arXiv:2303.11913v1 [math.NT] 21 Mar 2023

Weyl 和的局部均值估计

JULIA BRANDES、CHANGHAO CHEN 和 IGOR E. SHPARLINSKI

摘要。我们对单位环面内一个小盒子上的 Weyl 和均值，得到了新的估计——包括上界和下界。特别地，我们改进了 C. Demeter 和 B. Langowski（2022年）近期提出的猜想，并改进了他们的一些结果。

目录

1. 引言 12. 我们已知的结果与我们相信为真的结论 43. 新界 84. 定理证明 2.3 165. 转向非齐次均值 176. 定理证明 3.1– 3.5 197. 通过大 Weyl 和的结构进行研究 228. 定理证明 3.7 和 3.8 269. 有理指数和 2710. 定理证明 3.9 和3.10 3111. 补充评论 33 致谢 35参考文献 35

1. 引言

1.1. 背景与动机。指数和的研究在解析数论中占据核心地位，因为它们是连接数论语言与傅里叶分析语言的重要工具。事实上，数论中许多最著名的结果，要么等价于指数和的强上界，要么至少在很大程度上依赖于这类上界，无论是平均意义下还是逐点意义下。

本文关注如下形式的指数和

$$S_d(\mathbf{x}; N) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}\left(x_1 n + \ldots + x_d n^d\right),$$

与维诺格拉多夫平均值定理相关。得益于 Bourgain、Demeter 和 Guth 的突破性成果 [6] 以及 Wooley 的研究成果 [27, 28], ，我们现在对这些

2020年 数学主题分类。主要分类：11L15；次要分类：11L07、11D45。关键词与短语。
韦尔和，均值定理，小盒子。

和在 $\mathbf{x}$ 遍历单位超立方体 $[0,1)^d$时的平均值有了很好的控制。如果我们令

$$J_{s,d}(N) = \int_{[0,1]^d} |S_d(\mathbf{x}; N)|^{2s} d\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

那么 [6, 27, 28] 可得

$$J_{s,d}(N) \leqslant N^{s+o(1)} + N^{2s-d(d+1)/2+o(1)}, \tag{1.2}$$

其精确到（至多） $o(1)$。值得注意的是，由（1.2）可推出 $S_d(\mathbf{x}; N) \leqslant N^{1/2+o(1)}$对几乎所有 $\mathbf{x} \in [0,1)^d$，见 [9,推论 2。2]因此，我们现在几乎完整地理解了指数和在平均意义下以及几乎处处意义下的大小。

遗憾的是，这两个结果都不适合用于了解 $S_d(\mathbf{x}; N)$ 在任意固定点 $\mathbf{x}$处的点态大小；事实上，我们对这一问题的理解仍远未达到猜想中的界。不难看出，这种点态上界必然取决于 $\mathbf{x}$的丢番图逼近性质。假设 x_d 有一个逼近数 a_d/q 满足 $\|qx_d\| \leqslant q^{-1}$，那么，沿用 Vinogradov 的论证（见 [26, 定理 5。2]），可知均值上界（1.2）可用于导出点态估计

$$|S_d(\mathbf{x}; N)| \leqslant N^{1+o(1)} \left(N^{-1} + q^{-1} + qN^{-d}\right)^{1/d(d-1)}.$$

然而，要在以下上界方面取得进展

$$|S_d(\mathbf{x}; N)| \leqslant N^{1+o(1)} \left(q^{-1} + qN^{-d}\right)^{1/d}$$

[25, 第 3 章猜想 1] 中提出的猜想上界，我们很可能需要采用不同的方法——不过，我们指出，对于一维指数和，如果将指数 $1/d$ 替换为$1/(2d-2)$，则这类和的猜想均值（Hua 型）上界将推出一个至少与猜想上界相当的上界，见[7, 定理 2.1]。

本文旨在研究当 $\mathbf{x}$ 在小盒子内取值时的 $S_d(\mathbf{x}; N)$ 及相关指数和。这应当被视为一种尝试，旨在弥合我们对 $S_d(\mathbf{x}; N)$ 均值几乎完全理解与对这些和的逐点行为理解不足之间的差距。我们的工作与 Demeter 和 Langowski [16]的研究，以及 Woo-ley [29]的一些猜想密切相关。通过引入若干新思路——部分基于 Brandes 和 Hughes [8] 近期探讨的非齐次维诺格拉多夫系统上界，以及 Woo-ley [29], 的相关工作，部分基于 Baker 深入研究的大 Weyl 和结构（例如，见 [1, 2]）——我们得以拓展并改进 [16]的一些结果。我们得到了一系列各不相同的上界，将在下文第 3 节中作更详细的描述和讨论。这些上界的性质会因小盒子的大小而大不相同。从某种意义上说，这并不意外，因为当位于原点的小盒子极小时，$S_d(\mathbf{x}; N)$ 在该盒子上的均值主要由 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$处的尖峰所支配；而随着盒子增大，其行为便愈发接近在整个单位超立方体上的均值。尚不清楚的是，这两种行为之间的转变如何发生，以及发生在什么尺度上。综合来看，我们的上界

表明，这种转变可能比迄今预想的更为复杂；我们希望未来的研究能够更准确地描绘这些现象。

1.2. 设定。 对于整数 $\nu \geqslant 1$，我们用 T_ν 表示 ν 维单位环面，并将其视为 ν 维单位立方体，即

$$\mathsf{T}_\nu = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^\nu = [0,1)^\nu.$$

对于正整数 d 和 N、复权重序列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^N$，以及向量 $\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d$，我们定义 Weyl 和

$$S_d(\mathbf{x}; \mathbf{a}, N) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, \mathbf{e}\left(x_1 n + \ldots + x_d n^d\right)$$

其中 $\mathbf{e}(z) = \exp(2\pi i z)$。

对于正数 $\delta \leqslant 1$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_d$，我们定义

$$I_{s,d}(\delta, \boldsymbol{\xi}; \mathbf{a}, N) = \int_{\boldsymbol{\xi}+[0,\delta]^d} |S_d(\mathbf{x}; \mathbf{a}, N)|^{2s} \, d\mathbf{x}. \tag{1.3}$$

我们注意到，指数 s （1.3）不一定是整数，也可以取任意正实数。关于对适当选取的 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\mathbf{a}$，估计 $I_{s,d}(\delta, \boldsymbol{\xi}; \mathbf{a}\ N)$ 的问题近来受到了一些关注，例如参见 [10, 12, 16, 29]，其中给出了各种界及其应用。原点处盒子的情形尤其有趣。事实上，容易看出，关于 $I_{s,d}(\delta, \boldsymbol{\xi}; \mathbf{a}\ N)$ 大小的问题可化为 $I_{s,d}(\delta, \mathbf{0}; \widetilde{\mathbf{a}}\ N)$，其中 $\widetilde{a}_n = a_n \, \mathbf{e}\left(\xi_1 n + \ldots + \xi_d n^d\right)$ 对于 $n = 1, \ldots, N$。因此我们设

$$I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N) = I_{s,d}(\delta, \mathbf{0}; \mathbf{a}, N).$$

因此，对于任意权重，不失一般性，只需研究量 $I^{(0)}_{s\,d},(\delta; \mathbf{a}\ N)$。

与此同时，权重 $\mathbf{a}$ 中或许最相关的选择是 $a_n = 1 \text{for } n \leqslant N$，因此我们单独考虑这种情形。因此，当 $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ 时，我们定义

$$I^{(0)}_{s,d}(\delta; N) = I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{1}, N),$$

以及

$$I^{\sharp}_{s,d}(\delta; N) = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_d} I_{s,d}(\delta, \boldsymbol{\xi}; \mathbf{1}, N) \qquad \text{and} \qquad I^{\flat}_{s,d}(\delta; N) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_d} I_{s,d}(\delta, \boldsymbol{\xi}; \mathbf{1}, N).$$

注意，由于单位环面 $\mathsf{T}_d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ 作为加法群是紧的，且指数和是连续的，因此这里的下确界和上确界实际上都能取到。

根据1.3后面的讨论，很容易看出

$$I^{\sharp}_{s,d}(\delta; N) \leqslant \sup_{\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1} I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N) \tag{1.4}$$

其中，上确界取遍所有满足 $\|a_n\|_\infty \leqslant 1$ 的复权重序列。

1.3. **记号。** 全文中，我们使用 Landau 和 Vinogradov 记号$U = O(V)$、 $U \ll V$和 $V \gg U$表示 $|U| \leqslant cV$，其中某个正常数为 c；该常数在全文中可能依赖于次数 d，有时也依赖于小的正实参数 ε 和任意实参数 t。我们还将 $U \asymp V$写作 $U \ll V \ll U$的等价形式。此外，对于任意量 $V > 1$，我们写作 $U = V^{o(1)}$（如 $V \to \infty$），表示一个关于 V的函数，它满足：对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 V足够大，就有 $V^{-\varepsilon} \leqslant |U| \leqslant V^{\varepsilon}$。使用 $V^{o(1)}$ 的另一项优势是，它可以吸收 $\log V$及其他类似的量，而不改变整个表达式。

我们还回顾一下 ℓ^p-范数的定义。对于复数列 $= (a_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 和实数 $p \geqslant 1$，其定义为

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，我们用 $[m]$ 表示集合 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$。有限集 $\mathcal{S}$ 的基数记为 $\#\mathcal{S}$；对于可测集 $\mathcal{T} \subseteq \mathsf{T}^{\nu}$，我们用 $\lambda(\mathcal{T})$ 表示相应维数 ν下的勒贝格测度。

我们用记号 $\lfloor x \rfloor$ 和 $\lceil x \rceil$ 分别表示不大于 x 的最大整数和不小于 x的最小整数。接着记作 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$。

2. 我们已知的内容与我们相信为真的内容

2.1. **最新进展与先前猜想。** 为了更好地了解预期结果，首先记录一些已知的界很有帮助，它们可以作为后续讨论的基准。一方面，当 $\delta = 1$ Bourgain、Demeter 和 Guth [6] 以及 Wooley [28]在趋近维诺格拉多夫均值定理的最优形式方面取得的最新进展给出了上界

$$I_{s,d}^{(0)}(1; \mathbf{a}, N) \leqslant \|\mathbf{a}\|_2^{2s} N^{o(1)} (1 + N^{s - s(d)}) \tag{2.1}$$

对所有 $s > 0$，其中

$$s(d) = d(d+1)/2.$$

对于一般的 $\mathbf{a}$，这基本上是尖锐的，因为当 $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ 时，标准论证表明

$$I_{s,d}^{(0)}(1; N) = J_{s,d}(N) \gg N^s + N^{2s - s(d)}, \tag{2.2}$$

其中 $J_{s,\,d}(N)$ 由式（1.1）给出。事实上，通过改进 [10, 引理 3。1]中的论证，可以证明 $S_d(\mathbf{x};\ N) \gg N^{1/2}$对比例为正的 $\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d$成立。

另一方面，对于非常小的 δ，我们可以平凡地估计该积分，得到

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^d \|\mathbf{a}\|_1^{2s}. \tag{2.3}$$

通过一个稍微复杂一些的论证，将（2.1）中的上界与霍尔德不等式结合起来，我们得到上界

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d - 2s/(d+1)} \|\mathbf{a}\|_2^{2s} N^{o(1)}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant s(d), \tag{2.4}$$

另见 [16, 公式（2.3）]。显然，在极限 $\delta \to 1$下，正如预期的那样，上界（2.4）趋近于上界（2.1）。同时，我们看到，当 δ 较小时，这比平凡上界（2.3）更弱。

在特殊情形 $s = 2$ 下，还可以从 [10, 引理 4.5], 推出另一个例子，这意味着若 $|a_n| \leqslant 1$ 对于 $n = 1, \dots, N$，则

$$I_{2,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^d N^2 + \delta^{d-4} N^{1+o(1)}.$$

对于下界，注意到对任意 N，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(1; N) \ll \delta^{-d} I_{s,d}^{\sharp}(\delta; N).$$

将此结果与（2.2）中的经典下界结合起来，我们便得到

$$I_{s,d}^{\sharp}(\delta; N) \gg \delta^d (N^s + N^{2s-s(d)}).$$

显然，这引出了一个问题：此上界是否是尖锐的？如果是，在哪些范围内成立？Wooley 在近期的一项工作中提出了这一猜想的一个版本 [29,猜想 8.1 和 8.2]。

猜想 2.1 (Wooley [29])。 设

$$s \geqslant \tfrac{1}{4} d(d+1) + 1 \qquad or \qquad \delta \geqslant N^{1/d - (d+1)/4}.$$

Then

$$I_{s,d}^{\sharp}(\delta; N) \leqslant \delta^d N^{s+o(1)} + N^{2s-s(d)+o(1)}.$$

在 Wooley 的设定中， [29],变量个数的上界是基于奇异级数收敛性的考量而提出的；不过，猜想 2.1 在 δ方面的上界似乎有理由扩展到所提范围之外。我们还指出，Wooley 允许一般的可测集，而我们则将范围限制为轴对齐的超立方体。

另一项与我们的工作相关、且允许 δ 和 s 取任意正值的猜想，近期由 Demeter 和 Langowski 提出： [16,猜想 1.3]。

猜想 2.2 (Demeter–Langowski[16])。设

$$\rho(d) = \lceil 3d^2/4 \rceil - 1.$$

我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{(d+1)/2} \|\mathbf{a}\|_2^{2s} \left(1 + N^{s-\rho(d)/2}\right) N^{o(1)}. \tag{2.5}$$

由 [16, 定理 2.4] ，有（2.5）对 $d = 2$ 和 $d = 3$ 在完整范围内成立。此外，作者还对 $d = 4$ 和 $d = 5$建立了质量相近的界。我们还指出，（ δ 2.2）中出现的幂以及相应的取值 $\rho(d)$并没有什么本质上的特殊之处。相反，猜想 2.2 的具体表述和参数选择似乎主要是为了应用于沿曲线的 Weyl 和均值，见 [16, 命题 2.2]。

对猜想 2.1 和2.2 进行比较可知，两者都不严格强于对方；相反，它们对不同 s 范围和不同 δ取值作出了不同的预测。从猜想 2.1 之前的讨论显然可知，该猜想是尖锐的

对于较小的 s 以及 δ 不太小的情况。同时，我们指出，若猜想 2.2正确，那么从以下意义上说，它是最优的：若要得到一个对所有 $\delta \in (0,1)$ 都成立的上界，指数 $(d+1)/2$ 便无法增大。对此的证据已在 [16], 中给出，时间是在提出 [16,猜想 1.3]之后。此外，对于 δ的极小取值，平凡上界（2.3）既是尖锐的，也强于（2.5）。因此，一个有趣的问题是，能否推导出甚至只是一个有效的启发式估计，来描述 $I_{s\,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}\ N)$ 的行为，并反映该量在所有 δ 和 N取值下的真实预期大小。

2.2. 原点处小立方体上的一个上界及一些新猜想。在详细讨论我们的结果之前，我们先指出一个关于本文所研究类型的均值行为的一般事实。通常，对于固定的参数 d 和 δ，我们力求建立如下形式的界

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d-\alpha} \|\mathbf{a}\|_2^{2s} (1 + N^{s-\sigma_0}) N^{o(1)}$$

其中某个 $\alpha \in [0, d]$ 和某个 $\sigma_0 \geqslant 1$ 取决于 d 和 δ。特别地，如果我们能在临界点 $s = \sigma_0$建立这样的上界，那么相应的结果便可通过标准论证推广到次临界和超临界范围 $s < \sigma_0$ 和 $s > \sigma_0$ 。本文给出的界适用于次临界和超临界范围。

我们的第一个结果给出了原点处小立方体上 Weyl 和均值的一个下界。证明基于 Weyl 和的连续性$S_d(\mathbf{x};\ N)$ 作为$\mathbf{x}$的函数，过程相当直接。随后，我们将这个简单的界作为基准，并以此为基础提出若干上界猜想。这也启发了我们第3节中的结果，这些结果基于各种新思路。

我们定义

$$\sigma_d(\alpha) = \frac{\alpha(2d - \alpha + 1) - \{\alpha\}(1 - \{\alpha\})}{2}. \tag{2.6}$$

定理 2.3。设

$$s_0(d, \alpha) = \sup \left\{ s \geqslant 0 :\ I_{s,d}^{(0)}(\delta; N) \leqslant \delta^{d-\alpha} N^{s+o(1)},\ \forall \delta \in [N^{-d}, 1],\ as\ N \to \infty \right\}.$$

于是我们有

$$s_0(d, \alpha) \leqslant \sigma_d(\alpha).$$

根据上述讨论，定理 2.3 的结论可用于推导一般取值 s 下 $I_{s\,d}^{(0)}(\delta;\ N)$ 的界。事实上，对于 $s > \sigma_d(\alpha)$，我们得到

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; N) \leqslant \delta^{d-\alpha} N^{2s-\sigma_d(\alpha)+o(1)}. \tag{2.7}$$

与此同时，对于 $0 < s < \sigma_d(\alpha)$，我们的定理 2.3结合霍尔德不等式可得

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; N) \leqslant \delta^{d-\alpha s/\sigma_d(\alpha)} N^{s+o(1)}.$$

为了说明这一结果的背景，我们将定理 2.3 与前面的讨论进行比较。首先考虑 $\alpha = 0$ 的情形，此时 $\sigma_d(0) = 0$。因此，对于任意 s ，上界 (2.7) 可化为 (2.3。另一方面，取 $\alpha = d$ ，可得 $\sigma_d(d) = d(d+1)/2$,

我们还知道，当 $\delta = 1$ 时，这一结果是尖锐的。最后，取值 $\alpha = (d-1)/2$ 给出上界

$$\sigma_d((d-1)/2) = \frac{3(d^2-1)}{8} - \frac{\{(d-1)/2\}(1-\{(d-1)/2\})}{2} = \frac{1}{2}\left(\lceil 3d^2/4\rceil - 1\right),$$

由此可得猜想 2.2 Demeter 和 Langowski 提出的 [16, 猜想 1。3]。由此，定理 2.3 提出了猜想 2.2的一个自然推广。

猜想 2.4。 固定 $\alpha \in [0,d]$。对于任意充分大的 N，以及范围$N^{-d} \leqslant \delta \leqslant 1$内的任意 δ，以下界

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d-\alpha}\|\mathbf{a}\|_2^{2s}(1+N^{s-\sigma_d(\alpha)})N^{o(1)}$$

对所有 $s \geqslant 0$ 均成立。

我们指出，我们并不认为猜想 2.4 总是尖锐的；在某些情况下，我们确实能得到更强的上界，这从下文的图 3.1、3.2 和3.3 中可以看出。对于 $\delta < N^{-d}$ 不难看出，平凡上界（2.3）给出了更强的结果。我们还指出，仔细检查定理 3.5 的证明可知，对于任意给定的 $\alpha > 0$ 猜想 2.4 在点$\delta = N^{-\lfloor d-\alpha\rfloor-1}$处是尖锐的。

在这些考量中加入额外参数 α 有些令人恼火。容易验证

$$\sigma_d(\alpha) = \alpha d \qquad \text{for all } \alpha \in (0,1]. \tag{2.8}$$

对于一般的 α 取值，只需稍作计算便可证明，$\sigma_d(\alpha)$ 关于 α 连续且严格递增，其中 $\alpha \in [0,d]$。事实上，显然有

$$\left(\frac{1}{2}\alpha(2d-\alpha+1)\right)' = d-\alpha+1/2,$$

而 $\frac{1}{2}\{\alpha\}(1-\{\alpha\})$ 是函数 $u(1-u)/2$（其中 $u \in [0,1)$ 的周期延拓；后一个函数的导数为 $-u+1/2 \in [-1/2,1/2)$，因此整个函数 $\sigma_d(\alpha)$ 连续，并且对所有非整数 $\alpha < d$ 都满足 $\sigma_d'(\alpha) > 0$。

固定一个取值 s，记 $\alpha_0(d,s)$ 为满足 $\sigma_d(\alpha) = s$ 的唯一 α。采用这一记号，我们可以转换视角，将上述猜想重新表述为：对于任意给定的一组参数s 和 d，确定 α 的最优取值。

猜想 2.5。 对于任意参数 d 和 $s \leqslant s(d)$，以及任意充分大的N 和范围为 $N^{-d} \leqslant \delta \leqslant 1$的任意 δ，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d-\alpha_0(d,s)}\|\mathbf{a}\|_2^{2s}N^{o(1)}.$$

遗憾的是，函数 $\alpha_0(d,s)$ 很难用显式形式直接描述。不过，我们可以粗略地说明其大小。回顾式（2.6），记

$$\sigma_d(\alpha) = \alpha(2d-\alpha+1)/2 - \omega, \tag{2.9}$$

并注意到 $\omega = \{\alpha\}(1-\{\alpha\})/2 \in [0,1/8]$。解出2.9中的 α并代入$\sigma_d(\alpha) = s$ 可得

$$\alpha_0(d,s) = d+1/2-\sqrt{d(d+1)-2s+\nu},$$

其中 $\nu = 1/4 - 2\omega \in [0, 1/4]$。考虑到这些因素，对于 $s < s(d)$，猜想2.5 中的上界可见其量级为

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{\sqrt{2s(d)-2s}-1/2+\eta(d,s)} \|\mathbf{a}\|_2^{2s} N^{o(1)},$$

其中

$$\eta(d, s) \leqslant \frac{c}{\sqrt{(s(d) - s)}}$$

其中 $c > 0$ 为某个绝对常数。

最后，我们指出，定理 2.3 以及猜想 2.4 和 2.5 都只讨论范围 $\delta \geqslant N^{-d}$。然而，对于更小的 δ，不难证明上界（2.3）是最优的。我们将在下文定理 2.3的证明之后，对此作一些说明。

3. 新界

3.1. 带权均值的界。 我们首先给出一组界，这些界可通过将 [10,引理 3.8] 与 Wooley 的一个结果 [29,定理 1.3],结合得到；该结果改进了 Brandes 和 Hughes 的先前结果 [8]。

定理 3.1。 假设 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$ 且 $0 < s \leqslant s(d)/2$。假设 $N^{-1} \geqslant \delta > N^{-d}$，并令 k为满足 $N^{-k-1} < \delta \leqslant N^{-k}$的唯一整数。于是我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{(d+k)/2} N^{s+s(k)/2+o(1)}.$$

与此同时，对于 $\delta > N^{-1}$，我们有如下界

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \begin{cases} \delta^{d/2} N^{s+o(1)} & for\ N^{-1} < \delta < N^{-1/d}, \\ N^{s-1/2+o(1)} & for\ N^{-1/d} < \delta < N^{-1/(2d-1)}, \\ \delta^{d-1/2} N^{s+o(1)} & for\ N^{-1/(2d-1)} < \delta < 1. \end{cases}$$

我们指出，对于 $\delta \leqslant N^{-d}$，相同的方法可得上界

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d} N^{s+s(d)/2+o(1)},$$

根据我们的假设，这比平凡上界 (2.3) 更弱 $s \leqslant s(d)/2$。由于 (2.3) 对较小的 δ是尖锐的，值得一提的是，这两个界在点 $s = s(d)/2$处重合。感兴趣的读者还可以注意到，定理 3.1 的适用范围涵盖了 s 和 δ 的取值，而猜想 2.1 并不适用于这些取值。

对于较大的 s，我们有以下更复杂的上界。

定理 3.2。 对于范围 $s(d)/2 < s < s(d)$ 内的任意整数 s，以及任意 $\delta \geqslant N^{-1}$，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant N^{s+o(1)} \left(\delta^{d-1} + \sum_{j=1}^{d-1} \min\{\delta^{j-1}(N^{-1/2} + N^{-\eta_{s,d}(j)}), \delta^{(d+j-1)/2} N^{s-s(d)/2}\} \right),$$

其中

$$\eta_{s,d}(\ell) = (s(d) - s) \frac{d - \ell + 1}{d + \ell + 1} \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant d - 1). \tag{3.1}$$

遗憾的是，定理3.2 中相当一般的上界可能不太容易理解。不过，我们注意到，只要始终取最小值中的第二项，就能得到以下简单的上界。

推论 3.3. 对于范围 $s(d)/2 < s < s(d)$ 内的任意整数 s 以及任意 $\delta \geqslant N^{-1}$，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d/2} N^{2s-s(d)/2+o(1)}.$$

类似地，始终使用最小值中的第一个表达式，经过少量计算即可证明，在范围 $s(d)/2 < s < s(d)$内，对所有 $\delta \leqslant N^{-1/(2d-2)}$，均有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant N^{s-1/2+o(1)}.$$

显然，推论 3.3 关于 δ的上界并不十分强，因此为方便读者，我们给出定理 3.2 的另一个推论，讨论 δ 中第一项占主导的范围。这个结论虽然并不深奥，但在陈述时还需要引入一些记号。

对于一个函数

$$f(x) = \frac{d+1-x}{(d+x+1)(d-x)} \tag{3.2}$$

通过如下方式定义参数 $\vartheta(d)$

$$\vartheta(d) = \min\left\{ f\left(d+1-\left\lfloor\sqrt{2(d+1)}\right\rfloor\right), f\left(d+1-\left\lceil\sqrt{2(d+1)}\right\rceil\right)\right\}. \tag{3.3}$$

特别地，我们看到

$$\vartheta(d) \sim \frac{1}{2d} \qquad (d \to \infty).$$

的显式取值列表 $\vartheta(d)$ 当 $2 \leqslant d \leqslant 10$ 时列于表 。

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\vartheta(d)$	1/2	3/10	3/14	1/6	2/15	1/9	2/21	1/12	5/68

表 3.1. $d = 2$、...、10 时 $\vartheta(d)$ 的取值

推论 3.4. 设 $d \geqslant 2$ 并回顾 $\vartheta(d)$ 在式（*3.3*）中的定义。此外，固定一个整数 $s(d)/2 < s < s(d)$，以及一个满足 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$ 的权重序列。假设

$$\delta > \max\{N^{-1/(2d-2)}, N^{-(s(d)-s)\vartheta(d)}\},$$

then

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{d-1} N^{s+o(1)}.$$

定理3.1 和3.2 的证明关键取决于某些非齐次维诺格拉多夫系统存在非平凡上界。对于 $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^d$，令$J_{s,d}(\mathbf{h}; N)$ 表示以下 d 个方程组的解的数量

$$\sum_{j=1}^{2s} (-1)^j n_j^i = h_i \qquad (i = 1, \ldots, d), \tag{3.4}$$

其中整数变量为 $1 \leqslant n_1, \ldots, n_{2s} \leqslant N$。由三角不等式，显然有

$$J_{s,d}(\mathbf{h}; N) \leqslant J_{s,d}(N) \leqslant N^{s+o(1)}, \tag{3.5}$$

其中在最后一步，我们使用了 [6,定理 11] 亚临界范围 $s \leqslant s(d)$ 中的经典 Vinogradov 均值定理界，参见（1.2）。对于大多数 $\mathbf{h}$ 的取值，Brandes 和 Hughes [8] 以及 Wooley [29] 的近期结果在整个亚临界范围内略有改进。不过，他们的工作所得的界预计并非最优；事实上，人们或许会猜想，对于某个范围内的所有整数 s $s \leqslant s_1(d)$，对于 $s_1(d) \leqslant s(d) - 1$，有更强的上界

$$\max_{\mathbf{h} \neq \mathbf{0}} J_{s,d}(\mathbf{h}; N) \leqslant N^{s-\nu+o(1)} \tag{3.6}$$

对于某个 $\nu \in (0, 1]$。显然，(3.6) 中最强的猜想版本对应于参数 $\nu = 1$ 和 $s_1(d) = s(d) - 1$。注意，当 $\nu > 1$ 时，即使 s取值较小，上界 (3.6) 也不成立；例如，选取 n_1、n_2 和 $\mathbf{h}$，使得 $n_1^j - n_2^j = h_j$对 $1 \leqslant j \leqslant d$成立，便可将系统 (3.4) 化为一个含有 $2(s-1)$ 个变量的齐次系统，而该系统有 $J_{s-1,d}(N) \gg N^{s-1}$ 个解。不过，使得上界 (3.6) 在 $\nu = 1$ 时达到最优的 $\mathbf{h}$ 的可能取值集合相当小。因此，在许多情况下，对 $\mathbf{h}$ 取平均可得到更强的结果（见下文引理 5.3）。

在已知 (3.6) 对 $\nu = 1$成立的条件下，我们有以下结论。

定理 3.5。设 $d \geqslant 2$ 且 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$。假设 *(3.6)* 对所有 $\nu = 1$ 成立，其中 s属于某个范围 $s \leqslant s_1(d)$。设 $1 \geqslant \delta > N^{-d}$，并设 k为满足以下条件的唯一整数$N^{-k-1} < \delta \leqslant N^{-k}$。

(1) 假设 $0 < s \leqslant \min\{s(d)/2, s_1(d)\}$。

- 对于 $k \geqslant 1$，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^{(d+k)/2} N^{s+s(k)/2+o(1)}.$$

- 对于 $k = 0$，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \begin{cases} \delta^{d/2} N^{s+o(1)} & N^{-1} < \delta \leqslant N^{-2/d}, \\ N^{s-1+o(1)} & N^{-2/d} < \delta \leqslant N^{-1/d}, \\ \delta^d N^{s+o(1)} & N^{-1/d} < \delta \leqslant 1. \end{cases}$$

(2) 现在假设 $s(d)/2 < s \leqslant s_1(d)$。对于 $k \geqslant 0$，我们有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant N^{s+o(1)} \left(\delta^d + \min\{\delta^k N^{s(k)-1}, \delta^{(k+d)/2} N^{s-(s(d)-s(k))/2}\}\right).$$

我们指出，Wooley 对 s 的范围与定理 3.5的第（2）部分在 $d \equiv 0$ 或 $d \equiv 3 \pmod 4$时一致；而对于 $d \equiv 1$ 和 $d \equiv 2 \pmod 4$，取值 $s = (s(d)+1)/2$ 则不在 [29, 猜想 81], 的涵盖范围内，而我们的结果适用于这种情形。事实上，在（其他方面已得到充分理解的）情形 $d = s = 2$中正是如此，下面我们将以此为例进行讨论。

遗憾的是，即使对于非最优的 ν取值，一般而言，证明（3.6）似乎也相当棘手。不过，在某些特殊情形下，可以得到适当的界。例如，Dendrinos、Hughes 和 Vitturi [17, 引理 5 和 6] 证明了，在3.6）中取 $\nu = 1$时，以下情形 $d = s = 2$（这意味着结论对（s，d）=（3，2）也成立）以及 $d = s = 3$。

因此，在比较定理3.5中的所有项，并结合（2.3）之后，我们得到以下无条件界。

推论 3.6。 设 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$。对于 $s = d = 2$ 以及 $d = 3$ 和 $s = 2$ 或 $s = 3$均值 $I_{s,\,d}(\delta;$ $\mathbf{a}\ N)$ 其上界如表 *3.2*所示。

δ	$(0, N^{-2}]$	$(N^{-2}, N^{-1}]$	$(N^{-1}, N^{-1/2}]$	$(N^{-1/2}, 1]$
$I^{(0)}_{2,2}$	$\delta^2 N^{4+o(1)}$	$\delta N^{2+o(1)}$	$N^{1+o(1)}$	$\delta^2 N^{2+o(1)}$

δ	$(0, N^{-\frac{3}{2}}]$	$(N^{-\frac{3}{2}}, N^{-1}]$	$(N^{-1}, N^{-\frac{2}{3}}]$	$(N^{-\frac{2}{3}}, N^{-\frac{1}{3}}]$	$(N^{-\frac{1}{3}}, 1]$
$I^{(0)}_{2,3}$	$\delta^3 N^{4+o(1)}$	$\delta^2 N^{\frac{3}{2}+o(1)}$	$\delta^{\frac{3}{2}} N^{2+o(1)}$	$N^{1+o(1)}$	$\delta^3 N^{2+o(1)}$

δ	$(0, N^{-3}]$	$(N^{-3}, N^{-2}]$	$(N^{-2}, N^{-1}]$	$(N^{-1},\ \ N^{-\frac{2}{3}}]$	$(N^{-\frac{2}{3}},\ \ N^{-\frac{1}{3}}]$	$(N^{-\frac{1}{3}}, 1]$
$I^{(0)}_{3,3}$	$\delta^3 N^{6+o(1)}$	$\delta^{\frac{5}{2}} N^{\frac{9}{2}+o(1)}$	$\delta^2 N^{\frac{7}{2}+o(1)}$	$\delta^{\frac{3}{2}} N^{3+o(1)}$	$N^{2+o(1)}$	$\delta^3 N^{3+o(1)}$

表 3.2. 对于 s 和 d 的若干选取，以及 δ 取对应区间内的值时，$\sup_{\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1} I^{(0)}_{s\,d}(\delta;\mathbf{a}\ N)$ 的上界。

作为比较，在特殊情形 $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ 中，Wooley 提出的猜想 [29]（猜想 2.1）声称

$$
\begin{aligned}
I^{\sharp}_{2,2}(\delta; N) &\leqslant \delta^2 N^{2+o(1)} \qquad \text{for } \delta \geqslant N^{-1/4},\\
I^{\sharp}_{2,3}(\delta; N) &\leqslant \delta^3 N^{2+o(1)} \qquad \text{for } \delta \geqslant N^{-2/3},\\
I^{\sharp}_{3,3}(\delta; N) &\leqslant \delta^3 N^{3+o(1)} \qquad \text{for } \delta \geqslant N^{-2/3}.
\end{aligned}
$$

显然，这里的适用范围远小于我们的情形，而对于 $d = 2$ 推论 3.6 在远大于 [29]所提示的范围内，建立了 Wooley 猜想的上界。对于 $d = 3$，我们在范围 $N^{-1/3} \leqslant \delta \leqslant 1$ 内建立了猜想 2.1中的界，但在范围 $N^{-2/3} \leqslant \delta < N^{-1/3}$内未能达到这一结果。

3.2. **带平移的均值的界**。 当 δ 不太小时，我们还可以利用大 Weyl 和的结构得到一些结果。

定理 3.7。 对于任意 $s > 0$ 和任意 $\delta \geqslant N^{-3/(6+2s)}$，我们有

$$I^{\sharp}_{s,2}(\delta; N) \leqslant \delta^2 N^{2s(1-3/(6+2s))+o(1)}.$$

对于 $d \geqslant 3$，我们令

$$D = \min\{2^{d-1}, 2d(d-1)\}.$$

于是得到如下结果。

定理 3 .8. 对于任意 $s > (s(d)D - d^2 - 1)/2$ 以及 $\delta \geqslant N^{-(d+1)/(2(2s+d^2+1))}$，有

$$I^{\sharp}_{s,d}(\delta; N) \leqslant \delta^d N^{2s\left(1-s(d)/(2s+d^2+1)\right)+o(1)}.$$

作为背景，请注意，当 δ 取可能的最小值时，定理3.7 和3.8 中的上界呈现为

$$I^{\sharp}_{s,2}(\delta; N) \leqslant N^{2s-3\left(1-\frac{4}{s+3}\right)+o(1)} \qquad \text{and} \qquad I^{\sharp}_{s,d}(\delta; N) \leqslant N^{2s-s(d)\left(1-\frac{d^2}{2s+d^2+1}\right)+o(1)},$$

分别。显然， $\delta \to 1$ 当 $s \to \infty$时，因此这些表达式收敛到式（1.2）的上界（从而也收敛到猜想2.1）也就不足为奇了，当 s 趋于无穷大时。

Ou其上界由以下一般下界补充 .

定理 3.9。固定 $s > 0$。

(1) 若 $\delta \geqslant c_1/N$，其中 $c_1 > 0$ 是某个绝对常数，则有

$$I_{s,2}^{\flat}(\delta; N) \gg \delta^2 N^{s-1} \max\left\{1, (\delta N)^{s-2}\right\}.$$

(2) 若 $\delta \geqslant c_2/\sqrt{N}$，其中 $c_2 > 0$ 是某个绝对常数，则有

$$I_{s,2}^{\flat}(\delta; N) \gg \delta^2 N^{3(s-1)/2}.$$

我们注意到，当 $\delta \geqslant c_2/\sqrt{N}$ 时，定理 3.9 的第二个界优于第一个界；在 $\delta = N^{-1/2}$这一点，第一个界的形式为 $\delta^2 N^{3s/2-2}$。

我们的方法还给出了维数 $d \geqslant 2$ 的一个上界。对于 $1 \leqslant k < d$，定义

$$\nu(d,k) = \min\left\{\frac{1}{2k}, \frac{1}{2d-k}\right\}. \tag{3.7}$$

用这一记号，我们的上界如下。

定理 3.10。任取 $s > 0$和 $k \in \{1, \ldots, d\}$。对于任意满足 $\delta \geqslant CN^{-\nu(d,k)} \log N$ 的 δ，其中常数 C 充分大，我们有

$$I_{s,d}^{\flat}(\delta; N) \geqslant \delta^d N^{d+s-s(d)+o(1)} \max\left\{1, \left(\delta^{1/\nu(d,k)} N\right)^{s-d}\right\}.$$

特别地，对于 $s \leqslant d$ 定理 3.10 的上界 可简化为

$$I_{s,d}^{\flat}(\delta; N) \geqslant \delta^d N^{s+d-s(d)+o(1)}$$

它不依赖于 k，因此对满足以下条件的 $\delta \geqslant N^{-\mu(d)}$ 也成立：

$$\mu(d) = \max_{k=1,\ldots,d} \nu(d,k).$$

显然有

$$\mu(d) \sim \frac{3}{4d} \qquad (d \to \infty).$$

此外，表中还列出了 $\mu(d)$ 在 $2 \leqslant d \leqslant 10$ 时的一些具体取值，见表 3.3。

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(d)$	1/3	1/4	1/6	1/7	1/8	1/10	1/11	1/12	1/14

表3.3. 当 $d = 2, \ldots, 10$ 时， $\mu(d)$ 的取值

3.3.**讨论与结果比较**。 这里我们将 Demeter 和 Langowski 提出的界 [16,猜想 1。3] 以及 Wooley 提出的界 [29,猜想 8。2]与我们的猜想 2.4 以及我们的其他上界进行比较。需要强调的是，我们讨论的是 $s = 2,3$ 这一情形，此时 [16, 猜想 1。3] 实际上已由 [16,定理 2。4]证明。

为比较我们得到的各种上界，定义如下量较为方便

$$\kappa^{(0)}_{s,d}(\tau) = \limsup_{N\to\infty} \sup_{\|\mathbf{a}\|_\infty\leqslant 1} \frac{\log I^{(0)}_{s,d}(N^{-\tau};\mathbf{a},N)}{\log N},$$
$$\kappa^{\sharp}_{s,d}(\tau) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log I^{\sharp}_{s,d}(N^{-\tau};N)}{\log N},$$

其中 $\kappa^{(0)}_{s,d}(\tau)$内层上确界取遍所有满足 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$的复权重序列。由（1.4）可得

$$\kappa^{\sharp}_{s,d}(\tau) \leqslant \kappa^{(0)}_{s,d}(\tau).$$

现在我们给出 $\kappa^{\sharp}_{s,d}(\tau)$ 和 $\kappa^{(0)}_{s,d}(\tau)$ 在 d 和 s 取较小值时的一些图，以帮助比较各种界和猜想。

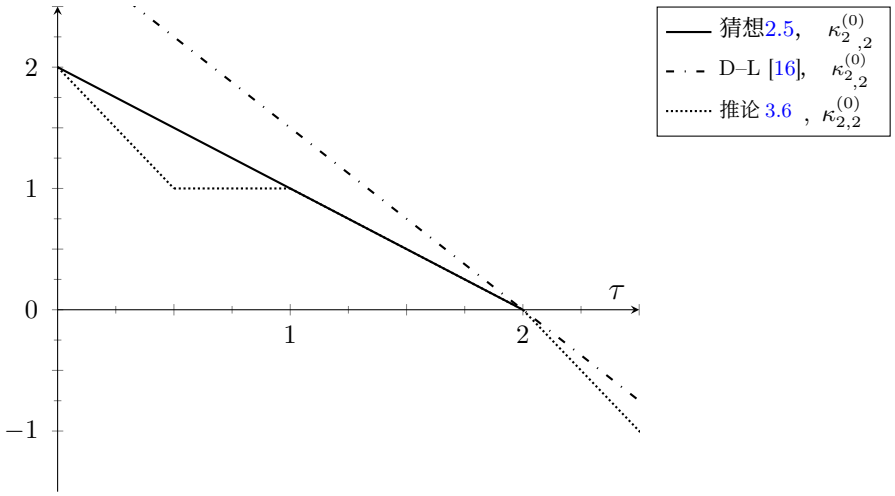


图 3.1。 关于 $\kappa^{(0)}_{2,2}(\tau)$和 $\kappa^{\sharp}_{2,2}(\tau)$ 在不同 $\delta = N^{-\tau}$取值下的上界与猜想比较。Wooley 猜想（猜想 2.1）与推论3.6相同，但仅适用于范围 $\tau \leqslant 1/4$。

图3.1 比较了 Demeter 和 Langowski [16, 定理 2.4] 以及 Wooley [29, 猜想 8.2], 提出的界，以及推论 3.6的上界和定理3.9的下界，针对情形 $d = s = 2$。我们注意到， [29] 的结果和猜想仅适用于 $I^{\sharp}_{s,d}(\delta; N)$，而我们的结果适用于更一般的量 $I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N)$，其中 $\|a\|_\infty \leqslant 1$。

注意，Demeter 和 Langowski [16] 猜想（并证明）对角行为一直延伸至点 $s = \rho(2)/2 = 1$，这使我们的参数配置处于超临界范围。相比之下，我们在猜想 2.5 中采用了更灵活的表述，因此可以选择参数，使得值 $s = 2$ 确实对应于临界点。事实上，由（2.8）可知，选择 $\alpha = 1$ 对于我们选定的参数是最优的，因此我们的猜想比 Demeter 和 Langowski [16]所得的结果更强。此外，显然至少对于当前采用的参数选择，我们的猜想已由推论3.6的界完全证实。我们还注意到，我们的推论 3.6 在 Wooley [29, 猜想 8.2] 的适用范围内与其猜想的上界一致，但对更大范围的 δ 也成立。

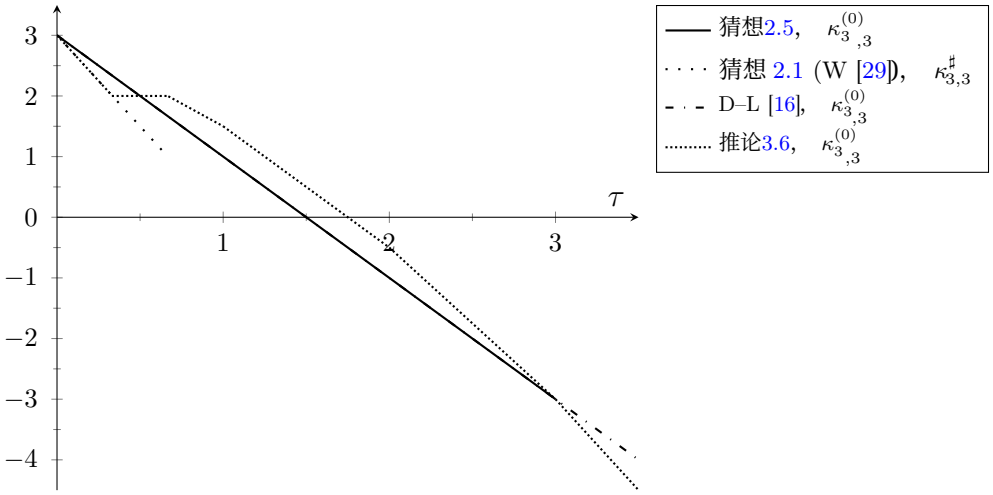


图 3.2。 关于 $\kappa_{3,3}^{(0)}$ 的上界和猜想的比较，(τ)和 $\kappa_{3,3}^{\sharp}(\tau)$ 对不同 $\delta = N^{-\tau}$取值的情况。请注意，在这种情况下，我们的猜想 2.5 与 Demeter 和 Langowski 的结果 [16] 重合。Wooley 猜想 [29] 适用于 $\tau \leqslant 2/3$。

在图 3.2中，我们给出了关于 $\kappa_{3,3}^{(0)}(\tau)$ 以及 $\kappa_{3,3}^{\sharp}(\tau)$的已证界和猜想界。在这一设定下，Demeter 和 Langowski [16, 猜想 1。3]讨论了 $\alpha = (d-1)/2 = 1$这一情形，因此根据（2.8），他们猜想的临界点与我们的猜想 2.5的临界点重合，因而他们预期会有相同的上界。

我们的推论 3.6 给出的界实际上比 [16, 猜想 1。3] 和猜想 2.5 在 $\delta > N^{-1/2}$、上的界更强，但不足以在整个范围内证明这些猜想。它还结合 Wooley 猜想 [29, 猜想 8。2] 给出了 $\delta \geqslant N^{-1/3}$的结果。注意，当 $\delta < N^{-3}$平凡上界（2.3）是尖锐的。

我们最后的图 3.3 比较了 $\kappa_{3,2}^{(0)}(\tau)$ 和 $\kappa_{3,2}^{\sharp}(\tau)$的界。从图中再次可以明显看出，针对另一组参数优化的 Demeter 和 Langowski 定理在此情形下并非紧确；事实上，对于所有 $\delta < N^{-2}$以及 $\delta > N^{-1/2}$，我们的推论 3.6都给出了更紧的界。在猜想 2.4中，我们可以取 $\alpha < 1$，由（2.8）可知，取值 $\alpha = 2/3$ 是最优的。

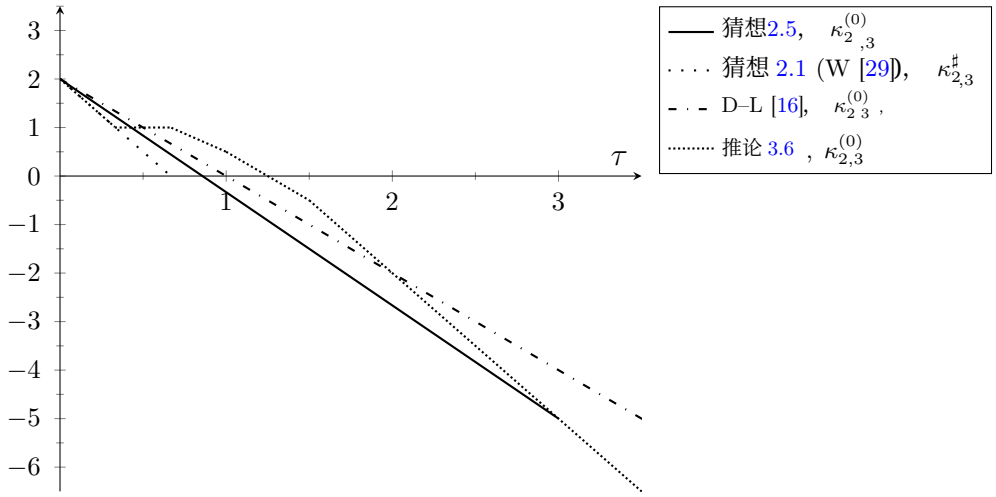


图 3.3. 对 $\kappa^{(0)}_{2,3}(\tau)$ 和 $\kappa^{\sharp}_{2,3}(\tau)$ 在不同 $\delta = N^{-\tau}$ 取值下上界和猜想的比较。Wooley 猜想 [29]适用于 $\tau \leqslant 2/3$。

与前一种情形一样，对于 $\delta > N^{-3/7}$，这一猜想已被超额满足，但对于$N^{-3/7} > \delta > N^{-3}$仍未解决。我们再次看到，我们的界证明了 Wooley 猜想 [29,猜想 8.2]对于 $\delta \geqslant N^{-1/3}$ 成立，但在范围 $N^{-2/3} < \delta < N^{-1/3}$ 内仍不够强。

注 3.11。 图 3.1、3.3 和 3.2 的一个共同特征是，极端范围内的界 $\tau > d$（对应于 $\delta \leqslant N^{-d}$）和 $\tau < 1/d$（对应于 $\delta > N^{-1/d}$）由互不重合的平行线表示。这一点尤其耐人寻味，因为这两个范围内的界都已被证明是紧的，因此引出了一个问题：这两个范围之间的“真实”情况是什么样的？推论 3.6 的结果表明，即使在低次数和少变量这一原本理解充分的情形下，“真实”图像也不可能完全凸或完全凹。相反，我们在那里发现，原点处的峰值呈现出显著的平台，而较大盒子上的平均值则形成一片低地；但连接二者的斜坡究竟是什么形状，尚不清楚。这表明，短区间上指数和的平均行为（进而其逐点行为）受某些尚未充分理解、值得进一步研究的现象支配。

注 3.12. 我们没有在图中加入下界。原因是，我们的下界对于 $\boldsymbol{\xi}$ 是一致的，也就是说，它不依赖于盒子在单位环面中的位置。相比之下，我们的上界要么专门讨论盒子位于原点的情形，要么至少涵盖这种情形；已知此处的指数和会出现尖峰。因此，在原点附近，我们的下界没有代表性，而已知我们的上界在此处是尖锐的。我们没有证据表明，下界是否可能在远离原点的某个 $\boldsymbol{\xi}$ 处达到尖锐。

4. 定理2.3 的证明

设 $\delta \in [N^{-d}, 1]$ 固定，并定义 $\mathcal{D} = [-\delta, \delta]^d$。进一步记

$$\mathcal{C} = \prod_{j=1}^{d} [-cN^{-j}, cN^{-j}]$$

对于某个正的 $c < 1/(8d)$。显然，对于 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$，我们有 $|x_1 n + \ldots + x_d n^d| \leqslant 1/8$，因此

$$|S_d(\mathbf{x}; N)| \gg N.$$

由关系 $\delta^{-1} = N^{\kappa}$ 定义 $\kappa \in [0, d]$，并令 $k = \lfloor \kappa \rfloor$ 和 $\tau = \kappa - k = \{\kappa\}$，从而得到不等式 $N^{-(k+1)} < \delta \leqslant N^{-k}$。由于

$$\mathrm{vol}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \asymp \delta^k \prod_{j=k+1}^{d} N^{-j} \asymp (N^{-(k+\tau)})^k N^{-s(d)+s(k)} \asymp N^{-s(d)-k(k-1+2\tau)/2},$$

按惯例，空乘积的值取为 1，我们有

$$\int_{\mathcal{D}} |S_d(\mathbf{x}; N)|^{2s} dx \gg \mathrm{vol}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) N^{2s} \asymp N^{2s-s(d)-k(k-1+2\tau)/2}.$$

根据 $s_0(d, \alpha)$ 的定义，我们还要求

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta; N) \leqslant \delta^{d-\alpha} N^{s+o(1)}$$

对于 $s \leqslant s_0(d, \alpha)$。因此我们需要

$$N^{2s-s(d)-k(k-1+2\tau)/2} \leqslant (N^{-k-\tau})^{d-\alpha} N^{s+o(1)},$$

尤其是

$$s \leqslant \frac{d(d+1)}{2} + \frac{k(k-1+2\tau)}{2} - (k+\tau)(d-\alpha).$$

现在回想一下，我们的目标是得到一个对所有 $\delta \in [N^{-d}, 1]$ 都成立的结论。因此，我们希望将以下表达式最小化

$$F(k, \tau) = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{k(k-1+2\tau)}{2} - (k+\tau)(d-\alpha).$$

注意，形式上我们有

$$F(k, 1) = F(k+1, 0), \tag{4.1}$$

通过直接计算即可验证这一点。因此，我们可以将 $\tau \in [0, 1)$ 的取值范围扩展到包含端点。

先假设 $\alpha \notin \mathbb{Z}$。显然，我们有

$$\partial F(k, \tau)/\partial \tau = k - (d - \alpha). \tag{4.2}$$

因此，对于任意固定的 k 值，当 $k > d - \alpha$ 时，函数 $F(k, \tau)$ 在 $\tau = 0$ 处取最小值；当 $k < d - \alpha$ 时，则在 $\tau = 1$ 处取最小值。

首先假设 $k > d - \alpha$，这样我们可以假设 $\tau = 0$。在这种情况下，我们有

$$\frac{\partial F(k, 0)}{\partial k} = k - (d - \alpha + 1/2),$$

当 k 取为最接近 $d-\alpha+1/2$ 的整数时，这是最优的。令 $d-\alpha+1/2=\lfloor d-\alpha\rfloor+1+(\{d-\alpha\}-1/2)$，并注意到 $(\{d-\alpha\}-1/2)\in(-1/2,1/2)$，我们看到这个最接近的整数为 $k=\lfloor d-\alpha\rfloor+1$。

类似地，若 $k<d-\alpha$，则有 $\tau=1$，因此

$$\frac{\partial F(k,1)}{\partial k}=k-(d-\alpha-1/2).$$

在这种情况下，我们有 $d-\alpha-1/2=\lfloor d-\alpha\rfloor+(\{d-\alpha\}-1/2)$，注意到 $(\{d-\alpha\}-1/2)\in(-1/2,1/2)$，因此在此设定下 k 的最优取值为 $k=\lfloor d-\alpha\rfloor$。

因此，函数 $F(k,\tau)$ 在以下两种情况下取最小值：$k=\lfloor d-\alpha\rfloor+1$ 和 $\tau=0$，或当 $k=\lfloor d-\alpha\rfloor$ 和 $\tau=1$。回顾式（4.1），显然这两个取值相同。因此，只需将取值 $k=\lfloor d-\alpha\rfloor+1$ 和 $\tau=0$ 代入，即可计算最小值。令 $\lfloor d-\alpha\rfloor=d-\alpha-\{d-\alpha\}$ 并注意到 $\{d-\alpha\}=1-\{\alpha\}$ 可得

$$\begin{aligned}
s&\leqslant F(\lfloor d-\alpha\rfloor+1,0)\\
&=\frac{d(d+1)}{2}+\frac{\lfloor d-\alpha\rfloor(\lfloor d-\alpha\rfloor+1)}{2}-(\lfloor d-\alpha\rfloor+1)(d-\alpha)\\
&=\frac{d(d+1)}{2}-\frac{(d-\alpha)(d-\alpha+1)}{2}-\frac{\{d-\alpha\}}{2}+\frac{(\{d-\alpha\})^2}{2}\\
&=\frac{\alpha(2d-\alpha+1)}{2}-\frac{\{\alpha\}(1-\{\alpha\})}{2}.
\end{aligned}$$

最后，当 $\alpha\in\mathbb{Z}$ 我们由（4.2）得出，$F(k,\tau)$ 在 $\tau=0$ 当 $k>d-\alpha$ 时取最小值，而在 $\tau=1$ 当 $k<d-\alpha$ 时取最小值，并且当 τ 时它是常数 $k=d-\alpha$。结合连续性（4.1），可知 F 在 $k=d-\alpha$ 以及整个区间 $\tau\in[0,1]$ 上取最小值，且其显式值为

$$F(d-\alpha+1,0)=\frac{d(d+1)}{2}-\frac{(d-\alpha)(d-\alpha+1)}{2}=\frac{\alpha(2d-\alpha+1)}{2}$$

同样如此。至此，定理 2.3 的证明完成。

注 4.1。还需讨论 $\delta\leqslant N^{-d}$ 时的情形。实际上，将上述证明的策略应用于这种情况，可得 $\mathrm{vol}(\mathcal{C}\cap\mathcal{D})\asymp\delta^d$，因此 $\delta^dN^{2s}\ll I^{(0)}_{s\,d},(\delta;\ N)$，这与平凡上界（2.3）一致。

5. 转向非齐次均值

下文中，我们用 $\mathrm{J}_{s,d}(\delta;N)$ 表示以下 d 个不等式组成的系统的解的数量

$$\left|\sum_{j=1}^{2s}(-1)^jn_j^i\right|\leqslant\delta^{-1},\qquad i=1,\dots,d,$$

关于整数变量 $1\leqslant n_1,\dots,n_{2s}\leqslant N$。我们以更适合本研究应用的形式回顾 [10, 引理 3.8],。

引理 5.1. 若 $|a_n| \leqslant 1, \quad n = 1, \ \ldots, \ N$，则

$$I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^d \mathsf{J}_{s,d}(\delta; N).$$

回忆一下$J_{s,\ d}(\mathbf{h};\ N)$在上文（3.5）的序言中的定义。以下即为[29,定理 1。3]。

引理 5.2。 设 $d \geqslant 2$ 且$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$。令 ℓ 为满足$h_\ell \neq 0$的最小整数，并设 $\ell \leqslant d-1$。那么，对任意整数 $s \leqslant d(d+1)/2$，有

$$J_{s,d}(\mathbf{h}; N) \leqslant N^{s-1/2+o(1)} + N^{s-\eta_{s,d}(\ell)+o(1)},$$

其中 $\eta_{s,\ d}(j)$ 如（3.1）所示。

需要指出的是，在 $\ell = d$的情况下，我们没有任何上界。此外，注意到当 $|h_j| > 2sN^j$ 时，对于任意 $j = 1$、.....、 d，$J_{s,\ d}(\mathbf{h};\ N) = 0$显然成立。

定义

$$\mathcal{U} = [-\delta^{-1}, \delta^{-1}]^d \subseteq \mathbb{Z}^d \qquad \text{and} \qquad \mathcal{V} = \prod_{j=1}^{d} [-2sN^j, 2sN^j] \subseteq \mathbb{Z}^d.$$

于是，对 $1 \leqslant j \leqslant d$，令

$$\mathcal{H}_j = \{\mathbf{h} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} : \ \mathbf{h} = (0, \ldots, 0, h_j, \ldots, h_d), \ h_j \neq 0\}.$$

用这种记号，我们有显然的划分

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup_{j=1}^{d} \mathcal{H}_j,$$

因此

$$\mathsf{J}_{s,d}(\delta; N) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}} J_{s,d}(\mathbf{h}; N) = J_{s,d}(N) + \sum_{j=1}^{d} \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}_j} J_{s,d}(\mathbf{h}; N). \tag{5.1}$$

接下来注意到，对每个 $j = 1$、 $\ldots d$，我们有

$$\#\mathcal{H}_j \asymp \prod_{i=j}^{d} \min\{\delta^{-1}, N^i\} = \delta^{-(d-j+1)} \prod_{i=j}^{d} \min\{1, N^i\delta\}.$$

特别地，若 $\delta \in [N^{-k-1}, N^{-k})$，且存在某个整数 k，则有

$$\#\mathcal{H}_j \asymp \delta^{-(d-j+1)} \prod_{\substack{i=j \\ i \leqslant k}}^{d} (N^i\delta),$$

其中，空乘积应解释为其值为 1。因此，我们可以写成

$$\#\mathcal{H}_j \asymp \begin{cases} \delta^{-(d-j+1)} & \text{for } k < j, \\ \delta^{-(d-k)} N^{(k(k+1)-j(j-1))/2} & \text{for } j \leqslant k < d, \\ N^{(d(d+1)-j(j-1))/2} & \text{for } d \leqslant k. \end{cases} \tag{5.2}$$

为便于后续参考，我们也记录这一显然的事实：

$$\#\mathcal{H}_1 \geqslant \ldots \geqslant \#\mathcal{H}_d,$$

以及上界

$$\#\mathcal{H}_1 \asymp \delta^{-d+k} N^{s(k)} \tag{5.3}$$

这对 $0 \leqslant k \leqslant d$ 成立。

最后，我们还记录下面这个简单的上界。

引理 5.3. 假设 $d \geqslant 2$。对于任意有限集 $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{Z}^d$，我们有

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}} J_{s,d}(\mathbf{h}; N) \leqslant \left(\#\mathcal{H} J_{2s,d}(N)\right)^{1/2}.$$

证明. 由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}} J_{s,d}(\mathbf{h}; N)\right)^2 &\leqslant \#\mathcal{H} \sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}} J_{s,d}(\mathbf{h}; N)^2 \\ &\leqslant \#\mathcal{H} \sum_{\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^d} J_{s,d}(\mathbf{h}; N)^2 = \#\mathcal{H} J_{2s,d}(N),\end{aligned}$$

结论随即得出。 □

6. 定理 3.1–3.5 的证明

6.1. **小盒子上加权韦尔和的一般上界。** 现在我们准备给出韦尔和最一般的上界，它将定理 3.1 和 3.2 以及定理 3.5 作为特殊情形包含在内。以下结果是后续所有讨论的出发点。

命题 6.1. 设 $\|\mathbf{a}\|_\infty \leqslant 1$。

(1) 对于任意 $s \leqslant s(d)$，有

$$\begin{aligned}I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^d N^{s+o(1)} \Bigg(&\min\left\{\#\mathcal{H}_d, (\#\mathcal{H}_d)^{1/2}\left(1 + N^{s-s(d)/2}\right)\right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{d-1} \min\left\{\#\mathcal{H}_j (N^{-1/2} + N^{-\eta_{s,d}(j)}), (\#\mathcal{H}_j)^{1/2}(1 + N^{s-s(d)/2})\right\}\Bigg),\end{aligned}$$

其中 $\eta_{s,\,d}(j)$ 如式 *(3.1)* 所示。

(2) 现在假设已知 *(3.6)* 对某个 ν 以及某个 $s_1(d)$成立。对于所有整数$s \leqslant s_1(d)$ 以及任意 $\delta \in (0, 1]$，我们有如下可能更强的上界

$$I^{(0)}_{s,d}(\delta; \mathbf{a}, N) \leqslant \delta^d N^{s+o(1)} \left(1 + \min\{\#\mathcal{H}_1 N^{-\nu}, (\#\mathcal{H}_1)^{1/2}(1 + N^{s-s(d)/2})\}\right).$$

证明。我们的出发点是分解式（5.1）。首先注意，我们可以对前 $d-1$ 个内层求和项应用引理5.2。此外，对于 $j = d$ 我们使用上界

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_d} J_{s,d}(\mathbf{h}; N) \ll \min\left\{\#\mathcal{H}_d J_{s,d}(N), (\#\mathcal{H}_d)^{-1/2} J_{2s,d}(N)^{1/2}\right\},$$

它结合了（3.5）和引理5.3。回顾（1.2），我们得到

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_d} J_{s,d}(\mathbf{h};N) \ll N^{s+o(1)} \min\left\{\#\mathcal{H}_d, (\#\mathcal{H}_d)^{1/2}\left(1+N^{s-s(d)/2}\right)\right\}.$$

类似地，对于 $1\leqslant j\leqslant d-1$，我们有

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_j} J_{s,d}(\mathbf{h};N) \ll N^{s+o(1)} \min\left\{\#\mathcal{H}_j(N^{-1/2}+N^{-\eta_{s,d}(j)}), (\#\mathcal{H}_j)^{1/2}\left(1+N^{s-s(d)/2}\right)\right\}.$$

将这两个上界与引理 5.1的结果结合起来，即可得到无条件情形下所需的结论。

对于条件情形，我们只需对上述论证作一些小的修改。同样从（5.1）出发，现在可以在所有内层求和项中使用（3.6）。因此，对于 $1\leqslant j\leqslant d$，我们有

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}_j} J_{s,d}(\mathbf{h};N) \ll N^{s+o(1)} \min\left\{\#\mathcal{H}_j N^{-\nu}, (\#\mathcal{H}_j)^{-1/2}(1+N^{s-s(d)/2})\right\}.$$

将此代回（5.1），并应用引理 5.1 可得

$$\begin{aligned} I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N) &\leqslant \delta^d N^{s+o(1)}\left(1+\sum_{j=1}^{d}\min\left\{\#\mathcal{H}_j N^{-\nu}, (\#\mathcal{H}_j)^{1/2}(1+N^{s-s(d)/2})\right\}\right)\\ &\leqslant N^{s+o(1)}\left(1+\min\left\{\#\mathcal{H}_1 N^{-\nu}, (\#\mathcal{H}_1)^{1/2}(1+N^{s-s(d)/2})\right\}\right), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\#\mathcal{H}_1=\max_j \#\mathcal{H}_j$。 □

6.2. **定理的证明 3.1 和 3.5。** 现在我们专门考虑 $s\leqslant s(d)/2$ 这一情形。在这种情况下，命题 6.1(1 的结论可以大大简化。

引理 6.2. 对于任意整数 $s\leqslant s(d)/2$ 以及任意 $\delta\in(0,1]$，有

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N) \leqslant \delta^d N^{s+o(1)}\left(\min\{\#\mathcal{H}_1 N^{-1/2}, (\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\}+(\#\mathcal{H}_d)^{1/2}\right).$$

证明。 回顾命题 6.1(1)。显然，在引理的假设下，我们有$N^{s-s(d)/2}\ll 1$。此外，对于 s 在允许范围内，我们有

$$\min_{1\leqslant j\leqslant d-1}\eta_{s,d}(j) \geqslant \frac{s(d)}{2}\cdot\min_{1\leqslant j\leqslant d-1}\frac{d-j+1}{d+j+1} \geqslant \frac{s(d)}{2}\cdot\frac{2}{2d}=\frac{d+1}{4}>1/2$$

对所有 $d\geqslant 2$。因此，命题 6.1 的结论简化为

$$\begin{aligned} I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N) &\leqslant \delta^d N^{s+o(1)}\left(1+\sum_{j=1}^{d-1}\min\left\{\#\mathcal{H}_j N^{-1/2}, (\#\mathcal{H}_j)^{1/2}\right\}+(\#\mathcal{H}_d)^{1/2}\right)\\ &\leqslant N^{s+o(1)}\left(\min\left\{\#\mathcal{H}_1 N^{-1/2}, (\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\right\}+(\#\mathcal{H}_d)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\#\mathcal{H}_1=\max_j \#\mathcal{H}_j$。证明至此完成。 □

定理 3.1 和 3.5 的推导现在很直接。由（5.2）可知，$\#\mathcal{H}_1\gg N$对所有 $\delta<N^{-1/d}$都成立。这对 $\delta<N^{-1}$显而易见；对于 $N^{-1}<\delta<N^{-1/d}$，也可以通过直接计算验证。在这些情况下，我们有

$$\min\{\#\mathcal{H}_1 N^{-1/2}, (\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\}=(\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\geqslant(\#\mathcal{H}_d)^{1/2},$$

而上界变为

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N)\leqslant\delta^{d}N^{s+o(1)}(\#\mathcal{H}_1)^{1/2}.$$

最后，如果 $\delta>N^{-1/d}$ 我们由（5.2）可知

$$\min\{\#\mathcal{H}_1N^{-1/2},(\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\}=\#\mathcal{H}_1N^{-1/2}\asymp\delta^{-d}N^{-1/2},$$

因此我们得到

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N)\leqslant\delta^{d}N^{s+o(1)}(\delta^{-d}N^{-1/2}+\delta^{-1/2}).$$

当 $\delta>N^{-1/(2d-1)}$ 时，第一项占主导。结合这两个上界与（3.1 （5.2）即可完成定理

现在转而证明定理3.5，其中假设已知（3.6），且 $\nu=1$。此时，将（5.3）代入命题6.1（2），即可立即得到定理第（2）部分的上界。

为了证明第（1）部分的界，我们先注意到$\#\mathcal{H}_1\gg N^2$ 对所有 $\delta<N^{-2/d}$均成立。这对于5.3）由（ $\delta\leqslant N^{-2}$立即可得，而在区间 $N^{-2}<\delta\leqslant N^{-1}$和 $N^{-1}<\delta\leqslant N^{-2/d}$ 中分别可直接验证。因此，在 δ 的这一范围内，我们有

$$\min\left\{\#\mathcal{H}_1N^{-1},(\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\right\}=\#\mathcal{H}_1^{1/2}>1.$$

最后，对于 $N^{-2/d}<\delta<1$，我们得到

$$\min\left\{\#\mathcal{H}_1N^{-1},(\#\mathcal{H}_1)^{1/2}\right\}=\#\mathcal{H}_1N^{-1}\begin{cases}\ll1 & \text{if } N^{-2/d}<\delta<N^{-1/d}\\ \gg1 & \text{if } N^{-1/d}\leqslant\delta\leqslant1.\end{cases}$$

定理 3.5(1 的结论现已得到证明：将这些上界代入命题6.1(2)，并代入（5.3）中的取值即可。

6.3. **定理 3.2 和推论 3.4 的证明。** 现在我们考察 $s(d)/2<s<s(d)$ 且 $\delta>N^{-1}$ 的情形。在这种情况下，对于$1\leqslant j\leqslant d$，我们有 $\#\mathcal{H}_j\asymp\delta^{-d+j-1}$。此外，由于 $\delta\geqslant N^{-1}\geqslant N^{s(d)-2s}$，显然有

$$\min\left\{\delta^{-1},\delta^{-1/2}N^{s-s(d)/2}\right\}=\delta^{-1}.$$

因此，在这些条件下，命题 6.1 的结论为

$$I_{s,d}^{(0)}(\delta;\mathbf{a},N)\leqslant\delta^{d}N^{s+o(1)}\Bigg(\delta^{-1}+\sum_{j=1}^{d-1}\min\big\{\delta^{-d+j-1}(N^{-1/2}+N^{-\eta_{s,d}(j)}),\\ \delta^{-(d-j+1)/2}N^{s-s(d)/2}\big\}\Bigg).$$

这就完成了定理 3.2 的证明。

为完成推论 3.4的证明，我们先注意到 $\delta^{-1}<\delta^{-(d-1+j)/2}N^{s-s(d)/2}$对所有 j 以及所有 $\delta\leqslant1$均成立。因此，只需检查 δ 在哪个范围内满足

$$\delta^{-1}\gg\max_{1\leqslant j\leqslant d-1}\delta^{-d+j-1}(N^{-1/2}+N^{-\eta_{s,d}(j)})\asymp\delta^{-d}N^{-1/2}+\max_{1\leqslant j\leqslant d-1}\delta^{-d+j-1}N^{-\eta_{s,d}(j)}.$$

比较这些项并回顾 η_s的定义, $d(j)$ 由（3.1）可知，只需选择

$$\delta \geqslant \max\{N^{-(s(d)-s)\vartheta(d)}, N^{-1/(2d-2)}\},$$

with

$$\vartheta(d) = \min_{j=1,\dots,d-1} f(j),$$

其中函数 f 由（3.2）定义。因此，只需证明该定义下的 ϑ（d）与（3.3）中给出的定义一致，即完成证明。

由于 $f(x)$ 的分母在 $x = d$ 和 $x = -d-1$ 处为零，而这两点都不在区间 $[1, d-1]$ 内，因此可知 f 在该区间内连续。此外，经过简单但略显繁琐的微积分计算可得

$$f'(x) = -\frac{d^2 - 1 - 2(d+1)x + x^2}{(d^2 + d - x^2 - x)^2}.$$

此表达式在 $x_\pm = d+1 \pm \sqrt{2(d+1)}$ 处有两个根，~~其中较大~~的根显然位于区间 $[1, d-1]$ 之外，因此可以忽略。由于 f' 在 $x = x_-$ 处由负变正，该根对应一个极小值。为计算其取值，注意到对于 $d \geqslant 3$，有 $d+1-\sqrt{2(d+1)} \in [1, d-1]$~~，因此 $d+1-\lfloor\sqrt{2(d+1)}\rfloor$~~ 和 $d+1-\lceil\sqrt{2(d+1)}\rceil$ 均属于集合 $\{1, \dots, d-1\}$。因此，当 $d \geqslant 3$ 时， $\vartheta(d)$ 的取值必然相同。最后，对于 $d = 2$，该恒等式很容易直接验证。推论 3.4 的证明至此完成。

7. Approach via the structure of large Weyl sums

下文中，定义如下会比较方便

$$D = \min\left\{2^{d-1}, 2d(d-1)\right\}.$$

We be我们从描述大高斯和的结构开始分析

$$G(x_1, x_2; N) = S_2((x_1, x_2); N) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}\left(x_1 n + x_2 n^2\right). \tag{7.1}$$

以下是[4, 引理 5.1], ，而它又推自 Baker 的一个结果 [1, 定理 3]（另见[2, 定理 4]）。

引理 7.1。固定某个 $\varepsilon > 0$，并假设对于实数 $A > N^{1/2+\varepsilon}$，有$|G(x_1, x_2; N)| \geqslant A$，其中某个$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$成立。那么存在整数 q, a_1, a_2，使得

$$1 \leqslant q \leqslant \left(NA^{-1}\right)^2 N^{o(1)},$$

并且对于 $i = 1$，2，有

$$\left|x_i - \frac{a_i}{q}\right| \leqslant (NA^{-1})^2 q^{-1} N^{-i+o(1)}.$$

对于 $d \geqslant 3$，我们使用以下来自 [3] 的结果，该结果基于 Baker [1, 定理 3] 与 [2, 定理 4] 的结果，以及完全有理和的界；例如，参见 [14]。具体而言，由 [3, 引理 2.7]，我们有

引理 7.2. 我们固定 $d \geqslant 3$、某个 $\varepsilon > 0$，并假设对于满足 $A > N^{1-1/D+\varepsilon}$ 的实数 A，有 $|S_d(\mathbf{x};\ N)| \geqslant A$，其中某个 $\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d$。那么存在正整数 q_2，……，q_d，使得对于 $2 \leqslant i < j \leqslant d$，有 最大公约数$(q_i,\ q_j) = 1$

(i) q_2 是无立方因子的，(ii) q_i 是 i 次幂满数，但当 $3 \leqslant i \leqslant d-1$ 时是$(i+1)$ 次无幂因子的，(iii) q_d 是 d 次幂满数，

and

$$\prod_{i=2}^{d} q_i^{1/i} \leqslant N^{1+o(1)} A^{-1},$$

以及满足下式的整数 $b_1, \dots, b_d$

$$\gcd(q_2 \cdots q_d, b_1, \dots, b_d) = 1$$

使得

$$\left| x_j - \frac{b_j}{q_2 \cdots q_d} \right| \leqslant (NA^{-1})^d N^{-j+o(1)} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-d/i}, \qquad j = 1, \dots, d.$$

注 7.3. 对于引理 x_1、x_2 **7.1** 中 的逼近误差，根据 $A > N^{1/2+\varepsilon}$ 的条件，我们有

$$(NA^{-1})^2 q^{-1} N^{-i+o(1)} \leqslant q^{-1} N^{-2\varepsilon+o(1)}, \qquad i = 1, 2. \tag{7.2}$$

类似地，对于引理 7.2 的误差，我们有

$$(NA^{-1})^d N^{-j+o(1)} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-d/i} \leqslant N^{-d\varepsilon+o(1)} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-1}, \qquad j = 1, \dots, d. \tag{7.3}$$

对于实数 $A > 0$，我们定义水平集。

$$\mathscr{F}_{d,A} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d :\ |S_d(\mathbf{x}; N)| \geqslant A\}. \tag{7.4}$$

此外，对于盒子 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \boldsymbol{\xi} + [0, \delta]^d \subseteq \mathsf{T}_d$，记

$$\lambda_{d,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) = \lambda(\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathscr{F}_{d,A}). \tag{7.5}$$

引理 7.4. 假设对于某个固定的 $\varepsilon > 0$，$A > N^{1/2+\varepsilon}$成立。那么对于任意 $\delta \geqslant AN^{-1}$，我们有

$$\lambda_{2,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) \leqslant \delta^2 N^{3+o(1)} A^{-6}.$$

证明. 设对于某个足够小的 $\eta > 0$，$Q = (NA^{-1})^2 N^{\eta}$成立。对于 $q \in \mathbb{N}$ 和 $\mathfrak{b} = (b_1, b_2) \in [q]^2$，定义矩形盒

$$R_q(\mathbf{b}) = B(b_1/q, Qq^{-1}N^{-1}) \times B(b_2/q, Qq^{-1}N^{-2}),$$

其中，$B(x, r) \subseteq \mathbb{R}$ 表示中心为 x、半径为 r的区间。显然，每个这样的盒子面积为

$$\lambda(R_q(\mathbf{b})) \asymp Q^2/(q^2 N^3).$$

由引理 7.1可知，对所有充分大的 N，我们得到

$$\mathscr{F}_{2,A} \subseteq \bigcup_{q \leqslant Q} \bigcup_{(b_1,b_2) \in [q]^2} R_q(\mathbf{b}).$$

由 (7.2) 可轻易推出，盒子 $R_q(\mathbf{b})$ 对所有 $q \in \mathbb{N}$ 都互不相交。因此，任意盒子 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ 至多与 $O\left(1+(q\delta)^2\right)$ 个盒子 $R_q(\mathbf{b})$ 相交。于是，回顾 (7.5，我们推得

$$\begin{aligned}\lambda_{2,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) &= \lambda(\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathscr{F}_{2,A}) \\ &\ll \sum_{q \leqslant Q} \sum_{(b_1,b_2)\in[q]^2} \lambda\left(R_q(\mathbf{b}) \cap \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)\right) \\ &\ll \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{\mathbf{b}\in[q]^2 \\ R_q(\mathbf{b})\cap\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi},\delta)\neq\emptyset}} \lambda\left(R_q(\mathbf{b})\right) \\ &\ll \sum_{q \leqslant Q} \left(1+(q\delta)^2\right) \frac{Q^2}{q^2 N^3} \ll \frac{Q^2}{N^3} + \frac{Q^3}{N^3}\delta^2.\end{aligned}$$

因此，利用 $\delta \geqslant AN^{-1} \geqslant Q^{-1/2}$，我们得到

$$\lambda_{2,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) \ll \frac{Q^2}{N^3} + \frac{Q^3}{N^3}\delta^2 \ll \frac{Q^3}{N^3}\delta^2 = N^{3+3\eta}A^{-6}\delta^2.$$

由于 $\eta > 0$ 是任意的，我们得到所需的上界。 □

对于 $d \geqslant 3$，我们仿照[3, 引理 2.9]的证明，以获得对某个小盒子的限制下的水平集估计。具体而言，在[3, 引理 2.9]中取 $k = d$，并在其中添加因子 δ^d，便得到以下上界。

引理 7.5。 假设 $d \geqslant 3$ 和 $A > N^{1-1/D+\varepsilon}$ 对某个固定的 $\varepsilon > 0$ 成立。那么对于任意 $\delta \geqslant \left(AN^{-1}\right)^{1/d}$，我们有

$$\lambda_{d,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) \leqslant N^{d^2+1-s(d)+o(1)}A^{-d^2-1}\delta^d.$$

证明。令

$$Q = \left(NA^{-1}\right)^d N^{\eta} \tag{7.6}$$

其中某个较小的数为 $\eta > 0$。对于任意 $q_2, \ldots, q_d \in \mathbb{N}$ 和 $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{Z}$，定义盒子

$$R_{q_2,\ldots,q_d}(\mathbf{b}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d : \ \left|x_j - \frac{b_j}{q_2 \ldots q_d}\right| \leqslant QN^{-j}\prod_{i=2}^{d} q_i^{-d/i}, \ j = 1, \ldots, d\right\}.$$

再次注意到

$$\lambda(R_{q_2,\ldots,q_d}(\mathbf{b})) \asymp \prod_{j=1}^{d}\left(QN^{-j}\prod_{i=2}^{d} q_i^{-d/i}\right) \asymp Q^d N^{-s(d)}\prod_{i=2}^{d} q_i^{-d^2/i}. \tag{7.7}$$

此外，由（7.3）可知，这些盒子两两不相交。因此，对于任意固定的 d-元组 $(q_2, \ldots, q_d)$，与 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ 有非空交集的盒子 $R_{q_2,\ldots,q_d}(\mathbf{b})$ 的数量为

$$\#\{\mathbf{b} \in [q_2 \cdots q_d]^d : \ R_{q_2,\ldots,q_d}(\mathbf{b}) \cap \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \neq \emptyset\} = O(1 + (\delta q_2 \cdots q_d)^d). \tag{7.8}$$

对于任意整数 $i \geqslant 2$，记作

$$\mathcal{F}_i = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ is } i\text{-th power full}\} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_i(x) = \mathcal{F}_i \cap [1, x],$$

因此，经过简单计数可得

$$\#\mathcal{F}_i(x) \ll x^{1/i}, \tag{7.9}$$

并令

$$\Omega = \left\{ (q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}^{d-1} : \ q_i \in \mathcal{F}_i \quad (3 \leqslant i \leqslant d), \quad \prod_{i=2}^{d} q_i^{d/i} \leqslant Q \right\}.$$

因此，回顾定义（7.4），显然有

$$\mathscr{F}_{d,A} \subseteq \bigcup_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega} \bigcup_{\mathbf{b}\in[q_2\cdots q_d]^d} R_{q_2,\dots,q_d}(\mathbf{b}).$$

结合（7.7）和（7.8），并回顾（7.5），我们可以估计

$$\begin{aligned} \lambda_{d,\boldsymbol{\xi}}(\delta, A; N) &= \lambda\left(\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathscr{F}_{d,A}\right) \\ &\leqslant \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega} \sum_{\substack{\mathbf{b}\in[q_2\cdots q_d]^d \\ R_{q_2,\dots,q_d}(\mathbf{b})\cap\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi},\delta)\neq\emptyset}} \lambda(R_{q_2,\dots,q_d}(\mathbf{b})) \\ &\ll \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega} (1 + (\delta q_2 \cdots q_d)^d) Q^d N^{-s(d)} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-d^2/i}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

记

$$U_1 = \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-d^2/i} \qquad \text{and} \qquad U_2 = \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega} \prod_{i=2}^{d} q_i^{d-d^2/i},$$

那么（7.10）可由以下上界控制

$$\lambda\left(\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathscr{F}_{d,A}\right) \ll Q^d N^{-s(d)} U_1 + \delta^d Q^d N^{-s(d)} U_2. \tag{7.11}$$

显然，

$$U_1 \leqslant \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}^d} \prod_{i=2}^{d} q_i^{-d^2/i} \ll 1. \tag{7.12}$$

现在我们转而估计 U_2。对于 Q_2、…、Q_d和 $\delta > 0$，记为

$$\Omega(Q_2, \dots, Q_d) = \{(q_2, \dots, q_d) \in \Omega : \ Q_i/2 < q_i \leqslant Q_i, \ i = 2, \dots, d\},$$

并记

$$U_2(Q_2, \dots, Q_d) = \sum_{(q_2,\dots,q_d)\in\Omega(Q_2,\dots,Q_d)} \prod_{i=2}^{d} q_i^{d-d^2/i}.$$

因此，用 $O\left((\log N)^d\right)$ 个二进盒覆盖Ω，可得

$$U_2 \ll \max\left\{ U_2\left(Q_2, \dots, Q_d\right) : \ Q_2, \dots, Q_d \geqslant 1, \ \prod_{i=2}^{d} Q_i^{-d/i} \leqslant Q \right\} (\log N)^d. \tag{7.13}$$

根据（7.9），可得

$$U_2(Q_2,\dots,Q_d) \ll \sum_{Q_2/2<q_2\leqslant Q_2} q_2^{d-d^2/2} \prod_{i=3}^{d} \left(Q_i^{d-d^2/i} \#\mathcal{F}_i(Q_i)\right) \ll \prod_{i=2}^{d} Q_i^{\alpha_i}, \tag{7.14}$$

其中

$$\alpha_2 = d - d^2/2 + 1 \qquad \text{and} \qquad \alpha_i = d - (d^2-1)/i \quad (i = 3,\dots,d).$$

注意，对每个 $i = 2, \dots, d$，我们都有 $\alpha_i \leqslant 1/i$。结合 (7.13) 中关于 $Q_2, \dots, Q_d$ 的条件，我们由 (7.14) 和 (7.13) 得出

$$U_2 \ll Q^{1/d}(\log N)^d. \tag{7.15}$$

最后，结合 (7.11)、(7.12) 和 (7.15) 中的界。因此，回想条件 $\delta \geqslant (AN^{-1})^{1/d}$ 以及由 (7.6) 得到的 Q 的定义，并任意选取 $\eta > 0$，我们便得到

$$\begin{aligned}\lambda(\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi},\delta) \cap \mathscr{F}_{d,A}) &\ll Q^d N^{-s(d)} + Q^{d+1/d} N^{-s(d)} \delta^d (\log N)^d \\ &\leqslant (NA^{-1})^{d^2+1} N^{-s(d)+o(1)} \delta^d,\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

8. 定理 3.7和 3.8 的证明

8.1. **定理3.7的证明。** 令 $\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_2$ 且

$$A = N^{1/2+s/(6+2s)}.$$

接下来，我们根据 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \boldsymbol{\xi} + [0,\delta]^2$ 是否满足$|S_2(\mathbf{x}; N)| \geqslant A$ 将集合分成两部分。因此，结合引理 7.4（该引理适用于上述对 A的选择），我们得到

$$\begin{aligned}I_{s,2}^{\sharp}(\delta; N) &\leqslant A^{2s}\delta^2 + N^{2s} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathsf{T}_2} \lambda(\{\mathbf{x} \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi},\delta) : \ |S_2(\mathbf{x}; N)| \geqslant A\}) \\ &\leqslant A^{2s}\delta^2 + N^{2s+3+o(1)} A^{-6}\delta^2,\end{aligned}$$

由此得到所需的上界。

8.2. **定理3.8的证明。** 令 $\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_d$ 且

$$A = N^{1-s(d)/(2s+d^2+1)},$$

注意到，假设 $s > (s(d)D - d^2 - 1)/2$确保 $A > N^{1-1/D+\varepsilon}$，因此引理 7.5 适用。将盒子 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \boldsymbol{\xi} + [0,\delta]^d$根据是否满足 $|S_d(\mathbf{x}; N)| \geqslant A$ 分成两部分。因此，应用引理 7.5 可得

$$\begin{aligned}I_{s,d}^{\sharp}(\delta; N) &\leqslant A^{2s}\delta^d + N^{2s} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathsf{T}_d} \lambda(\{\mathbf{x} \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi},\delta) : \ |S_d(\mathbf{x}; N)| \geqslant A\}) \\ &\leqslant A^{2s}\delta^d + N^{2s+d^2+1-s(d)+o(1)} A^{-d^2-1}\delta^d,\end{aligned}$$

由此得到所需的上界。

9. 有理指数和

9.1. **高斯和**。 回顾高斯和的定义（7.1）。我们也记录其显式求值结果，这是一个经典结果（例如参见 [20, 公式（1.55）]）。

引理 9.1. 设 $p \geqslant 3$ 是一个素数，且 $a, b \in \mathbb{F}_p$ 满足 $b \neq 0$，则 n

$$\left| \sum_{n=0}^{p-1} \mathbf{e}_p\left(an + bn^2\right) \right| = p^{1/2}.$$

我们还回顾 Fiedler、Jurkat 和 Körner 的一个经典结果 [18,引理 4]。

引理 9.2. 对于任意素数 p 和任意 $a, b \in \mathbb{F}_p$，若 $b \neq 0$，则有

$$\max_{1 \leqslant M,N \leqslant p} \left| \sum_{M+1 \leqslant n \leqslant M+N} \mathbf{e}_p\left(an + bn^2\right) \right| \ll p^{1/2}.$$

引理 9.3. 设 p 是一个素数，N 是一个整数，且对于某个正数常数 C有 $N \geqslant Cp$ 。假设数对 $(x_1, x_2) \in \mathsf{T}_2$有如下形式的有理逼近

$$|x_1 - a/p| \leqslant c/N \qquad and \qquad |x_2 - b/p| \leqslant c/N^2$$

对于某个正常数 c，其中 最大公约数$(b, p) = 1$。于是我们有

$$|G(x_1, x_2; N)| \gg Np^{-1/2}.$$

证明。 结合引理 9.2 与 [13, 推论 2。6] 我们得到高斯和的连续性。

$$G(x_1, x_2; N) - G(a/p, b/p; N) \ll Np^{-1/2}\left(|x_1 - a/p|N + |x_2 - b/p|N^2\right).$$

由引理 9.1和 9.2 可知

$$|G(a/p, b/p; N)| = \lfloor N/p \rfloor p^{1/2} + O\left(p^{1/2}\right) = Np^{-1/2} + O\left(p^{1/2}\right),$$

通过适当选取 C，我们得到所需结果。 □

9.2. **任意多项式的有理和**。 对于 $d \geqslant 3$，我们没有引理 9.1的类似结论。对于任意盒子 $\boldsymbol{\xi} + [0, \delta]^d \in \mathsf{T}_d$，我们采用与 [11] 中研究大的完全有理和的分布时相同的策略。事实上，我们需要对 [11, 引理 2。6]中给出的论证作更精细的处理，以便对任意给定小盒子内大和的个数进行定量估计。然后，采用与处理情形 $d = 2$时类似的方法，我们得到一些非平凡的下界。

设 p 是一个素数，令 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的有限域。对于向量 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{F}_p^d$，我们考虑有理指数和

$$T_{d,p}(\mathbf{u}) = S_d(\mathbf{u}/p; p) = \sum_{n=1}^{p} \mathbf{e}_p\left(u_1 n + \ldots + u_d n^d\right),$$

其中 $\mathsf{e}_p(z) = \mathsf{e}(z/p)$。我们还考虑离散立方盒

$$\mathfrak{B} = \mathcal{I}_1 \times \ldots \times \mathcal{I}_d \subseteq \mathbb{F}_p^d \tag{9.1}$$

边长为 L 的盒子，其中对于每个 $j=1,\dots,d$ 集合 $\mathcal{I}_j=\{k_j+1,\dots,k_j+L\}$ 是由 $L\leqslant p$ 个连续整数构成的集合；若 $k_j+L\geqslant p$，则对模 p 取约化。

我们的目标是给出 [11, 引理 2。6] 的一个定量版本。与 [11] 一样，我们先回顾 Knizhnerman 和 Sokolinskii 的一个结果：[21, 定理 1]（另见 [22]），我们有如下结论。

引理 9.4。对于每个整数 $d\geqslant 2$，存在一些正常数 c_d 和 γ_d，使得存在一个基数为 $\#\mathcal{L}_p\geqslant c_dp^d$ 的集合 $\mathcal{L}_p\subseteq\mathbb{F}_p^d$，满足对所有 $\mathbf{a}\in\mathcal{L}_p$，均有

$$|T_{d,p}(\mathbf{a})|\geqslant\gamma_d\sqrt{p}.$$

我们还需要一个关于单项式曲线分布的结果。下面的结论是 [11,引理 2.5], ，我们还补充了（平凡的）情形 $k=1$。

引理 9.5。设 $(a_1,\dots,a_k)\in(\mathbb{F}_p^*)^k$。则存在一个正常数 C，它仅依赖于 k，使得对于任意盒子 $\mathfrak{B}$ 如 *(9.1)* 中所示，边长为 $L\geqslant Cp^{1-1/2k}\log p$，其中 $k\geqslant 2$ 且 $L\geqslant 1$，其中 $k=1$，我们有

$$\#\left\{\lambda\in\mathbb{F}_p^*:\ (a_1\lambda,\dots,a_k\lambda^k)\in\mathfrak{B}\right\}\geqslant\frac{1}{2}L^kp^{1-k}.$$

现在我们可以证明本节的主要结果了。回顾 $\nu(d,k)$ 在 (3.7) 中的定义，便可得到以下水平集结果。

引理 9.6。对于任意 $d\geqslant 3$ 和 $1\leqslant k<d$，存在常数 $\gamma_d,\Gamma_d>0$，使得对于任意如 ($\mathfrak{B}$（*9.1*）所示且边长为 $L\geqslant\Gamma_dp^{1-\nu(d,k)}\log p$ 的盒子，我们有

$$\#\left\{\mathbf{u}\in\mathfrak{B}:\ |T_{d,p}(\mathbf{u})|\geqslant\gamma_dp^{1/2}\right\}\gg L^d.$$

证明。如有必要，调整 Γ_d，我们可以假设 p 足够大。由引理 9.4，存在一个常数 γ_d 以及一个集合 $\mathcal{L}_p\subseteq\mathbb{F}_p^d$，其基数为

$$\#\mathcal{L}_p\geqslant c_pp^d \tag{9.2}$$

对于某个适当的常数 c_p，且具有如下性质：$T_{d,\ p}$(a) 对所有元素 a $\in\mathcal{L}_p$均成立。显然，若 $(a_1,\dots,a_d)\in\mathcal{L}_p$，则对于任意 $\lambda\in\mathbb{F}_p^*$，我们也有 $(a_1\lambda,\dots,a_d\lambda^d)\in\mathcal{L}_p$。

用 $\mathcal{A}_k\subseteq\mathbb{F}_p^k$ 表示所有满足以下条件的 $(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{F}_p^k$：

$$\#\left(\mathcal{L}_p\cap\left((a_1,\dots a_k)\times\mathbb{F}_p^{d-k}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}c_dp^{d-k}, \tag{9.3}$$

其中 c_d 是引理 9.4中的常数。于是，通过将 $\mathbb{F}^k=\mathcal{A}_k\cup(\mathbb{F}_p^k\setminus\mathcal{A})$ 分解，并在第二项中使用（9.3）（以逆否命题形式），我们得到

$$\begin{aligned}\#\mathcal{L}_p&=\sum_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathcal{A}_k}\ \sum_{\substack{(a_{k+1},\dots,a_d)\in\mathbb{F}_p^{d-k}\\(a_1,\dots,a_k)\in\mathcal{L}_p}}1+\sum_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{F}_p^k\setminus\mathcal{A}_k}\ \sum_{\substack{(a_{k+1},\dots,a_d)\in\mathbb{F}_p^{d-k}\\(a_1,\dots,a_d)\in\mathcal{L}_p}}1\\&\leqslant\#\mathcal{A}_kp^{d-k}+\sum_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{F}_p^k\setminus\mathcal{A}_k}\frac{1}{2}c_dp^{d-k}\\&\leqslant\#\mathcal{A}_kp^{d-k}+\frac{1}{2}c_dp^d.\end{aligned} \tag{9.4}$$

结合界（9.2）和（9.4），可得

$$c_d p^d \leqslant \#\mathcal{A}_k p^{d-k} + \frac{1}{2} c_d p^d$$

整理得

$$\#\mathcal{A}_k \geqslant \frac{c_d}{2} p^k.$$

现在令 $\mathcal{A}_k^* = \mathcal{A}_k \cap (\mathbb{F}_p^*)^k$。因此显然有

$$\#\mathcal{A}_k^* \gg p^k. \tag{9.5}$$

现在固定一个 $\mathbf{a}^* = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{A}_k^*$，并考虑集合

$$\mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) = \mathcal{L}_p \cap \left(\{a_1, \ldots, a_k\} \times \mathbb{F}_p^{d-k}\right).$$

显然，根据集合 9.3 的定义，$\mathcal{A}_k$ 我们有

$$\#\mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) \gg p^{d-k}. \tag{9.6}$$

给定一个形如 $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{F}_p^d$ 9.1 的盒子，我们以自然的方式将它分解为 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathbb{F}_p^k \times \mathbb{F}_p^{d-k}$。注意，我们有 $\#\mathfrak{B}_1 = L^k$。进一步令

$$\Lambda_k(\mathbf{a}^*) = \{\lambda \in \mathbb{F}_p^* : \ (\lambda a_1, \ldots, \lambda^k a_k) \in \mathfrak{B}_1\}.$$

那么引理 9.5 表明

$$\#\Lambda_k(\mathbf{a}^*) \geqslant \frac{1}{2} L^k p^{1-k}, \tag{9.7}$$

前提是该条件

$$L \geqslant \Gamma_d p^{1-1/2k} \log p \tag{9.8}$$

若 $k \geqslant 2$，则只要 Γ_d 足够大；若 $k = 1$，则任意 L 均可。

令 $R(\mathbf{a}^*)$ 表示形如以下形式的向量数目

$$(\mathbf{a}^*, a_{k+1}, \ldots a_d, \lambda) = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots a_d, \lambda) \in \mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) \times \Lambda_k$$

使得

$$(\lambda^{k+1} a_{k+1}, \ldots, \lambda^d a_d) \in \mathfrak{B}_2.$$

在 [11,引理 2.6] 的证明中已证明

$$\begin{aligned} &\left|R(\mathbf{a}^*) - \#\mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) \#\Lambda_k(\mathbf{a}^*) (L/p)^{d-k}\right| \\ &\qquad \leqslant C_d \#\mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) (\#\Lambda_k(\mathbf{a}^*))^{1/2} (\log p)^{d-k} \end{aligned} \tag{9.9}$$

对于某个常数 C_d，它仅取决于 d。现在假设

$$C_d (\log p)^{d-k} \leqslant \frac{1}{2} (L/p)^{d-k} (\#\Lambda_k(\mathbf{a}^*))^{1/2}. \tag{9.10}$$

那么，$R(\mathbf{a}^*)$ 由 (9.9) 给出的量有如下下界：

$$\begin{aligned} R(\mathbf{a}^*) &\geqslant \frac{1}{2} \#\mathcal{L}_{p,k}(\mathbf{a}^*) \#\Lambda_k(\mathbf{a}^*) (L/p)^{d-k} \\ &\gg p^{d-k} L^k p^{1-k} (L/p)^{d-k} \gg L^d p^{1-k}, \end{aligned} \tag{9.11}$$

其中用到了（9.6）和（9.7）。

另一方面，（9.7）意味着，当9.10）中的条件必然满足。

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(L/p)^{d-k}(L^k p^{1-k})^{1/2} \geqslant C_d(\log p)^{d-k},$$

可重新排列为

$$L \geqslant \widetilde{C}_d p^{1-1/(2d-k)}(\log p)^{(d-k)/(d-k/2)}, \tag{9.12}$$

其中 $\widetilde{C}_d = (2\sqrt{2}C_d)^{1/(d-k/2)}$。注意，由于 (9.7) 对所有 $k \geqslant 1$ 都成立，因此最后一个上界也成立。

结合条件 (9.8) 和 (9.12)，回顾 $\nu(d, k)$ 在 (3.7) 中的定义，并在必要时增大 Γ_d，可知不等式

$$L \geqslant \Gamma_d p^{1-\nu(d,k)} \log p$$

足以保证 (9.11) 对任意 $\mathbf{a}^* \in \mathcal{A}_k^*$ 都成立。

显然，$\mathbf{u} \in \mathbb{F}_p^d$ 中的每个向量至多有 p 种表示形式，表示为

$$\mathbf{u} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda^d a_d)$$

满足 $(\alpha_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{F}_p^d$ 且 $\lambda \in \mathbb{F}_p^*$。因此，由（9.11）可得

$$\#\left\{\mathbf{u} \in \mathfrak{B} : |T_{d,p}(\mathbf{u})| \geqslant \gamma_d p^{1/2}\right\} \geqslant \frac{1}{p} \sum_{\mathbf{a}^* \in \mathcal{A}_k^*} R(\mathbf{a}^*) \gg L^d p^{-k} \# \mathcal{A}_k^*,$$

并回想（9.5），证明得证。 □

9.3. 用有理和逼近 Weyl 和。 设 $\mathcal{Z}_d$ 为所有不具有 $\mathbf{u} = (u_1, 0, \ldots, 0)$ 形式的向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_p^d$ 的集合。我们还回顾一下，经典的*Weil* 上界（例如参见 [23,第 6 章，定理 3] 或 [24,定理 5.38]），结合例如 [20,第 12.2], 节所述的补全技巧，可推出若 $\mathbf{u} \in \mathcal{Z}_d$, 则对任意 $N \leqslant p$，有

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}_p\left(u_1 n + \ldots + u_d n^d\right) \ll p^{1/2} \log p. \tag{9.13}$$

利用（9.13），调整 [11, 引理 2。9] 的证明，并注意到条件$p \mid N$ 在 [11, 引理 2。9] 中并非必要（另见 [13, 推论 2。6]），我们得到 Weyl 和的如下连续性。

引理 9.7. 设$\mathbf{u} \in \mathbb{F}_p^d$ 和$\mathbf{x} \in \mathsf{T}_d$，则有

$$|S_d(\mathbf{x}; N) - S_d\left(p^{-1}\mathbf{u}; N\right)| \ll \frac{N \log p}{p^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} \left|x_j - \frac{u_j}{p}\right| N^j.$$

引理 9.7 立即推出以下结论。

引理 9.8。 设 p 为素数，并设 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{Z}_d$ 满足

$$|T_{d,p}(\mathbf{u})| \geqslant \gamma_d p^{1/2}$$

对某个 $\gamma_d > 0$成立。则存在常数 $c_d, C_d > 0$，使得对所有 $N \geqslant C_d p$ 以及所有满足条件的 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathsf{T}_d$

$$\left| x_j - \frac{u_j}{p} \right| \leqslant \frac{c_d}{N^j \log p}, \qquad j = 1, \dots, d, \tag{9.14}$$

我们有

$$|S_d(\mathbf{x}; N)| \gg N p^{-1/2}.$$

10. 定理 3.9 和3.10的证明

10.1. **定理 3.9的证明。** 设 $N \in \mathbb{N}$，并设 c 和 C 为引理 9.3中的常数。注意，不失一般性，我们可以假设 $c < C/2$。首先设 $\delta \geqslant 2C/N$，因此区间 $[\delta^{-1}, N/C]$ 同时包含区间$[N/(2C)\ N/C]$ 和 $[\delta^{-1}, 2\delta^{-1}]$。那么，当 N 充分大时，在范围内至少有一个素数

$$N/C \geqslant p \geqslant 1/\delta. \tag{10.1}$$

现在固定一点 $\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_d$ 和一个 $\delta > 0$，并设 $R_p(\mathbf{b})$ 为 $(x_1, x_2) \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ 具有如下形式的有理逼近时 $|x_i - b_i/p| \leqslant cN^{-i}$的可取值范围，其中 $i \in \{1, 2\}$，其中 p 为素数且 $b_1, b_2 \in [p]$。这种记号使人想起我们在第 7节论证中使用的记号，但我们强调，此处对指数和施加的条件与彼处不同。进一步写为

$$\mathfrak{U}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \bigcup_{\substack{\mathbf{b} \in [p]^2 \\ \widetilde{R}_p(\mathbf{b}) \cap \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \neq \emptyset}} \widetilde{R}_p(\mathbf{b}),$$

注意到，对于所有 p 在范围（10.1）内，都有 $1/p > 2c/N$ 因此，集合$\sim R_p$（$\mathbf{b}$）根据我们的初始假设，两两不相交。

由于使 $R_p(\mathbf{b})$ 与 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ 有非平凡交集的数对 $\mathbf{b} \in [p]$ 至少有$(\delta p - 1)^2 \geqslant (\delta p/4)^2$,个，且每个盒子的体积为 $\lambda(R_p(\mathbf{b})) = (2c)^2 N^{-3}$，因此

$$\lambda(\mathfrak{U}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta)) \geqslant (c\delta p/2)^2 N^{-3}.$$

然后，应用引理 9.3，可得

$$\begin{aligned} I^{\flat}_{s,2}(\delta; N) &\geqslant \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_2} \left(\lambda(\mathfrak{U}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta)) \inf_{(x_1, x_2) \in \mathfrak{U}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta)} |G(x_1, x_2; N)|^{2s} \right) \\ &\gg (\delta p)^2 N^{-3} (N p^{-1/2})^{2s} = \delta^2 N^{2s-3} p^{2-s}. \end{aligned}$$

由素数定理，对于 $s \leqslant 2$，我们可以选取 $p \in [N/(2C)\ N/C]$；而对于 $s > 2$，我们取 $p \in [\delta^{-1}, 2\delta^{-1}]$。因此

$$I^{\flat}_{s,2}(\delta; N) \gg \delta^2 N^{s-1} \max\left\{1, (\delta N)^{s-2}\right\},$$

这就得到了 $\delta \gg N$ 情况下所需的下界。

为处理 $2C/N \leqslant \delta \leqslant C'/\sqrt{N}$ 的情况，我们首先注意到，对于任意两个不同的分数 a/q、b/r，若 q、$r \in [\sqrt{N}, 2\sqrt{N}]$ 互素，则有

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{b}{r}\right| \geqslant \frac{1}{qr} \geqslant \frac{1}{N}.$$

Th对于任意两个不同的素数 p_1、$p_2 \in [\sqrt{N}, 2\sqrt{N}]$，以及任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_2$，我们有e

$$\mathfrak{U}_{p_1}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathfrak{U}_{p_2}(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \emptyset, \tag{10.2}$$

使我们能够通过对区间$[\sqrt{N}, 2\sqrt{N}]$中的所有素数求和来改进先前的论证。然后，采用与之前类似的方法，并应用引理 9.3和（10.2），我们得到下界

$$\begin{aligned} I^{\flat}_{s,2}(\delta; N) &\geqslant \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathsf{T}_2} \sum_{\substack{\sqrt{N} \leqslant p \leqslant 2\sqrt{N} \\ p \text{ is prime}}} \int_{\mathfrak{U}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta)} |G(x, y; N)|^{2s} dx dy \\ &\gg \sum_{\substack{\sqrt{N} \leqslant p \leqslant 2\sqrt{N} \\ p \text{ is prime}}} (\delta p)^2 N^{-3} (N p^{-1/2})^{2s} \\ &\gg \delta^2 N^{3(s-1)/2} (\log N)^{-1}, \end{aligned}$$

最后一个不等式由素数定理得出。

10.2. **定理 3.10 的证明**。回顾定义（3.7），假设

$$\delta > 2\Gamma_d \log(N/C_d) \left(\frac{N}{2C_d}\right)^{-\nu(d,k)} \tag{10.3}$$

对于某个 k，其中 Γ_d 和 C_d 分别是引理 9.6 和 9.8中的常数。对 δ 作此选择意味着区间

$$\left[\left(2\Gamma_d \log \frac{N}{C_d}\right)^{1/\nu(d,k)} \delta^{-1/\nu(d,k)}, \frac{N}{C_d}\right]$$

完全包含区间 $[N/(2C_d)\ N/C_d]$，因此至少包含一个素数。因此我们可以假设存在一个素数 p 满足

$$\delta \geqslant 2\Gamma_d p^{-\nu(d,k)} \log p \qquad \text{and} \qquad N \geqslant C_d p. \tag{10.4}$$

现在考虑一个盒子 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta) \subseteq \mathsf{T}_d$。显然，使 $\mathbf{u}/p \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ 成立的 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_p^d$ 的集合构成一个盒子 $\mathfrak{C}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta) \subseteq \mathbb{F}_p^d$，其边长为

$$L \geqslant \lfloor p\delta \rfloor \geqslant \Gamma_d p^{1-\nu(d,k)} \log p.$$

Let

$$U_p(\boldsymbol{\xi}, \delta) = \#\left\{\mathbf{u} \in \mathfrak{C}_p(\boldsymbol{\xi}, \delta) \cap \mathcal{Z}_d : \ |T_{d,p}(\mathbf{u})| \geqslant \gamma_d p^{1/2}\right\},$$

其中 γ_d 与引理 9.6中的定义相同。由该引理可直接得到上界

$$\begin{aligned} U_p(\boldsymbol{\xi},\delta) &\geqslant \#\left\{\mathbf{u}\in\mathfrak{C}_p(\boldsymbol{\xi},\delta):\ |T_{d,p}(\mathbf{u})|\geqslant \gamma_d p^{1/2}\right\} \\ &\qquad - \#\{u_1\in\mathbb{F}_p:\ (u_1,0,\dots,0)\in\mathfrak{C}_p(\boldsymbol{\xi},\delta)\} \\ &\gg L^d - L \gg (p\delta)^d. \end{aligned}$$

因此，若 $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\xi},\delta)$ 表示所有满足以下条件的 $(x_1,\dots x_d)\ \in \mathsf{T}_d$：它们具有 (9.14) 中所示的丢番图逼近，且分子 $\mathbf{u}$ 由 $U_p(\boldsymbol{\xi},\delta)$计数，则有

$$\lambda(\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\xi},\delta)) \gg \delta^d p^d \prod_{j=1}^{d}(N^j\log p)^{-1} = \delta^d p^d N^{-s(d)}\,(\log p)^{-d},$$

因此，对于任意满足条件 (p 10.4) 的素数，我们有

$$\begin{aligned} I^{\flat}_{s,d}(\delta;N) &\gg \inf_{\boldsymbol{\xi}\in T^d}\left(\lambda(\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\xi},\delta))\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\xi},\delta)}|S_d(\mathbf{x};N)|^{2s}\right) \\ &\gg \delta^d p^d N^{-s(d)}\left(Np^{-1/2}\right)^{2s}(\log p)^{-d} \\ &\gg \delta^d p^{d-s} N^{2s-s(d)}\,(\log N)^{-d}. \end{aligned}$$

现在回想一下，根据我们的假设 (10.3)，对于充分大的 N，我们总能找到满足 (p 10.4) 的素数，使得

$$p \ll \delta^{-1/\nu(d,k)}(\log N)^{1/\nu(d,k)}$$

以及一个满足 (p 10.4) 的素数，使得

$$p \gg N.$$

因此，在条件 (10.3) 下，我们有

$$\begin{aligned} I^{\flat}_{s,d}(\delta;N) &\gg \delta^d p^{d-s} N^{2s-s(d)}\,(\log N)^{-d} \\ &\geqslant \max\{\delta^d N^{s+d-s(d)}, \delta^{d-(d-s)/\nu(d,k)} N^{2s-s(d)}\} N^{o(1)}, \end{aligned}$$

至此证明完成。

11. 补充评论

11.1. **在更一般的集合上的均值。** 我们对多维均值的研究框架，在底层区域的形状方面具有一定的灵活性，而 Wooley 猜想（猜想 2.1）允许任意可测集。可以说，边长可变的盒子能够体现指数和中不同幂次的差异，或许更适合用于理解 Weyl 和的局部行为。另一种方法是仅考察最高次数对应坐标方向上的局部行为，因为该方向对指数和的振荡贡献最大。Demeter、Guth 和 Wang $[0,1)^{d-1}\times[0,\delta]$ 以及 Guth 和 Maldague [19] 在小帽解耦方面研究过 [5]形状为 [15] 的盒子，并拓展了 Bourgain 先前的工作。尽管本文将研究范围限制在超立方体上，我们的方法也可以毫无大碍地推广到其他轴对齐盒子。

11.2. 薛定谔方程的应用。 我们的结果对薛定谔方程在短区间上的解有相应的推论。薛定谔方程

$$2\pi u_t + iu_{xx} = 0$$

描述量子力学粒子的行为。我们用 $\rho(t, \mathcal{I})$ 表示粒子在时间 t 位于区间 $\mathcal{I}$ 的概率。当 $u(x, t)$ 是薛定谔方程的一个解时，该概率由下式给出

$$\rho(t, \mathcal{I}) = \int_{\mathcal{I}} |u(x, t)|^2 dx. \tag{11.1}$$

在边界条件为如下形式的周期边界条件时

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, \mathbf{e}(xn),$$

薛定谔方程的解是具有如下形式二次振幅的三角多项式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, \mathbf{e}(xn + tn^2).$$

对于固定的 $t \in \mathsf{T}$，我们的结果无法对数值（11.1）给出任何估计。不过，根据我们的结果，可以推导出上述概率的各种上界和下界$\rho(t, \mathcal{I})$ 对于任意短区间 $\mathcal{I}$，以及另一个短区间内的某个时刻。

例如，对于常系数 $a_n = 1$， $n \in \mathbb{N}$，根据定理 3.7和3.9，我们有如下结论。

推论 11.1. 设 $N \in \mathbb{N}$ 为一个较大的数，且 $(x_0, t_0) \in \mathsf{T}_2$。那么

(1) 对于 $\delta \geqslant N^{-3/8}$，存在 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ 使得

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}(xn + tn^2) \right|^2 dx \leqslant \delta N^{5/4+o(1)};$$

(2) 若对于某个较小的 $c > 0$， $\delta \geqslant c/N$，则存在 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$，使得

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}(xn + tn^2) \right|^2 dx \gg \delta.$$

证明。 显然，我们有

$$\begin{aligned} \delta \min_{t \in [t_0, t_0+\delta]} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}(xn + tn^2) \right|^2 dx &\leqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}(xn + tn^2) \right|^2 dx \\ &\leqslant I_{2,1}^{\sharp}(\delta; N). \end{aligned}$$

因此，只需注意，对于第一个结论，定理 3.7 取参数$s = 1$ 以及任意 $\delta \geqslant N^{-3/8}$ 即可得到上界

$$I_{2,1}^{\sharp}(\delta; N) \leqslant \delta^2 N^{2(1-3/8)+o(1)} = \delta^2 N^{5/4+o(1)},$$

这就证明了结论 (1)。第二个结论 (2) 可通过类似地结合上界来证明

$$\delta \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{e}(xn+tn^2) \right|^2 dx \geqslant I_{2,1}^{\sharp}(\delta;N)$$

在上界

$$I_{2,1}^{\sharp}(\delta;N) \gg \delta^2$$

由定理 3.9(1). □

致谢

我们感谢 Roger Baker 在论文初期所作的贡献。

在准备本文期间，JB 获得了瑞典科学基金会启动基金 2017-05110 的资助，并在最后阶段获得项目基金 2022-03717 的资助（Vetenskapsr˚adet）；CC 获得了中国国家自然科学基金项目 12101002 的资助；IS 获得了澳大利亚研究理事会项目 DP170100786 的资助。JB 和 IS 在波恩马克斯·普朗克数学研究所驻留期间完成了部分工作，我们也衷心感谢该研究所提供的慷慨支持和优越的工作条件。

参考文献

[1] R. C. Baker, 《Weyl 和与丢番图逼近》, J. London Math. Soc. 25 (1982), 25–34；更正, ibid. 46 (1992), 202–204. 2, 22[2] R. C. Baker, 《多项式的小数部分》, Funct. et Approx. 55 (2016), 131–137. 2, 22[3] R. C. Baker、C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和极大算子范数的界》, 预印本, 2021年, 网址：https://arxiv.org/abs/2107.13674. 22, 24[4] R. C. Baker、C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和的大值与豪斯多夫维数》, J. Math. Anal. Appl. 510 (2022), Art. 26030. 22[5] J. Bourgain, 《解耦不等式与若干平均值定理》, J. d'Anal. Math., 133 (2017), 313–334. 33[6] J. Bourgain、C. Demeter 和 L. Guth, 《三次以上次数的维诺格拉多夫平均值定理主猜想的证明》, Ann. Math. 184 (2016), 633–682. 1, 2, 4, 10[7] J. Brandes 和 S. T. Parsell, 《限制在低次超曲面上的对角形式的哈斯原理》, Algebra and Number Theory, 15 (2021), No. 9, 2289–2314 2[8] J. Brandes 和 K. Hughes, 《关于非齐次维诺格拉多夫系统》, Bull. Aust. Math. Soc., 106 (2022), 396–403. 2, 8, 10[9] C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和的新界》, 《国际数学研究通知》2021 (2021), 8451–8491. 2[10] C. Chen、B. Kerr、J. Maynard 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和的度量理论》, Math. Ann. 385 (2023), 309–355. 3, 4, 5, 8, 17[11]C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和的大值》, 《数学进展》370 (2020), Art. 107216. 27, 28, 29, 30[12] C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《受限平均值定理与受限 Weyl 和的度量理论》, 《牛津数学季刊》72 (2021), 885–919. 3[13] C. Chen 和 I. E. Shparlinski, 《Weyl 和的小值》, J. Math. Anal. Appl. 495 (2021), Art. 124743. 27, 30

[14] T. Cochrane、C. Pinner 和 J. Rosenhouse，《稀疏多项式指数和》，《算术学报》108 (2003), 37–52. 22[15] C. Demeter、L. Guth 和 H. Wang，《小帽解耦》，《几何与泛函分析》20 (2020), 989–1062. 33[16] C. Demeter 和 B. Langowski，《指数和对超曲面的限制》，《国际数学研究通知》（即将出版）. 2, 3, 5, 6, 7, 13, 14, 15[17] S. Dendrinos、K. Hughes 和 M. Vitturi，《离散曲线 ℓ^p改善问题的一些次临界估计》，《傅里叶分析与应用杂志》28 (2022), Art. 69. 10[18] H. Fiedler、W. Jurkat 和 O. Körner，《有限 theta 级数的渐近展开》，《算术学报》32 (1977年), 129–146. 27[19] L. Guth 和 D. Maldague，《 $\mathbb{R}^3$中矩曲线的小帽解耦》，预印本，2022年，网址：https://arxiv.org/abs/2206.01574. 33[20] H. Iwaniec 和 E. Kowalski，《解析数论》，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2004年. 27, 30[21] L. A. Knizhnerman 和 V. Z. Sokolinskii，《有理三角和与勒让德符号和的一些估计》，《数学科学进展》34 (3) (1979年), 199–200（俄文）；俄译本载于《俄罗斯数学评论》34 (3) (1979年), 203–204. 28[22] L. A. Knizhnerman 和 V. Z. Sokolinskii，《较大和较小绝对值的三角和与勒让德符号和》，《数论研究》，萨拉托夫国立大学，萨拉托夫，1987年, 76–89（俄文）. 28[23] W.-C. W. Li，《应用数论》，世界科学出版社，新加坡，1996年. 30[24] R. Lidl 和 H. Niederreiter，《有限域》，剑桥大学出版社，剑桥，1997年. 30[25] H. L. Montgomery，《解析数论与调和分析交界处的十讲》，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1994年. 2[26] R. C. Vaughan，《哈代－李特尔伍德方法》，剑桥大学出版社，1997年. 2[27] T. D. Wooley，《维诺格拉多夫平均值定理主猜想的三次情形》，《数学进展》294 (2016年), 532–561 1, 2[28] T. D. Wooley，《嵌套高效同余及维诺格拉多夫平均值定理的相关结果》，《伦敦数学会会刊》118 (2019年), 942–1016. 1, 2, 4[29] T. D. Wooley，《非齐次维诺格拉多夫系统中的次凸性》，《牛津数学季刊》（即将出版）. 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18

JB：哥德堡大学和查尔姆斯理工学院数学科学系，412 96 哥德堡，瑞典电子邮箱：brjulia@chalmers.se

CC：安徽大学纯数学中心、数学科学学院，中国合肥 230601电子邮箱：chench@ahu.edu.cn

IES：新南威尔士大学纯数学系，澳大利亚新南威尔士州悉尼 2052电子邮箱：igor.shparlinski@unsw.edu.au