arXiv:2303.11871v2 [math.CV] 5 Dec 2023

多维伪 Leja 序列

DIMITRI JORDAN KENNE

Abstract. 文献 [5], 中引入的一维伪 Leja 序列，是 Leja 序列的一种替代方案，可为全纯函数的逼近提供优良的插值节点。我们提出了与复空间 $\mathbb{C}^p$ 中的紧集 K 相关联的多维伪 Leja 序列的定义，该定义既推广了一维版本，也推广了多维 Leja 序列。我们证明，这些序列可用于计算 K的超越直径。我们还给出了它们与 K相关的多复变 Green 函数之间的关系。随后，我们证明伪 Leja 序列的交织仍是伪 Leja 序列。最后，我们给出一种借助离散网格计算伪 Leja 序列的方法。

1. Introduction

我们关注如何计算适用于多变量多项式插值逼近的优良点。这里，优良点是指正则（见下文）紧集 K 中的插值节点数组；对于该数组，任意在 K的某个邻域上全纯的函数 f 所对应的拉格朗日插值多项式序列，都在K上 f 一致收敛。在单变量情形下，这类点的刻画早已广为人知（[7], [8], [18]）。相比之下，多变量情形下尚无此类刻画，目前可用的优良点实例也寥寥无几。唯一的一般性实例是 Fekete 点数组（对于 $K \subset \mathbb{C}^p$ ，Fekete 点是使给定阶数的 Vandermonde 行列式（模）最大的点，见下文）。遗憾的是，这些点无法显式确定，甚至其离散版本的数值计算也很复杂，因此它们基本上只有理论意义。除 Fekete 点外，优良点的唯一实例是由一维优良点的交织（[5], [4], [23]）以及一些特殊而显著的构形提供的，例如 $\mathbb{R}^2$ 单位正方形中的著名 Padua 点（ [10], [13], [14]）。数值实验也支持研究其他构形的价值（例如参见 [1], [12]）。

在单变量情形中，从理论角度来看，优良点的性质已得到充分理解，但要为任意正则紧集计算这类点却远非易事。 [5] 中引入了伪 Leja 序列这一概念，并据此提出了一种构造单变量优良点的方法。这种序列按如下方式递归定义：任意选取第一个点 $\xi_0 \in K$；若已得到前 j个点 ξ_0，……， ξ_{j-1}，则在 K 中选取ξ_j ，以确保

$$M_j \prod_{i=0}^{j-1} |\xi_j - \xi_i| \geq \max_{z \in K} \prod_{i=0}^{j-1} |z - \xi_i|. \tag{1}$$

Date: 2023年12月。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：32E30、41A05、41A63。
Key words and phrases. 拉格朗日插值、Leja 序列、超越直径、Green 函数、可容许网格、交织序列。

这里，(M_j) 是一个实数序列 $M_j \geq 1$, $j \geq 1$，要求其具有次指数增长。经典 Leja 点对应于特殊情形 $M_j = 1$, $j \geq 1$。关键在于，这种可能性 $M_j > 1$ 降低了点的计算难度，同时不会削弱 Leja 点的逼近质量： [5, 定理 1（第 56] 页）证明了，在上述意义下，它们是优良点（对于合理的紧集）。最近， [24]中确立了一项强有力的结果：在具有正对数容量的集合上，具有有界序列 (M_j) 的一维伪 Leja 点的 Lebesgue 常数呈次指数增长。

容易看出，式 (1) 中的乘积可以替换为范德蒙德行列式的模，这为将定义推广到更高维情形提供了方法。本文研究的正是这一推广。多变量伪 Leja 序列的精确定义见第 2 节。虽然我们无法证明多变量伪 Leja 点是好的点（在多变量情形下，即便是普通的 Leja 序列，目前也尚无此类结论），但我们证明了这些点能够重新求得 K 的多变量超越直径；而根据 Berman、Boucksom 和 Nystr¨om 的深刻结果（[3, 定理 A，第 3] 页）以及 Bloom 的结果（[9, 推论 4.5，第 1563] 页），这进而意味着它们能够恢复正则紧集 K 的多变量平衡测度和多复 Green 函数。人们通常将此视为这些点实际上应当具有上述意义下良好性质的标志，尤其是因为在单变量情形下，这些条件是等价的（见[18, 定理 1，第 65] 页，或 [8, 定理 1.5，第 446] 页）。

在第 5 节中，我们将简要说明如何计算伪 Leja 点，并指出离散 Leja 点可以视为伪 Leja 点的例子。

我们还将证明多变量伪 Leja 序列的一项有趣的稳定性。粗略地说，通过以某种特定方式交错排列针对 $K_1 \in \mathbb{C}^{p_1}$ 的伪 Leja 序列中的点和针对 $K_2 \in \mathbb{C}^{p_2}$ 的伪 Leja 序列中的点，我们可以得到针对乘积 $K_1 \times K_2$ 的伪 Leja 序列，见 4。

为方便读者，我们现在回顾多变量插值中的标准记号和基本定义。多重指标将按照分次字典序排列，因此，如果 $|\alpha| < |\beta|$ 或 $|\alpha| = |\beta|$，且 $\alpha - \beta$ 最左侧的非零元素为负，则 $\alpha \prec \beta$。我们将 $\mathbb{N}^p$ 中的元素按递增顺序排列为 $\kappa = \kappa^{(p)}$ （相对于 $\prec$），

$$\kappa = \kappa^{(p)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^p. \tag{2}$$

因此，当 $p = 2$ 时，我们有

$$\kappa(0) = (0,0) \prec \kappa(1) = (0,1) \prec \kappa(2) = (1,0) \prec \kappa(3) = (0,2) \\ \prec \kappa(4) = (1,1) \prec \kappa(5) = (2,0) \prec \kappa(6) = (0,3) \prec \dots.$$

p 个复变量的单项式记作如下

$$e_N(z) = z^{\kappa(N)} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_p^{\alpha_p}, \quad \kappa(N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p). \tag{3}$$

我们将使用由前 N 个单项式张成的多项式空间:

$$\mathcal{P}_N = \mathbf{span}\{e_i : \ i = 0, \dots, N-1\}, \quad N \geq 1.$$

T总次数不超过 d 的经典多项式空间的维数为 n

$$h_d = \binom{p+d}{d},$$

thus

$$N = h_d - 1 \implies \mathcal{P}_N = \mathbf{span}\{z \to z^\alpha \ : \ |\alpha| \leq d\}.$$

点集 $\xi_0, \dots, \xi_q$ 在 $\mathbb{C}^p$ 中的范德蒙德行列式定义为

$$\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_q) = \det\left[e_N(\xi_M)\right]_{0 \leq M, N \leq q}. \tag{4}$$

特别地， $\mathrm{VDM}(\xi_0) = 1$。注意，其模与点的排列顺序无关。范德蒙德行列式是点 ξ_j 坐标的多项式，因此是关于 $p(q+1)$ 个变量的多项式。因此，其在 $q = h_d - 1$ 中的次数为

$$l_d = \sum_{i=1}^{d} i(h_i - h_{i-1}) = p\binom{p+d}{p+1}. \tag{5}$$

给定一个由 N 个点组成的集合 $\Omega_N = \{\zeta_{N0}, \ldots, \zeta_{NN}\} \subset \mathbb{C}^p$，其范德蒙德行列式非零，我们可以构造基本拉格朗日插值多项式（FLIP）

$$l_j^{(N)}(z) = \frac{\mathrm{VDM}(\zeta_{N0}, \ldots, \zeta_{N(j-1)}, z, \zeta_{N(j+1)} \cdots, \zeta_{NN})}{\mathrm{VDM}(\zeta_{N0}, \ldots, \zeta_{NN})}, \quad j = 0, \ldots, N. \tag{6}$$

注意， $l_j^{(N)}$ 是 $\mathcal{P}_{N+1}$ 的一个元素。对于定义在 Ω_N 中各点处的函数 f，

$$L_{\Omega_N} f(z) = \sum_{j=0}^{N} f(\zeta_{Nj}) l_j^{(N)}(z) \tag{7}$$

这是 f 在 $\mathcal{P}_{N+1}$ 上、以 Ω_N 中各点为插值节点的拉格朗日插值多项式（LIP）。特别地，

$$f \in \mathcal{P}_{N+1} \implies f = L_{\Omega_N} f(z). \tag{8}$$

本文中所考虑的紧集 K 均假定为（多项式）决定集。这意味着没有非零多项式在 K 上恒为零。等价地， K 不包含于任何代数集。该性质也可以用范德蒙德行列式来表述。具体而言，令

$$V_j(K) = \max_{\xi_0, \ldots, \xi_{j-1} \in K} |\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{j-1})|, \quad j \geq 1, \tag{9}$$

那么， K 是决定集，当且仅当没有 $V_j(K)$ 恒为零。充分性可由应用式（8）得到。为证明必要性，假设 $V_{N-1}(K) \neq 0$ 对于 $1 \leq j < N$ 成立，但 $V_N(K) = 0$，并令 $\{\xi_0, \ldots \xi_{N-1}\} \subset K$ 满足 $\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots \xi_{N-1}) \neq 0$。多项式 $Q_N(z) = \mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}, z)$ 在 K 上恒为零，但它并非零多项式，因为其 $z^{\kappa(N)}$ 系数不为零，因此 K 不是决定集。

若需指定环境空间的维数，我们将在上述对象上添加上标，例如写作 $k^{(p)}(N)$、 $\mathcal{P}_N^{(p)}$ 等。

关于多元多项式插值现状的综述，请参阅 [7]。

2. Pseudo Leja sequences

定义 2.1。设 K 是 $\mathbb{C}^p$中的一个确定紧子集。若存在一个实数序列 $(M_j)_{j\geq 1} \subset [1, +\infty)$，满足：则称 (ξ_j) 是 K 中的一个伪 Leja 序列。

$$M_j |\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j)| \geq \max_{z \in K} |\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{j-1}, z)| \quad \text{for any } j \geq 1, \tag{10}$$

满足增长条件，

$$\lim_{d \to +\infty} (\max_{h_{d-1} \leq j < h_d} M_j)^{1/d} = 1. \tag{11}$$

我们称 $\mathcal{L}$ 为 Edrei 增长为 $(M_j)_{j\geq 1}$ 的伪 Leja 序列。

当 $p = 1$ 时，这一定义与 [5] 中给出的定义一致。Leja 序列是 Edrei 增长为 1 的伪 Leja 序列。由于 K 具有确定性，立即可知存在范德蒙德行列式非零的伪 Leja 序列。注意到，在几乎不失一般性的前提下，我们可以假设 (M_j) 单调不减；此时，(11) 可简化为一个不那么繁琐的条件。

注意，如果（ξ_j）是 K 的伪 Leja 序列，那么

$$|\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j)| > 0, \quad \text{for all } j. \tag{12}$$

这可由引言中概述的相同推理得出：如果 j 是使得 $|\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, z)| = 0$ 在 K 上成立的最小整数，那么 $P(z) = \mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, z)$ 将是一个在 K 上消失的非零多项式，这与它具有决定性相矛盾。范德蒙德行列式不为零，由此（见（7））可得以下命题。

命题 2.1. 设（ξ_i）是上述伪 Leja 序列。在 $\Omega_N = \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ 上进行拉格朗日插值总是可行的。

我们立即从增长条件推出一个推论，该推论将在下文主定理的证明中用到。

引理 2.2. 若 $\{M_j\}_{j\geq 1}$ 是满足上述定义中的性质 (11) 的实数序列，则

$$\lim_{d\to+\infty} \Big[\prod_{j=1}^{h_d-1} M_j \Big]^{1/l_d} = 1,$$

其中 l_d 定义于 (5) 中。

证明. 注意到

$$1 \leq \prod_{j=1}^{h_d-1} M_j \leq \big(\max_{j=1,\dots,h_d-1} M_j \big)^{h_d} \quad \text{and} \quad \frac{h_d}{l_d} = \frac{1}{d}\left(\frac{p+1}{p}\right).$$

选取最小的 $j(d)$，使得

$$\max_{j=1,\dots,h_d-1} M_j = \max_{h_{j(d)-1}\leq j<h_{j(d)}} M_j.$$

由于它是一个非递减的整数序列，$(j(d))_{d\geq 1}$ 趋于 $+\infty$ 或最终为常数。我们分别考察这两种情况。

若 $j(d) \to \infty$，则由 (11) 得

$$\lim_{d\to+\infty} \big(\max_{h_{j(d)-1}\leq j<h_{j(d)}} M_j \big)^{1/j(d)} = 1,$$

因此，由于 $0 < j(d) \leq d$,

$$\lim_{d\to+\infty} \big(\max_{h_{j(d)-1}\leq j<h_{j(d)}} M_j \big)^{1/d} = 1.$$

如果 $j(d)$ 最终为常数，结论就更加简单，因为此时 (M_j) 有界且$h_d/l_d \to 0$。□

现在我们陈述主要的理论结果及其一个推论。 [20] 和 [8] 中针对 Leja 序列得到了类似的结果。事实上，定理 2.3 的证明方法与 Leja 序列的证明方法并无不同，只是这里我们考虑了伪 Leja 序列的 Edrei 增长。其证明推迟到下一节，届时我们将回顾所需的技术要点。

定理 2.3. 设 $K \subset \mathbb{C}^p$ 是一个决定紧集。若 $(\xi_j)_{j\geq 0} \subset K$ 是 Edrei 增长为 $(M_i)^{j\geq 1}$ 的伪 Leja 序列，则

$$\lim_{d\to+\infty} |\mathrm{VDM}(\xi_0,\ldots,\xi_{h_d-1})|^{1/l_d} = D(K), \tag{13}$$

其中 $D(K)$ 表示多变量超越直径。

得益于 R. Berman 和 S. Boucksom 的出色成果，该成果最初发表于预印本[2, 定理 1.1]，后来作为一项更一般的收敛结果的推论，与 D. W. Nystr¨om 一同发表于 [3, 定理 A]，我们可以推导出以下结论。

定理 2.4. 设 $K \subset \mathbb{C}^p$ 为一个决定紧集。若 $(\xi_j)_{j\geq 0} \subset K$ 是一个伪 Leja 序列，则归一化计数测度 $h_d^{-1}\sum_{j=0}^{h_d}[\xi_j]$ 在弱 -* 意义下收敛到 K 的平衡测度。

这里 $[\xi]$ 指的是位于 ξ 处、总质量为 1 的狄拉克测度。
设定

$$P_k(\xi) = \frac{\mathrm{VDM}(\xi_0,\ldots,\xi_{k-1},\xi)}{\mathrm{VDM}(\xi_0,\ldots,\xi_{k-1})}, \tag{14}$$

我们将看到

$$\lim_{d\to\infty}\Big(\prod_{k=0}^{h_d-1}\|P_k\|_K\Big)^{1/l_d} = D(K), \tag{15}$$

并且，借助 Bloom 的一个重要结果（[6, 推论 4.5]），我们将得到以下结论。

定理 2.5. 设 K 是 $\mathbb{C}^p$ 的一个多项式凸正则紧子集。那么

$$G_K(z) = \limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{|\kappa(N)|}\log\left(\frac{|P_N(z)|}{\|P_N\|_K}\right), \quad z\in\mathbb{C}^p\setminus K, \tag{16}$$

其中 G_K 表示 K 的多复 Green 函数。

关于上述陈述中用到的多复变位势理论概念（正则性、Green 函数、平衡测度），请读者参阅 [21]。

注意，若 K 是非决定性的，那么伪 Leja 序列最终将变得任意（只要 $V_j(K) = 0$），而定理 2.3 将显然成立（其中$D(K) = 0$）。

3. Transfinite diameter and proof of Theorem 2.3

我们将详细回顾与超越直径相关的对象和结果。我们沿用 [8] 中的表述。通常，K 表示 $\mathbb{C}^p$ 中的一个决定紧集。若无歧义，我们将用V_j 代替 $V_j(K)$，见（9）。我们将 K的 d阶超越直径记作 $D_d(K) = D_d$，并定义为

$$D_d = V_{h_d}^{1/l_d}.$$

Fekete 在 [17] 证明，对于任意紧集 $K\subset\mathbb{C}$，序列 D_d 在 $d\to\infty$时的极限存在，记作 $D(K)$。后来，[22], Leja 引入了“超越直径”这一名称，并提出了该概念在多变量情形下是否存在的问题。Zaharjuta 在著名论文 [25] 中给出了肯定答案，并展示了它与某些最小范数多项式之间的一种显著联系，下面我们将对此作介绍。

首一多项式是指相对于 $\prec$ 而言，首项等于 1 的多项式。因此，首项为 e_i 的首一多项式形式如下:

$$P(z) = e_i(z) + \sum_{0\leq j<i} c_j e_j(z) :\ c_j \in \mathbb{C}\}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

我们将这种形式记作 $\mathbf{lead}(P) = e_i$。我们将 i次切比雪夫常数τ_i of K 定义为

$$\tau_i = \inf\left\{\|P\|_K^{1/|\kappa(i)|} \ :\ \mathbf{lead}(P) = e_i\right\}. \tag{18}$$

给定标准 p-单纯形 Σ中的 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$,

$$\Sigma = \left\{\theta \in \mathbb{R}^n \ :\ \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, p\right\},$$

极限

$$\tau(K, \theta) = \limsup_{j\to+\infty, \frac{\kappa(j)}{|\kappa(j)|}\to\theta} \tau_j \tag{19}$$

称为 K 在 θ方向上的方向切比雪夫常数。现在，若我们用$\mathcal{T}_d$表示给定次数的切比雪夫常数的几何平均数,

$$\mathcal{T}_d = \big[\prod_{|\kappa(i)|=d} \tau_i\big]^{1/(h_d - h_{d-1})}, \tag{20}$$

Zaharjuta 的基本结果可表述如下。

定理 3.1. [25, 定理 1] 序列 $\mathcal{T}_d$ 收敛，当 $d \to \infty$ 时，并且有

$$\lim_{d\to\infty} \mathcal{T}_d = \exp\left[\frac{1}{meas(\Sigma)} \int_\Sigma \log(\tau(K, \theta))\ d\theta\right] = D(K) \tag{21}$$

其中 $\mathbf{meas}(\Sigma)$ 表示该单纯形的标准体积。

我们需要对上述结果进行“均值修正”。

推论 3.2. 有

$$\lim_{d\to\infty} \big[\prod_{j=1}^{d} \mathcal{T}_j^{r_j}\big]^{1/l_d} = D(K) \tag{22}$$

其中 $r_j = j(h_j - h_{j-1})$，对于 $j \geq 1$。

该推论由定理 3.1 得出，所用的是以下 Cesàro 型经典引理（证明从略），其中 $u_d = \log(\mathcal{T}_d)$ 和 $\theta_{d,j} = r_j/l_d$。

引理 3.3. 设 (u_d) 是一个收敛到 A 的实数序列。考虑一个满足以下条件的非负数组 $\theta_{d,j}$, $d, j \in \mathbb{N}^\star$

$$\lim_{d\to+\infty} \max_{j=1\ldots,d} \theta_{d,j} = 0 \quad and \quad \sum_{j=1}^{d} \theta_{d,j} = 1,\ d \in \mathbb{N}.$$

那么序列

$$s_d = \sum_{j=1}^{d} \theta_{d,j} u_j,\ d \in \mathbb{N},$$

也收敛到 A。

至此，我们已经汇集了证明定理 2.3 所需的材料。

定理 2.3 的证明。设 $L_k = |\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1})|$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立。由 (9) 和 (12) 可得

$$0 < L_k \leq V_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

回顾一下，(14) 中定义的多项式 P_k 为

$$P_k(\xi) = \frac{\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}, \xi)}{\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1})} = e_k(\xi) + \sum_{0 \leq j < k} c_j e_j(\xi), \tag{24}$$

注意到

$$P_k \in \mathcal{P}^k, \quad \mathbf{lead} P_k = e_k, \quad \deg(P_k) = \deg(e_k) = \kappa(k).$$

根据伪 Leja 序列的定义，可得

$$|P_k(\xi_k)| = \frac{L_{k+1}}{L_k} \geq \frac{M_k^{-1} \max_{\xi \in K} \mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}, \xi)}{\mathrm{VDM}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1})} \geq M_k^{-1} \|P_k\|_K.$$

因此，根据 τ_k 的定义（见 (18)），可得

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} \geq M_k^{-1} \|P_k\|_K \geq M_k^{-1} \tau_k^{|\kappa(k)|}. \tag{25}$$

利用 (23) 并对上述不等式迭代，我们推得，对于 $d \geq 0$

$$V_{h_d} \geq L_{h_d} = \frac{L_{h_d}}{L_{h_d - 1}} \times \frac{L_{h_d - 1}}{L_{h_d - 2}} \times \cdots \times \frac{L_2}{L_1} \tag{26}$$

$$\geq \Big[\prod_{j=1}^{h_d - 1} M_j \Big]^{-1} \Big[\prod_{j=1}^{h_d - 1} \tau_j^{|\kappa(j)|} \Big]. \tag{27}$$

考虑到 (20) 中 $\mathcal{T}_i$ 的定义，我们可以将上面乘积中的各项重新排列如下：

$$\prod_{j=1}^{h_d - 1} \tau_j^{[\kappa(j)|} = \prod_{i=1}^{d} \Big[\prod_{j=h_{i-1}}^{h_i - 1} \tau_j \Big]^i = \prod_{i=1}^{d} \mathcal{T}_i^{i(h_i - h_{i-1})}.$$

现在，对 (27) 开 l_d 次方，得到

$$(V_{h_d})^{1/l_d} \geq (L_{h_d})^{1/l_d} \geq \Big[\prod_{j=1}^{h_d - 1} M_j \Big]^{-1/l_d} \Big[\prod_{i=1}^{d} \mathcal{T}_i^{i(h_i - h_{i-1})} \Big]^{1/l_d}. \tag{28}$$

现在，取极限并利用推论 3.2 和引理 2.2，得到

$$\lim_{d \to \infty} (L_{h_d})^{1/l_d} = D(K). \qquad \square$$

为证明关系式 (15)，我们按如下步骤进行。由不等式 (25) 和 (28)，得到

$$\Big[\prod_{j=1}^{h_d - 1} M_j \Big] \Big[\prod_{i=1}^{d} \mathcal{T}_i^{i(h_i - h_{i-1})} \Big] \leq \prod_{k=0}^{h_d - 1} \|P_k\|_K \leq V_{h_d}.$$

然后，我们开 l_d- 次方并令 $d \to \infty$ 趋于极限，从而得到 (15)。

*Rem*ark 1. 由上述证明中的不等式 (23) 和 (25)，我们得到一个更强的版本 of T定理 2.3，即

$$D(K) = \lim_{k \to +\infty} L_k^{1/l_{d(k)}}, \quad \text{where } d(k) = |\kappa(k)|. \tag{29}$$

4. Intertwining pseudo Leja sequences

我们说明如何由 $\mathbb{C}^{p_i}$、 $i=1$ 上的两个伪 Leja 序列，在 $\mathbb{C}^p = \mathbb{C}^{p_1} \times \mathbb{C}^{p_2}$ 上构造一个伪 Leja 序列。为此，我们采用 Calvi 提出的一种自然过程，该过程推广了 Biermann 在 $p_i = 1$ 情形下提出的方法，参见 [15]。如引言所述，在本节中，必要时我们使用上标标示相关对象的底空间，因此 $e_j^{(p)}$ 表示 $\mathbb{C}^p$ 上的第 j 个单项式，依此类推。

我们将使用

$$\varphi : \mathbb{N} \ni j \longmapsto \varphi(j) = \big(\varphi_1(j), \varphi_2(j)\big) \in \mathbb{N}^2 \tag{30}$$

满足条件， κ的定义见引言，

$$\kappa^{(p)}(j) = \Big(\kappa^{(p_1)}\big(\varphi_1(j)\big), \kappa^{(p_2)}\big(\varphi_2(j)\big)\Big), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

定义 4.1. 设 $A = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{p_1}$ 和 $B = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{p_2}$ 为两个点序列。 A 和 B 的交织序列是由 $\mathbb{C}^p$ 中的点构成的序列 $\Omega = (\omega_j)^{j\in\mathbb{N}}$，记作 $A \oplus B$，并定义为

$$\omega_j = \big(a_{\varphi_1(j)}, b_{\varphi_2(j)})\big), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

对我们的目的而言，重要的是，我们可以很容易地用因子序列 A 和 B 表示交织序列 $\Omega = A \oplus B$ 的范德蒙行列式。具体如下。

我们称 $X = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ 为完全有序可确定的，若

$$\mathrm{VDM}(x_0, \ldots, x_{i-1}) \neq 0, \quad \text{for all } i = 1, \ldots, N. \tag{33}$$

伪 Leja 序列 $(\xi_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 的每个片段 $(\xi_j : \ j = 0, \ldots, N-1)$ 都是完全有序可确定的（假设紧集具有确定性）。根据 [15, 定理 3.3], ，完全有序可确定数组这一概念在交织运算下保持稳定。

给定一个序列 $X = (x_j)^{j\in\mathbb{N}}$，我们令 $X_j = (x_0, \ldots, x_{j-1})$。以下结果是 [15, 命题 2.5] 的推论。

P命题 4.1. 设 $X = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ 是一个完全有序可确定数组。我们有

$$\mathrm{VDM}(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \prod_{j=0}^{N-1} (e_j - L_{X_j} e_j)(x_j) \tag{34}$$

其中 L_{X_j} 是在点 $X_j = (x_0, \ldots, x_{j-1})$ 处的拉格朗日插值算子，约定 $L_{X_0} f = 0$，且 e_j 是第 j 个单项式，见式 (3)。

证明。证明沿用了证明 [15, 命题 2.5] 时所采用的推理。 □

下一个命题由 [15, 定理 4.2] 得出。

命题 4.2。设 A, B 和 $\Omega = A \oplus B$ 如上。我们有

$$\Big(e_j^{(p)} - L_{\Omega_j} e_j^{(p)}\Big)(z) = \big(e^{(p_1)}_{\varphi_1(j)} - L_{A_{\varphi_1(j)}} e^{(p_1)}_{\varphi_1(j)}\big)(z^1) \cdot \big(e^{(p_2)}_{\varphi_2(j)} - L_{B_{\varphi_2(j)}} e^{(p_2)}_{\varphi_2(j)}\big)(z^2) \tag{35}$$

对所有 $z = (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^{p_1} \times \mathbb{C}^{p_2}$，且对所有 $j \in \mathbb{N}$。

现在我们结合命题 4.1 和命题 4.2，推导出以下结果。注意，该结果涉及三种形式的范德蒙德式，其中变量 ω_i 属于 $\mathbb{C}^p$， a_i 属于 $\mathbb{C}^{p_1}$，而 b_i 属于 $\mathbb{C}^{p_2}$。

定理 4.3。设 A、 B 和 $\Omega = A \oplus B$ 如上。若对于所有 $j \in \mathbb{N}^\star$、 A_j 和 B_j 都是完全有序可确定数组，则对于所有 $j \in \mathbb{N}^\star$，有

$$\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1}, z) = P_j(z) \cdot \mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1}), \tag{36}$$

其中，对于 $z = (z^1, z^2)$，

$$P_j(z) = (e_j^{(p)} - L_{\Omega_j} e_j^{(p)})(z) \tag{37}$$

$$= \big(e_{\varphi_1(j)}^{(p_1)} - L_{A_{\varphi_1(j)}} e_{\varphi_1(j)}^{(p_1)}\big)(z^1) \cdot \big(e_{\varphi_2(j)}^{(p_2)} - L_{B_{\varphi_2(j)}} e_{\varphi_2(j)}^{(p_2)}\big)(z^2) \tag{38}$$

因此，如果 $\varphi_i(j) > 0$ 对 $i = 1$ 成立，则 2,

$$P_j(z) = \frac{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1}, z^1)}{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1})} \cdot \frac{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1}, z^2)}{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1})}. \tag{39}$$

而如果，比如说， $\varphi_1(j) > 0$ 且 $\varphi_2(j) = 0$,

$$P_j(z) = \frac{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1}, z^1)}{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1})}. \tag{40}$$

现在，我们陈述本节的主要结果。

定理 4.4. 设 $K_i, i = 1, 2$ 是 $\mathbb{C}^{p_i}$ 中的一个确定紧子集。设 $A = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K_1, B = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K_2$ 且 $\Omega = A \oplus B$。以下断言等价:

(1) Ω 是 $K = K_1 \times K_2$ 的伪 Leja 序列。(2) A 和 B 分别是 K_1 和 K_2 的伪 Leja 序列。

证明。我们证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)。假设 Ω 是 K 的 Edrei 增长伪 Leja 序列（M_j）$_{j\geq 1}$。我们证明 A 是 K_1的伪 Leja 序列。设 $i \in \mathbb{N}$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 满足$\varphi(N) = (i, 0)$。根据伪 Leja 序列的定义，我们有

$$M_N |\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}, \omega_N)| \geq \max_{z\in K} |\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}, z)|.$$

对上述不等式两边应用定理 4.3，得到

$$M_N |P_N(\omega_N)| \geq \max_{z\in K} |P_N(z)|.$$

由于 $\omega_N = (a_i, b_0)$，根据 (40)，上述不等式化简为

$$M_N |\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i)| \geq \max_{z^1\in K_1} |\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{i-1}, z^1)|.$$

因此，只要增长序列满足以下条件，序列 A 就具有伪 Leja 序列的不等式性质

$$M_i' = M_N, \quad \varphi(N) = (i, 0)$$

即满足 (11) 中的 Edrei 增长条件

$$\lim_{d\to+\infty} \max_{h_{d-1}\leq j<h_d} (M_j')^{1/d} = 1,$$

其中 $h_s = h_s^{(p_1)}$是底空间A上次数为 s 的多项式空间的维数，即 $\mathbb{C}^{p_1}$。设 $d \geq 1$，并令

$$\mathcal{M}_i = M_i' = \max_{h_{d-1}^{(p_1)}\leq j<h_d^{(p_1)}} M_j'.$$

与前文相同，我们考虑满足 $\varphi(N) = (i, 0)$ 的数 $N = N(i)$。因此， $\kappa^{(p)}(N) = (\kappa^{(p_1)}(i), 0)$ 且 $|\kappa^{(p)}(N)| = |\kappa^{(p_1)}(i)| = d$。由此可得 $N \in \{h_{d-1}^{(p)}, \ldots, h_d^{(p)} - 1\}$，进而

$$\mathcal{M}_i \leq \max_{h_{d-1}^{(p)}\leq j<h_d^{(p)}} M_j.$$

对 $1/d$ 开根号，并令 $d \to \infty$趋于极限，考虑到 $\mathcal{M}_i \geq 1$，结合伪 Leja 序列的增长条件，我们便得到所需结果。因此， A 是一个伪

Edrei 增长的 Leja 序列（M_i'）$_{i\geq 1}$。当然，同样的推理表明，B也是 K_2的伪 Leja 序列。

现在证明 (2) $\implies$ (1)。假设 A 是关于 K_1 、具有 Edrei 增长（M_j'）的伪 Leja 序列，且 B 是关于 K_2、具有 Edrei 增长（M_j''）的伪 Leja 序列。我们证明 $\Omega = A \oplus B$ 是关于 K 的伪 Leja 序列。

固定 $j \in \mathbb{N}^\star$。若 φ_i（j） > 0, $i = 1,2$，则由定理 4.3 可得

$$|\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_j)| = |P_j(\omega_j)| \cdot |\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1})|,$$

其中

$$P_j(\omega_j) = \frac{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1}, a_{\varphi_1(j)})}{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1})} \cdot \frac{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1}, b_{\varphi_2(j)})}{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1})}.$$

鉴于 (40)，不难验证，当 φ_i（j） $= 0$, $i = 1$ 或 2 时，上述公式仍然成立。利用因子序列是伪 Leja 序列这一假设，我们得到

$$\begin{aligned} M'_{\varphi_1(j)} M''_{\varphi_2(j)} |P_j(\omega_j)| &\geq \max_{z^1 \in K_1} \left|\frac{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1}, z^1)}{\mathrm{VDM}(a_0, \ldots, a_{\varphi_1(j)-1})}\right| \cdot \max_{z^2 \in K_2} \left|\frac{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1}, z^2)}{\mathrm{VDM}(b_0, \ldots, b_{\varphi_2(j)-1})}\right| \\ &= \max_{z \in K} |P_j(z)|. \end{aligned}$$

因此，

$$M_j |\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_j)| \geq \max_{z \in K} |P_j(z) \mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1})| = \max_{z \in K} |\mathrm{VDM}(\omega_0, \ldots, \omega_{j-1}, z)|$$

其中 $M_j = M'_{\varphi_1\,(j)}\, M''_{\varphi_2\,(j)}$，约定 $M'_0 = M''_0 = 1$。接下来只需证明 t

$$\lim_{d \to +\infty} \max_{h_{d-1}^{(p)} \leq j < h_d^{(p)}} M_j^{1/d} = 1. \tag{41}$$

固定 $d \geq 1$。取 $j_d \in \{h_{d-1}^{(p)}, \ldots, h_d^{(p)} - 1\}$，使得

$$M_{j_d} = \max_{h_{d-1}^{(p)} \leq i < h_d^{(p)}} M_j.$$

由 φ 的定义（见 (2)），可得

$$\kappa^{(p)}(j) = \left(\kappa^{(p_1)}(\varphi_1(j)), \kappa^{(p_2)}(\varphi_2(j))\right) \tag{42}$$

$$\implies d = |\kappa^{(p)}(j)| = |\kappa^{(p_1)}(\varphi_1(j))| + |\kappa^{(p_2)}(\varphi_2(j))|. \tag{43}$$

令 $\delta_i(d) = |\kappa^{(p_i)}\,(\varphi_i(j_d))|$，其中 $i = 1$, 2。现在我们有

$$M_{j_d}^{1/d} = \left((M'_{\varphi_1(j_d)})^{1/|\delta_1(d)|}\right)^{|\delta_1(d)|/d} \times \left((M''_{\varphi_2(j_d)})^{1/|\delta_2(d)|}\right)^{|\delta_2(d)|/d}.$$

我们考虑两种情况。若例如 $\delta_1(d)$ 有界，则由 (43) 可知 $\delta_2(d)/d \to 1$，而 (41) 由以下事实推出：$\delta_1(d)/d \to 0$，且 B 是一个伪 Leja 序列，M'' 满足所需的增长条件。由于根据 (43)，$\delta_i(d)/d$ 不可能同时有界，因此只需研究它们无界的情形；于是，由于它们单调递增，它们趋于 ∞。在这种情况下，(41) 由以下事实推出：M' 和 M'' 满足 Edrei 增长条件，并且 $\delta_i(d)/d$ 有界于 1、$i = 1$、2。□

定理 4.4 是对 Irigoyen 最近在 [19, 定理 1] 中关于 $p_1 = p_2 = 1$ 时 Leja 序列交错的结果的推广。众所周知，两个良好的一元插值点序列（良好是指符合引言中的定义）交错后，对于在 $\mathbb{C}^2$ 中插值全纯函数而言仍然是良好的。Siciak 首先在 [23] 中证明了这一性质，[4], [5] 中也有相关论述，并提出了不同的证明。

5. Computing pseudo-Leja points

在实际应用中，我们会计算伪 Leja 序列的有限个点，甚至是最前面的几个点（见下文）。这种计算基于以下观察：如何在 K 上获取伪 Leja 点，将其视为 K某个有限子集上的 Leja 点。

命题 5.1. 设 A 是 $K \in \mathbb{C}^p$ 的有限子集，且对次数为 $\leq d$ 的多项式空间具有确定性（因此 Card(A) $\geq h_d = h_d^{(p)}$ ）。我们按归纳方式定义 h_d 个点如下。

(1) 任意选取 $\xi_0 \in A$ ，并且 (2) 对每个 $d \in \mathbb{N}$，递归地从 A计算点 $\xi_{h_{d-1}}$、……、ξ_{h_d-2}和 ξ_{h_d-1}，使得

$$|\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}, \xi_N)| = \max_{\xi \in A} |\mathrm{VDM}(\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}, \xi)|, \tag{44}$$

对于 $h_{d-1} \leq N < h_d$。

那么，点 ξ_j 构成 K 的伪 Leja 序列的前 h_d 个点，其（常数）Edrei 增长为 M_A ，其中

$$M_A = \max\{1/\|P\|_A, \quad \|P\|_K = 1, \deg(P) \leq d\}.$$

这些点称为 A 的离散 Leja 点。

证明。注意， M_A 的有限性可由以下事实推出： A 对次数为 $\leq d$ 的多项式空间具有确定性，并且次数不超过 d 且在 K 上上确界范数不大于 1 的多项式集合是紧集。由此，只需观察到对于每个 $h_{d-1} \leq N < h_d$，函数

$$\xi \longmapsto |\mathrm{VDM}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \xi)|$$

is 一个关于 n 个复变量且次数至多为 d 的多项式，因此根据 M_A 的定义，

$$\max_{\xi \in K} |\mathrm{VDM}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \xi)| \leq M_A \max_{\xi \in A} |\mathrm{VDM}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \xi). \qquad \square$$

实际上，常数 M_A 越小，点就越好。一般来说，很难选取一个常数 M_A 较小且基数较低的网格 A 。目前用于计算离散 Leja 点的最佳算法见 [11]。简而言之，步骤如下。设 $A = \{a_1, \ldots, a_M\}$ ($M > h_d$)，且 P $= \{P_1, \ldots, P_{h_d}\}$ 是一个有序多项式基；那么，对下列矩形范德蒙德矩阵应用带行主元选取的标准 LU 分解

$$V(a_1, \ldots, a_M; \mathbf{P}) = [P_j(a_i)]_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq h_d}. \tag{45}$$

生成一个置换向量 σ ，其前 h_d 个分量是 A 中前 h_d 个 Leja 点的索引。在此过程中，通过对行进行操作，矩阵 $V(a_1, \ldots, a_M; \mathrm{P})$ 被逐步修改，且主元行始终从目标子矩阵第一列中绝对值最大的候选行里选取。请注意，由于涉及的行列式维度较大，目前只能计算低次数下的点，例如 $p = 2$ 时的 $d = 10$ 。

最后，我们提及一种（理论上的）方法，它基于与上述命题相同的思路，采用文献 [16] 中针对 K引入的（弱）容许网格概念。该网格由一列集合 $(A_d)_d \in \mathbb{N}$组成，满足 $A_d \subset K$ 是次数为 $\leq d$ 的多项式空间的决定集，且 M_{A_d} 及 A_d 的基数在 $d \to \infty$时均以次指数速度增长。证明显然，故略去。

命题 5.2。设 K 是 $\mathbb{C}^p$中的一个决定紧集，且 $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ 是 K的一个容许网格。对于 K，一个 Edrei 增长为 $\overline{M}_N$的伪 Leja 序列 $(\xi_N)_{N\in\mathbb{N}}$满足

$$\overline{M}_N = M_{A_d}, \quad h_{d-1} \leq N < h_d,$$

可按如下方式得到：

(1) $\xi_0 \in A_0$ 以及，

(2) 对每个 $d \in \mathbb{N}$，我们递归地从 $\mathcal{A}_d$计算点 $\xi_{h_{d-1}}$、...、ξ_{h_d-2}和 ξ_{h_d-1}，使得

$$|\mathrm{VDM}(\xi_0,\ldots,\xi_{N-1},\xi_N)| = \max_{\xi\in A_d} |\mathrm{VDM}(\xi_0,\ldots,\xi_{N-1},\xi)|. \tag{46}$$

致谢。我要感谢我的研究导师 Leokadia Bia las-Cie ̇z 教授，感谢她耐心的指导、热情的鼓励，以及对本文提出的宝贵批评意见。我还要衷心感谢 Jean-Paul Calvi 教授，他在本文的结构安排和写作方面给予了我无条件的帮助。

经费：本研究部分由波兰国家科学中心资助，资助项目为 Preludium Bis 1 N. 2019/35/O/ST1/02245。

References

[1] J. Baglama、D. Calvetti 和 L. Reichel。快速 Leja 点。 *Electron. Trans. Numer. Anal*，7 120，1998 124 140 119(-): – 。[2] R. Berman 和 S. Boucksom。复流形上 Fekete 点的等分布。 *arXiv preprint arXiv:0807.0035* 2008 ,.[3] R. Berman、S. Boucksom 和 D. W. Nystr ̈om。复流形上的 Fekete 点及其向平衡测度的收敛。 *Acta Math.*，207(1):1–27，2011。[4] F. Bertrand 和 J.-P. Calvi。多项式投影算子的 Newton 乘积。第二部分：逼近性质。 *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*，第 1–34 页，2022。[5] L. Bia las-Cie ̇z 和 J.-P. Calvi。伪 Leja 序列。 *Ann. Mat. Pura Appl.*，91(1):53–75，2012。[6] T. Bloom。关于逼近多复变 Green 函数的多项式族。 *Indiana Univ.*，第 – *Math. J.* 1545 1566 页，2001。[7] T. Bloom、L. Bos、J-P Calvi 和 N. Levenberg。 $\mathbb{C}^d$ *Ann.* 中的 *Pol. Math.* 1 106 53 多项式插值与逼近。载于，第 ( ) 卷，第 –81 页，2012。[8] T. Bloom、L. Bos、C. Christensen 和 N. Levenberg。$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^n$中的全纯函数的多项式插值。 *Rocky Mountain J. Math.*，22(2):441–470，1992。[9] T. Bloom 和 J.-P. Calvi。Kergin 插值极值点的分布：实数情形。载于 *Ann.*，第 *Inst. Fourier* 48 1 205 ( ) 卷，第 –222 页，1998。[10] L. Bos、M. Caliari、S. De Marchi、M. Vianello 和 Y. Xu。Padua 点上的二元拉格朗日插值：生成曲线方法。 *J. Approx. Theory*，143(1):15–25，2006。[11] L. Bos、S. De Marchi、A. Sommariva 和 M. Vianello。利用数值线性代数计算多元 Fekete 点和 Leja 点。 *SIAM J Numer Anal*，48(5):1984–1999，2010。[12] L. Bos、S. De Marchi、A. Sommariva 和 M. Vianello。离散 Leja 点上的多元 Newton 插值。 *Dolomites Res. Notes Approx*，4（Robert Schaback 65 岁生日论文集）：15–20，2011。[13] L. Bos、S. De Marchi、M. Vianello 和 Y. Xu。Padua 点上的二元拉格朗日插值：理想论方法。 *Numer Math*，108:43–57，2007。[14] M. Caliari、S. De Marchi 和 M. Vianello。正方形上的新节点集处的二元多项式插值。 *Appl. Math. Comput*，165(2):261–274，2005。[15] J.-P. Calvi。用于多元拉格朗日插值的交织可唯一确定插值的数组。 *Adv. Comput. Math.*，23 4 393 414，2005 ( ): – 。[16] J.-P. Calvi 和 N. Levenberg。利用离散最小二乘多项式进行一致逼近。 *J. Approx.*，( ): *Theory* 152 1 82 100, 2008 – 。[17] M. Fekete。 ̈关于某些具有整数系数的代数方程根的分布。 *Math. Zeitschrift*，17(1):228–249，1923。[18] D. Gaier。 *Lectures on complex approximation*。Birkhauser Boston Inc.，1987。[19] A. Irigoyen。多维交织 Leja 序列及其在二维拉格朗日插值中的应用。 *J. Approx. Theory*，264:105540，2021。

[20] M. Jedrzejowski。 $\mathbb{C}^n$ *Univ. Iagell. Acta. Math.* 29 65 70, 1992
紧子集上的超越直径与极值点。，：–。[21] M. Klimek。多复势理论。 *London Math. Soc. Monogr.(NS)*，1991。[22] F. Leja。问题`，`待′解′题`的′会 *Colloq. Math*议，第 7(1) 卷，第 153 页，1959。[23] J. Siciak。关于若干极值函数及其在多复变数解析函数理论中的应用。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，105(2):322–357，1962。[24] V. Totik。Leja 点的 Lebesgue 常数呈次指数增长。 *J. Approx. Theory*，第 105863 页，2023。[25] V.P. Zaharjuta。
$\mathbb{C}^n$ *Math. USSR-* 紧集的超越直径、切比雪夫常数与容量。，( ): 。
Sb. 25 3 350, 1975

Doctoral school of Exact and Natural Sciences, Jagiellonian University, Łojasiewicza 11, Kraków, 30-348, Lesser Poland, Poland.*Email address*: dimitri.kenne@doctoral.uj.edu.pl