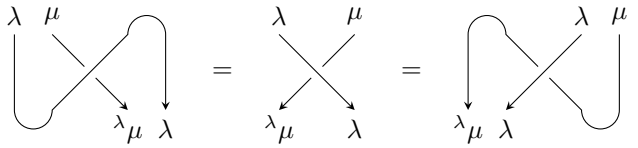


图 16：交叉的旋转

证明。 根据图17中的图示计算，图16 最左侧的图是$b^{\mathcal{C}}_{\mu\,{}^{\lambda}\lambda}$的右逆。类似地可以证明，它也是左逆，因此图16中的左侧等式成立。右侧等式的证明类似。

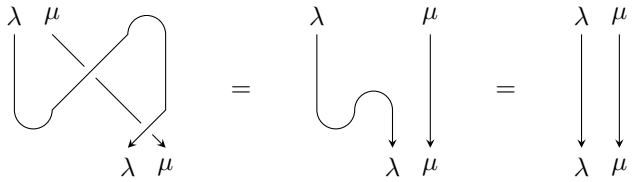


图 17：旋转证明的一部分

□

设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织多张量范畴。对于任意 λ，$\mu \in$ 对象$(\mathcal{C})$和 $g \in G$，λ 不一定是齐次的，令由 g 标记、从 $\lambda\mu$ 到 ${}^{g}\mu\lambda$ 的虚线交叉表示图 18中的态射，其中 i_g 和 p_g 分别表示在齐次分解 λ_g 中的包含和投影。则根据引理 $\lambda = \bigoplus_g \lambda_g$，该态射不依赖于 i_g 和 p_g 的选择，2.10 以及 $b^{\mathcal{C}}$的自然性。另请注意，虚线交叉是自然的。

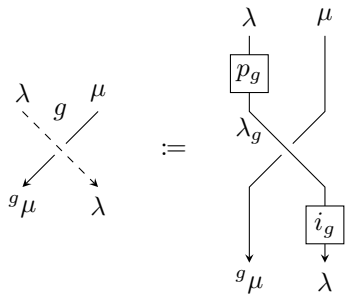


图 18：虚线交叉

最后，我们考虑带状结构的 G-等变版本这一概念。设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织多张量范畴。对于 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，定义 $\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda} : \lambda \cong {}^{\lambda}\lambda$，令 $\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda} :=$(id$_{\lambda\,\lambda}\otimes$评价$_{\lambda^{\vee}}$)$b^{\mathcal{C}}_{\lambda^{\vee\vee},\lambda}$($\delta^{\mathcal{C}}_{\lambda}\otimes$余评价$_{\lambda}$)。若 $\mathcal{C}$是分裂球面融合范畴，则 $\theta^{\mathcal{C}}$满足 $\theta^{\mathcal{C}}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}, \theta_{\lambda\mu} = (\theta_{\lambda\mu\lambda\lambda}\otimes\theta_{\lambda\,\mu})$，${}^{g}\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda} = \theta^{\mathcal{C}}_{{}^{g}\lambda}$ 以及 $(\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda})^{\vee} = {}^{\lambda}\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda^{\vee}}$，其中 $\lambda, \mu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，且由 [Kir04，引理 2.3]可得。

定义 2.17. </style}一个 -辫化多张量范畴是一个 -带状 多张量范畴，当且仅当 $\theta^{\mathcal{C}}$满足 $\theta^{\mathcal{C}}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}$，$\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda\mu} = (\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda\mu\lambda\lambda}\otimes\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda\,\mu})$，${}^{g}\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda} = \theta^{\mathcal{C}}_{{}^{g}\lambda}$以及 $(\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda})^{\vee} = {}^{\lambda}\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda^{\vee}}$，对 $\lambda, \mu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 和 $g \in G$均成立。

对于 G-带状多张量范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，我们可以进行图形计算，如图 19所示，其中我们利用枢轴结构 $\lambda^{\vee}$ 将 ${}^{\vee}\lambda$ 的左对偶和右对偶 λ 识别起来$\delta^{\mathcal{C}}$。事实上，这些等式由 $(\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda})^{\vee} = {}^{\lambda}\theta^{\mathcal{C}}_{\lambda^{\vee}}$得出。

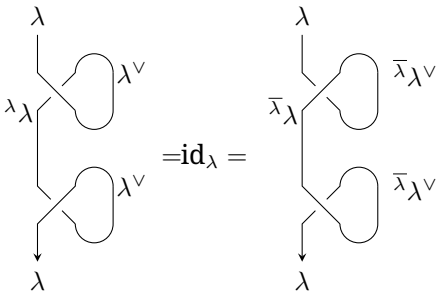


图 19：带框缠结的 Reidemeister 变换

2.3 等变 Frobenius 代数

本小节中，我们回顾 G-等变 Frobenius 代数的概念。

一个*Frobenius* 代数是幺半范畴中的代数对象，带有相容的余代数结构，参见例如 [FFRS06第2节。3] 其中给出了精确定义及更多术语。Frobenius 代数的乘法、单位、余乘法和余单位 A 分别记作 m_A， η_A， Δ_A和 ε_A。

对于枢轴多张量范畴 $\mathcal{C}$，若 Frobenius 代数 A 在 $\mathcal{C}$ 中满足 $\delta_A^{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_A$（其中 $A^\vee$ 取为 A），则称其为对称的，参见 [FFRS06，定义2.22]。若此外 A 还是特殊的（即 $m_A \circ \Delta_A$和 $\varepsilon_A \circ \eta_A$ 是可逆标量，参见 [FFRS06，定义2.22(iii)]），则可逆标量 $m_A \circ \Delta_A$ 与 $\varepsilon_A \circ \eta_A$ 的乘积等于 dim A。由于任意对称特殊 Frobenius 代数 A 都有˜ ˜唯一对应的余代数结构 $(\Delta_A, \tilde{\varepsilon}_A)$，满足 $m_A\Delta_A = \mathrm{id}_A$ 和 $\tilde{\varepsilon}_A\eta_A = \dim A$（参见例如 [M¨ug03，注3.14]），我们从一开始就假设 $m_A\Delta_A = \mathrm{id}_A$ 且 $\varepsilon_A\eta_A = \dim A$。

一个*Q-系统*在 *-多张量范畴中的三元组 (θ, w, x)，满足 $(\theta, x^*, w, x,$(维数 $\theta)w^*)$ 是一个特殊 Frobenius 代数，参见例如 [BKLR15，定义 3。8]根据定义，Q-系统自动是对称的。

本文需要考虑等变Frobenius 代数。为定义这一概念，注意，若 A 是带有群 G 作用的幺半范畴中的代数（分别为 Frobenius 代数），则 ${}^gA = ({}^gA, {}^gm_A, {}^g\eta_A)$（分别为 ${}^gA = ({}^gA, {}^gm_A, {}^g\eta_A, {}^g\Delta_A, {}^g\varepsilon_A)$）仍是一个代数（分别为 Frobenius 代数）。

定义 2.18. 设 $\mathcal{C}$ 是带有群 G 作用的幺半范畴。 $\mathcal{C}$ 中的一个 G-等变代数是一个对 (A, z^A)，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中的代数， z^A 是 A 上的 G-等变结构（即，对于 $g, h \in G$，有 $z^A_{gh} = z^{Ag}_g z^A_h$；这里省略了定理 2.6 中的典范同构 $(\chi_{g,h})_A$：${}^g({}^hA) \cong {}^{gh}A$，参见例如 [EGNO15，定义 2.7。2]），且对每个 $g \in G$， z^A_g: ${}^gA \cong A$ 是代数同构。类似地， $\mathcal{C}$ 中的一个 G-等变 Frobenius 代数是一个对 $A = (A, z^A)$，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中的 Frobenius 代数， z^A 是 A 上的 G-等变结构，且对每个 $g \in G$， z^A_g 是 Frobenius 代数同构。在 *-多张量范畴中的一个 G-等变 Q-系统，是一个 G-等变 Frobenius 代数 A，满足 A 是 Q-系统，并且对每个 $g \in G$， z^A_g 都是酉的。两个 G-等变（Frobenius）代数之间的同态，是一个 G-等变的（Frobenius）代数同态。我们所说的两个 G-等变 Q-系统之间的同构，始终指酉同构。

例2.19. 众所周知 [Lon94] （另见 [BKLR15，定理 3.11]），III 型因子的有限指数扩张对应于 *-张量范畴 $\mathrm{End}_0(N)$ 中有限指数单位 *端同态的一个 Q-系统 N，反之亦然，且二者在同构意义下对应。事实上，当群 G 作用于 N时，$\mathrm{End}(N)$ 上存在 G的伴随作用；而 N 的有限指数扩张连同 G 作用的扩张，对应于 $\mathrm{End}_0(N)$ 中的一个 G-等变 Q-系统，参见 [Noj20，第 2.4]节。

这里我们给出一些来自代数量子场论的例子。

定义2.20。设 $\mathcal{J}$ 为有向集，且 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(I)\}_{I\in\mathcal{J}}$ 是希尔伯特空间 $H_{\mathcal{A}}$ 上的一族 III 型冯·诺依曼代数，它们具有公共循环分离向量 $\Omega_{\mathcal{A}} \in H_{\mathcal{A}}$，并且若 $I \leq J$，则 $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)$。 $\mathcal{A}$ 的一个 标准扩张 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ 是一对 $(\mathcal{B}, E^{\mathcal{B}})$，其中包含一个族

$\mathcal{B}=\{\mathcal{B}(I)\}_{I\in\mathcal{J}}$ 是希尔伯特空间 $H_{\mathcal{B}}$ 上的一族冯·诺依曼代数，它扩张了 $H_{\mathcal{A}}$，以及一族忠实正规条件期望 $E^{\mathcal{B}}=\{E_I^{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B}(I)\to\mathcal{A}(I)\}_{I\in\mathcal{J}}$，满足 $\mathcal{A}(I)\subset\mathcal{B}(I)$；$\Omega_{\mathcal{A}}\in H_{\mathcal{A}}\subset H_{\mathcal{B}}$ 是 $\mathcal{B}(I)$ 的循环分离向量，且对任意 $I\in\mathcal{J}$，都有 $\varphi_{\Omega_{\mathcal{A}}}\circ E_I^{\mathcal{B}}=\varphi_{\Omega_{\mathcal{A}}}$，其中 $\varphi_{\Omega_{\mathcal{A}}}$ 表示 $\Omega_{\mathcal{A}}$ 的向量态；并且 $\mathcal{B}(I)\subset\mathcal{B}(J)$，且若 $I\le J$，则 $E_J^{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}(I)}=E_I^{\mathcal{B}}$。

若对任意 $I\in\mathcal{J}$，$E_I^{\mathcal{B}}$ 都具有有限指数，则标准扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ 具有有限指数。

标准扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_2$（它们是 $\mathcal{A}$ 的扩张）之间的同构是指一个酉算子 $u:H_{\mathcal{B}_1}\to H_{\mathcal{B}_2}$，使得对于任意 $I\in\mathcal{J}$ 和$u\Omega_{\mathcal{A}}=\Omega_{\mathcal{A}}$，$u$ 与 $\mathcal{A}_\infty:=\bigcup_{I\in\mathcal{J}}\mathcal{A}(I)$，$u\mathcal{B}_1(I)u^*=\mathcal{B}_2(I)$ 可交换。

设 $\mathcal{A}$ 是一个不可约局域 M¨obius 协变网。则，将 $\mathcal{A}$ 限制在 $\mathbb{R}$上（仍记作 $\mathcal{A}$）后，得到一个以 $\mathbb{R}$ 中的区间有向集为指标集的 III 型因子族，其中真空 $\Omega_{\mathcal{A}}$ 是公共循环分离向量。此外，对于不可约局域 M $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ öbius 协变网的包含¨，存在唯一的忠实正规条件期望族，使 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ 成为 $\mathcal{A}$ 的标准扩张；这是由 Bisognano–Wichmann 性质和 Takesaki定理 [Tak72]。

根据 [LR95，定理 4，9], 的有限指数标准扩张 $\mathcal{A}$ 与 Rep 中的一个 Q-系统一一对应 $\mathcal{A}$，对应关系模同构成立。此外，若 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}$上满足 Haag 对偶性，则 $\mathcal{A}$ 的有限指数局部标准扩张 $\mathcal{B}$（即 $\mathcal{A}$ 的有限指数标准扩张，且 $\mathcal{B}(I)$ 与 $\mathcal{B}(J)$ 在 $I\cap J=\emptyset$时对易）与 Rep 中的一个交换 Q-系统一一对应 $\mathcal{A}$，对应关系模同构成立。

注2.21。我们考虑的不仅是局域扩张，也包括 非局域扩张，即 $\mathcal{B}$ 在上面的例子中不一定是局域的 M¨obius 协变网，这是 α-诱导理论的关键，参见 [BEK00，第 5]节。还要注意，我们甚至不假设 $\mathcal{B}$ 相对于 $\mathcal{A}$ 的相对局域性（即 $\mathcal{A}(I)$ 与 $\mathcal{B}(J)$ 在 $I\cap J=\emptyset$时对易）；事实上，根据[LR95，定理 4，9]这点自动成立。

定义2.22. 设 $\mathcal{A}$ 是定义在 S^1上的不可约局部 M¨obius 协变网。假设群 G 在 $\mathcal{A}$上有一个作用 $\beta_{\mathcal{A}}$：$G\to\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$。对于标准扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$，令 $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 表示由那些通过伴随作用保持局部代数、且像 M¨obius 协变网中的真空那样保持真空的酉算子组成的群。若 G 在 $\mathcal{B}$ 上的作用 $\beta_{\mathcal{B}}\colon G\to\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 扩张了 $\mathcal{A}$ 上的作用 $\beta_{\mathcal{A}}$，即对任意区间 $I\subset\mathbb{R}$，$a\in\mathcal{A}(I)$和 $g\in G$，均有 $\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{B}}(g)(a)=\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{A}}(g)(a)$，参见[BJLP19，定义6.2]。我们将标准扩张与 $\beta_{\mathcal{A}}$ 的扩张组成的对 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}=(\mathcal{A}\subset\mathcal{B},\beta_{\mathcal{B}})$称为$(\mathcal{A},\beta_{\mathcal{A}})$的 G-等变标准扩张。两个 G-等变扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_2$ 之间的同构是希尔伯特空间 $H_{\mathcal{B}_1}$ 和 $H_{\mathcal{B}_2}$ 之间的酉算子 u，$\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 分别作用于这两个空间，并且 u 是标准扩张的同构，且 $\mathrm{Ad}\,u\circ\beta_{\mathcal{B}_1}=\beta_{\mathcal{B}_2}$。

注记 2.23. 1. 当 $\mathcal{B}$ 是具有强可加性的局部 M¨obius 协变网的限制时，S^1 上的局部代数由 $\mathbb{R}$ 上的局部代数生成，因此上文定义的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 与局部 M¨obius 协变网的自同构群一致。

2. 若对任意区间 I及 $a\in\mathcal{A}(I)$，均有 $\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{B}}(g)(a)=\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{A}}(g)(a)$，则 $\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{B}}(g)(\mathcal{A}(I))\subset\mathcal{A}(I)$，因此 $\beta_{\mathcal{B}}(g)$ 与 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$的 Jones 投影 $e_{\mathcal{A}}$ 对易。因此，对于任意区间 I及 $g\in G$，确有 $\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{B}}(g)\circ E_I=E_I\circ\mathrm{Ad}\,\beta_{\mathcal{B}}(g)$，因为 $\beta_{\mathcal{B}}(g)E_I(b)\beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1}\Omega_{\mathcal{A}}=\beta_{\mathcal{B}}(g)e_{\mathcal{A}}be_{\mathcal{A}}\beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1}\Omega_{\mathcal{A}}=e_{\mathcal{A}}\beta_{\mathcal{B}}(g)b\beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1}e_{\mathcal{A}}\Omega_{\mathcal{A}}=E_I(\beta_{\mathcal{B}}(g)b\beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1})\Omega_{\mathcal{A}}$，其中 $b\in\mathcal{B}(I)$。类似地，对于 G-等变扩张之间的同构 u，对任意区间 I，$\mathrm{Ad}\,u\circ E_I^{\mathcal{B}_1}=E_I^{\mathcal{B}_2}\circ\mathrm{Ad}\,u$ 自动成立。

命题 2.24。设 $\mathcal{A}$ 是定义在 S^1 上、具有 Haag 对偶性（在 $\mathbb{R}$ 上）的不可约局部 M¨obius 协变网。则有限指数 G-等变标准扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ 与 Rep$\mathcal{A}$ 中的 G-等变 Q-系统之间存在双射对应关系，且该对应关系在同构意义下成立。

证明。假设给定一个有限指数的 G-等变标准扩张 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$。那么，相应的 Q-系统 θ 局域化于某个区间 I，并且对于任何包含 I的区间 J，都可以将其限制为 $\mathcal{A}(J)\subset\mathcal{B}(J)$的对偶典范端同态。通过对包含 $\mathcal{A}(I)\subset\mathcal{B}(I)$应用 [Noj20 引理 2.8] 中的论证，我们可以对每个$g\in G$给出 $z_g\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{End}(\mathcal{A}(I))}({}^g\theta|_{\mathcal{A}(I)},\theta|_{\mathcal{A}(I)})$；这正是我们所需的，因为关于 $\mathcal{A}(J)\subset\mathcal{B}(J)$的论证给出相同的态射$z_g$，因此有 $z_g\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{End}\,\mathcal{A}_\infty}({}^g\theta,\theta)$。如果将 θ换成一个与之同构的对象，那么我们只能得到

˜与 G-等变 Q-系统同构，这由 [Noj20 引理 2.8]得出。如果将 $\mathcal{B}$ 换成一个与之同构的 $\mathcal{B}$，且同构由酉 u给出，那么 $U \coloneqq \operatorname{Ad} u \circ - \circ \operatorname{Ad} u^*$ 是一个严格 2-函子，它在 $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(I)$和 $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(I)$的态射 2-范畴之间建立对应；关于态射 2-范畴，参见例如 [M¨ug03 第 1.3] 节。由于 u 以及 U 交织群作用， $U(\theta) = \theta$，这由 ˜ u 与 $\mathcal{A}_\infty$可交换推出，是一个与 $\mathcal{B}$相对应的 G-等变 Q-系统。因此，更换 $\mathcal{B}$ 不会影响最终得到的 G-等变 Q-系统。

反之，假设给定 Rep $\mathcal{A}$ 中的一个 G-等变 Q-系统 (θ, w, x, z)，且它局域化于 I。那么，根据 $\mathcal{A}$的 $\mathbb{R}$ 上的 Haag 对偶性假设， $w, x, z_g \in \mathcal{A}(I)$，并且我们可以在与真空态相关的 $\mathcal{B}(I)$ 的 GNS 希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{B}(I))$上构造一个有限指数标准扩张 $\iota : \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ，参见 LR95 证明 4.9]。根据 Noj20 引理 2. 10]，，我们有自同构群 Aut($\mathcal{B}(I)$)的一个扩张 $\beta_I^{\mathcal{B}}$: $G \to$ ，它扩张了一个作用 $\operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}(I)}$: $G \to$ Aut($\mathcal{A}(I)$)。于是，对每个 $g \in G$，定义希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{B}(I))$上的一个线性算子 $\beta_{\mathcal{B}}(g)$，令 $\beta_{\mathcal{B}}(g)[b] \coloneqq [\beta_I^{\mathcal{B}}(g)(b)]$ ，其中$[b] \in \mathcal{B}(I) \subset L^2(\mathcal{B}(I))$；该算子满足 ${}^g b \coloneqq \beta_I^{\mathcal{B}}(g)(b) = \beta_{\mathcal{B}}(g) b \beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1}$ ，其中 $b \in \mathcal{B}(I)$，特别是根据定义，对于 $a \in \mathcal{A}(I)$，有 ${}^g a = \beta_{\mathcal{B}}(g) a \beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1} = \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(a)$。我们证明 $\beta_{\mathcal{B}}(g)$属于 Aut($\mathcal{B}$)，因此 $\beta_{\mathcal{B}}$ 是 β的扩张。首先， $\beta_{\mathcal{B}}(g)$是酉的，因为它是保持真空态的自同构。接下来，我们验证对于任意区间 J，$\operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{B}}(g)(\mathcal{B}(J)) \subset \mathcal{B}(J)$。为此，我们证明对于 $\tilde{a} \in \mathcal{A}_\infty$，有 Ad $\beta_{\mathcal{B}}(g)(\tilde{a})$ $= \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a})$。设 K是一个包含 $\tilde{a}$的区间。根据构造，我们有一个元素 $v \in \mathcal{B}(I)$，满足 $L^2(\mathcal{B}(I))$ $= v^* L^2(\mathcal{A}(I))$，作为$\mathcal{A}(K)$的一个表示，参见 LR95 证明 4.9]。根据 Noj20 引理 2.8]，我们还有 ${}^g v = z_g^* v$ 。由于在作为 $\mathcal{A}(I)$的循环表示的识别 $L^2(\mathcal{A}(I)) \cong H_{\mathcal{A}}$ 下，$\beta_{\mathcal{B}}(g)|_{L^2(\mathcal{A}(I))} = \beta_{\mathcal{A}}(g)$，我们有

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathcal{B}}(g)\tilde{a}\beta_{\mathcal{B}}(g)^{-1} v^*[a] &= \beta_{\mathcal{B}}(g)\tilde{a}^{g^{-1}} v^*[{}^{g^{-1}}a] = \beta_{\mathcal{B}}(g) v^* \theta(\tilde{a}) z_{g^{-1}}[{}^{g^{-1}}a] = {}^g v^* \beta_{\mathcal{A}}(g)\theta(\tilde{a}) z_{g^{-1}}[{}^{g^{-1}}a] \\
&= v^* z_g ({}^g\theta)(\operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a})) \beta_{\mathcal{A}}(g) z_{g^{-1}}[{}^{g^{-1}}a] \\
&= v^* \theta(\operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a})) z_g \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(z_{g^{-1}})[a] = v^* \theta(\operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a}))[a] \\
&= \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a}) v^*[a]
\end{aligned}$$

对每个 $a \in \mathcal{A}(I)$，因此有 ${}^g\tilde{a} \coloneqq \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{B}}(g)(\tilde{a}) = \operatorname{Ad} \beta_{\mathcal{A}}(g)(\tilde{a})$。注意，第三个等式中使用了 $\beta_{\mathcal{B}}(g)|_{L^2(\mathcal{A}(I))} = \beta_{\mathcal{A}}(g)$，而倒数第二个等式中使用了 $z_e = {}^e z_e = \mathrm{id}_\theta$ 。因此，特别地，˜有 ${}^g\mathcal{A}(J) \subset \mathcal{A}(J)$。接着，回忆我们有一个 Q-系统同构 $u : \theta \cong \theta$，其中 $\mathcal{A}$ 局域化在 J 中，并且根据构造有 $\mathcal{B}(J) = \mathcal{A}(J)uv$ 。通过令 $u : G$，我们可以将 ˜ ˜变为一个 z_g^θ-等变的 Q-系统同构。于是，由 Haag 对偶性， $z_g^\theta \in \mathcal{A}(J)$，因此

$${}^g\mathcal{B}(J) = {}^g(\mathcal{A}(J)) {}^g u {}^g v \subset \mathcal{A}(J) {}^g u z_g^* v = \mathcal{A}(J) {}^g u z_g^* v = \mathcal{A}(J)(z_g^{\tilde{\theta}})^* uv = \mathcal{A}(J)uv = \mathcal{B}(J).$$

˜因此， $\beta_{\mathcal{B}}$ 是 $\beta_{\mathcal{A}}$ 的一个扩张。若将 θ 换成一个同构的、局域化在区间 J 中的 θ ，并取一个酉元 u ，则我们在 $L^2(\tilde{\mathcal{B}}(J))$ 上构造出 $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ 。我们有 v 的对应对象 $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{B}}(J)$，以及$U$: $L^2(\mathcal{B}(J)) \to L^2(\mathcal{B}(I))$ ； $[a\tilde{v}] \mapsto au[v]$ $(a \in \mathcal{A}(J))$ 定义了标准扩张之间的一个同构，参见 LR95 定理 4.9] 的证明。此外， U 交织群作用，因此是 G-等变标准扩张之间的同构，因为

$$\begin{aligned}
U^* \beta_{\mathcal{B}}(g) U[a\tilde{v}] = U^* \beta_{\mathcal{B}}(g) au[v] = {}^g(au) U^*[{}^g v] = {}^g(au) z_g^* U^*[v] = {}^g a (z_g^{\tilde{\theta}})^* U^* u[v] = [{}^g a (z_g^{\tilde{\theta}})^* \tilde{v}] \\
= \beta_{\tilde{\mathcal{B}}}(g)[a\tilde{v}]
\end{aligned}$$

对任意 $g \in G$ 和 $a \in \mathcal{A}$（J）。因此，仅改变 θ 只会得到一个同构的 G-等变扩张。特别要注意，我们可以放心地将某个给定的 G-等变 Q-系统局域化所在的区间替换为另一个区间（例如更大的区间）。不难看出，我们的构造互为逆构造。 □

注 2.25。 在上述命题中，作用 $\beta_{\mathcal{A}}$ 不必是忠实的。也就是说，$\beta_{\mathcal{A}}$ 可以有非平凡核。例如，当 $\mathcal{A} = \mathcal{B}^G$ 对于一个 M¨obius 协变网 $\mathcal{B}$时，我们就会遇到这种情况。

另请参见关于 [BJLP19，命题 6。3] 中关于完全有理共形网上有限群作用的一个结果。请注意，我们的证明既不需要群是有限群，也不需要网具有局域性。

我们回到一般理论。这里汇集了一些关于等变代数的图形演算。我们沿用 [FFRS06，公式 2。22]中代数和弗罗贝尼乌斯代数的图形记号。具体而言，代数的乘法和单位分别用叉形符号和小圆圈表示。

设 A 是一个 G-等变代数。那么，它在图 20 中以图示方式表示，其中 z_g^A 是关于 $g \in G$ 的代数同态。图 20 中的第一个等式通常以图 21 的形式使用。当 A 还是一个 G-等变 Frobenius 代数时，我们可以类似地表示 A 的余结合性和余单位性质。它通常以图 22 的形式使用，其中 z^A 是一个 G-等变结构。特别地，令 $h = g^{-1}$，可得图 23，因为 $z_g^{Ag} z_{g^{-1}}^A = z_e^A = \mathrm{id}_A$。

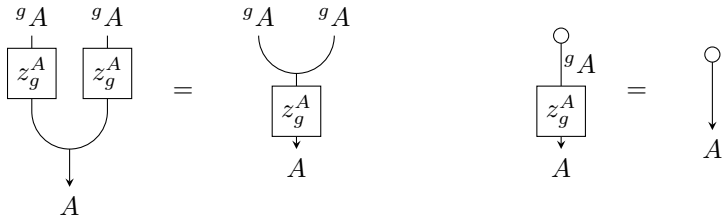


图 20： z_g^A 是代数同态

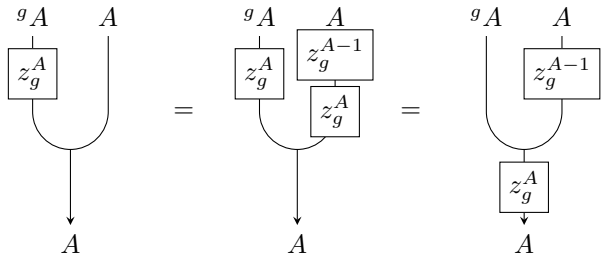


图 21：等变代数的一个实用演算

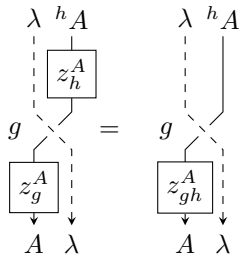


图 22： z^A 是一个 G-等变结构

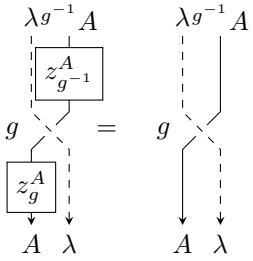


图 23： $z_g^{Ag} z_{g^{-1}}^A = \mathrm{id}_A$

最后请注意，当 A 是一个 G-编织多张量范畴中的代数时，根据图 24 的定义，我们可以像图中那样使代数结构穿过交叉 ${}^{\lambda}A$。

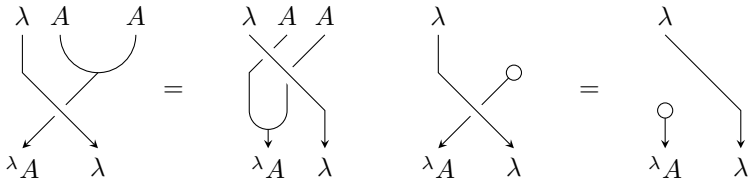


图 24：代数结构与交叉

3 等变 α-诱导

针对 M αobius 协变网的扭曲表示的¨-诱导（见例 2.14）由 Nojima 在 [Noj20]中引入。本节中，我们用张量范畴的语言重新表述这一概念（定义 3.9 和注释 3.7），这是对 Ostrik 的工作[Ost03第 5 节 1]，的等变推广；另见 [BKLR15 第 4 节 6]。为此，我们从双模范畴上的交叉结构开始。

3.1 等变弗罗贝尼乌斯代数双范畴上的群作用

本小节中，我们从环境多张量范畴上的群作用出发，在等变弗罗贝尼乌斯代数的双范畴上诱导出一个群作用（命题 3.1）。我们还将看到，这确实使双模范畴成为 G-交叉的（命题3.5）。

众所周知 [Yam04，第 4 节及 5]，多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的特殊 Frobenius 代数构成一个刚性双范畴，其中的 1-胞是双模，正如普通环论中的情形。请注意，该双范畴只在等价意义下定义，因为我们必须固定双模的相对张量积，才能得到 1-胞的复合。特别地，对于 A中 $\mathcal{C}$的一个特殊 Frobenius 代数，范畴 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$（ A中 $\mathcal{C}$ 的双模范畴）是一个多张量范畴。若一个特殊 Frobenius 代数 A 满足简单，则称其为简单的；若 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 还是一个张量范畴，即 $\mathrm{End}_{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}(A)$ 是一维的，参见 [FFRS06，定义 2。26]。

设 $\mathcal{C}$ 是一个带有 G 作用的多张量范畴，且 A 和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的代数。对于 $\mathcal{C}$ 中的一个 A-B-双模 $\lambda=(\lambda,m_\lambda^{\mathrm{L}},m_\lambda^{\mathrm{R}})$，${}^g\lambda=({}^g\lambda,{}^gm_\lambda^{\mathrm{L}},{}^gm_\lambda^{\mathrm{R}})$ 是一个 ${}^gA$-${}^gB$-双模。注意，根据此定义，对于 $\lambda\in\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 和一个 A-B-双模 μ，我们可以像图 25 中那样，将模乘积移过交叉。我们对这一过程进行修改，从而得到一个限制在双模多张量范畴上的作用。

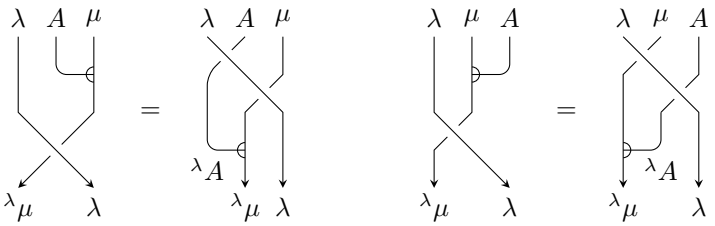


图 25：模乘积与交叉

命题 3.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个赋有群 G 的作用 $\gamma^{\mathcal{C}}$ 的多张量范畴。令 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中特殊的 G-等变弗罗贝尼乌斯代数所构成的双范畴。那么，对于 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 中的一个 1-胞 $\lambda=(\lambda,m_\lambda^{\mathrm{L}},m_\lambda^{\mathrm{R}}):A\to B$ 以及 $g\in G$，我们可以给出一个 1-胞 ${}^g\lambda:=({}^g\lambda,{}^gm_\lambda^{\mathrm{L}}\circ(z_g^{A^{-1}}\otimes\mathrm{id}_\lambda)\ {}^gm_\lambda^{\mathrm{R}}(\mathrm{id}_{g\lambda}\otimes z_g^{B^{-1}})):A\to B$。这一赋值自然地定义了 G 在 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 上的作用。选择另一种相对张量积，只会得到一个 G-双等价的作用。

证明。上文定义的赋值 $\gamma(g):\lambda\mapsto{}^g\lambda$ 是良定义的，因为图 26 和图 27 中的图示计算（其中 $z:=z^B$，小半圆表示模乘积，如 [BKLR15 第 3.6]，节所示）表明 ${}^g\lambda$ 确实是一个左 B-模，而右 A-模性的证明类似。我们将 $\gamma(g)$ 视为一族函子，令对于 2-胞 f，$\gamma(g)(f):=\gamma^{\mathcal{C}}(g)(f)$。

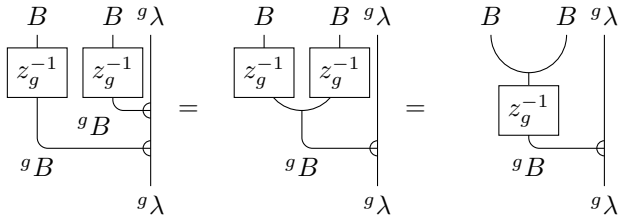


图 26: ${}^g\lambda$的左 B-模性

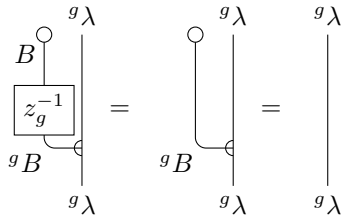


图 27: ${}^g\lambda$的左单位性质

我们将 $\gamma(g)$ 构造成一个伪函子。对于 1-胞 $\lambda\colon A\to B$ 和 $\mu\colon B\to C$，令 $(\mu\otimes_B\lambda, s_{\mu,\lambda}, r_{\mu,\lambda})$ 表示 $\mu\otimes_{\mathcal{C}}\lambda$ 的一个回缩，其幂等元为 $e_{\mu,\lambda}:=s_{\mu,\lambda}\circ r_{\mu,\lambda}$。注意，根据双函子 $\otimes_B$ 的定义，$s_{\mu,\lambda}$ 以及 $r_{\mu,\lambda}$ 关于 μ 和 λ 是自然的。由图 28 中的图示计算可得 $e_{{}^g\mu,{}^g\lambda}={}^g e_{\mu,\lambda}$，因此存在唯一的子对象同构 $J^{\gamma(g)}_{\mu,\lambda}:={}^g(r_{\mu,\lambda})\circ s_{{}^g\mu,{}^g\lambda}\colon {}^g\mu\otimes_B{}^g\lambda\cong{}^g(\mu\otimes_B\lambda)$。利用 $e_{{}^g\mu,{}^g\lambda}={}^g e_{\mu,\lambda}$ 以及 s 和 r 的自然性，可以证明 [EGNO15 图式 2.23] 的双范畴版本是交换的。我们还令 $\varphi^{\gamma(g)}_A:=(z^A_g)^{-1}$ 对$A\in\mathrm{Obj}(\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C}))$，由于 z^A_g 是代数同态，它是一个 A-双模态射。然后，根据 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 的左、右单位同构的定义，EGNO15 图式 2.25 和 2.26] 的双范畴版本的交换性由 γ 的定义及 s 的自然性推出。因此，$(\gamma(g)\ J^{\gamma(g)},\varphi^{\gamma(g)})$ 是一个伪函子。

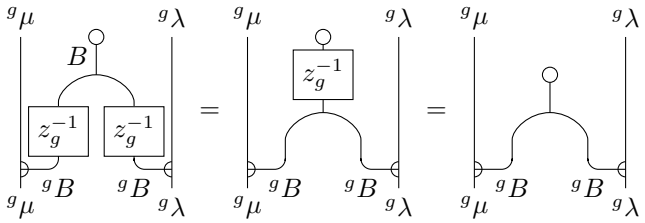


图 28: $e_{{}^g\mu,{}^g\lambda}={}^g e_{\mu,\lambda}$

由于 $z_{gh}={z_g}^g z_h$，根据 $\mathcal{C}$中的相干性，我们有一个典范可逆 2-胞腔 $(\chi^{\gamma}_{g,h})_\lambda:{}^g({}^h\lambda)\cong{}^{gh}\lambda$，它给出一个伪自然等价 $\chi^{\gamma}_{g,h}\colon \gamma(g)\gamma(h)\simeq\gamma(gh)$，其中 $\chi^{\gamma,{}^g\overset{0}{h},}:=\mathbf{1}$。类似地，$z_e=\mathrm{id}_B$ 给出一个伪自然等价 $\iota^\gamma:\mathrm{id}\simeq\gamma(e)$，其中 $\iota^{\gamma,0}=\mathbf{1}$。我们可以将其余所有修正定义为典范可逆 2-胞腔，于是根据相干性，γ 是 G 的一个作用。由于我们得到相同的 χ^γ 和 ι^γ，相对张量积的另一种选择只会产生一个 G-双等价作用。

□

众所周知 [BKLR15, 命题 3.33]：对于 III 型因子 N，$\mathrm{End}_0(N)$ 中 Q-系统的双范畴与有限指数扩张的 2-范畴之间存在双等价；后者的 1-胞是从 M_1 到 M_2 的态射，即 $\iota_2\lambda\iota_1$ 的子对象，其中 $\lambda\in$ 属于 $\mathrm{End}_0(N)$，并且 ι_i： $N\subset M_i$ 对于 $i=1,\overline{2}$。当群 G 作用于 N 时，同理，$\mathrm{End}_0(N)$ 中 G-等变 Q-系统的双范畴 $\mathrm{Q}^G(\mathrm{End}_0(N))$ 与有限指数扩张的 2-范畴 $\mathrm{Ext}^G(N)$ 之间存在双等价；这些扩张带有 G-作用，其 1-胞如上所述。

命题 3.2。这个双等价可以提升为一个 G-双等价，其中 G 通过命题 $^G(\mathrm{End}_0(N))$ 作用于 Q3.1，并通过伴随作用作用于 $\mathrm{Ext}^G(N)$。

证明。首先注意，若 $\mathrm{Q}^G(\mathrm{End}_0(N))$ 中的 1-胞 λ 是标准的（参见 [BKLR15，第 3.6] 节），那么 $^g\lambda$ 对于 $g \in G$ 也仍是标准的。因此，$\mathrm{Q}^G(\mathrm{End}_0(N))$ 上的 G 作用限制在子双范畴 $\mathrm{Q}^G_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}_0(N))$ 上，其 1-胞为标准双模；并且根据 [BKLR15，命题 3.32(i)]，我们有一个 G-双等价 $\mathrm{Q}^G_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}_0(N)) \simeq \mathrm{Q}^G(\mathrm{End}_0(N))$。

接着，令 $F\colon \mathrm{Ext}^G(N) \to \mathrm{Q}^G_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}_0(N))$ 表示如下定义的双等价：对于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ext}^G(N)}(M_2, M_1)$，令 $F(\varphi) := \iota_1\varphi\iota_2$；参见 [BKLR15，命题 3.33 和 3.38]。只需证明F是一个 G-双等价。为此，注意对于 $M \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Ext}^G(N))$，当 $g \in G$ 时有 $z_g^{F(M)} \in \mathrm{Hom}(^g\iota, \iota)$，其中 $\iota\colon N \subset M$，因为

$$\begin{aligned} z_g(^g\bar{\iota})(nv) &= z_g(^g\theta)(n)^g(\theta(z_{g^{-1}}^*)x) = z_g(^g\theta)(n)(^g\theta)(z_g)^g x = \theta(n)z_g(^g\theta)(z_g)^g x = \theta(n)xz_g \\ &= \bar{\iota}(nv)z_g \end{aligned}$$

对于 $n \in N$和 $v :=$余评价$_\iota$，其中 $\theta := F(M) = \iota$，$x := \iota(v)$ 且 $z := z^\theta$。接着，令 $(\tilde{\eta}_g^F)_\varphi := z^{F(M_1)}$ $_g$ $^* \otimes$自函子范畴$_{\varphi\iota_2}$：$\iota_1{}^g\varphi\iota_2 \cong {}^g(\iota_1\varphi\iota_2)$，其中 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ext}^G(N)}(M_2, M_1)$ 且 $g \in G$，这是一个双模同构，因为 $^gv^* = v^*z_g$。由于 $s_{F(\varphi),F(\psi)} =$自函子范畴$_{\iota_1\varphi} \otimes v_2 \otimes$自函子范畴$_{\psi\iota_3}$且 $r_{^gF(\varphi)\,{}^gF(\psi)} =$自函子范畴$_{{}^g\iota_1{}^g\varphi} \otimes^g v_2^* \otimes$自函子范畴$_{{}^g\psi\iota_3}$，对于 $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ext}^G(N)}(M_3, M_2)$ 和 $g \in G$，其中$v_2 :=$余评价$_{\iota_2}$，当我们通过图 28 和 [BKLR15 命题 3.38]，的证明取 $F(\varphi)\otimes_{F(M_2)}F(\psi) = F(\varphi\psi)$ 时，便由 $^gv^* = v^*z_g$ 得到 $(\tilde{\eta}_g^F)_{\varphi\psi} = (\tilde{\eta}_g^F)$ $_\varphi \otimes_{F(M_2)} (\tilde{\eta}_g^F)_\psi$。因此，令 $\tilde{\eta}^F_{,g}{}^0 := \mathbf{1}$，我们得到一个伪自然等价 $\tilde{\eta}_g^F\colon F\gamma^{\mathrm{Ext}^G(N)}(g) \simeq \gamma^{\mathrm{Q}^G}$st(自函子范畴$_0$ $_{(N)}$)$(g)F$。由于 $(\tilde{\eta}^F_{gh})_\varphi = {}^g(\tilde{\eta}^F_h)_\varphi(\tilde{\eta}^F_g)^h{}_\varphi$ 根据 $z_{gh} = z_g{}^g z_h$ 成立，我们可以通过相干性将 $(F, \tilde{\eta}^F)$ 构造成一个 G-双等价。 □

根据定义，命题 3.1 中定义的作用在 $\mathcal{C}$ 上的限制与 $\gamma^{\mathcal{C}}$一致，而在 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 上针对 $A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C}))$ 的限制则是多张量范畴上的一个作用。我们证明 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 确实是 G-交叉的（当 A 是对称且中性时，见命题 3.3 和 3.5）。

命题 3.3. 设 A 是枢轴多张量范畴 $\mathcal{C}$中的对称特殊 Frobenius 代数。那么，$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 也是枢轴的。相对张量积的另一种选择只会得到同构的枢轴结构。若 $\mathcal{C}$ 还是张量范畴且 A 是简单的，则对于 $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}(\lambda)$，$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}{}_\lambda$ $f) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathcal{C}}_\lambda f)/\dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)$，且 $\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(}$ $_{A\ -1})) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f\delta^{\mathcal{C}-1}_\lambda)/\dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)$。特别地，对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A))$，$\dim_{\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}}(\lambda) = \dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(\lambda)/\dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)$；若 $\mathcal{C}$ 是球形的，则 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 也是球形的。若群 G 在 $\mathcal{C}$ 上（不一定是张量范畴）枢轴地作用，且 $A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C}))$，则 G 在 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 上诱导的作用也是枢轴的。

证明。令 $\lambda \in$ 为 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 中的对象，并令 m_λ 表示 λ 的左模乘积或右模乘积。根据 [Yam04 第 5]，节中关于 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 刚性的证明，当 $A^\vee$ 取为 A 时，我们有 $m_{\lambda^{\vee\vee}} = (m_\lambda)^{\vee\vee}$ 属于 $\mathcal{C}$。因此，若 $\delta^{\mathcal{C}}_A =$ 等于 id_A，则由 $\delta^{\mathcal{C}}$ 的自然性和幺半性，$\delta^{\mathcal{C}}_\lambda$ 是一个 A-双模态射。令 $\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}{}_\lambda := \delta^{\mathcal{C}}_\lambda$，按定义它关于 λ 是自然的。由 $\delta^{\mathcal{C}}$ 的自然性和幺半性可得 $\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}$ 的幺半性。因此，$\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}$ 是 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 上的一个枢轴结构。选择另一组相对张量积只会得到一个同构的枢轴结构，因为从新的双模范畴到原范畴的等价被定义为一个作为函子的恒等映射。

现在，假设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，且 A 是简单的。根据刚性的证明 [Yam04，第5], 节，$\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A))$的求值映射和余求值映射分别如图 29 和图 30 所示，作为 $\mathcal{C}$中的态射。于是，由 $\lambda^\vee$ 的左模乘积的定义可知，$e_{\lambda,\lambda^\vee}$（见命题 3.1 的证明）—— $\lambda \otimes_{\mathcal{C}} \lambda^\vee$ 中子对象 $\lambda \otimes_A \lambda^\vee$的幂等元——在 $\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}{}_\lambda$ $f)$ 中会对 $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}(\lambda)$ 消去；参见 [Yam04，第 5]节。因此，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}_\lambda f) &= (\varepsilon_A\eta_A)^{-1}\varepsilon_A\,\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}_\lambda f)\eta_A \\ &= \dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)^{-1}\varepsilon_A \mathrm{ev}^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}_{\lambda^\vee}\delta^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}_\lambda f \mathrm{coev}^{\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)}_\lambda \eta_A \\ &= \dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)^{-1}\mathrm{ev}^{\mathcal{C}}_{\lambda^\vee}\delta^{\mathcal{C}}_\lambda f \mathrm{coev}^{\mathcal{C}}_\lambda = \dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(A)^{-1}\,\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathcal{C}} f). \end{aligned}$$

Tr^{R} 的证明类似。最后，最后一个结论成立，是因为 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 中态射上的群作用与 $\mathcal{C}$上的群作用一致。 □

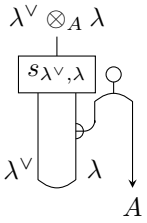


图29：$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$中的求值

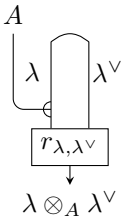


图30：$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$中的余求值

注3.4。当 A 此外还具有 [FS03，定义 5.5], 所述意义下的交换可交换性时，每个左 A-模都可以视为一个 A-双模，而 A中的左 $\mathcal{C}$ -模构成 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A$的一个多张量子范畴。因此， A中的左 $\mathcal{C}$ -模多张量范畴继承了 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A$的对偶结构，而命题3.3 则将 [FS03中的命题 5.18 和引理 5.19]重现为其推论。

命题 3.5。设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-交叉多张量范畴，且 $A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C}))$是对称中性的（回忆一下，中性意味着 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_e)$，见定义 2.11 之后的句子）。那么，我们可以通过令 $\mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)_g)$:$=\{\mu \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)) \mid F(\mu) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)\}$ （对 $g \in G$），在 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$上定义一个 G-分次，其中 F 表示遗忘函子 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A) \to \mathcal{C}$。结合命题 3.1 中定义的作用，$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$成为一个 G-交叉多张量范畴。相对张量积的另一种选择只会得到一个同构的G-交叉结构。

证明。由命题3.1和3.3可知，范畴 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 带有一个枢轴 G-作用。根据 G-分次的定义， $\mathcal{C}$ 中的齐次分解给出了 $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 中的齐次分解。对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)_g)$ 和 $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)_h)$，由于 A 是中性的， $\lambda \otimes_A \mu$ 是范畴 $\mathcal{C}_{gh}$ 中某个态射 $\lambda \otimes_{\mathcal{C}} A \otimes_{\mathcal{C}} \mu \to \lambda \otimes_{\mathcal{C}} \mu$ 的余核，因此 $\lambda \otimes_A \mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{gh})$。最后，对于 $k \in G$， ${}^k(\mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)_g)) \subset \mathrm{Obj}(\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)_{kgk^{-1}})$，因为 $\mathcal{C}$ 是 G-交叉的。因此，$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 是 G-交叉的。与命题 3.3 的证明中一样，另一种相对张量积的选取只会得到一个同构的 G-交叉结构。 □

3.2 α-诱导的范畴定义

在本小节中，我们定义 G-等变 α-诱导（定义3.9）。

命题 3.6. 设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个中性 G-等变代数。令 $m^{\mathrm{L}}_{A\lambda} := m_A \otimes \mathrm{id}_\lambda \in \mathrm{Hom}($ $AA\lambda, A\lambda)$，并定义 $m^{\mathrm{R}\pm}_{A\lambda} \in \mathrm{Hom}(A\lambda A, A\lambda)$ 为对每个 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 由图 31 给出的态射。则 $\alpha^{G\pm}_A(\lambda) := ($ $A\lambda, m^{\mathrm{L}}_{A\lambda}, m^{\mathrm{R}\pm}_{A\lambda})$ 是 A-双模。

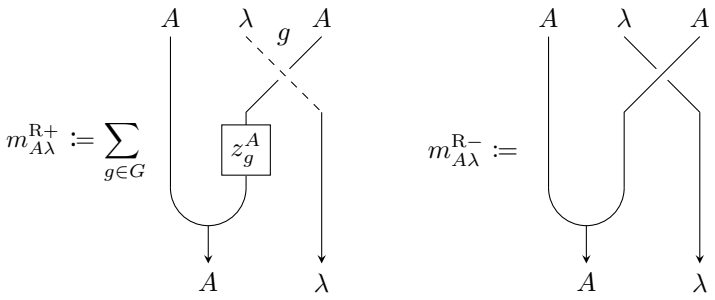


图 31： $\alpha^{G\pm}_A(\lambda)$ 的右模结构

证明. 我们只证明 $\alpha_A^{G+}(\lambda)$ 的情形，因为 α_A^{G-} 的证明类似。本证明中， $m_{A\lambda}^{\mathrm{L}}$ 和 $m_{A\lambda}^{\mathrm{R}+}$ 分别记为 m^{L} 和 m^{R}。首先，由于 A 是一个代数，$(A\lambda, m^{\mathrm{L}})$ 是左 A-模。接着，根据图 32 中的图示计算可得 $(A\lambda, m^{\mathrm{R}})$ 的右 A-模性。注意，按定义有两个虚线交叉，分别标记为例如 g、$h \in G$，但只有标记为 $g = h$ 的分量保留下来。还要注意，在第二个等式中我们使用了图 24。右单位性质也可通过图示计算轻易验证，因此 $(A\lambda, m^{\mathrm{R}})$ 是右 A-模。最后，$\alpha_A^{G+}(\lambda)$ 的双模性由 A 的结合性推出。

□

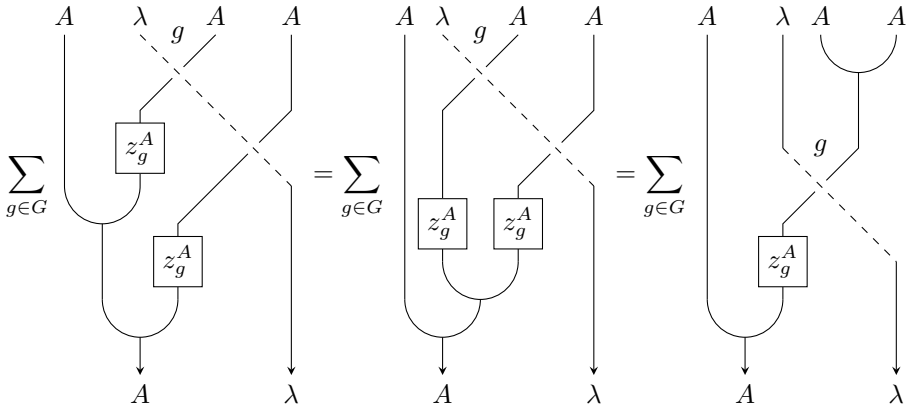


图 32： A的右 α_A^{G+} -模性

注 3.7. 当 A 是 G-带编织结构的 *-多张量范畴中的中性 G-等变 Q-系统时，上文定义的双模 $\alpha_A^{G\pm}(\lambda)$是标准的。特别地，当 $A \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{A}$ 且局域化在区间 I 中，并且对于一个在 $\mathbb{R}$ 上具有 Haag 对偶性的局域 M¨obius 协变网 $\mathcal{A}$，有群 G 作用于 $\mathcal{A}$ 时，对于每个 $\lambda \in \mathrm{Obj}(G\text{-}\mathrm{Rep}\,\mathcal{A})$，我们可以将 $\alpha_A^{G\pm}(\lambda)$ 视为 End $\mathcal{A}(I)$中的标准 A-双模。因此，根据 [BKLR15, 命题 3.32(ii)]，它们通过 [BKLR15, 第 3.6], 节中的公式 (3.6.3)，对应于 End $\mathcal{B}(I)$中的对象；这里 $\mathcal{B}$ 是与 A对应的 $\mathcal{A}$ 的扩张。这给出 [Noj20, 第 4.3]节中的方程 (4.7)。因此，在此情形下，我们的定义与 [Noj20]中的定义一致。

注意，此处我们不假设 G 对 $\mathcal{A}$ 的作用是忠实的，参见注 2.15 和 2.25。 [Noj20]中已经考虑过这种情况。具体而言，群 G 作用于 $\mathcal{B}$，且该作用在 $\mathcal{A}$ 上的限制可能具有非平凡核，由此 G 的商记为 G'。对于满足 $p(g_1) = p(g_2) = g'$的 $g_1, g_2 \in G$，其中 $p\colon G \to G'$ 是商映射，我们有两个针对 $\lambda \in g'$- Rep $\mathcal{A}$的诱导同态 $\alpha^{g_1;+}(\lambda)$ 和 $\alpha^{g_2;+}(\lambda)$。在我们的框架中，它们正是 $\lambda \in g_1$- Rep $\mathcal{A}$和 $\lambda \in g_2$- Rep $\mathcal{A}$的诱导同态。因此， [Noj20]中的框架包含在我们的框架之中。

We regard $\alpha_A^{G\pm}$ as functors by putting $\alpha_A^{G\pm} := \mathrm{id}_A \otimes -$ on morphisms.

命题 3.8。 设 A 是一个中性特殊对称 G-等变 Frobenius 代数，位于一个G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中。注意，在此设定下，Bimod$_{\mathcal{C}}(A)$ 由命题 G3.5 可知是一个 3.5-交叉多张量范畴。于是， $\alpha_A^{G\pm}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 可视为 G- 交叉张量函子。

证明。我们仅证明 $\alpha := \alpha_A^{G+}$ 的情形。对于 $\lambda, \mu \in$ 对象$(\mathcal{C})$，根据定义，幂等元 $e_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$ 由图 33 给出。我们可以用图 34 中的态射将其分裂。事实上，$s_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} \circ r_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} = e_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$ 可由图 33 中的图示计算得出，而 $r_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} \circ s_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} = \mathrm{id}_{A\lambda\mu}$ 可由图 35 中的图示计算得出。注意，我们用到了图 21 和图 23。因此，在 $\mathcal{C}$ 中存在一个典范同构 $\alpha(\lambda) \otimes_A \alpha(\mu) \cong A\lambda\mu$。由于事实上，根据图 36 中的图示计算，$s_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$ 是 A-双模的，其中其左侧 A-模性由 A $J_{\lambda\,\mu}^{\alpha}$ α λ $\otimes_A$ α μ $\cong$ 的 Frobenius α α 性质推出，因此存在典范同构 , : ( ) ( ) ($\lambda\mu$)，它使 成为如命题 . . 的证明中那样的张量函子。 3.1

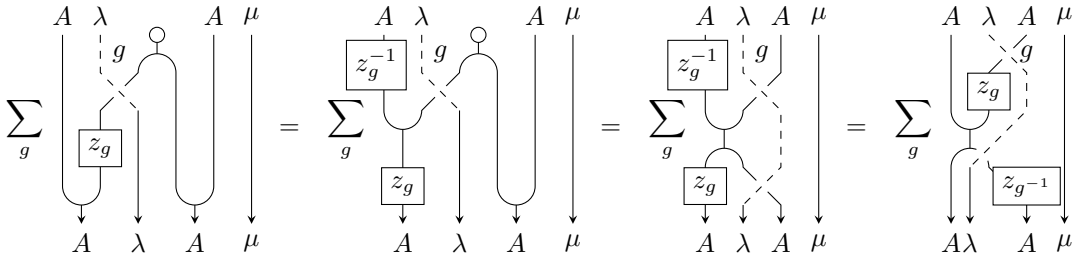


图 33：幂等元 $e_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$

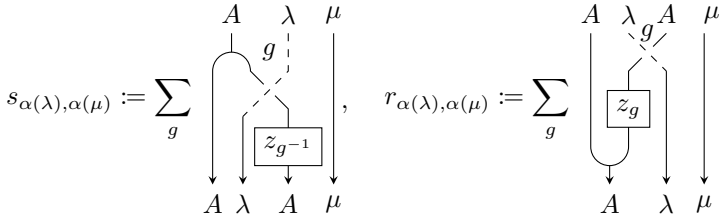


图 34：$e_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$ 的一个分裂

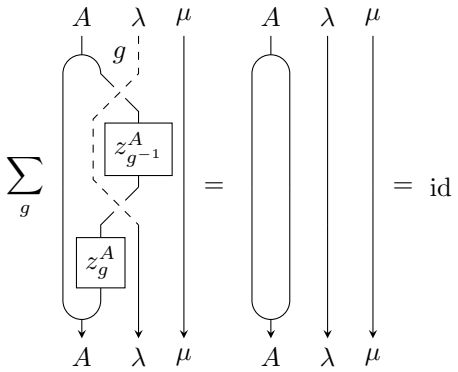


图 35：$r_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} \circ s_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)} = \mathrm{id}^{A\lambda\mu}$

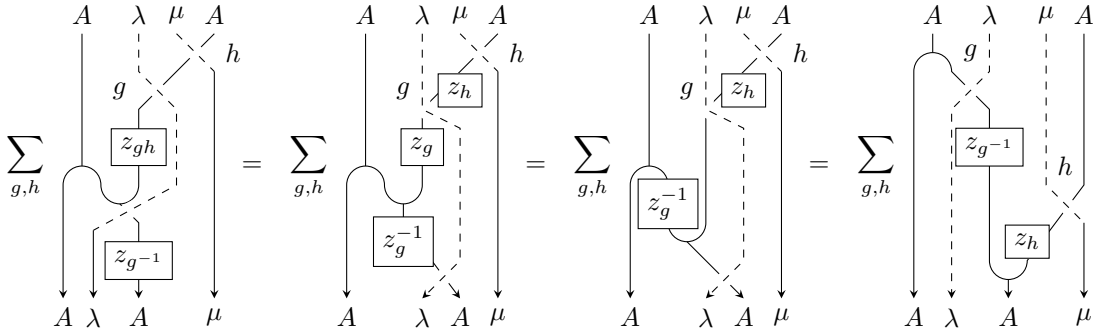


图 36：$s_{\alpha(\lambda),\alpha(\mu)}$ 的右侧 A-模性

对每个 $g \in G$，令 $(\tilde{\eta}^{\alpha}_{g})_{\lambda} \coloneqq z_g \otimes \mathrm{id}_{\lambda}$，这是一个左 A-模同构 ${}^{g}\alpha(\lambda) \cong \alpha({}^{g}\lambda)$，因为 z_g 是代数同态。根据图示计算，它实际上也是右 A-模的

在图 37中，我们使用了 $z_h{}^{hg^{-1}} z_g^{-1} = z_h{}^h z_{g^{-1}} = z_{hg^{-1}}$ 对于 g， $h \in G$。对 $(\alpha,\ \tilde{\eta}^\alpha)$ 是一个张量G-函子，由 $z_{gh} = z_g{}^g z_h$给出。它保持分次，因为 A 是中性的。 □

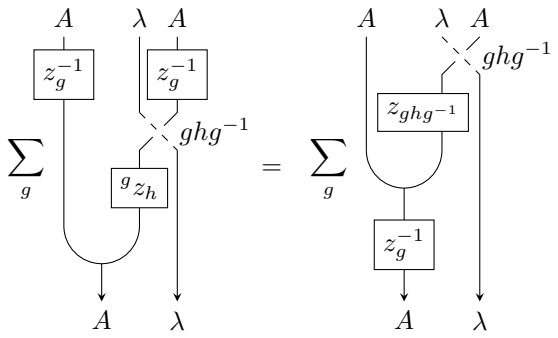


图 37: $(\tilde{\eta}_g^\alpha)$ 的右 A-模性 $_\lambda$

定义 3.9。令 A 为一个中性特殊对称的 G-等变 Frobenius 代数，位于一个 G-辫编多张量范畴 $\mathcal{C}$中。我们将 G-等变 α-诱导函子 （ A）称为 G-交叉张量函子 $\alpha_A^{G\pm} : \mathcal{C} \to \mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$。

4 等变 α-诱导 Frobenius 代数

本节中，我们构造等变 α-诱导 Frobenius 代数（定理4.15），推广了 Rehren 的工作 [Reh00]（另见 [BKL15，定义 4.17]），也是我们的主要定理之一。为了给出其环境范畴，我们针对 中性双范畴 构造（定义4.7）引入 G-辫编多张量范畴。

4.1 G-辫带张量范畴的中性双范畴

在本小节中，我们介绍中性双重构造（定义 4.7）。为此，我们先从交叉积开始。

命题 4.1. 设 G 是一个群。设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-分次多张量范畴，且 $\mathcal{D}$ 是一个带有 G 的作用 $\gamma^{\mathcal{D}}$ 的多张量范畴。那么，通过规定 $(c_1 \boxtimes d_1) \otimes (c_2 \boxtimes d_2) := c_1 c_2 \boxtimes {}^{c_2} d_1 d_2$，对于 $c_1 \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$、$c_2 \in$ 属于 $\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，以及，$d_2 \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，我们可以定义一个双线性双函子 $\otimes : (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \times (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$，并使 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 成为一个多张量范畴，记作 $\mathcal{C} \ltimes_{\gamma^{\mathcal{D}}} \mathcal{D}$，或简记为 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$。选择另一个 Deligne 张量积 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 只会得到一个严格同构的多张量范畴。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是张量（分别为多融合、融合）范畴，则 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 也如此。

证明。由于 $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 具有 G-分次，且 $\bigoplus_{g \in G} \mathcal{C} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}_g \times \mathcal{D}$ 在每个变量上都是 $\otimes$ 线性正合的（见 [EGNO15，命题 4.2。1]）， $\otimes$ 可以扩张为一个线性正合函子，其定义在 $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 上，并因此也定义在（$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$） $\times$ （$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$）上。由于

$$((c_1 \boxtimes d_1) \otimes (c_2 \boxtimes d_2)) \otimes (c_3 \boxtimes d_3) = (c_1 c_2) c_3 \boxtimes \overline{c_3}(\overline{c_2} d_1 d_2) d_3$$
$$(c_1 \boxtimes d_1) \otimes ((c_2 \boxtimes d_2) \otimes (c_3 \boxtimes d_3)) = c_1 (c_2 c_3) \boxtimes \overline{c_2 c_3} d_1 (\overline{c_3} d_2 d_3)$$

对于 $c_1 \in$ 对象（$\mathcal{C}$）， c_2，$c_3 \in$ 齐性（$\mathcal{C}$）以及 d_1，d_2，$d_3 \in$ 对象（$\mathcal{D}$），我们可以定义自然同构a：$(- \otimes -) \otimes - \cong - \otimes (- \otimes -)$，将其定义为相干性（定理 2.6）给出的典范同构的扩张。根据相干性，它满足五边形公理。令 $\mathbf{1} := \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \boxtimes \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$，并类似地根据相干性定义左、右单位同构。因此， $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 成为一个幺半范畴。由于我们通过扩张来定义张量乘法，依据泛性质， $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 的另一种选择只会得到一个与之严格同构的多张量范畴。

接下来，我们证明 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 是刚性的，因此是一个多张量范畴。与[Del90命题 5 的证明17], 一样，只需检验 $\mathcal{C}_g \times \mathcal{D}$ 中对象 $g \in G$的刚性。我们

证明，对于 $c \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 且 $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ 的 $c \boxtimes d$，其左对偶由 $c^\vee \boxtimes {}^c d^\vee$ 给出。事实上，由于 $(c^\vee \boxtimes {}^c d^\vee)(c \boxtimes d) = c^\vee c \boxtimes d^\vee d$ 且 $(c \boxtimes d)(c^\vee \boxtimes {}^c d^\vee) = cc^\vee \boxtimes {}^c(dd^\vee)$，根据定理 2.6，我们略去了若干同构，因此可以定义求值映射和余求值映射如下：令 $\mathrm{ev}_{c\boxtimes d} := \mathrm{ev}_c \boxtimes \mathrm{ev}_d$，且 $\mathrm{coev} := \mathrm{coev}_c \boxtimes {}^c\mathrm{coev}_d$。共轭方程由 c 和 d 的共轭方程推出，因此 $(c \boxtimes d)^\vee = c^\vee \boxtimes {}^c d^\vee$。我们还可以证明 ${}^\vee(c \boxtimes d) = {}^\vee c \boxtimes {}^{c^\vee} d$，因此$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 是刚性的。 □

我们称 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$的交叉积。下面说明 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 继承了 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$上的结构。

命题 4.2。设 G 是一个群，$\mathcal{C}$ 是一个 G-分次幺半 pivotal 多张量范畴，$\mathcal{D}$是一个带有 G的枢轴作用的幺半 pivotal 多张量范畴。那么，$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 上的枢轴结构诱导出 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$上的枢轴结构 $\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}$。另一种 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 的选择只会得到一个同构的枢轴结构。

证明。由于 $(c \boxtimes d)^{\vee\vee} = c^{\vee\vee} \boxtimes d^{\vee\vee}$ 对于 $c \in$ 对象$(\mathcal{C})$ 和 $d \in$ 对象$(\mathcal{D})$，由命题 4.1的证明可知，我们可以定义一个自然同构 $\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}} : \mathrm{id} \cong (-)^{\vee\vee}$，定义为 $\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}_{c\boxtimes d} := \delta^{\mathcal{C}}_c \boxtimes \delta^{\mathcal{D}}_d$。由于 G 在 $\mathcal{D}$ 上的作用是枢轴作用，因此有

$$\begin{aligned}\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}_{(c_1\boxtimes d_1)\otimes(c_2\boxtimes d_2)} &= \delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}_{c_1c_2\boxtimes\overline{c_2}d_1d_2} = \delta^{\mathcal{C}}_{c_1c_2} \boxtimes \delta^{\mathcal{D}}_{\overline{c_2}d_1d_2} = (\delta^{\mathcal{C}}_{c_1} \otimes \delta^{\mathcal{C}}_{c_2}) \boxtimes ({}^{\overline{c_2}}\delta^{\mathcal{D}}_{d_1} \otimes \delta^{\mathcal{D}}_{d_2}) \\ &= (\delta^{\mathcal{C}}_{c_1} \boxtimes \delta^{\mathcal{D}}_{d_1}) \otimes (\delta^{\mathcal{C}}_{c_2} \boxtimes \delta^{\mathcal{D}}_{d_2}) = \delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}_{c_1\boxtimes d_1} \otimes \delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}_{c_2\boxtimes d_2}\end{aligned}$$

对于 $c_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$、$c_2 \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 和 d_1，$d_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，由 $\delta^{\mathcal{C}}$ 和 $\delta^{\mathcal{D}}$ 的幺半性可知这一点。因此，$\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}$ 是幺半的，因而是 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 上的一个枢轴结构。由于我们通过扩张来定义枢轴结构，选择另一个 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 只会得到一个同构的枢轴结构。 □

备注 4.3. 当上述命题中的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 还是张量范畴时，根据定义，对于 $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 和 $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，有 $\dim_{\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}}(c \boxtimes d) = \dim_{\delta^{\mathcal{C}}}(c)\dim_{\delta^{\mathcal{D}}}(d)$。特别地，当 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是分裂的（即对任意简单对象 λ，$\mathrm{End}(\lambda) \cong k$，见 [EGNO15，第 4.16] 节）半单球形张量范畴时，由于根据 [LF13，定理 27]，，$\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}$ 的每个简单对象分别具有 $c\boxtimes d$ 的形式，其中 c 和 d 是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中的某个简单对象，因此根据 $(c\boxtimes d)^\vee = c^\vee \boxtimes {}^c d^\vee$，对于 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 中的每个简单对象 $\lambda = c\boxtimes d$，都有 $\dim(\lambda) = \dim(\lambda^\vee)$，参见命题 4.1 的证明。因此，在这种情况下，$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 仍是一个分裂半单球形张量范畴。

命题 4.4。设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-交叉多张量范畴，$\mathcal{D}$ 是一个带有 G作用 $\gamma^{\mathcal{D}}$ 的多张量范畴。则 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 上自然诱导出 G 的作用。选择另一个$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 只会得到一个与之 G-张量同构的作用。此外，当 $\mathcal{D}$ 还是枢轴范畴，且 $\gamma^{\mathcal{C}}$ 和 $\gamma^{\mathcal{D}}$ 是枢轴作用时，在 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 上诱导的作用也是枢轴作用。

证明。对每个 $g \in G$，定义一个线性正合函子 $\gamma(g)$：令 $\gamma(g)(c \boxtimes d) := {}^g c \boxtimes {}^g d$，其中$c \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，且 $d \in$属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$。由于

$$\begin{aligned}\gamma(g)(c_1 \boxtimes d_1) \otimes \gamma(g)(c_2 \boxtimes d_2) &= {}^g c_1 {}^g c_2 \boxtimes {}^{g\overline{c_2}g^{-1}}({}^g d_1){}^g d_2 \\ \gamma(g)((c_1 \boxtimes d_1) \otimes (c_2 \boxtimes d_2)) &= {}^g(c_1c_2) \boxtimes {}^g(\overline{c_2}d_1d_2)\end{aligned}$$

对于 $c_1 \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$、$c_2 \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，以及由 $\partial^g c_2 = g\partial c_2 g^{-1}$给出的 d_1、$d_2 \in$ 属于 $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$，根据相干性，我们可以定义典范自然同构 $J^{\gamma(g)}$。类似地，根据相干性，对于 g、$h \in G$ 和 ι^γ，我们也有典范自然同构 χ^γ_g、$_h$。因此，γ 是 G的一个作用。由于我们通过扩张定义作用，选择另一个 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 只会得到一个与之 G-张量同构的作用。最后一个结论可由 γ 的定义和枢轴结构 $\delta^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}$推出，参见命题 4.2 的证明。 □

命题 4.5. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为分裂半单的 G-交叉多张量范畴。那么，$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 上自然诱导出一个 G-交叉结构。选择其他的 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ 只会得到一个与之 G-交叉同构的结构。

证明。我们已经知道 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 是一个枢轴范畴，且 G 对其有枢轴作用，这由命题4.4得出。由于 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} = \bigoplus_g \bigoplus_h \mathcal{C}_h \otimes \mathcal{D}_{h^{-1}g}$由 [LF13 定理 27] 在分裂半单性的假设下成立，我们令 $(\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D})_g :$ $= \bigoplus_h \mathcal{C}_h \boxtimes \mathcal{D}_{h^{-1}g}$对 $g \in G$。于是有 $(\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D})_g \otimes (\mathcal{C} \ltimes$

$\mathcal{D})_h \subset (\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D})^{gh}$ 对 $g,\ h \in G$ 因为 $\partial((c_1 \boxtimes d_1)(c_2 \boxtimes d_2)) = \partial(c_1 c_2 \boxtimes {}^{c_2}d_1 d_2)$ 对于$c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2 \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 按定义成立。因此，$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$是一个 G-分次多张量范畴。此外，$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 是 G-交叉的，因为 $\partial^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}({}^{g}c \boxtimes {}^{g}d)$ $= g\partial c g^{-1} g\partial d g^{-1} = g\partial c \partial d g^{-1}$ 对于 $c \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ $d \in \mathrm{Homog}(\mathcal{D})$ 和 $g \in G$。$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 的另一种选择只会得到一个同构的 G-交叉结构，因为改变 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 会保留 $\mathcal{C}_h \boxtimes \mathcal{D}_{h^{-1}g}$，因此得到一个同构的 G-分次。

□

接下来，我们证明，若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 还具有 G-辫编，则可以在 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ 的某个子范畴上得到一个 G-辫编。

定理 4.6. 对于一个 G-辫编多张量范畴 $\mathcal{C}$，将 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 定义为一个带有 G 作用的阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$。令 $\mathcal{C}_g^{\mathrm{rev}} := \mathcal{C}_{g^{-1}}$ 表示 $g \in G$。接着令 $\lambda \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \mu := {}^{\partial_{\mathcal{C}}\mu}\lambda \otimes_{\mathcal{C}} \mu$ 表示 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$，并令 $\mu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}) = \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，再令 $\mathbf{1}^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} := \mathbf{1}^{\mathcal{C}}$，由此我们在 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 上得到一个多张量结构。此外，令 $b_\lambda^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}{}_{,\mu} := b_\lambda^{\mathcal{C}-}{}_{,\mu}$（见定义 2.11），由此我们在 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 上得到一个 G-辫编。我们称 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的反向。

证明。对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 和 $\mu,\ \nu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，我们有 $(\lambda \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \mu) \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \nu = {}^{\nu}({}^{\mu}\lambda\mu)\nu$ 和 $\lambda \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} (\mu \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \nu) = {}^{\nu\mu}\lambda({}^{\nu}\mu\nu)$，其中右侧的对象被视为 $\mathcal{C}$ 的对象，因为 $\partial_{\mathcal{C}}({}^{\nu}\mu\nu) = \partial_{\mathcal{C}}\nu\partial_{\mathcal{C}}\mu$。因此，由相干性和泛性质可得一个结合双线性幺半积。类似地可知，$\mathbf{1}^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}$ 确实是一个单位。

接下来，我们证明 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 是刚性的，因此是一个多张量范畴。对于 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})$，令 $\lambda^\vee := {}^{\lambda}\lambda^\vee_{\mathcal{C}}$，其中 $\lambda^\vee_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中 λ 的左对偶。于是，$\mathrm{ev}_\lambda := \mathrm{ev}^{\mathcal{C}}_\lambda\colon \lambda^\vee \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \lambda = \lambda^\vee_{\mathcal{C}}\lambda \to \mathbf{1}$ 和 $\mathrm{coev}_\lambda := {}^{\lambda}\mathrm{coev}^{\mathcal{C}}_\lambda\colon \mathbf{1} \to \lambda \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \lambda^\vee = {}^{\lambda}(\lambda\lambda^\vee_{\mathcal{C}})$ 给出了所需的对偶性，其中 $\mathrm{ev}^{\mathcal{C}}_\lambda$ 和 $\mathrm{coev}^{\mathcal{C}}_\lambda$ 分别表示 $\mathcal{C}$ 中 λ 的求值映射和余求值映射。右对偶性的证明类似。此外，由于 $\lambda^{\vee\vee} = (\lambda^\vee_{\mathcal{C}})^\vee_{\mathcal{C}}$，我们可以令 $\delta^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} := \delta^{\mathcal{C}}$；这确实定义了 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 上的枢轴结构，因为 G 在 $\mathcal{C}$ 上的作用是枢轴的。

关系 $\partial_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}(\mu \otimes_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}} \nu) = \partial_{\mathcal{C}}({}^{\nu}\mu\nu)^{-1} = (\partial_{\mathcal{C}}\nu\partial_{\mathcal{C}}\mu)^{-1} = \partial_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}\mu\partial_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}\nu$ 表明 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 是一个G-分次多张量范畴，因此是一个 G-交叉范畴，因为对于 $g \in G$，有 $\partial_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}{}^{g}\mu = ({}^{g}\partial_{\mathcal{C}}\mu g^{-1})^{-1} = {}^{g}\partial_{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}\mu g^{-1}$。最后，由 $b^{\mathcal{C}}$ 的公理可知，$b^{\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}}$ 是一个 G- 辫编。 □

设 $\mathcal{C}_1$（分别为 $\mathcal{C}_2$）是一个分裂半单的 G_1-辫编（分别为 G_2-辫编）多张量范畴。那么，$\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$ 自然成为一个 $G_1 \times G_2$-辫编多张量范畴。

定义 4.7。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是分裂半单的 G-交叉多张量范畴。令 $D(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$ 的全多张量子范畴，其 G-分次经由对角嵌入 $G \subset G \times G$加以限制。通过限制 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$的$G \times G$-辫编，我们将 $D(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 视为一个 G-辫编多张量范畴。我们将 G-辫编多张量范畴 $D(\mathcal{C}) := D(\mathcal{C},\mathcal{C})$ 称为 $\mathcal{C}$的**中性双范畴**。

D 表示 Double（双）。注意，$D(\mathcal{C},\mathcal{D}) = (\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D})_e$ 是一个带有 G作用的幺半 pivotal 多张量范畴。另请注意，当 G 是平凡的时，作为一个（普通的）辫编多张量范畴，$D(\mathcal{C})$ 等于 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$，其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 是（普通的）辫编多张量范畴 $\mathcal{C}$的反向。

最后，我们给出这些构造在代数量子场论中的一个应用。设$\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是局部 M¨obius 协变网。于是，按照 [KL04b，第 2] 节的定义，通过令 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2(I \times J) := \mathcal{A}_1(I) \otimes \mathcal{A}_2(J)$，其中 I 是 $\mathbb{R}$ 中正半轴上的一个区间，而 J 是 $\mathbb{R}$中负半轴上的一个区间，我们可以在 (1+1) 维闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上得到一个局部 M¨obius 协变网$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$。注意，按照 [KL04b，第 2.1] 小节的定义，$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ 在 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上不满足 Haag 对偶性。

对于定义在 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上的局部 M¨obius 协变网 $\mathcal{A}$，我们可以像处理定义在 S^1上的局部 M¨obius 协变网那样，定义其自同构群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ 以及 $\mathcal{A}$ 上的群作用的概念。

定义 4.8. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^{1,1}$ 上一个不可约的局域 M¨obius 协变网，并带有群 G 的作用 β。对于 $g \in G$，若 $\mathcal{DC}$ 表示 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中双锥的集合，则 $\mathcal{A}_\infty := \bigcup_{O\in\mathcal{DC}} \mathcal{A}(O)$ 的一个端同态 λ 称为在 $O \in \mathcal{DC}$ 中 g-局域化的，如果 $\lambda|_{\mathcal{A}(O'_{\mathrm{L}})} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(O'_{\mathrm{L}})}$ 且 $\lambda|_{\mathcal{A}(O'_{\mathrm{R}})} = \mathrm{Ad}\,\beta(g)|_{\mathcal{A}(O'_{\mathrm{R}})}$，其中 O'_{L}（分别为 O'_{R}）表示 O 的因果补O' 的左（分别为右）连通分支。若一个 g-局域化端同态 λ 满足：对于任意 $O \in \mathcal{DC}$，存在酉算子 $u \in \mathcal{A}_\infty$，使得 $\mathrm{Ad}\,u \circ \lambda$ 在 O 中局域化，则称其为 $\mathcal{A}$ 的 g- 扭曲 DHR 端同态。刚性 g- 扭曲 DHR 端同态的 *-范畴记作 g- $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}$；*-张量范畴$G$- $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A} := \bigoplus_{g\in G} g$- $\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}$ 的一个对象称为 $\mathcal{A}$ 的 G- 扭曲 DHR 端同态。

下面的命题给出了 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$ 和 $D(\mathcal{C},\ \mathcal{D})$ 的物理解释。

命题 4.9。 设 $\mathcal{A}_1$ （分别为 $\mathcal{A}_2$）是 S^1 上一个完全有理的不可约局部 M¨obius 协变网，且带有群 G_1（分别为 G_2）的作用。那么，$(G_1\times G_2)$- Rep$(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)\simeq(G_1$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(G_2$- Rep $\mathcal{A}_2)^{\mathrm{rev}}$ 作为 $G_1\times G_2$-交叉 *-张量范畴，其中 $G_1\times G_2$ 通过张量积表示作用于 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$。特别地，当 $G_1=G_2=G$ 时，有等价关系 G-Rep$(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)\simeq D(G$- Rep $\mathcal{A}_1,\ G$- Rep $\mathcal{A}_2)$，其中 G 作为 $G\times G$ 的对角子群作用于 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$。

证明。对于 $\lambda\boxtimes\mu\in$ Obj$((g$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(G_2$- Rep $\mathcal{A}_2)^{\mathrm{rev}}_h)=$ Obj$((g$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(h^{-1}$- Rep $\mathcal{A}_2))$，我们可以通过令 $\lambda\tilde{\boxtimes}\mu(a\otimes b):=\lambda(a)\otimes{}^h(\mu(b))$，对 $a\in\mathcal{A}_1(I)$ 和 $b\in\mathcal{A}_2(J)$ 以及 $I\in\mathcal{I}_+$，$J\in\mathcal{I}_-$ 来定义 $\lambda\tilde{\boxtimes}\mu\in$ Obj$((g,h)$- Rep$(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2))$，其中 $\mathcal{I}_+$ （分别为 $\mathcal{I}_-$）表示正（分别为负）半轴上区间的集合。根据泛性质，这个赋值定义了一个完全忠实的 *-函子 $F:D(G$- Rep $\mathcal{A}_1,G$- Rep $\mathcal{A}_2)\to G$- Rep$(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)$。这个函子 F 是严格张量函子，因为

$$\begin{aligned}(\lambda_1\tilde{\boxtimes}\mu_1)\circ(\lambda_2\tilde{\boxtimes}\mu_2)(a\otimes b)&=\lambda_1\lambda_2(a)\otimes{}^{h_1}(\mu_1({}^{h_2}(\mu_2(b))))=\lambda_1\lambda_2(a)\otimes{}^{h_1h_2}((^{h_2^{-1}}\mu_1)\mu_2(b))\\&=((\lambda_1\boxtimes\mu_1)\otimes(\lambda_2\boxtimes\mu_2))(a\otimes b)\end{aligned}$$

对于 $\lambda_i\boxtimes\mu_i\in$ Obj$((g_i$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(h_i^{-1}$- Rep $\mathcal{A}_2))$ $(i=1,\ 2)$。此外，F是严格的 G-等变函子，因此是严格的 G-交叉函子，因为

$$\begin{aligned}({}^{g'}\lambda\tilde{\boxtimes}^{h'}\mu)(a\otimes b)&={}^{g'}\lambda({}^{g'^{-1}}a)\otimes{}^{h'hh'^{-1}}({}^{h'}(\mu({}^{h'^{-1}}b)))={}^{g'}\lambda({}^{g'^{-1}}a)\otimes{}^{h'h}(\mu({}^{h'^{-1}}b))\\&={}^{(g',h')}(\lambda\tilde{\boxtimes}\mu))(a\otimes b)\end{aligned}$$

对于 $g',\ h'\in G$。

最后，我们证明，对于任意不可约对象 $\rho\in$ Obj$((G_1\times G_2)$- Rep$(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2))$，存在$\lambda\boxtimes\mu\in$ Obj$((G_1$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(G_2$- Rep $\mathcal{A}_2)^{\mathrm{rev}})$，使得 $\rho\cong\lambda\tilde{\boxtimes}\mu$，因此 F是本质满的。根据 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$的完全有理性假设，由 [KLM01，命题 15] 以及 Bisognano–Wichmann 性质可知，它们的真空希尔伯特空间$H_{\mathcal{A}_1}$ 和 $H_{\mathcal{A}_2}$ 是可分的。根据 [KLM01，引理 27], 的证明，$\rho|_{\mathcal{A}_1\otimes\mathbb{C}}$ 和 $\rho|_{\mathbb{C}\otimes\mathcal{A}_2}$ 的因子性可由 ρ的单纯性推出。设 ρ 在 $I\times J\in\mathcal{DC}$中是 (g,h)-局域化的。那么，由 Reeh–Schlieder 性质，$\rho|_{\mathcal{A}_1(I')\otimes\mathbb{C}}$ 是忠实正规表示。由于 $\mathcal{A}_1(I')=\mathcal{A}_1(I)'$，根据 $\mathbb{R}$上的 Haag 对偶性（这是完全有理性假设的一部分），$\mathcal{A}_1(I')$是一个 III 型因子，因此由 [Tak02，推论 V.3，$\rho|_{\mathcal{A}_1(I')\otimes\mathbb{C}}$ 与 $\mathcal{A}_1$ 的一个 DHR 端同态酉等价。根据 [KLM01，推论 14]，该端同态是 I 型的。于是，根据 [KLM01，引理 27], 的证明，存在 $(\mathcal{A}_1)_\infty$ 和 $(\mathcal{A}_2)_\infty$ 在 $H_{\mathcal{A}_1}$ 和 $H_{\mathcal{A}_2}$ 上的忠实正规表示 π_1、π_2，使得 ρ 与 $\pi_1\otimes\pi_2$酉等价。将 π_1 和 π_2 替换为端同态后，对于某个 $\lambda\otimes\mu\in$ Obj$((g$- Rep $\mathcal{A}_1)\boxtimes(h^{-1}$- Rep $\mathcal{A}_2))$，ρ 与$\lambda\tilde{\boxtimes}\mu$ 酉等价。根据 $\mathbb{R}$上的 Haag 对偶性，此酉算子确实属于 $\mathcal{A}_1(I)\otimes\mathcal{A}_2(J)$。

□

多亏了这个命题，我们可以将 $(G_1\times G_2)$- Rep$(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$ 视为一个 $G_1\times G_2$-辫化 *-张量范畴。注意，由于 $\mathbb{R}^1,_1$ 缺少 Haag 对偶性，我们无法将 [M¨ug05 命题 2.17] 应用于这个范畴。

4.2 等变 α-诱导弗罗贝尼乌斯代数

在本小节中，我们构造等变 α-诱导 Frobenius 代数（定理 4.15），并证明它是对称的，且具有交换性的等变版本。

首先，我们介绍 G-辫化多张量范畴中态射的共轭概念。

定义 4.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-辫化多张量范畴。设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n,\{\mu_j\}_{j=1}^m\subset\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，且设 $f\in\mathrm{Hom}(\lambda_1\cdots\lambda_n,\mu_1\cdots\mu_m)$。那么，共轭 f的 f定义为图 38所示的态射。

注记 4.11。 当 $\mathcal{C}$ 是普通的辫 *-多张量范畴时，f 对于 $f\in\mathrm{Hom}(\lambda,\mu_1\mu_2$，按照 [BKL15第 4 节1] 是 f^* 我们意义下的。

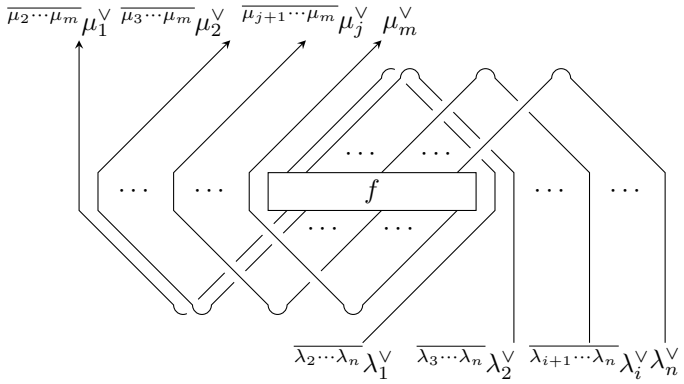


图 38： f的共轭 $f\in\mathrm{Hom}(\overline{\lambda_1\cdots\lambda_n,\ \mu_1\cdots\mu_m})$

引理 4.12。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-辫多张量范畴。设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n,\{\mu_j\}_{j=1}^m,\{\nu_k\}_{k=1}^l\subset\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$、$f\in\mathrm{Hom}(\lambda_1\cdots\lambda_n,\mu_1\cdots\mu_m)$ 和 $f'\in\mathrm{Hom}(\mu_1\cdots\mu_m,\nu_1\cdots\nu_l)$。则 $f'\circ f=f\circ f'$。

证明。 由图 39中的图示计算可得。 □

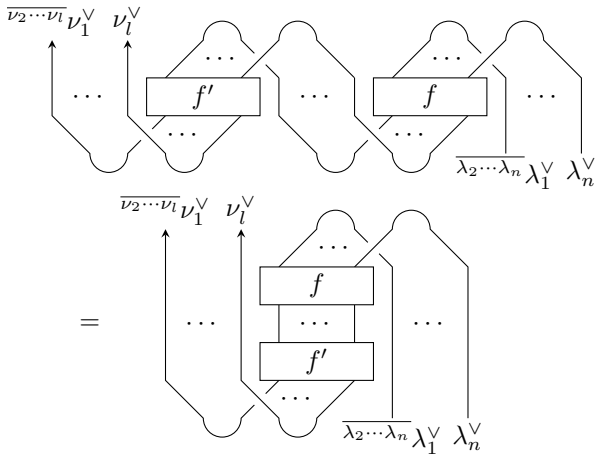


图39：共轭是反变的

引理4.13。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-辫化多张量范畴。设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$， $\{\mu_j\}_{j=1}^m$， $\{\nu_k\}_{k=1}^l$， $\{\rho_p\}_{p=1}^q$是 $\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 中的族，且 $f\in\mathrm{Hom}(\lambda_1\cdots\lambda_n,\ \mu_1\cdots\mu_m)$ 和 $f'\in\mathrm{Hom}(\nu_1\cdots\nu_l,\ \rho_1\cdots\rho_q)$。则， $f\otimes f'={}^{\nu_1\cdots\nu_l}(f)\otimes f'$。

证明。 不妨设 $\partial(\nu_1\cdots\nu_l)=\partial(\rho_1\cdots\rho_q)$，否则 $f'=0$。于是，由图 40中的图示计算可得该结论，其中在最后一个等号处用到了假设 $\partial(\nu_1\cdots\nu_l)=\partial(\rho_1\cdots\rho_q)$。 □

引理4.14。 设 $\mathcal{C}$ 为一个 G-编织 *-多张量范畴。设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n,\{\mu_j\}_{j=1}^m\subset\mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，并设 $f\in\mathrm{Hom}(\lambda_1\cdots\lambda_n,\mu_1\cdots\mu_m)$。那么 $f^*=(f)^*$，如果我们使用共轭方程的标准解来定义 f（关于 *-多张量范畴中标准解的定义，参见[GL19，定义8。29]）。

证明。由于 *-多张量范畴中态射的标准左、右对偶[GL19命题 833]，，图41 中的等式由图16成立。因此，对其取 *-对合即可得到所述结论。

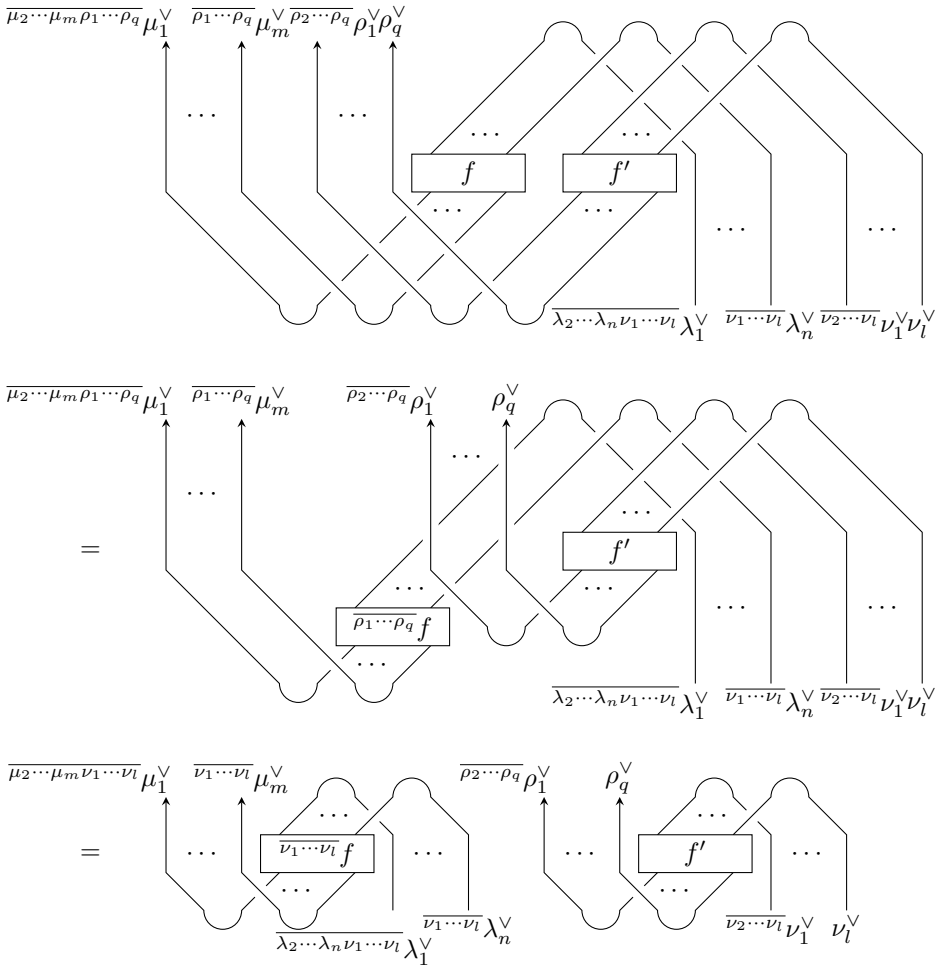


图40：共轭与幺半群积

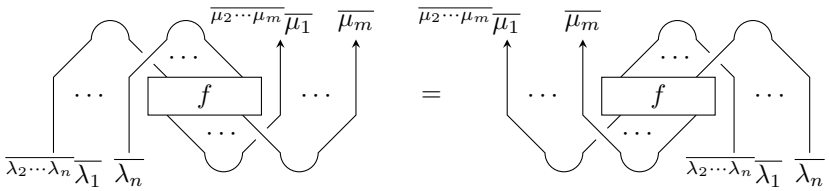


图41：共轭与 *-结构

□

接下来，令 $\mathcal{C}$ 为半单枢轴张量范畴，并令 Tr 表示 $\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(\delta^{\mathcal{C}}-)$。对于 $\lambda,\mu\in$对象($\mathcal{C}$)，若 $d_\lambda:=$维数 $\lambda\neq 0$，则对 $f\in\mathrm{Hom}(\lambda,\mu)$ 中的元素 f' 和 $f'\in\mathrm{Hom}(\mu,\lambda)$ 中的元素 f，定义双线性形式 $(f',f):=d_\lambda^{-1}\mathrm{Tr}(f'\circ f)$。由 [Tur16，引理 II.4.2.3] 的证明可知，该形式非退化。因此，$\mathrm{Hom}(\mu,\lambda)$ 可与 $\mathrm{Hom}(\lambda,\mu)$ 的对偶空间 $\mathrm{Hom}(\lambda,\mu)^\vee$ 等同；对于 $\mathrm{Hom}(\lambda,\mu)$ 的一组基 $\{e_i\}^{\langle\lambda}_{i=1}{}^{,\mu\rangle}$，其中 $\langle\lambda,\mu\rangle:=$维数 $\mathrm{Hom}(\lambda,\mu)$，我们可以取 $\mathrm{Hom}(\mu,\lambda)$ 的对应对偶基 $\{\tilde{e}_i\}^{\langle\lambda}_{i=1}{}^{,\mu\rangle}$。注意，若 $\mathcal{C}$ 是分裂的且 λ 是简单的，则 $\tilde{e}_ie_j=(\tilde{e}_i,e_j)\mathrm{id}_\lambda=\delta_{ij}\mathrm{id}_\lambda$。

特别地，当 $\mathcal{C}$ 是一个 *张量范畴时，我们可以通过定义 $(f_1|f_2):=d_\lambda^{-1}\mathrm{Tr}(f_1^*f_2)$，将 $\mathrm{Hom}(\lambda,\ \mu)$赋予希尔伯特空间结构，其中 $f_1,\ f_2\in\mathrm{Hom}(\lambda,\ \mu)$。通过格拉姆–施密特正交化，我们可以取 $\mathrm{Hom}(\lambda,\ \mu)$的一组标准正交基 $\{e_i\}_i$。注意，若 λ 是简单对象，则 $f_1^*f_2=(f_1|f_2)\mathrm{id}_\lambda$，因此 $\{e_i\}_i$ 是一族正交等距映射，其对偶基为 $\{e_i^*\}_i$。

现在，我们可以证明主要定理之一。设 A 是分裂 G编织融合范畴 $\mathcal{C}$中的一个中性、对称、特殊、简单的G-等变 Frobenius 代数。固定一组完备代表系 I，代表 $\mathcal{C}$ 的简单对象的同构类，并定义 $\theta \in \mathrm{Obj}(D(\mathcal{C}))$如下：

$$\theta := \bigoplus_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in I\\ \partial\lambda_1=\partial\lambda_2}} \langle \alpha_A^{G+}(\lambda_1), \alpha_A^{G-}(\lambda_2)\rangle \lambda_1 \boxtimes \lambda_2^\vee.$$

令 $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}_{D(\mathcal{C})}, \theta)$ 表示包含，令 $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(\theta, \mathbf{1}_{D(\mathcal{C})})$ 表示乘以 $\dim \theta$ 的投影。

对于任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in I$，满足 $\partial\lambda_1 = \partial\lambda_2$，固定 $\mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda_1)\, \alpha_A^{G-}(\lambda_2))$ 的一组基 $\{\phi_l^L\}_l$，其中 L 是多重指标 $L = (\lambda_1, \lambda_2, l)$，由满足 $\partial\lambda_1 = \partial\lambda_2$ 的 $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ 以及整数 $1 \le l \le \langle \alpha_A^{G+}(\lambda_1)\ \alpha_A^{G-}(\lambda_2)\rangle$ 组成。对于任意 $\lambda, \mu, \nu \in I$，固定 $\mathrm{Hom}(\nu, \lambda\mu)$ 的一组基 $\{e_i^{\nu,\lambda\mu}\}_i$。定义 $\tilde{m} \in \mathrm{Hom}(\theta^2, \theta)$ 和 $\Delta \in \mathrm{Hom}(\theta, \theta^2)$ 如下：

$$\tilde{m} := \bigoplus_{L,M,N} \sum_{i,j} \frac{1}{d_{\nu_1}} \mathrm{Tr}(\tilde{\phi}_n^N \alpha_A^{G-}(\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})(\phi_l^L \otimes_A \phi_m^M)\alpha_A^{G+}(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}))(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1} \boxtimes \overline{e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}})$$

$$\Delta := \bigoplus_{L,M,N} \sum_{i,j} \frac{d_{\lambda_2} d_{\mu_2}}{d_{\nu_2} d_{\nu_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L \otimes_A \tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\phi_n^N)(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1} \boxtimes \overline{\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}}),$$

其中 $M = (\mu_1,\ \mu_2,\ m)$ 和 $N = (\nu_1,\ \nu_2,\ n)$ 是类似于 L 的多重指标。

对于任意 $g \in G$ 和 $\lambda \in I$，固定一个同构 $u_g^\lambda \colon {}^g\lambda \cong \lambda(g)$，其中 $\lambda(g)$ 表示 I 中与 ${}^g\lambda$ 同构的对象。对于每个 $g \in G$，定义 $z_g \in \mathrm{Hom}({}^g\theta,\ \theta)$，如下所示：

$$z_g := \bigoplus_{L,l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1})\tilde{\phi}_{l'}^{L(g)} \alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{g^{-1}g}\phi_l^L \tilde{\eta}_{\lambda_1}^g)(u_g^{\lambda_1} \boxtimes \overline{\tilde{u}_g^{\lambda_2}}),$$

其中 $L(g)$ 是多重指标 $(\lambda_1(g)\ \lambda_2(g)\ m)$，而 $\tilde{\eta}_\lambda^g := z_g^{A-1} \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{id}_{{}^g\lambda}$ 对于 $\lambda \in I$。

当 A 是 *-融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 Q-系统时，令 $w \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}_{D(\mathcal{C})},\ \theta)$ 表示该等距包含映射。取 $\{\phi_l^L\}_l$ 和 $\{e_i^{\nu,\lambda\mu}\}_i$ 为正交归一基，并将 $x \in \mathrm{Hom}(\theta,\ \theta^2)$ 定义为

$$\bigoplus_{L,M,N} \sum_{i,j} \sqrt{\frac{d_{\lambda_2} d_{\mu_2}}{d_\theta d_{\nu_2}}} \frac{1}{d_{\nu_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})^*(\phi_l^L \otimes_A \phi_m^M)^* \alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\phi_n^N)(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1} \boxtimes \overline{e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2 *}}).$$

取 u_g^λ 为酉算子，并通过如下方式定义 $z \in \mathrm{Hom}({}^g\theta,\ \theta)$

$$z_g := \bigoplus_{L,l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(u_g^{\lambda_1})^* \phi_{l'}^{L(g)*} \alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{g^* g}\phi_l^L \tilde{\eta}_{\lambda_1}^g)(u_g^{\lambda_1} \boxtimes \overline{u_g^{\lambda_2 *}}).$$

定理 4.15. 设 A 是分裂的 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性的、对称的、特殊简单 G-等变 Frobenius 代数。那么，元组 $\Theta_\alpha^G(A) := (\theta,\ \tilde{m},\ \eta,\ \Delta,\ \varepsilon,\ z)$ 是 $D(\mathcal{C})$ 中一个 G-等变 Frobenius 代数。

若 $\mathcal{C}$ 还是球形的，则 $\tilde{m} \circ \Delta = \dim\ \Theta_\alpha^G(A)$。另选一组 $\{e_i^{\nu,\lambda\mu}\}_i$ 和 u_g^λ，会得到相同的 G-等变 Frobenius 代数。在 θ 的定义中另选 I、一个直和以及一组 $\lambda_2^\vee$，并另选一组 $\{\phi_l^L\}_l$，会得到一个同构的 G-等变 Frobenius 代数。我们称 $\Theta_\alpha^G(A)$ 为与 A 相关联的 G-等变 α-诱导 *Frobenius* 代数。

当 A 是 *-融合范畴中的一个 Q-系统时，$\Theta_\alpha^G(A) := (\theta,\ w,\ x,\ z)$ 是一个 G-等变 Q-系统。选择另一组 $\{e_i^{\nu,\lambda\mu}\}_i$ 和 u_g^λ 会得到相同的 G-等变 Q-系统。在 θ 的定义中选择另一种 I、一个直和以及一组 $\lambda_2^\vee$ 和 $\{\phi_l^L\}_l$，会得到一个同构的 G-等变 Q-系统。我们称 $\Theta_\alpha^G(A)$ 为与 A 相关联的 G-等变 α-诱导 Q-系统。

证明。首先，我们注意到 $\tilde{m}, \Delta$ 和 z 都是定义良好的。事实上，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\theta, \theta^2) &= \bigoplus_{L,M,N} \mathrm{Hom}(\nu_1 \boxtimes \nu_2^\vee, (\lambda_1 \boxtimes \lambda_2^\vee) \otimes (\mu_1 \boxtimes \mu_2^\vee))\\ &= \bigoplus_{L,M,N} \mathrm{Hom}(\nu_1 \boxtimes \nu_2^\vee, \lambda_1\mu_1 \boxtimes \overline{\mu_2}\lambda_2^\vee \mu_2^\vee)\end{aligned}$$

根据 $\partial\mu_1=\partial\mu_2$ 和 e^{ν_1}，由定义可知 $\overline{\tilde{e}^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}_i\boxtimes\tilde{e}^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}_j}\in\overline{\mathrm{Hom}}(\nu_1\boxtimes\nu_2^\vee,\lambda_1\mu_1\boxtimes\mu_2\lambda_2^\vee\mu_2^\vee)$。$\Delta$ 的系数也是定义良好的。事实上，由于根据 [EGNO15, Proposition 4.8.4]有 $d_\nu\neq 0$，我们可以取对偶基 $\{\tilde{e}^{\nu,\lambda\mu}_i\}_i$'s。根据假设，$\mathrm{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 范畴是张量范畴；根据命题 3.3，它是枢轴的；根据 [Yam04, Proposition 6.1]，它是半单的。由于对于 $\lambda\in I$，根据命题 4.2 有 $\dim\alpha_A^{G\pm}(\lambda)=d_\lambda\neq 0$，我们可以取对偶基 $\{\tilde{\phi}^L_l\}_l$'s。因此，Δ 定义良好。类似地，m 和 z也定义良好。

接下来，我们注意到 $\Theta^G_\alpha(A)$ 不依赖于对 $\{e^{\nu,\lambda\mu}_i\}_i$ 的选择，因为在 $\tilde{m}$ 和 Δ 的定义中改变 $\{e^{\nu,\lambda\mu}_i\}_i$ 所产生的影响，会被相应改变 $\{\tilde{e}^{\nu,\lambda\mu}_i\}_i$ 所产生的影响抵消。出于同样的原因，它也不依赖于对 u_g^λ 的选择。还要注意，另一种对 $\{\phi^L_l\}_l$ 的选择只会使 θ 的定义中出现另一个直和。一旦我们证明了 $\Theta^G_\alpha(A)$ 是一个 G-等变 Frobenius 代数，就可以看出，另一个直和与之有典范同构，因为我们将结构定义为直和。根据共轭的定义，另一种左对偶的选择也会得到一个典范同构的对象。固定简单对象之间的同构后，另一种 I 的选择会得到一个同构的对象。

然后，我们证明 $\Theta^G_\alpha(A)$ 是一个 Frobenius 代数。由于证明与[Reh00，定理 1 的证明类似，4], 这里我们只证明余结合性。我们有

$$
\begin{aligned}
&(\Delta\otimes\mathrm{id}_\theta)\Delta\\
&=\bigoplus_{L,M,M',N'}\sum_{N,i,j,i',j'}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}d_{\mu_2'}}{d_{\nu_2'}d_{\nu_1}d_{\nu_1'}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\phi_n^N)\\
&\qquad\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'})(\tilde{\phi}_n^N\otimes_A\tilde{\phi}_{m'}^{M'})\alpha_A^{G-}(e_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'})\phi_{n'}^{N'})\\
&\qquad\times(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1'})e_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'}\boxtimes\overline{(^{\mu_1'}(\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2'})\overline{\tilde{e}_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'}}\\
&=\bigoplus_{L,M,M',N'}\sum_{N,i,j,i',j'}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}d_{\mu_2'}}{d_{\nu_2'}d_{\nu_1}d_{\nu_1'}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\phi_n^N)\\
&\qquad\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'})(\tilde{\phi}_n^N\otimes_A\tilde{\phi}_{m'}^{M'})\alpha_A^{G-}(e_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'})\phi_{n'}^{N'})\\
&\qquad\times(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1'})e_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'}\boxtimes\overline{\tilde{e}_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'}(\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2'})}
\end{aligned}
$$

由 $\partial\mu_1'=\partial\mu_2'$ 和引理 4.12 和 4.13。利用迹的循环性，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{d_{\nu_1}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\phi_n^N)\\
&=\frac{d_{\nu_2}}{d_{\nu_1}}\frac{1}{d_{\nu_2}}\mathrm{Tr}(\phi_n^N\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}))\\
&=\left(\frac{d_{\nu_2}}{d_{\nu_1}}\phi_n^N,\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2})\right).
\end{aligned}
$$

注意到 $\{d_{\nu_2}/d_{\nu_1}\phi_n^N\}_n$ 是 $\{\tilde{\phi}_n^N\}_n$ 的对偶基，这是由迹的循环性得出的，因为 $\dim\ \alpha_A^{G+}(\nu_1)=d_{\nu_1}$ 且 $\dim\ \alpha_A^{G-}(\nu_2)=d_{\nu_2}$ 由命题 3.3得出。于是，按照基 $\{\tilde{\phi}_n^N\}$进行傅里叶展开，并对 N中的指标 n 求和，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\Delta\otimes\mathrm{id}_\theta)\Delta\\
&=\bigoplus_{L,M,M',N'}\sum_{\nu_1,\nu_2,i,j,i',j'}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}d_{\mu_2'}}{d_{\nu_2'}d_{\nu_1'}}\\
&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1'}))(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M\otimes_A\tilde{\phi}_{m'}^{M'})\alpha_A^{G-}((e^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2'})e_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'})\phi_{n'}^{N'})\\
&\times(e_i^{\nu_1,\lambda_1\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1'})e_{i'}^{\nu_1',\nu_1\mu_1'}\boxtimes\overline{\tilde{e}_{j'}^{\nu_2',\nu_2\mu_2'}(\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2\mu_2}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2'})}.
\end{aligned}
$$

通过类似的计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_\theta \otimes \Delta)\Delta \\
&= \bigoplus_{L,M,M',N'} \sum_{\nu_1,\nu_2,i,j,i',j'} \frac{d_{\lambda_2} d_{\mu_2} d_{\mu_2'}}{d_{\nu_2'} d_{\nu_1'}} \\
&\quad \times \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_{i'}^{\nu_1',\lambda_1\nu_1}(\mathrm{id}_{\lambda_1} \otimes \tilde{e}_i^{\nu_1,\mu_1\mu_1'}))(\tilde{\phi}_l^L \otimes_A \tilde{\phi}_m^M \otimes_A \tilde{\phi}_{m'}^{M'})\alpha_A^{G-}((\mathrm{id}_{\lambda_2} \otimes e^{\nu_2,\mu_2\mu_2'})e_{j'}^{\nu_2',\lambda_2\nu_2})\phi_{n'}^{N'}) \\
&\quad \times (\mathrm{id}_{\lambda_1} \otimes e_i^{\nu_1,\mu_1\mu_1'})e_{i'}^{\nu_1',\lambda_1\nu_1} \boxtimes \overline{\tilde{e}_{j'}^{\nu_2',\lambda_2\nu_2}(\mathrm{id}_{\lambda_2} \otimes \tilde{e}^{\nu_2,\mu_2\mu_2'})}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\{(e_i^{\nu_k,\lambda_k\mu_k} \otimes \mathrm{id}_{\mu_k'})e_{i'}^{\nu_k',\nu_k\mu_k'}\}_{\nu_k,i,i'} \quad \text{and} \quad \{(\mathrm{id}_{\lambda_k} \otimes e_i^{\nu_k,\mu_k\mu_k'})e_{i'}^{\nu_k',\lambda_k\nu_k}\}_{\nu_k,i,i'}
$$

它们都是 $\mathrm{Hom}(\nu_k', \lambda_k\mu_k\mu_k')$ 的基，其对偶基分别为

$$
\{\tilde{e}_{i'}^{\nu_k',\nu_k\mu_k'}(\tilde{e}_i^{\nu_k,\lambda_k\mu_k} \otimes \mathrm{id}_{\mu_k'})\}_{\nu_k,i,i'} \quad \text{and} \quad \{\tilde{e}_{i'}^{\nu_k',\lambda_k\nu_k}(\mathrm{id}_{\lambda_k} \otimes \tilde{e}_i^{\nu_k,\mu_k\mu_k'})\}_{\nu_k,i,i'}
$$

对于 $k = 1,2$，我们可以在 $(\Delta \otimes \mathrm{id}_\theta)\Delta$ 和 $(\mathrm{id}_\theta \otimes \Delta)\Delta$的表示中互换这些基，从而得到 $(\Delta \otimes \mathrm{id}_\theta)\Delta = (\mathrm{id}_\theta \otimes \Delta)\Delta$。如证明 $\tilde{m} \circ \Delta = d_\theta$ 时 $\mathcal{C}$ 为球形一样，我们也可以证明 [Reh00，定理 1。4] 根据命题 3.3。

最后，我们证明 $\Theta_\alpha^G(A)$ 是一个 G-等变 Frobenius 代数，这一点本质上是新的。首先，我们证明对于每个 $g \in G$， z_g 都可逆。事实上，其逆元为

$$
z_g^{-1} = \bigoplus_{L,l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\tilde{\eta}_{\lambda_1}^{g^{-1}g}\tilde{\phi}_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_2}^g\alpha_A^{G-}(\tilde{u}_g^{\lambda_2})\phi_{l'}^{L(g)}\alpha_A^{G+}(u_g^{\lambda_1}))(\tilde{u}_g^{\lambda_1} \boxtimes \overline{u_g^{\lambda_2}})
$$

由引理 4.12，我们有

$$
\begin{aligned}
z_g^{-1}z_g = \bigoplus_L \sum_{l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}^2} &\mathrm{Tr}(\tilde{\eta}_{\lambda_1}^{g^{-1}g}\tilde{\phi}_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_2}^g\alpha_A^{G-}(\tilde{u}_g^{\lambda_2})\phi_{l'}^{L(g)}\alpha_A^{G+}(u_g^{\lambda_1})) \\
&\times \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1})\tilde{\phi}_{l'}^{L(g)}\alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{g^{-1}g}\phi_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_2}^g).
\end{aligned}
$$

根据迹的循环性，我们有

$$
\frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1})\tilde{\phi}_{l'}^{L(g)}\alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{g^{-1}g}\phi_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_2}^g) = (\tilde{\phi}_{l'}^{L(g)}, \alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{g^{-1}g}\phi_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_2}^g\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1})),
$$

因此我们得到

$$
z_g^{-1}z_g = \bigoplus_L \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}({}^g(\tilde{\phi}_l^L\phi_l^L)) = \bigoplus_L (\tilde{\phi}_l^L, \phi_l^L) = \mathrm{id}_{g\theta}
$$

由基 $\{\phi_{l'}^{L(g)}\}_{l'}$ 上的傅里叶展开。由于 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A)$ 上的群作用根据命题 3.3 是枢轴的，因此保持迹。我们也可以类似地验证 $z_g z_g^{-1} = \mathrm{id}_{g\theta}$。因此， z_g 是可逆的。

接下来，我们证明 (θ, z) 是一个 G-等变对象。对于任意 $g, h \in G$，我们有

$$
\begin{aligned}
{z_g}^g z_h = \bigoplus_{L,l''} \sum_{l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}^2} &\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1(h)})\tilde{\phi}_{l''}^{L(gh)}\alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2(h)})\tilde{\eta}_{\lambda_2(h)}^{g^{-1}}{}^g\phi_{l'}^{L(h)}\tilde{\eta}_{\lambda_1(h)}^g) \\
&\times \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_h^{\lambda_1})\tilde{\phi}_{l'}^{L(h)}\alpha_A^{G-}(u_h^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{h-1h}\phi_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_1}^h)(u_g^{\lambda_1(h)g}u_h^{\lambda_1} \boxtimes \overline{{}^g\tilde{u}_h^{\lambda_2}\tilde{u}_g^{\lambda_2(h)}})
\end{aligned}
$$

由引理 4.12。由于 $\tilde{\eta}_{h\lambda_1}^g\alpha_A^{G+}({}^g\tilde{u}_h^{\lambda_1}) = {}^g\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_h^{\lambda_1})\tilde{\eta}_{\lambda_1(h)}^g$ 并且 $\tilde{\eta}_{\lambda_2(h)}^g{}^g\alpha_A^{G-}(\tilde{u}_h^{\lambda_2}) = \alpha_A^{G-}({}^g\tilde{u}_h^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{h\lambda_2}^g$(参见命题 3.8的证明)，我们得到

$$
\begin{aligned}
{z_g}^g z_h = \bigoplus_{L,l''} \frac{1}{d_{\lambda_1}} &\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}({}^g\tilde{u}_h^{\lambda_1}\tilde{u}_g^{\lambda_1(h)})\tilde{\phi}_{l''}^{L(gh)}\alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2(h)g}u_h^{\lambda_2})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{gh-1gh}\phi_l^L\tilde{\eta}_{\lambda_1}^{gh}) \\
&\times (u_g^{\lambda_1(h)g}u_h^{\lambda_1} \boxtimes \overline{{}^g\tilde{u}_h^{\lambda_2}\tilde{u}_g^{\lambda_2(h)}})
\end{aligned}
$$

由迹的循环性以及在基 $\{\phi_{l'}^{L(h)}\}_{l'}$ 下的傅里叶展开。右侧等于 z_{gh}，因为 $u^{\lambda_k}({}^{h}g u_h^{\lambda_k})$是一个 ${}^{gh}\lambda_k \cong \lambda_k(gh)$ 同构，对于 $k=1,2$ 而言，且 z 不依赖于同构的选取。因此，${}^{g}(\theta,z)$ 是一个 G-等变对象。

最后，我们证明对于每个 $g\in G$，z_g 都是 Frobenius 代数同态。由于我们可以取 $\mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})\ \alpha_A^{G-}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}))$ 的一组基为恒等映射，并取 $u_g^{1_{\mathcal{C}}}$ 为典范同构，因此对于每个 $g\in G$，都有 ${}^{g}z_g\eta=\eta$ 和 $\varepsilon z_g={}^{g}\varepsilon$。我们证明 $\Delta z_g=(z_g\otimes z_g){}^{g}\Delta$。我们有

$$\begin{aligned}\Delta z_g=&\bigoplus_{L,M,N}\sum_{n',i,j}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}}{d_{\nu_2}d_{\nu_1^2}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1(g),\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2(g),\lambda_2\mu_2})\phi_{n'}^{N(g)})\\&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\nu_1})\tilde{\phi}_{n'}^{N(g)}\alpha_A^{G-}(u_g^{\nu_2})\tilde{\eta}_{\nu_2}^{g-1g}\phi_n^N\tilde{\eta}_{\nu_1}^g)(e_i^{\nu_1(g),\lambda_1\mu_1}u_g^{\nu_1}\boxtimes\overline{\tilde{u}_g^{\nu_2}\tilde{e}_j^{\nu_2(g),\lambda_2\mu_2}})\\=&\bigoplus_{L,M,N}\sum_{i,j}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}}{d_{\nu_2}d_{\nu_1}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\nu_1}\tilde{e}_i^{\nu_1(g),\lambda_1\mu_1})(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2(g),\lambda_2\mu_2}u_g^{\nu_2})\tilde{\eta}_{\nu_2}^{g-1g}\phi_n^N\tilde{\eta}_{\nu_1}^g)\\&\times(e_i^{\nu_1(g),\lambda_1\mu_1}u_g^{\nu_1}\boxtimes\overline{\tilde{u}_g^{\nu_2}\tilde{e}_j^{\nu_2(g),\lambda_2\mu_2}})\end{aligned}$$

由引理 4.12、迹的循环性以及在基 $\{\phi_{n'}^{N(g)}\}_{n'}$下的傅里叶展开可知。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&(z_g\otimes z_g){}^{g}\Delta\\=&\bigoplus_{L,M,N}\sum_{l',m',i,j}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}}{d_{\nu_2}d_{\lambda_1}d_{\mu_1}d_{\nu_1}}\\&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\lambda_1(g^{-1})})\tilde{\phi}_l^L\alpha_A^{G-}(u_g^{\lambda_2(g^{-1})})\tilde{\eta}_{\lambda_2(g^{-1})}^{g-1}{}^{g}\phi_{l'}^{L(g^{-1})}\tilde{\eta}_{\lambda_1(g^{-1})}^g)\\&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}_g^{\mu_1(g^{-1})})\tilde{\phi}_m^M\alpha_A^{G-}(u_g^{\mu_2(g^{-1})})\tilde{\eta}_{\mu_2(g^{-1})}^{g-1}{}^{g}\phi_{m'}^{M(g^{-1})}\tilde{\eta}_{\mu_1(g^{-1})}^g)\\&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_j^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})})(\tilde{\phi}_{l'}^{L(g^{-1})}\otimes_A\tilde{\phi}_{m'}^{M(g^{-1})})\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})})\phi_n^N)\\&\times(u_g^{\lambda_1(g^{-1})}\otimes u_g^{\mu_1(g^{-1})}){}^{g}e_i^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})}\boxtimes\overline{{}^{g}\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})}(\tilde{u}_g^{\lambda_2(g^{-1})}\otimes\tilde{u}_g^{\mu_2(g^{-1})})}\end{aligned}$$

由 $\partial\mu_1=\partial\mu_2$ 以及引理 4.12 和 4.13可知。由于 $\tilde{\eta}^g$ 根据命题 3.8的证明是幺半的，并且

$$\begin{aligned}{}^{g}\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_j^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})})\tilde{\eta}_{\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})}^g&=\tilde{\eta}_{\nu_1}^g\alpha_A^{G+}({}^{g}\tilde{e}_j^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})})\\\tilde{\eta}_{\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})}^{g-1}{}^{g}\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})})&=\alpha_A^{G-}({}^{g}e_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})})\tilde{\eta}_{\nu_2}^{g-1}\end{aligned}$$

根据定义，我们得到

$$\begin{aligned}&(z_g\otimes z_g){}^{g}\Delta\\=&\bigoplus_{L,M,N}\sum_{i,j}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}}{d_{\nu_2}d_{\nu_1}}\\&\times\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}({}^{g}\tilde{e}_j^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})}(\tilde{u}_g^{\lambda_1(g^{-1})}\otimes\tilde{u}_g^{\mu_1(g^{-1})}))(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)\\&\quad\alpha_A^{G-}((u_g^{\lambda_2(g^{-1})}\otimes u_g^{\mu_2(g^{-1})}){}^{g}e_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})})\tilde{\eta}_{\nu_2}^{g-1g}\phi_n^N\tilde{\eta}_{\nu_1}^g)\\&\times(u_g^{\lambda_1(g^{-1})}\otimes u_g^{\mu_1(g^{-1})}){}^{g}e_i^{\nu_1,\lambda_1(g^{-1})\mu_1(g^{-1})}\boxtimes\overline{{}^{g}\tilde{e}_j^{\nu_2,\lambda_2(g^{-1})\mu_2(g^{-1})}(\tilde{u}_g^{\lambda_2(g^{-1})}\otimes\tilde{u}_g^{\mu_2(g^{-1})})}\end{aligned}$$

由迹的循环性以及在这些基 $\{\phi^{L(g^{-1})}{}_{l'}\quad\}_{l'}$ 和 $\{\phi^{M(g^{-1})}{}_{m'}\quad\}_{m'}$下的傅里叶展开可知。然后，比较这些基

$$\{e_i^{\nu_k(g),\lambda_k\mu_k}u_g^{\nu_k}\}_i\quad\text{and}\quad\{(u_g^{\lambda_k(g^{-1})}\otimes u_g^{\mu_k(g^{-1})}){}^{g}e_i^{\nu_k,\lambda_k(g^{-1})\mu_k(g^{-1})}\}_i$$

对于 $k=1,2$ 的 $\mathrm{Hom}({}^{g}\nu_k,\lambda_k\mu_k)$，我们得到结论。类似地，可以证明 $z_gm=m(z_g\otimes z_g)$。因此，$\Theta_\alpha^G(A)$ 是一个 G-等变 Frobenius 代数。对于 Q-系统，只需取正交归一基，并用 *-共轭基替换对偶基，即可类似地证明这些结论。 □

接下来，我们证明 $\Theta_\alpha^G(A)$ 满足交换性的 G-等变版本。

定义 4.16。设 $\mathcal{C}$ 为 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$。那么，其中的 G-等变代数A 是 $\mathcal{C}$ -交换的 G，如果图 42 中的等式成立。类似地，当 A 是 G-等变 Frobenius 代数时，如果图 *G43* 中的等式成立，则它是-余交换的。

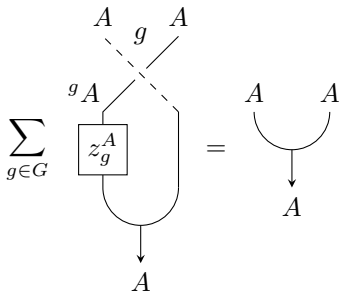


图 42： G-交换性

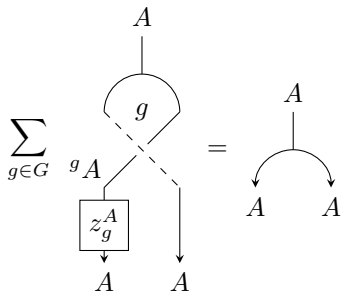


图 43： G-余交换性

引理 4.17。设 A 是多张量范畴 $\mathcal{C}$中的中性特殊 G-等变 Frobenius 代数，其中该范畴是 G-编织的。设 λ, $\lambda' \in$ 为 Obj($\mathcal{C}_g$)，且 μ, $\mu' \in$ 为 Obj($\mathcal{C}$)。那么，对于 $f \in \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda)\ \alpha_A^{G-}(\lambda'))$ 和 $f' \in \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\mu)\ \alpha_A^{G-}(\mu'))$，有

$$(\mathrm{id}_A \otimes_{\mathcal{C}} b^{\mathcal{C}}_{\lambda',\mu'})(f \otimes_A f') = (\tilde{\eta}^{g^{-1}g}_{\mu'} f' \tilde{\eta}^g_\mu \otimes_A f)(\mathrm{id}_A \otimes_{\mathcal{C}} b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu})$$
$$(f \otimes_A f')(\mathrm{id}_A \otimes_{\mathcal{C}} b^{\mathcal{C}-}_{\mu,\lambda}) = (\mathrm{id}_A \otimes_{\mathcal{C}} b^{\mathcal{C}-}_{\mu',\lambda'})(\tilde{\eta}^{g^{-1}g}_{\mu'} f' \tilde{\eta}^g_\mu \otimes_A f),$$

其中 $\tilde{\eta}^g_\lambda := z_g^{A-1} \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{id}_{g\lambda}$。

证明。 关于 $b^{\mathcal{C}-}$ 的结论可由图 44中的图形计算得出，其中 $z := z^A$。在上方等式的第二个和第三个等号处，我们分别使用了 A的右 f-模性以及 A的左 $\tilde{\eta}^{g^{-1}g}_{\mu'} f' \tilde{\eta}^g_\mu$-模性。在下方等式的第二个和第三个等号处，我们分别使用了 A的左 f-模性以及 A的右 $\tilde{\eta}^{g^{-1}g}_{\mu'} f' \tilde{\eta}^g_\mu$-模性。关于 $b^{\mathcal{C}}$ 的证明类似。 □

引理 4.18。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织多张量范畴。那么，对于任意 λ, $\overline{\mu} \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$，有 $b^{\mathcal{C}-}_{\mu,\lambda} = b^{\mathcal{C}-}_{\lambda^\vee,\mu^\vee}$。

证明。 该结论可由图 45中的图示计算得出。 □

命题 4.19。 设 A 是分裂的 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$中的一个中性对称特殊简单 G-等变 Frobenius 代数。那么，与 A 相关联的 G-等变 α-诱导 Frobenius 代数$\Theta_\alpha^G(A)$是 G-交换且 G-余交换的。

证明。 沿用定理 4.15中的记号。我们只证明余交换性，因为交换性的证明类似。首先注意，$\theta = \bigoplus_{g\in G} \bigoplus_{L,\partial\lambda_1 = g} \lambda_1 \boxtimes \lambda_2^\vee$是一个齐次分解。因此，图 43 中 θ 的左边为

$$\bigoplus_{L,M,N} \sum_{l',i,j} \frac{d_{\lambda_2} d_{\mu_2}}{d_{\nu_2} d_{\lambda_1} d_{\nu_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1})\tilde{\phi}^L_l \alpha_A^{G-}(u^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1})\tilde{\eta}^{\partial\mu_1-1}_{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}\ {}^{\mu_1}\phi^{L(\partial\overline{\mu_1})}_{l'}\tilde{\eta}^{\partial\mu_1}_{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})})$$
$$\times \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\mu_1(\lambda_1(\partial\overline{\mu_1}))})(\tilde{\phi}^M_m \otimes_A \tilde{\phi}^{L(\partial\overline{\mu_1})}_{l'})\alpha_A^{G-}(e_j^{\nu_2,\mu_2(\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}))})\phi^N_n)$$
$$\times ((u^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1} \otimes \mathrm{id}_{\mu_1}) b^{\mathcal{C}}_{\mu_1,\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})} e_i^{\nu_1,\mu_1(\lambda_1(\partial\overline{\mu_1}))} \boxtimes \overline{\tilde{e}_j^{\nu_2,\mu_2(\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}))} b^{\mathcal{C}-}_{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}),\mu_2}(\tilde{u}^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1} \otimes \mathrm{id}_{\mu_2})})$$

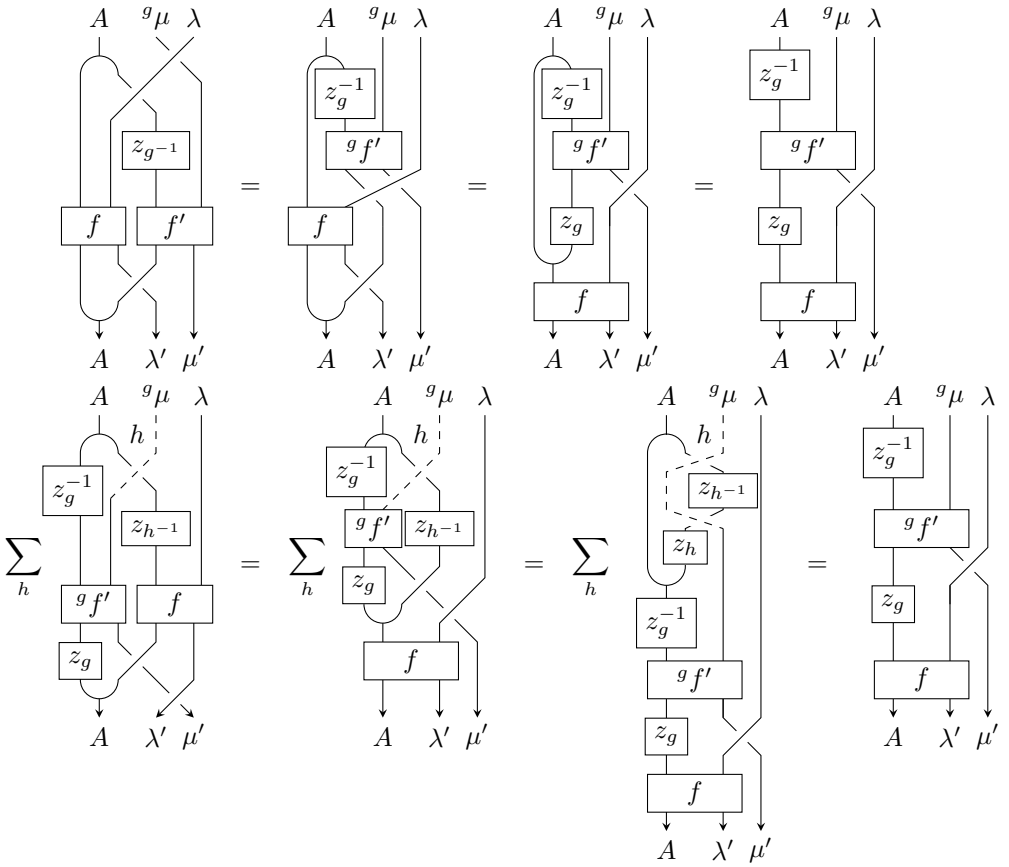


图44：交叉与等变 α-诱导

由 $\partial\mu_1 = \partial\mu_2$, $\partial\lambda_1(\partial\overline{\mu_1}) = \partial\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})$ 以及引理 4.12, 4.13 和 4.18。利用迹的循环性以及在基 $\{\tilde{\phi}^{L(\partial\mu_1)}{}_{l'}\}_{l'}$ 上的傅里叶展开，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l'} \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\mu_1)\partial\mu_1})\tilde{\phi}_l^L \alpha_A^{G-}(u^{\lambda_2(\partial\mu_1)\partial\mu_1})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{\partial\mu_1-1}{}_{\partial\mu_1}(\,)^{\mu_1}\phi^{L(\partial\mu_1)}{}_{l'}\ \tilde{\eta}_{\lambda_1}^{\partial\mu_1}(\partial\mu_1)\,) \\
&\qquad \times \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}^{\nu_1,\mu_1(\lambda_1(\partial\mu_1))\,i})(\tilde{\phi}_m^M \otimes_A \tilde{\phi}_{l'}^{L(\partial\mu_1)})\alpha_A^{G-}(e^{\nu_2,\mu_2(\lambda_2(\partial\mu_1))\,j})\phi_n^N) \\
&= \mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}^{\nu_1,\mu_1(\lambda_1(\partial\mu_1))\,i})(\tilde{\phi}_m^M \otimes_A {}^{\mu_1}(\tilde{\eta}^{\partial\mu_1}_{\lambda_1(\partial\mu_1)}\ \alpha_A^{G+}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\mu_1)\partial\mu_1})\tilde{\phi}_l^L\alpha_A^{G-}(u^{\lambda_2(\partial\mu_1)\partial\mu_1})\tilde{\eta}_{\lambda_2}^{\partial\mu_1-1}{}_{\partial\mu_1}(\,)\,)) \\
&\qquad \alpha_A^{G-}(e^{\nu_2,\mu_2(\lambda_2(\partial\mu_1))\,j})\phi_n^N)。
\end{aligned}
$$

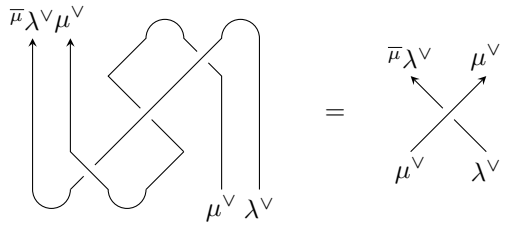


图45：反向交叉的共轭

那么，由于

$$(\tilde{\phi}_m^M \otimes_A \overline{\mu_1}(\tilde{\eta}^{\partial\mu_1}_{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}\alpha_A^{G+}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1})\tilde{\phi}_l^L\alpha_A^{G-}(u^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1})\tilde{\eta}^{\partial\mu_1-1}_{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}))\alpha_A^{G-}(b^{\mathcal{C}-}_{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}),\mu_2})$$
$$= \alpha_A^{G+}(b^{\mathcal{C}-}_{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1}),\mu_1})((\alpha_A^{G+}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1})\tilde{\phi}_l^L\alpha_A^{G-}(u^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1}))\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)$$

根据 $\partial\mu_1=\partial\mu_2$ 和引理 4.17，图 43 的左边等于

$$\bigoplus_{L,M,N}\sum_{i,j}\frac{d_{\lambda_2}d_{\mu_2}}{d_{\nu_2}d_{\nu_1}}\mathrm{Tr}(\alpha_A^{G+}(\tilde{e}_i^{\nu_1,\mu_1\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}b^{\mathcal{C}-}_{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1}),\mu_1}(\tilde{u}^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1}))(\tilde{\phi}_l^L\otimes_A\tilde{\phi}_m^M)$$
$$\alpha_A^{G-}((u^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2})b^{\mathcal{C}}_{\mu_2,\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}e_j^{\nu_2,\mu_2\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})})\phi_n^N)$$
$$\times((u^{\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_1})b^{\mathcal{C}}_{\mu_1,\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}e_i^{\nu_1,\mu_1\lambda_1(\partial\overline{\mu_1})}\boxtimes\overline{\tilde{e}_j^{\nu_2,\mu_2(\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}))}b^{\mathcal{C}-}_{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1}),\mu_2}(\tilde{u}^{\lambda_2(\partial\overline{\mu_1})}_{\partial\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_2})}),$$

这等于 Δ 因为 $\{(u^{\lambda_k}{}_{(\partial\mu_1)\,\partial\mu_1}\otimes\mathrm{id}_{\mu_k})b_{\mu_k,\ \lambda_k(\partial\mu_1)}e^{\nu_k}{}_{,\ \mu_k\lambda_k(\partial\mu_1)\ i}\}_i$ 是 $\mathrm{Hom}(\nu_k,\ \lambda_k\mu_k)$ 的一组基，并且 $\{\tilde{e}^{\nu_k,\mu_k}{}_{(\ \ \ \

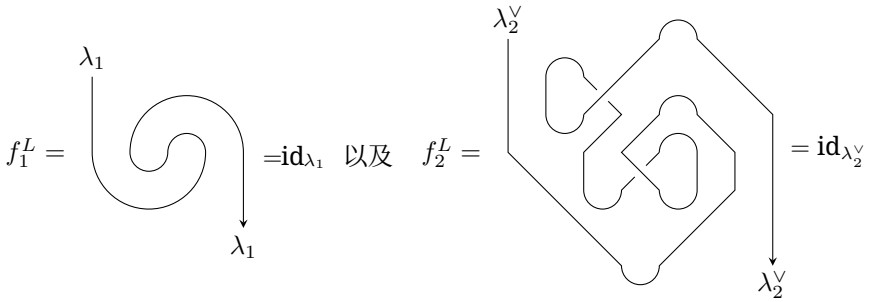


图 47： $\Theta_\alpha^G(A)$的对称性证明

设 $\mathcal{C}$ 是一个带有有限群 G 作用的多张量范畴，且 H 是 G 的子群。那么，诱导函子 $\mathrm{Ind}_H^G\colon \mathcal{C}^H \to \mathcal{C}^G$（其中 $\mathcal{C}^G$ 表示 $\mathcal{C}$ 的 G-等变化（例如参见 [EGNO15，第 2.7 节和第 4.15] 节））通过固定 G/H 的一个完备代表系并令 $\mathrm{Ind}_H^G(\lambda, z^\lambda) := (\bigoplus_{g\in G/H} {}^g\lambda, z^{\mathrm{Ind}_H^G(\lambda)})$ 来定义。这里，$z^{\mathrm{Ind}_H^G(\lambda)}{}_{g'}$ 定义如下。对于 $g \in G$，存在唯一的 $\tilde{g} \in G$ 使得 $g'g \in \tilde{g}H$。令 $h \in H$ 为满足 $g'g = \tilde{g}h$ 的唯一元素。那么，$z^{\mathrm{Ind}_H^G(\lambda)}{}_{g'}$ 在 ${}^g\lambda$ 上的分量定义为 ${}^{\tilde{g}}z_h^\lambda : {}^{g'g}\lambda = {}^{\tilde{g}h}\lambda \cong {}^{\tilde{g}}\lambda$。

根据定义，对于范畴$\mathcal{C}$中的代数（分别为余代数、Frobenius 代数、Q-系统） A，$\mathrm{Ind}_H^G(A)$自然带有代数（分别为余代数、Frobenius 代数、Q-系统）结构。

引理 4.21. 设 $\mathcal{C}$ 是由有限群 G作用的 G-辫化多张量范畴，且 H 是 G的一个子群。令 $\mathcal{C}_H$ 表示通过限制 $\mathcal{C}$得到的 H-辫化多张量范畴。若 A是 $\mathcal{C}_H$中的 H-交换代数（分别为 H-余交换余代数），则 $\mathrm{Ind}_H^G(A)$是G-交换的（分别为 G-余交换的）。

证明。我们只证明 G-余交换性。考虑 $\mathrm{Ind}_H^G(A)$ 的一个分量 ${}^gA$。那么，g' 图 43 中的虚线标签只有在 $g^{-1}g'g \in H$ 时才保留，因为 $A \in \mathcal{C}_H$。根据定义，对于 $h := g^{-1}g'g \in H$，有 $z^{\mathrm{Ind}_H^G(A)}{}_{g'} = {}^gz_h^A$。因此，$A$ 的 H-余交换性蕴含 $\mathrm{Ind}_H^G(A)$ 的G-余交换性。 □

引理 4.22. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 G-辫编多张量范畴。那么，$(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^G \simeq (\mathcal{C}^G)^{\mathrm{rev}}$ 作为辫编多张量范畴。

证明。$J_{(\lambda,z^\lambda),(\mu,z^\mu)}$ 定义为 $z_g^\lambda \otimes \mathrm{id}_\mu$ 对 $(\lambda, z^\lambda), (\mu, z^\mu)$ 的扩张，其中 $\in \mathrm{Obj}((\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^G)$，且 μ 的齐次分解以 $g \in G$ 为标记。这样，恒等映射成为张量等价，因为对于 $(\nu, z^\nu) \in \mathrm{Obj}((\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^G)$ 以及 g, $h \in G$，有 $(z_g^\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mu\nu})(z_h^{{}^g\lambda\mu} \otimes \mathrm{id}_\nu) = (z_g^\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mu\nu})({}^gz_{g^{-1}hg}^\lambda \otimes z_h^\mu \otimes \mathrm{id}_\nu) = z_{hg}^\lambda \otimes z_h^\mu \otimes \mathrm{id}_\nu$。此 J 与 $(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^G$ 的辫编 $(z_g^{\mu-1} \otimes \mathrm{id}_\lambda)b_\lambda^{\mathcal{C}^-}{}_{,\mu}$ 以及 $(\mathcal{C}^G)^{\mathrm{rev}}$ 的 $b_\lambda^{\mathcal{C}^-}{}_{,\mu}(z_h^{\lambda-1} \otimes \mathrm{id}_\mu)$ 相交织。 □

引理 4.23. 设 G 是一个有限群。设 A 是分裂球形 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中的中性对称特殊简单 G-等变 Frobenius 代数。则 $\mathrm{Ind}_G^{G\times G}\Theta_\alpha^G(A)$ 是 $\mathcal{C}^G \boxtimes (\mathcal{C}^G)^{\mathrm{rev}}$ 中的交换 Frobenius 代数。若 $\mathcal{C}^G$ 是模的，则 $\mathrm{Ind}_G^{G\times G}\Theta_\alpha^G(A)$ 是极大的，当且仅当 $\mathrm{FPdim}\ \Theta_\alpha^G(A) = \mathrm{FPdim}\ \mathcal{C}$。

证明. $\mathrm{Ind}_G^{G\times G}\Theta_\alpha^G(A)$ 是 $\mathcal{C}^G \boxtimes (\mathcal{C}^{\mathrm{rev}})^G \simeq \mathcal{C}^G \boxtimes (\mathcal{C}^G)^{\mathrm{rev}}$ 中的交换 Frobenius 代数，这由命题 4.19 以及引理 4.21 和 4.22 得出。最后一个结论由 [DMNO13，推论 3.32] 得出，因为根据定义，$\mathrm{FPdim\ Ind}_G^{G\times G}\Theta_\alpha^G(A) = |G|\,\mathrm{FPdim}\ \Theta_\alpha^G(A)$。 □

注 4.24。 如果 $\mathcal{C}^G$ 是模的，且维数 $\Theta_\alpha^G(A) = |G|$ 维数 $\mathrm{Rep}\ \mathcal{A}$，那么存在一个简单对称特殊 Frobenius 代数 $\tilde{A}$，它属于 $\mathcal{C}^G$，使得 $\mathrm{Ind}_G^{G\times G}\Theta_\alpha^G(A)$ 与（通常的）$\mathcal{A}$-诱导 Frobenius 代数 $\Theta_\alpha(A)$ 同构，此结果见 [KR09，定理 3。22] 以及 [BKL15，命题 4。18]（另见下文定理 5.25 ）。

注意， G-等变 Longo–Rehren Frobenius 代数 Θ_{LR}^G 始终满足条件 FPdim $\Theta_{\mathrm{LR}}^G = \mathrm{FPdim}\,\mathcal{C}$。

定理 4.25. 设 $\mathcal{A}$ 是一个完全有理、不可约的局部 M¨obius 协变网，其上有一个有限群 G 的作用。设 A 是 Rep $\mathcal{A}$ 中一个简单的 G-等变 Q-系统。那么，$\mathrm{Ind}_G^{G\times G}\,\Theta_\alpha^G(A)$ 是 Rep $\mathcal{A}^G \boxtimes (\mathrm{Rep}\,\mathcal{A}^G)^{\mathrm{rev}}$ 中的一个交换 Q-系统。因此，它给出 $\mathcal{A}^G \otimes \mathcal{A}^G$ 的一个有限指数局部标准扩张。当且仅当 $\dim\,\Theta_\alpha^G(A) = |G|\,\dim \mathrm{Rep}\,\mathcal{A}$ 时，它是模不变量。

证明. 第一个结论由 [M¨ug05，定理 312] 和引理 4.23 得出。最后一个结论由 [BKL15，命题 66] 得出。□

5 等变 full centers

设 A 是分裂球形G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性的、对称的、特殊的简单 G-等变 Frobenius 代数。对于 λ， $\mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，我们有

$$\mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda), \alpha_A^{G-}(\mu)) \subset \mathrm{Hom}({}_A A\lambda, {}_A A\mu) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\lambda, A\mu)$$

根据定义，其中 ${}_A A\lambda$ 表示作为左 A-模的 $A\lambda$ 。因此，自然会问， $\Theta_\alpha^G(A)$ 能否实现为一个系数为 $\langle \lambda, A\mu\rangle$ 的 G-等变 Frobenius 代数的子代数。当 G 平凡时，已知答案是肯定的： [BKL15，命题 4.18] ，而 α-诱导 Frobenius 代数 $\Theta_\alpha(A)$ 可实现为 A的 full center $Z(A)$ [FFRS08，定义 4.9]。本节给出该定理的等变推广。

5.1 G-等变 Frobenius 代数的等变 full center

在本小节中，我们定义 full center 的等变推广（定义 5.11）。由于它被定义为一个乘积代数的子代数，与 G 平凡时的情形相同，因此我们先讨论乘法和子代数。

命题 5.1. 设 A 和 B 是多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的 G-编织 G-等变弗罗贝尼乌斯代数。那么，$(AB, m_{AB}, \eta_A \otimes \eta_B, \Delta_{AB}, \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B, z^A \otimes z^B)$ 是一个 G-等变弗罗贝尼乌斯代数，其中 m_{AB} 和 Δ_{AB} 如图 48所示。若 A 和 B 是特殊的（分别为对称的），则 AB 也如此。若 A 和 B 是 G-编织 *-多张量范畴中的 Q-系统，则 AB 也是一个 G-等变 Q-系统。

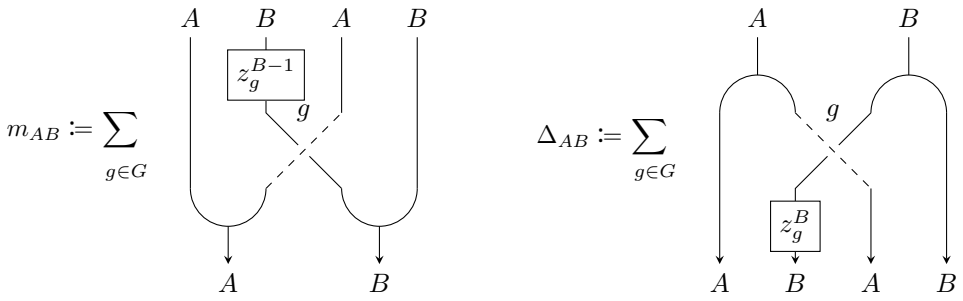


图48：乘积等变弗罗贝尼乌斯代数结构

证明。 根据定义，$(AB, z^{AB}) = (A, z^A)(B, z^B)$ 属于 $\mathcal{C}^G$，且右侧通过 [FRS02，命题 322]在左侧诱导出所述 Frobenius 代数结构。因此， AB是一个 Frobenius 代数。我们还可以在 $\mathcal{C}$中通过一些图形计算给出直接证明。由虚线交叉的自然性可知，z_g^{AB}是一个 Frobenius 代数同构。其余结论显然成立。□

定义 5.2. 设 A 是一个 G-等变 Frobenius 代数，属于一个 G-交叉多张量范畴；设 e 是 A 的 Frobenius 幂等元，即 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$ 中满足 [FFRS06，公式 2.54 和 2.55] 的幂等元。若对每个 $g \in G$ 都有 $ez_g^A = z_g^{Ag}e$，则称 e 是 A 的 G-等变 Frobenius 幂等元。若 A 是一个 G-交叉 *-多张量范畴中的 G-等变 Q-系统，且 e 是一个投影，则称 e 是 A 的 G-等变 Frobenius 投影。

命题 5.3。设 A 是一个 G-等变 Frobenius 代数，属于一个 G-交叉多张量范畴$\mathcal{C}$，且设 e 是 A 的一个 G-等变 Frobenius 幂等元，并带有一个回缩 (B, s, r)。那么，对于任意非零标量 ζ，元组 $B_\zeta := (B, rm_A(s \otimes s)\ r\eta_A, \zeta(r \otimes r)\Delta_A s, \zeta^{-1}\varepsilon_A s, \{rz_g^{Ag}s\}_g)$ 是一个G-等变 Frobenius 代数。此外，若 $\mathcal{C}$ 是一个 G-交叉 *-多张量范畴，A 是一个G-等变 Q-系统，且 e 是一个 G-等变 Frobenius 投影，则 B_ζ 与 $r = s^*$ 构成一个 G-等变 Q-系统。

证明。已知 B_ζ 是一个 Frobenius 代数，参见 [FFRS06命题 2 的证明。37]。由于 e 是一个 G-等变 Frobenius 幂等元，因此我们得到

$$\begin{aligned} m_B(z_g^B \otimes z_g^B) &= rm_A(ez_g^{Ag}s \otimes ez_g^{Ag}s) = rez_g^{Ag}m_A({}^g s \otimes {}^g s) = rz_g^{Ag}e^g(m_A(s \otimes s)) \\ &= rz_g^{Ag}s^g(rm_A(s \otimes s)) = z_g^{Bg}m_B \\ z_g^{Bg}\eta_B &= rz_g^{Ag}(e\eta_A) = rz_g^{Ag}\eta_A = r\eta_A = \eta_B \end{aligned}$$

对每个 $g \in G$ 都成立。类似地，我们可以验证 $\Delta_B z_g^B = (z_g^B \otimes z_g^B)^g\Delta_B$ 和 $\varepsilon^B z_g^B = {}^g\varepsilon^B$。因此，$z_g^B$ 是 B 的 Frobenius 代数端自函子。此外，

$$z_g^{Bg}rz_g^{A-1}s = rz_g^{Ag}ez_g^{A-1}s = res = \mathrm{id}_B = {}^g rz_g^{A-1}sz_g^B$$

因此，z_g^B 是一个同构。最后，

$$z_g^{Bg}z_h^B = rz_g^{Ag}(ez_h^{Ah}s) = rez_g^{Ag}z_h^{Agh}s = rz_{gh}^{A\ gh}s = rz_{gh}^{A\ gh}s = z_{gh}^B$$

对于任意 g，$h \in G$，因此 $\{z_g^B\}_g$ 赋予 G-等变结构 B。最后一个结论由 [BKLR15，引理 4。1] 和 $z_g^{B-1} = {}^g rz_g^{A-1}s = z_g^{B*}$ 得出。 □

请注意，通常 B_ζ 的 Frobenius 代数结构取决于 ζ。实际上，如果 A 是对称特殊的，那么 $\varepsilon_{B_\zeta}\eta_{B_\zeta} = \zeta^{-1}$ 维数 A。不过，在无关紧要时，我们不写出 ζ。

命题 5.4。设 A 是一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的对称特殊 G-等变 Frobenius 代数。那么，对于每个 $(\lambda, z^\lambda) \in \mathcal{C}^G$，图 49 中定义的 $P_A^G(\lambda) \in \mathrm{End}(A\lambda)$ 是一个幂等元，其中 $\mathcal{C}^G$ 表示 $\mathcal{C}$ 的 G-等变化（例如参见 [EGNO15，第 2.7 节和第 4.15] 节）。此外，$P_A^G := P_A^G(\mathbf{1}^{\mathcal{C}})$ 是 A 的 G-等变 Frobenius 幂等元。当 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织 *-多张量范畴且 A 是一个 Q-系统时，$P_A^G(\lambda)$ 是一个投影。

证明。首先，$P_A^G(\lambda)(z_g^A \otimes z_g^\lambda) = (z_g^A \otimes z_g^\lambda)^g P_A^G(\lambda)$由图 50 得出。然后，结论的其余部分由 [FRS02，引理 5.2]，[FFRS06，引理 3.10]和 [BKL15，引理 4.6] 得出，因为在 $\mathcal{C}^G$中有 $P_A^G(\lambda) = P_{(A,z^A)}((\lambda, z^\lambda)$。注意，当 $A^\vee$ 取为其自身时，$\mathrm{ev}_A = \varepsilon_A m_A$。我们也可以给出一个直接证明，其中用到一些图形计算，见下文图67和图73。

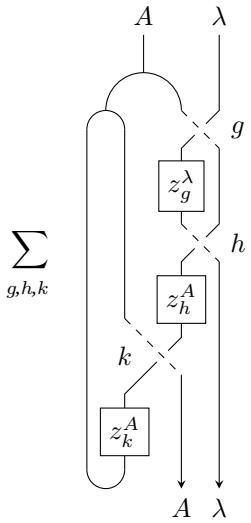


图 49： $P_A^G(\lambda)$

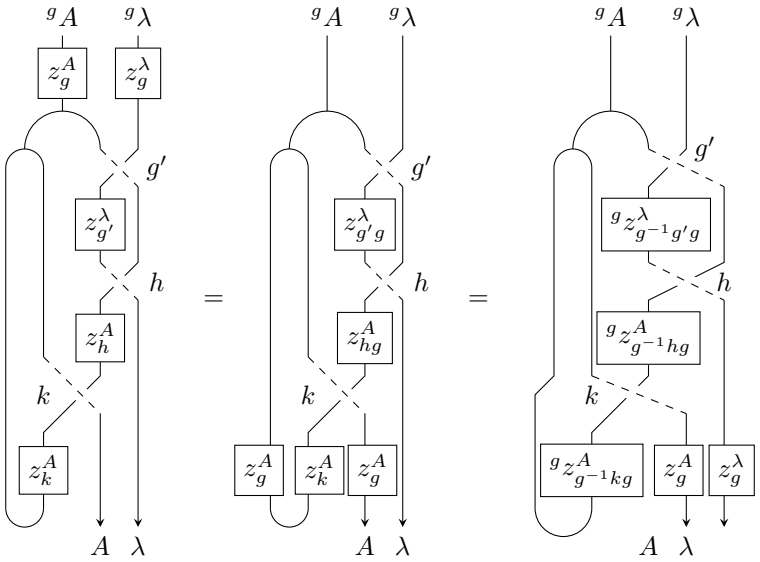


图 50： $P_A^G(\lambda)$ 是一个 G-等变态射

□

定义 5.5。 设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$中的一个对称特殊 G-等变 Frobenius 代数。我们称 P_A^G 为 A的 G-等变左中心幂等元 。若 P_A^G是分裂的，则称相应的约化 Frobenius 代数（记作 $C^G(A)$）为 A的G-等变左中心 。

命题 5.6. 设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对称特殊 G-等变 Frobenius 代数。那么，$C^G(A)$ 是对称的、 G-交换的且 G-余交换的。若 A 是简单的，则 $C^G(A)$ 也如此。

证明。（$C^G(B)$ $z^{C^G(B)}$) 等于左中心 $C((B, z^B))$，因为根据定义， r和 s可以视为回缩 ($C^G(B)$ r, s) 中的态射 $\mathcal{C}^G$ （参见命题 5.3），且 $sr = P_B^G$在 $\mathcal{C}^G$ 中是$P_{(B,z^B)}$ 。于是，该结论由 [FFRS06，命题 2.37 (i) 和 (ii)] 得出。 □

注记 5.7。 1. 我们也可以给出 G-等变版本的 [FFRS06，命题 2.25(iii)]：一个对称的 G-等变 Frobenius 代数，若处于 G-编织多张量范畴中，则它是 G-交换的，当且仅当它是 G-余交换的。

2. $C^G(A)$ 的特殊性通常并非显然，参见 [FFRS06，命题 2.37(iii)]。

下一小节需要用到以下引理。

引理 5.8。 对于 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的对称特殊 G-等变弗罗贝尼乌斯代数 A 和 B，有 $P_{AB}^G = P_A^G(C^G(B))$。

证明。 P_{AB}^G 化为左中心幂等元 $P_{(A,z^A)(B,\ z^B)}$ 于 $\mathcal{C}^G$。于是，结论由 [FFRS06，命题 3.14(i)]得出。 □

引理 5.9。 对于 G-编织多张量范畴中的 G-交换（分别为 G-余交换）对称特殊 G-等变弗罗贝尼乌斯代数 A，有 $P^G(A) = \mathrm{id}_A$。

证明。 与引理的证明类似5.8，由经典结果 [FFRS06，引理 2。30]可得，因为（A，z^A）在 $\mathcal{C}^G$ 中是交换的（分别为余交换）。 □

定义 5.10。 对于分裂的 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$，我们称 $\Theta_{\mathrm{LR}}^G := \Theta_\alpha^G(\mathbf{1}^{\mathcal{C}})$ 为 $GLongo\text{–}Rehren$ -等变 *Frobenius* 代数 in $D(\mathcal{C})$。

最后请注意，对于中性的 G-等变 Frobenius 代数 A，若其位于 G-交叉多张量范畴 $\mathcal{C}$中，则元组 $(A\boxtimes\mathbf{1}^{\mathcal{C}}, m_A\boxtimes\mathrm{id}\ \eta_A\boxtimes\mathrm{id}\ \Delta_A\boxtimes\mathrm{id}\ \varepsilon_A\boxtimes\mathrm{id}\ z^A\boxtimes\mathrm{id})$ 是一个 G-等变 Frobenius 代数，位于 $D(\mathcal{C})$ 中。根据定义，若 A 是对称的（分别为特殊的），则 $A\boxtimes\mathbf{1}^{\mathcal{C}}$也如此。接下来，我们给出以下定义，这正是我们所需要的，也是 G-等变版本，对应于 [FFRS08，定义 4。9]。

定义 5.11。 设 A 是分裂球形 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性的、对称的特殊 G-等变 Frobenius 代数，且 $\dim\mathcal{C} \neq 0$。那么，我们将 $D(\mathcal{C})$ 中的 G-等变 Frobenius 代数 $Z^G(A) := C^G((A\boxtimes\mathbf{1}^{\mathcal{C}})\Theta_{\mathrm{LR}}^G)$ 称为 A 的 G-等变 *full center* 。

注意，为了使 $\mathcal{C}$ 及 $\dim\mathcal{C} \neq 0$ 对应的 Θ_{LR}^G 成为对称特殊的，因而使 $Z^G(A)$定义良好，我们需要定理 4.15 和命题 4.20中提到的$\mathcal{C}$ 的球面性。在 G-braided *-融合范畴的情况下，尤其是总能满足这一假设。

5.2 等变 α-诱导弗罗贝尼乌斯代数作为等变 full centers

在本小节中，我们证明第二个主要定理（定理 5.25）。实际上，证明是对 [BKL15，命题 4.18]，的等变推广；为此，我们需要定义由 α-诱导产生的交叉，如 [BEK99，命题 3.1]中所述。

引理 5.12. 设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性、对称、特殊的 G-等变 Frobenius 代数。那么，对于 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ 以及 $\mathcal{C}_h$ 中的左 A-模 μ，图 51 和图 52 中的态射是左 A-模同构，并且关于 λ 和 μ 自然。类似地，对于右 A-模 ρ，图 53 和图 54 中的态射是右 A-模同构，并且关于 λ 和 ρ 自然。若 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织的 *-多张量范畴，A 是一个 G-等变 Q-系统，且 μ 和 ρ 是标准的，那么取 $s_{\alpha_A^{G\pm}}(\lambda)_\mu$ 和 $s_{\rho,\alpha_A^{G\pm}}(\lambda)$ 为等距时，$B_\lambda^{\pm}{}_{,\mu}$ 和 $B_\rho^{\pm}{}_{,\lambda}$ 是酉的。

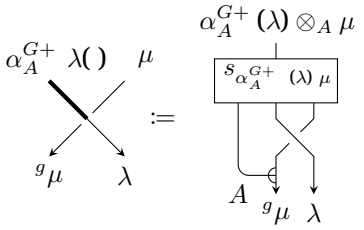


图 51：$B_\lambda^{+}{}_{,\mu}$

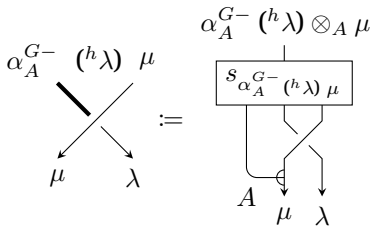


图 52：$B_\lambda^{-}{}_{,\mu}$

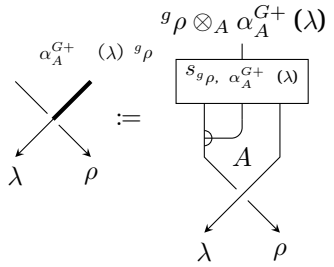


图53：$B^+_{\rho\,\lambda,}$

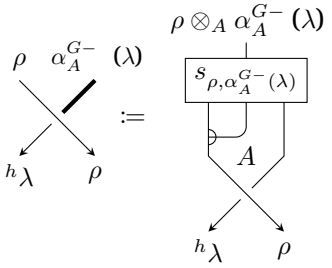


图55：$B^-_{\rho\,\lambda,}$

证明. 这些态射的自然性由定义可知。我们只证明关于 $B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 和 $B^+_{\rho}{}_{,\lambda}$ 的其余结论，因为关于 $B^-_{\lambda}{}_{,\mu}$ 和 $B^-_{\rho}{}_{,\lambda}$ 的证明只需将一个交叉替换为其反向即可得到。$B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 的左 A-模性由 $s_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\mu}$ 的左 A-模性以及 ${}^g\mu$ 的左模性推出。图 55 中的态射是 $B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 的左逆，因为 $(B^+_{\lambda}{}_{,\mu})^{-1}B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 等于 $r_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\mu} f s_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\mu}$，其中 f 如图 57 所示，且 $z := z^A$；根据该处的图示计算，它也等于 $(r_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\mu} \circ s_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\mu})^2 = \mathrm{id}_{\alpha_A^{G+}(\lambda)\otimes_A \mu}$。根据图 58，它也是右逆。接下来，图 59 表明 $B^+_{\rho}{}_{,\lambda}$ 具有右 A-模性。然后，类似于关于 $B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 的论证，我们可以通过一些图形计算证明，图 56 中的态射是 $B^+_{\rho}{}_{,\lambda}$ 的逆。最后一个结论由 [BKLR15, 引理 3.23] 以及 $(B^{\pm}_{\lambda}{}_{,\mu})^{-1}$ 和 $(B^{\pm}_{\rho}{}_{,\lambda})^{-1}$ 的定义推出。

□

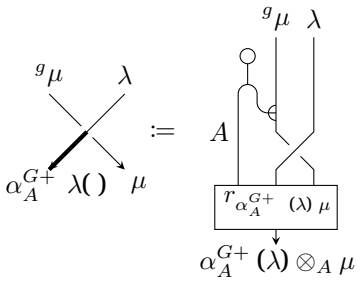


图55：$B^+_{\lambda}{}_{,\,\mu}$的逆

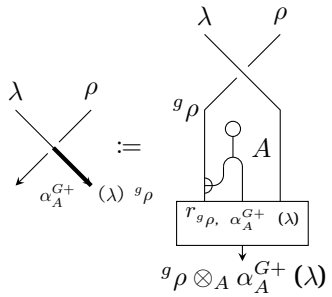


图56：$B^+_{\rho}{}_{,\lambda}$ 的逆

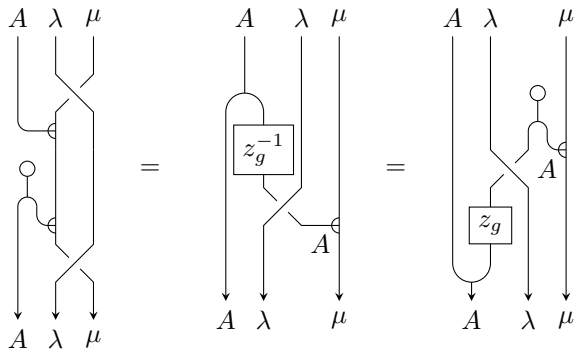


图57：$B^+_{\lambda}{}_{,\mu}$ 左可逆性的证明

我们给出以下引理以供后续使用。

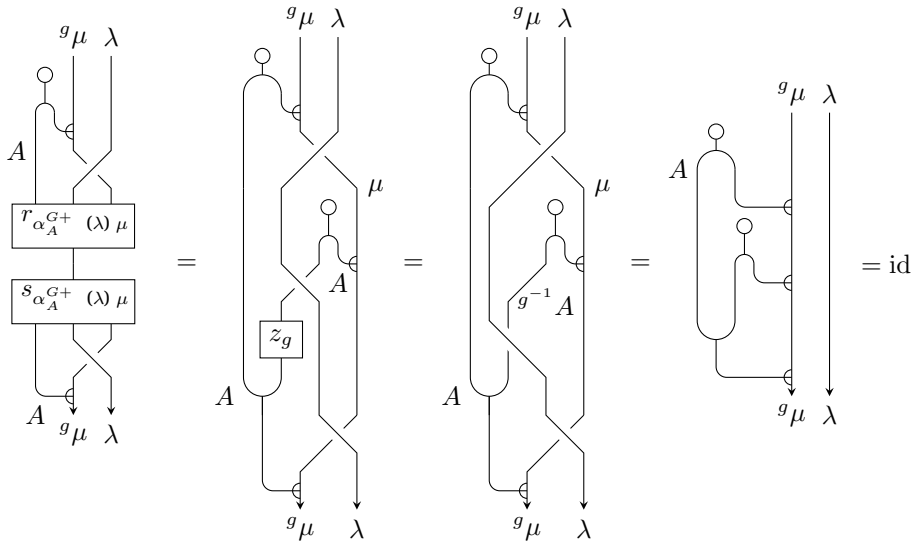


图 58：证明 B^+_λ，μ 的右可逆性

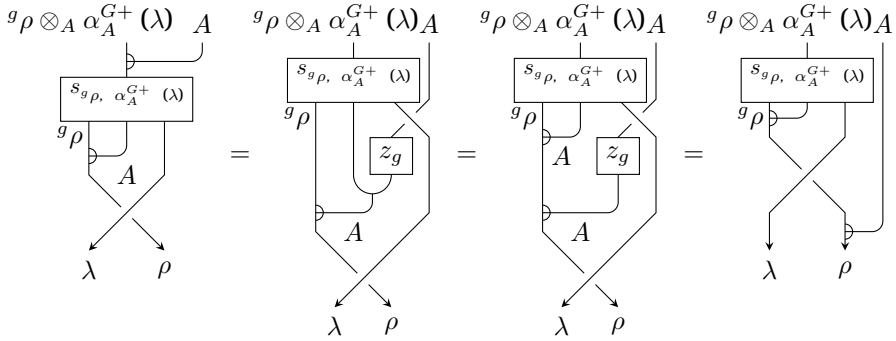


图 59：B^+_ρ 的右 A-模性，λ

引理 5.13. 设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的中性对称特殊 G-等变 Frobenius 代数。那么，对于 $\lambda \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$ 中的齐次左 A-模 μ，有 $B^+_{{}^g\lambda,{}^g\mu} = {}^gB^+_{\lambda,\mu}(\tilde\eta^g_\lambda \otimes_A \mathrm{id}_{{}^g\mu})$ 和 $B^-_{{}^g\lambda,{}^g\mu} = {}^gB^-_{\lambda,\mu}({}^{g\partial\mu g^{-1}}\tilde\eta^g_\lambda \otimes_A \mathrm{id}_{{}^g\mu})$，其中 $\tilde\eta^g_\lambda := z_g^{A-1} \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{id}_{{}^g\lambda}$，且 $g \in G$。类似地，对于 $\mathcal{C}$ 中的齐次右 A-模 ρ，有 $B^+_{{}^g\rho,{}^g\lambda} = {}^gB^+_{\rho,\lambda}(\mathrm{id}_{{}^g\rho} \otimes_A \tilde\eta^g_\lambda)$ 和 $B^-_{{}^g\rho,{}^g\lambda} = {}^gB^-_{\rho,\lambda}(\mathrm{id}_{{}^g\rho} \otimes_A \tilde\eta^g_\lambda)$。

证明。令 $z := z^A$。由于 ${}^gz_\lambda^{-1}z_g^{-1} = z^{-1}_{g\partial\lambda}$，由 s 的自然性和 $m^{\mathrm{L}}_{\lambda,\mu}$ 的定义可得 ${}^gB^+_{\lambda,\mu} = B^+_{{}^g\lambda,{}^g\mu}(\tilde\eta^g_\lambda \otimes_A \mathrm{id}_\mu)$。关于 B^+_ρ，λ 的证明类似。关于 $B^-_{\lambda,\mu}$ 的结论由 $z_g^{-1}z_{g\partial\mu g^{-1}}{}^{g\partial\mu g^{-1}}z_g = z_g^{-1}z_{g\partial\mu} = {}^gz_{\partial\mu}$ 得出。 □

引理 5.14. 设 A 是一个中性特殊对称的 G-等变 Frobenius 代数，且属于一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$。那么，图 图 60 中的等式对 $\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ 中的齐次左 A-模 μ 和齐次右 A-模 ρ均成立。

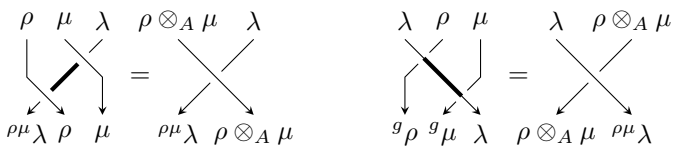


图 60：粗交叉与普通交叉

证明。我们只证明第一个等式，因为另一个等式的证明类似。将 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 中的典范态射明确写成 $\mathcal{C}$ 中的态射后，我们发现，在 $(B^+_\lambda\ ,\mu)^{-1}$ 的定义中，${}^{r}{}_{\alpha^{G-}_A\ (\mu\lambda)\ \mu}$ 和 ${}^{s}{}_{\rho,\alpha^{G-}_A\ (\mu\lambda)}$ 会抵消，且 B^-_ρ ，λ 也会抵消。因此，图 60 中第一个等式的左边等于 $(\mathrm{id}_{\rho\mu\lambda}\otimes r_{\rho,\mu})b^{\mathcal{C}}_{\rho\mu,\lambda}(e_{\rho,\mu}s\otimes\mathrm{id}_\lambda)=b^{\mathcal{C}}_{\rho\otimes_A\mu,\lambda}$。

□

借助这个引理，当弧内包含一条粗线段时，我们可以像图15 所示那样让弧沿着交叉移动。另一方面，当粗线段位于弧外时，我们需要更多论证才能移动弧。

引理 5.15. 设 A 是一个中性对称特殊 G-等变 Frobenius 代数，位于一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中。那么，对于 $\lambda\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g)$ 中的齐次左 A-模 μ （属于 $\mathcal{C}$ ）以及 A-模 ρ （属于 $\mathcal{C}$），图61 中的等式成立。对于α^{G-}_A ，也有类似的等式。

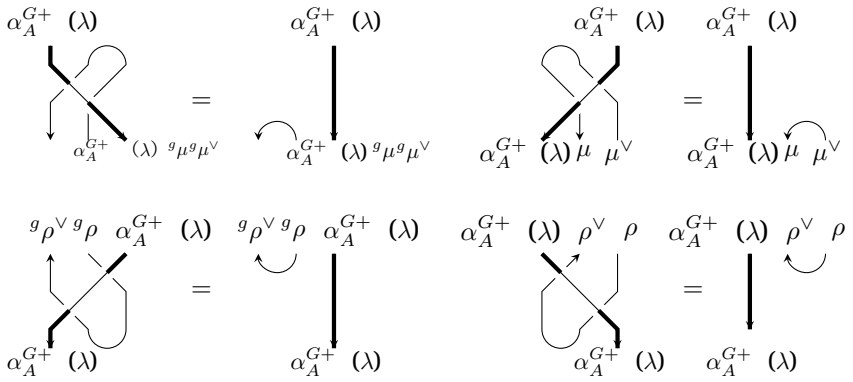


图 61：弧与粗交叉

证明。 我们只展示第一个等式，因为其他等式的证明与此类似。通过将 $\mathrm{Frob}^G(\mathcal{C})$ 中的典范态射明确写成 $\mathcal{C}$中的态射，我们发现，图 61 中第一个等式的左边和右边分别等于 ${}^{r}{}_{{}^{g}\mu{}^{g}\mu^\vee,\alpha^{G+}_A\ (\lambda)}$ ${}^{f}{}s_{\alpha^{G+}_A\ (\lambda)\ A}$，其中 f 分别由图 62中最左侧和最右侧的图示给出，由此证明了该结论。注意，在第二个等号处，我们用到了 coev$_\mu$ 如图 30 所示，与双模的情形相同。

□

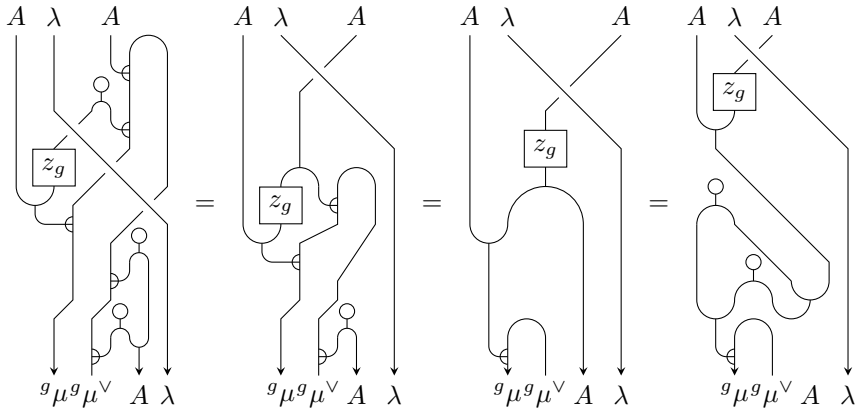


图 62：图 61

由于 $\alpha^{G\pm}_A$ 是张量函子，因此保持弧不变，我们也可以根据以下引理移动粗弧。

引理 5.16。 设 A 是一个中性对称特殊的 G-等变 Frobenius 代数，属于一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$。那么，图 63 中的等式对 $\lambda_1 \in$对象$(\mathcal{C}_{g_1})$、$\lambda_2 \in$对象$(\mathcal{C}_{g_2})$、属于 A-模 μ 的齐次左模 $\mathcal{C}$ 以及齐次右 A-模 ρ成立。类似结论也适用于 α_A^{G-} 。

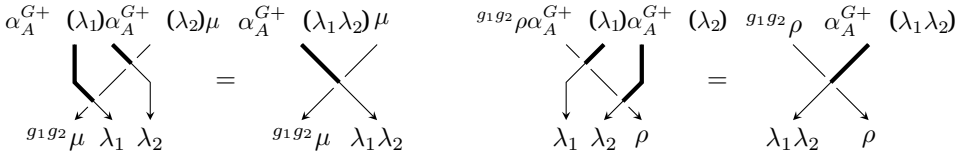


图 63：粗交叉与幺半群积

证明。我们只证明第一个等式，因为其他等式的证明类似。通过与引理 5.14 的证明类似的论证，我们看到，图 63 中第一个等式的左边等于 $f(\mathrm{id}_{A\lambda} \otimes {}^{s}{}_{\alpha_A^{G+}(\lambda_2)}\mu)^{s}{}_{\alpha_A^{G+}(\lambda_1)\alpha_A^{G+}(\lambda_2)\otimes_A\mu}$，其中 f 由图 64 中最左侧的图给出，且 $z := z^A$。另一方面，由于 ${}^{r}{}_{\alpha_A^{G+}(\lambda_1)\alpha_A^{G+}(\lambda_2)}$ 由图 34 给出，图 63 中第一个等式的右边等于 $f(\mathrm{id}_{A\lambda} \otimes {}^{s}{}_{\alpha_A^{G+}(\lambda_2)}\mu)^{s}{}_{\alpha_A^{G+}(\lambda_1)\alpha_A^{G+}(\lambda_2)\otimes_A\mu}$，其中 f 由图 64 中最左侧的图给出，由此得证。

□

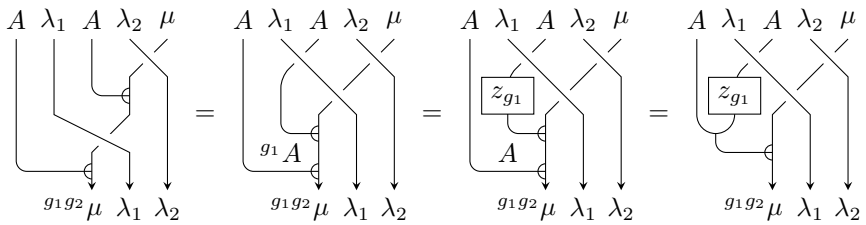


图 64：图 63的证明

推论 5.17。 设 A 是一个中性、对称、特殊 G-等变 Frobenius 代数，位于一个G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$中。那么，图 65 中的方程对于 $\lambda \in$ 对象$(\mathcal{C}_g)$ 中的齐次左 A-模 μ 以及 $\mathcal{C}$ 中的齐次右 A-模 ρ成立。类似的结论也适用于 α_A^{G-} 。

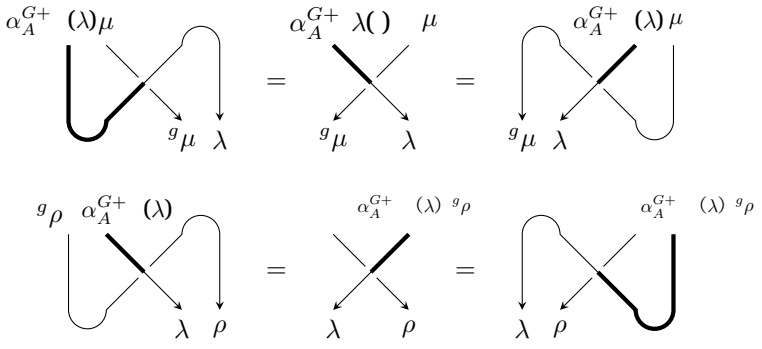


图 65：粗交叉的旋转

证明。 引理的证明中相同的论证 2.16 可用于引理 5.14、5.15 和5.16。

□

接下来，我们将 Hom($\alpha_A^{G+}(\lambda)\alpha_A^{G-}(\mu)$) 描述为 G局部态射空间的等变版本 [BKL15，定义 414]。

定义 5.18。设 A 是一个中性、对称、特殊的 G-等变 Frobenius 代数，位于一个 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$中。对于 $\lambda \in$ 对象($\mathcal{C}$)，我们将态射 $\tilde{P}_A^G(\lambda) \in$ 自函子范畴($A\lambda$)中的态射定义为图66所示的态射，其中 $z := z^A$。

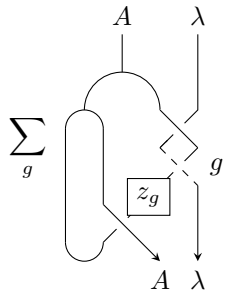


图 66： $\tilde{P}_A^G(\lambda)$

注 5.19。注意，命题 $P_A^G(\lambda)$的定义5.4 要求 $\lambda \in$ 对象($\mathcal{C}^G$)，但不要求 A 是中性的；而 $\tilde{P}_A^G(\lambda)$的定义要求 A 是中性的，但不要求 $\lambda \in$ 对象($\mathcal{C}^G$)。若 $\lambda \in$ 对象($\mathcal{C}^G$)且 A 是中性的，则根据定义 $P_A^G(\lambda) = \tilde{P}_A^G(\lambda)$。

引理 5.20。设 A 是 G-编织多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性、对称、特殊的 G-等变 Frobenius 代数。那么，对于任意 $\lambda \in$ Obj($\mathcal{C}$)，$\tilde{P}_A^G(\lambda)$ 都是一个幂等元。

证明。 证明与 [BKLR15，引理 426]中的证明类似。事实上，该结论可由图 67中的图示计算得出，其中我们只给出了关于等变结构的计算。

□

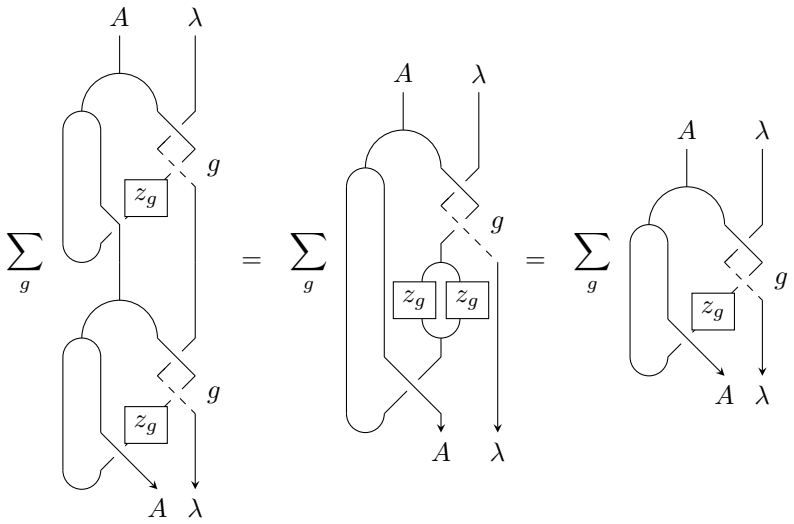


图 67： $\tilde{P}_A^G(\lambda)$ 是一个幂等元

引理 5.21。设 A 是 G-带状多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个中性对称特殊 G-等变 Frobenius 代数。对于 λ, $\mu \in$ 对象($\mathcal{C}_g$)，定义有限维向量空间

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}^G(A\lambda, \mu) := \{f \in \mathrm{Hom}(A\lambda, \mu) \mid f \circ \tilde{P}_A^G(\lambda) = f\}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}^G(\mu, A\lambda) := \{f \in \mathrm{Hom}(\mu, A\lambda) \mid \tilde{P}_A^G(\lambda) \circ f = f\}.$$

则 $\mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(\lambda,\ A\mu) \cong \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda)\,\alpha_A^{G-}(\mu))$，映射为

$$I^A_{\lambda,\mu} : \mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(\lambda, A\mu) \to \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda), \alpha_A^{G-}(\mu))$$

定义见图 68 中关于 $f \in \mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(\lambda, A\mu)$，其中 ${}_AA$（分别 ${}_A{}^gA$，分别 A_A）表示 A 作为左A-模（分别为 ${}^gA$ 作为左 A-模，分别为 A 作为右 A-模）。注意，根据 ${}_AA^\vee = {}^\vee_AA = A_A$Yam04第 5] 节。类似地，我们有同构

$$\tilde{I}^A_{\lambda,\mu} : \mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(A\mu, \lambda) \to \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G-}(\mu), \alpha_A^{G+}(\lambda))$$

定义见图 70 中关于 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(A\mu, \lambda)$。

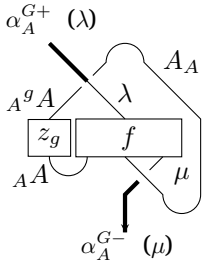


图 68：$I^A_{\lambda,\ \mu}(f)$

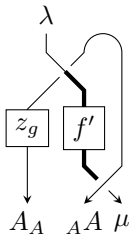


图 69：$I^{A-1}_{\lambda\ ,\ \mu}(f')$

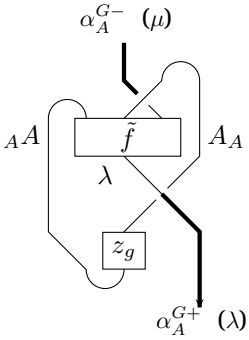


图 70：$\tilde{I}^A_{\lambda,\ \mu}(f)$

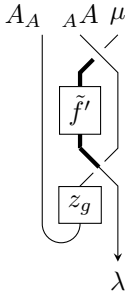


图 71：$\tilde{I}^{A-1}_{\lambda\ ,\ \mu}(\tilde{f}')$

证明。我们只展示 $\mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(\lambda, A\mu)$ 的结论，因为 $\mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(A\lambda, \mu)$ 的证明更简单。我们证明，对于 $f' \in \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda)\ \alpha_A^{G-}(\mu))$，$I^{A-1}_{\lambda\ ,\mu}$ 在典范同构 $A_A \otimes_A {}_AA \cong A$意义下由图 69 中的态射给出。根据图 72 中的图示计算，利用引理 5.14 和推论 5.17，可以进行与 [BKL15, 引理 4.16] 的证明中类似的图示计算，并得出 $I^{A-1}_{\lambda\ ,\mu} \circ I^A_{\lambda,\mu}(f)$ 等于图 73 中的态射，这是由图 72 中的图示计算得出的。接着，根据图 73 中的图示计算（其中第三个等式可由与 [BKLR15, 引理 4.26], 的证明类似的论证得到），我们得到 $I^{A-1}_{\lambda\ ,\mu} \circ I^A_{\lambda,\mu}(f) = \tilde{P}^G_A(\lambda)f = f$。我们也可以像 [BKL15, 引理 4.16] 的证明中那样，利用引理 5.15 和图 74 中的图示计算，验证 $I^{A-1}_{\lambda\ ,\mu}$确实是右逆。 □

注 5.22. 当 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织 *-多张量范畴，且 A 是一个 G-等变 Q-系统时，图 73 展示了，对于 $\lambda = A\mu$ 和 $f = \mathrm{id}_{A\mu}$，$\tilde{P}^{G+}_A(\mu)$ 是一个投影，如 [BKLR15，引理 426]所示。

引理5.23。 设 A 是 G- 带状多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个中性对称特殊 G-等变 Frobenius 代数，并且 $\lambda,\ \mu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$。那么，对于 $f' \in \mathrm{Hom}(\alpha_A^{G+}(\lambda)\ \alpha_A^{G-}(\mu))$ 和 $g \in G$，有 ${}^gI^{A-1}_{\lambda\ ,\ \mu}(f') = \tilde{\eta}^g_\mu I^{A-1}_{{}^g\lambda\ ,\ {}^g\mu}(\tilde{\eta}^{g^{-1}g}_\mu f' \tilde{\eta}^g_\lambda)$。

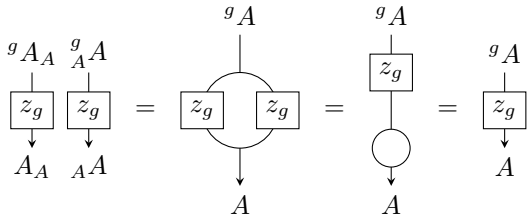


图 72: $z_g \otimes_A z_g = z_g$

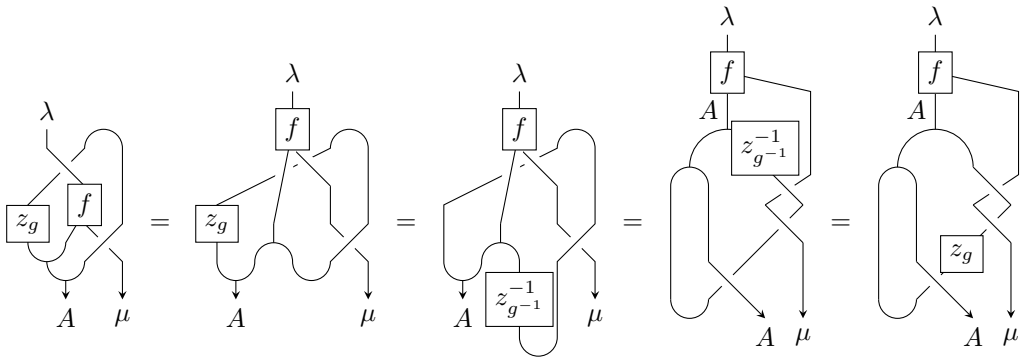


图 73: $I_\lambda^{A^{-1}}{}_{,\mu} \circ I^A_{\lambda,\mu}(f)$

证明。令 $z := z^A$ 并令 $\partial\lambda = h$。由引理 5.13，$\tilde{\eta}_\mu^{g^{-1}g} I_{\lambda\,\mu}^{A^{-1}}{}_{,}(f'$由图 75中的态射给出。因此，图示计算表明结论成立。我们在第一个等式中使用了 $\mathrm{coev}_{A_A} = \eta_A$（见 [Yam04，第 5]节），在第二个等式中使用了 $z_g{}^g z_h{}^{ghg^{-1}} z_g^{-1} = z_g{}^g z_h{}^{gh} z_{g^{-1}} = z_{ghg^{-1}}$。

□

引理5.24. 设 A 是 G-带状多张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的中性对称特殊 G-等变 Frobenius 代数，并设 λ, $\mu \in \mathrm{Homog}(\mathcal{C})$。那么，非退化配对 $\mathrm{Hom}(A\mu, \lambda) \times \mathrm{Hom}(\lambda, A\mu)$ 限制为 $\mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(A\mu, \lambda) \times \mathrm{Hom}^G_{\mathrm{loc}}(\lambda, A\mu)$。此外，引理 5.21 中定义的映射 $I^A_{\lambda,\mu}$ 和 $\tilde{I}^A_{\lambda,\mu}$ 关于此配对是等距的。若 $\mathcal{C}$ 是一个 G-带状 *-多张量范畴，且 A 是一个 G-等变 Q-系统，则这些映射是酉的。

证明。第一条结论由引理 5.20 得出。第二条结论由类似于 [BKL15 中引理 4 证明的图示计算得出。16] 由引理 5.14。注意，α_A^{G+} 是枢轴的，因此保持迹。最后一条结论由粗交叉的酉性得出。

□

最后，我们可以证明本文的第二个主要定理，它是 [BKL15命题 418]的等变推广。

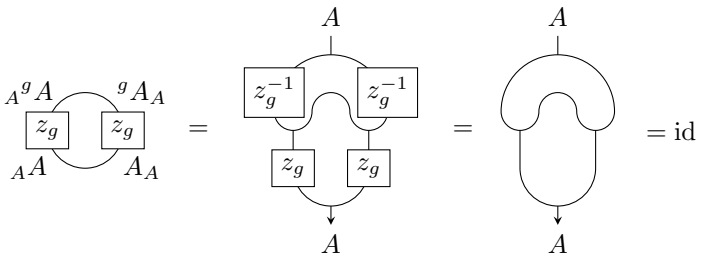


图 74: $z_g \otimes z_g = \mathrm{id}_A$

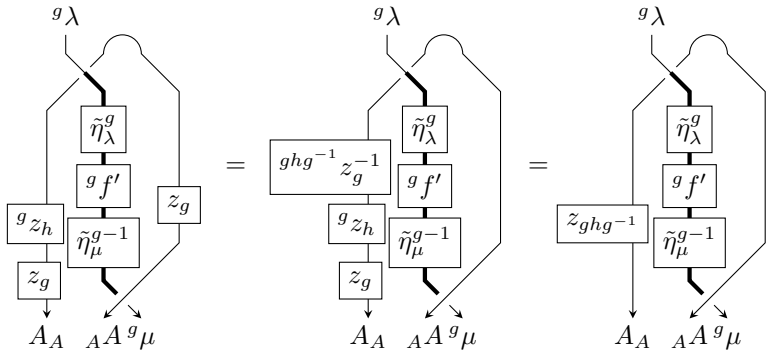


图 75：引理5.23的证明

定理 5.25. 设 A 是分裂球形 G-编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 中一个中性的、对称的、特殊的简单 G-等变 Frobenius 代数，且其维数为 $\dim \mathcal{C} \neq 0$。那么， A（定义 5.11）的 G-等变 full center $Z^G(A)_{\dim A}$，其中下标 $\dim A$ 表示我们在命题 5.3 中取 $\zeta = \dim A$，与和 A 相关联的 G-等变 α-诱导 Frobenius 代数$\Theta_\alpha^G(A)$（定理 4.15）同构。若 $\mathcal{C}$ 是一个 G-编织 *-多张量范畴，且 A 是一个 G-等变 Q-系统，那么这两个 Q-系统之间存在同构。

证明。根据引理5.8和5.9，我们有 $P^{G}{}_{(A\boxtimes\mathbf{1})\Theta_{\mathrm{LR}}^G} = P^G_{A\boxtimes\mathbf{1}}(C^G(\Theta_{\mathrm{LR}}^G)) = P^G_{A\boxtimes\mathbf{1}}(\Theta_{\mathrm{LR}}^G)$，因为 Θ_{LR}^G根据命题 G4.19 的结果是4.19。因此，根据 [FFRS06，引理 2.4(ii)] 以及半单性，我们有

$$Z^G(A) = \bigoplus_{\lambda_1,\lambda_2\in\Delta} \langle \lambda_1, A\lambda_2\rangle_{\mathrm{loc}}^G \lambda_1 \boxtimes \lambda_2^\vee$$

作为一组完备代表元 Δ，它代表 $\mathcal{C}$的简单对象。因此，根据引理5.21， $Z^G(A) \cong \Theta_\alpha^G(A)$ 作为对象。

根据引理5.24，我们可以看到，对于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}^G(\lambda_1, A\lambda_2)$ 的一组基 $\{\varphi_l^L\}_l$ 及其对偶基 $\{\tilde{\varphi}_l^L\}_l$（属于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}^G(A\lambda_2, \lambda_1)$），态射 $s_{Z^G(A)} := \bigoplus_L \varphi_l^L \boxtimes \mathrm{id}_{\lambda_2}$ 和 $r_{Z^G(A)} := \bigoplus_L \tilde{\varphi}_l^L \boxtimes \mathrm{id}_{\lambda_2}$，其中$L := (\lambda_1, \lambda_2, l)$，如 BKL15 引理4.15]所示，将幂等元 $P^{G+}_{A\boxtimes\mathbf{1}}(\Theta_{\mathrm{LR}}^G)$ 分裂。然后，仿照 BKL15 命题4.18], 的证明，我们可以看到 $Z^G(A)_{\dim A} \cong \Theta_\alpha^G(A)$ 作为 Frobenius 代数是同构的。也就是说，由于归一化 $\zeta = \dim A$，它们的单位和余单位在同构意义下重合。为了证明余乘法重合，只需计算图 76中的量，它是 $e^{\nu_1,\ \lambda_1\mu_1}_{i} \boxtimes \tilde{e}^{\nu_2,\ \lambda_2\mu_2}_{\ j}$的系数（相差一个 $\overline{d_A d_{\lambda_2} d_{\mu_2}/d_{\nu_2} d_{\nu_1}}$），与 [BKL15 命题 4 的证明中一样。18]接着，根据其中的图示计算，余乘法相同。令 $\phi_l^L := I^A_{\lambda_1,\ \lambda_2}(\varphi_l^L)$，并在第一个等号处使用了引理 5.24 。注意，第二个等号成立，是因为该量仅在 $\partial\nu_1 = \partial\lambda_1\partial\mu_1$时非零。第三个等号的推导与 [BKL15 命题 4 的证明相同。18]乘法的证明类似。

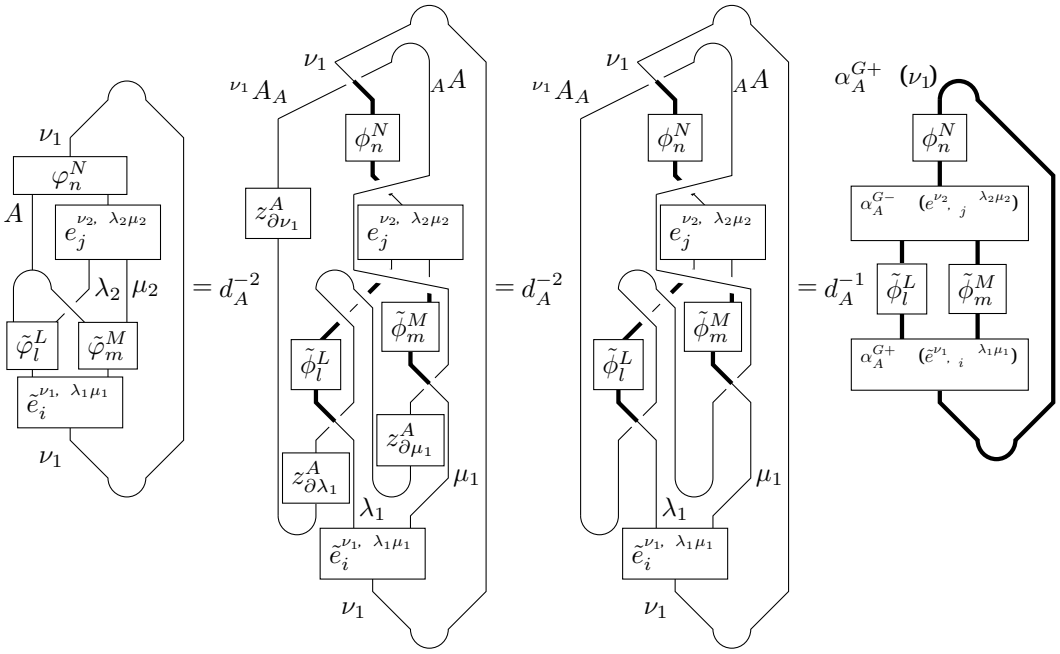


图76：余乘法的重合

我们证明它们确实是 G-等变弗罗贝尼乌斯代数的同构。由于

$$z_g^{Z^G(A)} = \bigoplus_{L,m} \tilde{\varphi}_m^{L(g)}(z_g \otimes u_g^{\lambda_2})^g \varphi_l^L \boxtimes \overline{\tilde{u}_g^{\lambda_2}} = \bigoplus_{L,m} \frac{1}{d_{\lambda_1}} \mathrm{Tr}(\tilde{u}_g^{\lambda_1} \tilde{\varphi}_m^{L(g)}(z_g \otimes u_g^{\lambda_2})^g \varphi_l^L) u_g^{\lambda_1} \boxtimes \overline{\tilde{u}_g^{\lambda_2}}$$

对于 $g \in G$。随后，系数中的迹如图77所示，这表明等变结构相同。第一次等号处使用了引理5.23，第二次等号处使用了 $\partial^g \lambda_1 = \partial \lambda_1(g)$。最后一个结论由此得出，因为根据引理，$\{\phi_l^L\}_l$ 是一个标准正交基5.24。

□

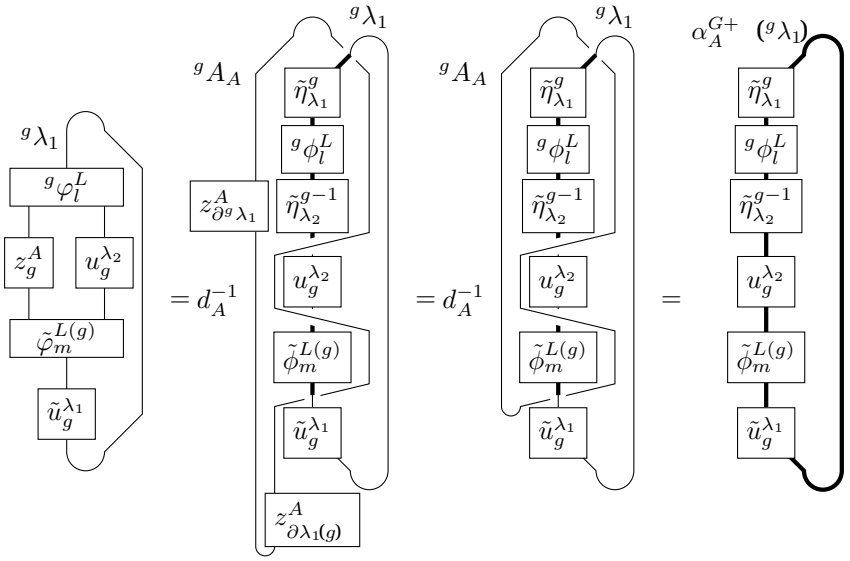


图77：等变结构的重合

致谢

作者感谢导师 Yasuyuki Kawahigashi 一直以来的支持与建议。特别感谢他建议研究等变 α-诱导。作者感谢 Roberto Longo 解答了自己的问题。感谢 Sebastiano Carpi 对注2.25的评论。感谢 Kan Kitamura 对本文早期草稿提出意见。感谢审稿人提供的详细意见和建议。本研究得到 RIKEN 初级研究员计划和 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP23KJ0540 的支持。作者感谢他们提供的经费支持。

声明

经费资助： 本研究得到 RIKEN 初级研究员计划和日本学术振兴会科研费的资助，项目编号为 JP23KJ0540。

利益冲突/竞争性利益： 作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

参考文献

[BE98] Jens B¨ockenhauer 和 David E. Evans。子因子网的模不变量、图与 α-诱导。I。《数学物理通讯》，197(2):361–386，1998。[BE99a] Jens B¨ockenhauer 和 David E. Evans。子因子网的模不变量、图与 α-诱导。II。《数学物理通讯》，200(1):57–103，1999。[BE99b] Jens B¨ockenhauer 和 David E. Evans。子因子网的模不变量、图与 α-诱导。III。《数学物理通讯》，205(1):183–228，1999。[BEK99] Jens B¨ockenhauer、David E. Evans 和 Yasuyuki Kawahigashi。关于子因子的 α-诱导、手征生成元与模不变量。《数学物理通讯》，208(2):429–487，1999。[BEK00] Jens B¨ockenhauer、David E. Evans 和 Yasuyuki Kawahigashi。子因子模不变量的手征结构。《数学物理通讯》，210(3):733–784，2000。[BGM19] Eugenia Bernaschini、C´esar Galindo 和 Mart´ín Mombelli。2-范畴上的群作用。《数学手稿》，159(1-2):81–115，2019。[BJLP19] Marcel Bischoff、Corey Jones、Yuan-Ming Lu 和 David Penneys。任意子凝聚导致的自发对称性破缺。《高能物理杂志》，2(62):前置内容+41，2019。[BKL15] Marcel Bischoff、Yasuyuki Kawahigashi 和 Roberto Longo。二维有理局部共形网及其边界条件的刻画：极大情形。《数学文献》，20:1137–1184，2015。[BKLR15] Marcel Bischoff、Yasuyuki Kawahigashi、Roberto Longo 和 Karl-Henning Rehren。张量范畴与冯·诺依曼代数的端同态——及其在量子场论中的应用，《Springer 数学物理简明读物》第3卷。Springer，尚，2015。[CIZ87] Andrea Cappelli、Claude Itzykson 和 Jean-Bernard Zuber。极小共形不变理论的 A-D-E 分类。《数学物理通讯》，113:1–26，1987。[CP22] Jonathan A. Campbell 和 Kate Ponto。幺半 2-范畴中的黎曼-罗赫定理。arXiv 预印本 arXiv:2203.04351，2022。[Del90] Pierre Deligne。坦纳范畴。载于《格罗滕迪克纪念文集》第二卷，《数学进展丛书》第87卷，第111–195页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990。

[DHR71] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。局域可观测量与粒子统计。I。《数学物理通讯》，23:199–230，1971。[DHR74] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。局域可观测量与粒子统计。II。《数学物理通讯》，35:49–85，1974。[DMNO13] Alexei Davydov、Michael M¨uger、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。非退化辫融合范畴的 Witt 群。《纯粹与应用数学杂志》，677:135–177，2013。[EGNO15] Pavel Etingof 、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴，《数学调查与专著》第205卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[FFRS06] J¨urg Fr¨ohlich、J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。带状范畴的对应。《数学进展》，199(1):192–329，2006。[FFRS08] Jens Fjelstad、J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。具有给定开态代数的开闭有理共形场论的唯一性。《理论与数学物理进展》，12(6):1283–1375，2008。[FG90] J¨urg Fr¨ohlich 和 Fabrizio Gabbiani。局域量子理论中的辫统计。《数学物理评论》，2(3):251–353，1990。[FRS89] Klaus Fredenhagen、Karl-Henning Rehren 和 Bert Schroer。具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。I. 一般理论。《数学物理通讯》，125(2):201–226，1989。[FRS02] J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。有理共形场论关联函数的拓扑场论构造。I. 配分函数。《核物理B》，646(3):353–497，2002。[FS03] J¨urgen Fuchs 和 Christoph Schweigert。共形边界条件的范畴论。载于《数学与物理中的顶点算子代数》（多伦多，安大略省，2000），《菲尔兹研究所通讯》第39卷，第25–70页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[Gal17] C´esar Galindo。幺半 G-范畴与辫交叉范畴的相干性。《代数杂志》，487:118–137，2017。[GL19] Luca Giorgetti 和 Roberto Longo。具有有限维中心的2-C^*-范畴的极小指标与维数。《数学物理通讯》，370(2):719–757，2019。[GPS95] Robert Gordon、Anthony John Power 和 Ross Street。三范畴的相干性。《美国数学会回忆录》，117(558):vi+81，1995。[Gur13] Nick Gurski。三维范畴论中的相干性，《剑桥数学论丛》第201卷。剑桥大学出版社，剑桥，2013。[Kat87] Akishi Kato。二维模不变配分函数的分类。《现代物理快报A》，2(8):585–600，1987。[Kir04] Alexander Kirillov, Jr. 关于 G–等变模范畴。arXiv 预印本 math/0401119，2004。[KL04a] Yasuyuki Kawahigashi 和 Roberto Longo。局域共形网的分类。情形$c < 1$。《数学年刊》（第2辑），160(2):493–522，2004。[KL04b] Yasuyuki Kawahigashi 和 Roberto Longo。具有 $c < 1$ 且张量范畴的二阶上同调消失的二维局域共形网分类。《数学物理通讯》，244(1):63–97，2004。

[KLM01] Yasuyuki Kawahigashi、Roberto Longo 和 Michael M¨uger。《共形场论中多区间子因子与表示的模性》。《数学物理通讯》，219(3):631–669，2001。[KR09] Liang Kong 和 Ingo Runkel。《Cardy代数与缝合约束》. I.《数学物理通讯》，292(3):871–912，2009。[Lei04] Tom Leinster。《高阶歌剧、高阶范畴》，伦敦数学会讲义系列第298卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004。[LF13] Ignacio L´opez Franco。《有限余完备阿贝尔范畴的张量积》。《代数杂志》，396:207–219，2013。[Lon94] Roberto Longo。《霍普夫代数与子因子的对偶性》. I.《数学物理通讯》，159(1):133–150，1994。[LR95] Roberto Longo 和 Karl-Henning Rehren。《子因子网》。《数学物理评论》，7(4):567–597，1995。代数量子场论与琼斯理论研讨会（柏林，1994）。[M¨ug03] Michael M¨uger。《从子因子到范畴与拓扑》. I. 张量范畴中的弗罗贝尼乌斯代数及其 Morita等价。《纯粹与应用代数杂志》，180(1-2):81–157，2003。[M¨ug05] Michael M¨uger。《共形轨形理论与编织交叉 G-范畴》。《数学物理通讯》，260(3):727–762，2005。[Noj20] Ryo Nojima。《共形网扭曲表示的诱导》。《亨利·庞加莱年刊》，21(10):3217–3251，2020。[Ost03] Victor Ostrik。《模范畴、弱霍普夫代数与模不变量》。《变换群》，8(2):177–206，2003。[Reh00] Karl-Henning Rehren。《典范张量积子因子》。《数学物理通讯》，211(2):395–406，2000。[Tak72] Masamichi Takesaki。《冯·诺依曼代数中的条件期望》。《泛函分析杂志》，9:306–321，1972。[Tak02] Masamichi Takesaki。《算子代数理论》. I，《数学科学百科全书》第124卷。Springer-Verlag，柏林，2002。重印自第一版（1979），《算子代数与非交换几何》第5卷。[Tur00] Vladimir Turaev。《三维同伦场论与交叉群范畴》。arXiv预印本 math/0005291，2000。[Tur16] Vladimir G. Turaev。《纽结与三维流形的量子不变量》，德格鲁伊特数学研究丛书第18卷。De Gruyter，柏林，2016。第三版。[Yam04] Shigeru Yamagami。《张量范畴中的弗罗贝尼乌斯代数与双模扩张》。载于《伽罗瓦理论、霍普夫代数与半阿贝尔范畴》，《菲尔兹研究所通讯》第43卷，第551–570页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。