arXiv:2303.11951v1 [math.CA] 21 Mar 2023

关于切比雪夫系统的凸性性质

ZSOLT PÁLES 和 MAHMOOD KAMIL SHIHAB

摘要。本文的主要目的是引入基于正切比雪夫系统 ω 的各种凸性概念，并系统考察它们之间的关系。我们将著名的 Bernstein–Doetsch 定理推广到 ω-Jensen凸性的情形。我们还给出了不连续 ω-詹森仿射函数存在的充分条件。此外，我们将赖特凸性的概念推广到切比雪夫系统的情形，并证明它是介于 ω-凸性与ω-Jensen凸性之间的一种凸性性质。对于某些切比雪夫系统，我们分别推广了 C. T. Ng 于 1987年以及 Maksa 和 Páles 于 2009年得到的赖特凸函数和高阶赖特凸函数的分解定理。

1. 引言

集合 $H \subset \mathbb{R}$ 中严格有序的 n 元组构成的单纯形记为 $\sigma_n(H)$，其定义为

$$\sigma_n(H) := \{(x_1, \dots, x_n) \in H \quad | \quad x_1 < \cdots < x_n\}.$$

显然，当且仅当集合 H 的基数 $|H|$ 大于或等于 n 时，集合 $\sigma_n(H)$ 非空。我们约定 $|H| \geq n$。设 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \colon H \to \mathbb{R}^n$ 是一个向量值函数，并定义泛函算子 $\Phi_\omega \colon \sigma_n(H) \to \mathbb{R}$ 为

$$\Phi_\omega(x_1, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} \omega_1(x_1) \dots \omega_1(x_n) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \omega_n(x_1) \dots \omega_n(x_n) \end{vmatrix} \qquad ((x_1, \dots, x_n) \in \sigma_n(H)).$$

若连续函数 ω 在 H 上构成一个 n 维正（分别为负）切比雪夫系统，则称其为 Φ_ω 在 $\sigma_n(H)$ 上为正（分别为负）。系统 ω 称为 n 维切比雪夫系统，若其在 H 上是正切比雪夫系统或负切比雪夫系统。若 $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 等于 n 维标准系统或多项式系统 $\pi_n : I \to \mathbb{R}^n$，其定义为

$$\pi_n(t) := (1, t, \dots, t^{n-1}) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

然后，通过计算范德蒙德行列式，可以轻易证明它是一个正切比雪夫系统。关于切比雪夫系统的标准结果及其应用，请参阅专著 [4] 和 [5]。

接下来，我们回顾论文 [12] 中的一些定义（关于多项式情形下的这些定义，也可参见论文 [2] ）。设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个非空区间， $n \in \mathbb{N}$ 且 $\omega \colon I \to \mathbb{R}$是 I上的一个 n维正切比雪夫系统。

对于给定的向量 $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$，若函数 $f \colon I \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为 (t, ω)-凸函数

$$\Phi_{(\omega,f)}(x, x + t_1 h, \dots, x + (t_1 + \cdots + t_n)h) \geq 0 \tag{1}$$

日期：2023年3月22日。2000 数学学科分类。主分类 26A51，39B62。关键词和短语。关于切比雪夫系统的凸性、Jensen凸性和赖特凸性。第一作者的研究得到K-134191NKFIH基金资助。

对所有满足 $x+(t_1+\cdots+t_n)h\in I$ 的 $h>0$, $x\in I$，以下条件均成立。若 $T\subseteq\mathbb{R}_+$ 且对每个 $t\in T^n$, f 都是 (t,ω)-凸的，则称 f 为 (T,ω)-凸函数。

如果 $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$，且 (1) 取等号成立，则称 f 为 (t,ω)-仿射函数。如果 $T\subseteq\mathbb{R}_+$，且对于每个 $t\in T^n$, f 都是 (t,ω)-仿射的，则称 f 为 (T,ω)-仿射。特别地，如果 f 是 $(\{1\},\omega)$-凸的，即如果 f 是 ω-詹森凸 的，则称之为

$$\Phi_{(\omega,f)}(x,x+h,\dots,x+nh)\geq 0 \tag{2}$$

对于所有满足 $x+nh\in I$ 的 $h>0$, $x\in I$，该式均成立。如果 (2) 中不等式改为等式仍成立，则称 f 为 ω- 詹森仿射。

如果函数 f 是 $(\mathbb{R}_+,\omega)$-凸的，则称其为 ω-凸函数。容易看出，f 在 I 上是 ω-凸的，当且仅当

$$\Phi_{(\omega,f)}(x_0,x_1,\dots,x_n)\geq 0\qquad((x_0,x_1,\dots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)). \tag{3}$$

如果函数 f 满足 (3) 且取等号成立，则称其为 ω-仿射函数。

需要指出的是，在 $\omega=\pi_n$ 的情况下，ω-凸性和 ω-詹森凸性的概念由 Hopf [3] 和 Popoviciu [10] 引入（另见 Kuczma 所著的书籍 [6] ），这些性质分别被称为阶数为 $(n-1)$ 的凸性和 Jensen凸性。

以下结果表明，对于任意非空集合 $T\subseteq\mathbb{R}_+$，(T,ω)-凸性蕴含 ω-詹森凸性。

定理 1.1. 设 $T\subseteq\mathbb{R}_+$ 是非空集合。若函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是 (T,ω)-凸的（分别为 (T,ω)-仿射的），则它是 $(\mathbb{Q}_+,\omega)$-凸的（分别为 $(\mathbb{Q}_+,\omega)$-仿射的）；特别地，它是 ω-詹森凸的（分别为 ω-詹森仿射的）。

证明. 该结果可由 [12, 定理 5] 立即得出。 □

在第2节中，我们证明，对于任意 ω-詹森凸（分别为 ω-詹森仿射）函数，都存在一个连续的 ω-凸（分别为 ω-仿射）函数，使这两个函数在其定义域的一个稠密子集上相等。由此可推得，ω-凸函数必然连续。我们将伯恩斯坦-多奇定理推广到相对于切比雪夫系统的 ω-凸性，即证明：若一个 ω-詹森凸函数在某个非空开子区间上有界，则它也是 ω-凸的。我们还在若干情形下给出了 ω-詹森仿射函数的刻画。此外，我们给出了关于 ω 的一个充分条件，以确保存在不连续的 ω-詹森仿射（分别为 ω-詹森凸）函数。本节的一些结果推广了 Matkowski 的论文 [8] 中的结果。

在第3节中，我们将标准赖特凸性的概念推广为相对于正切比雪夫系统的 ω-赖特凸性，并阐明其与 ω-凸性和 ω-詹森凸性的关系。我们还将 Ng 分解定理推广到相对于某些正切比雪夫系统的 ω-赖特凸性情形。最后，在二维情形下，我们证明，对于某些正切比雪夫系统，ω-赖特凸性可能等价于赖特凸性。

2. 关于 ω-詹森函数的结果

下文中，若 D 是 I 和 f 的子集：$D\to\mathbb{R}$，则称 f 局部一致连续，如果对于 I 的所有紧子区间 $[a,b]$ 以及所有 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得对于满足 $|x-y|<\delta$的所有 x、$y\in[a,b]\cap D$，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。

引理 2.1. 设 D 是 I 的稠密子集，且 $f\colon D\to\mathbb{R}$ 是局部一致连续函数。那么 f 可连续延拓至 I。

这个引理的验证是标准的，不过为方便读者，我们给出一个证明。

证明。令 $x \in I$ 为一个固定的，并设 (x_n) 是 D 中满足 $x_n \to x$ as$n \to \infty$ 的任意序列。首先指出，$(f(x_n))$ 是一个柯西序列。集合 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ 是紧集，因此存在一个紧子区间 $[a,b] \subset I$，包含序列 (x_n) 的所有项。

任取 $\varepsilon > 0$。由 f 的局部一致连续性，存在 $\delta > 0$，使得对所有满足 $|u-v| < \delta$ 的 u, $v \in [a,b] \cap D$，都有$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$。序列 (x_n) 是一个柯西序列，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 n, $m \geq N$，都有 $|x_n - x_m| < \delta$。因此，

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \tag{4}$$

对所有 n、$m \geq N$ 均成立时。因此，$(f(x_n))$ 是一个柯西序列，这意味着它收敛。将其极限记为 $g(x)$。

我们证明 g 在 x 处定义良好。若 (x_n) 和 (y_n) 是 D 中收敛到 x 的两个序列，那么序列 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \ldots)$ 也收敛到 x。由上文证明可知，$(f(x_1)\ f(y_1)\ f(x_2)\ f(y_2)\ f(x_3)\ f(y_3) \ldots)$ 是一个收敛序列，因此子序列 $(f(x_n))$ 和 $(f(y_n))$ 必须具有相同的极限。因此，g 在 x 处的取值不依赖于收敛到 x 的序列的选取。

显然，若 $x \in D$，则序列 $x_n = x$ 收敛到 x，因此 $g(x) = f(x)$。因此，g 是 f 的一个扩张。

为了证明 g 在 I上连续，我们证明它在 I上局部一致连续。为此，令 $[a,b] \subseteq I$。任取 $\varepsilon > 0$，并利用 f的局部一致连续性，选取 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $|u-v| < \delta$的 u、$v \in [a,b] \cap D$，都有 $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$。

任取满足 $|x-y| < \delta$的 x、$y \in [a,b]$，我们将证明 $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$。事实上，考虑 $[a,b] \cap D$ 中的两个序列 (x_n) 和 (y_n)，使得当 $n \to \infty$时，$x_n \to x$ 且 $y_n \to y$。于是 $|x_n - y_n| \to |x-y| < \delta$，因此存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$，都有 $|x_n - y_n| < \delta$。因此，根据 δ 的选取（其中 $u := x_n$ 且 $v := y_n$），可得对所有 $n \geq N$，$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$成立。令 $n \to \infty$取极限，便得到$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$。□

定理 2.2。设 $n \geq 2$ 且 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维正切比雪夫系统，并设 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$的一个子域。若函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 是$(\mathbb{K}_+, \omega)$-凸的（分别为$(\mathbb{K}_+, \omega)$-仿射的），则存在一个连续的 ω-凸（分别为 ω-仿射）函数 $g : I \to \mathbb{R}$，使得 $g|_{I \cap \mathbb{K}} = f|_{I \cap \mathbb{K}}$。

证明。若 f 是 $(\mathbb{K}_+, \omega)$-凸的，则根据定义，我们有不等式

$$\Phi_{(\omega,f)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad ((x_0, \ldots, x_n) \in \sigma_{n+1}(I \cap \mathbb{K})). \tag{5}$$

事实上，在不等式 (1) 中取 $x := x_0$、$h := 1$ 和 $t_i := x_i - x_{i-1} \in \mathbb{K}_+$ 即可。若假设 f 是 $(\mathbb{K}_+, \omega)$-仿射的，则 (5) 取等号成立。

利用函数 ω 的连续性，我们将证明限制函数$f|_{I \cap \mathbb{K}}$是局部一致连续的。为证明这一点，令 $[a,b] \subset I$ 为任意元素。不失一般性，我们可以假设 $a, b \in \mathbb{K}$。我们固定集合 $I \cap \mathbb{K}$ 中的一些元素 $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-2} < a$ 和 $b < v$。于是，对于满足 $x < y$ 的 x, $y \in [a,b] \cap \mathbb{K}$，有 $(u_0, \ldots, u_{n-2}, x, y)$，$(u_0, \ldots, u_{n-3}, x, y, v) \in \sigma_{n+1}(I \cap \mathbb{K})$，因此 (5) 推出

$$\Phi_{(\omega,f)}(u_0, \ldots, u_{n-2}, x, y) \geq 0 \qquad \text{and} \qquad \Phi_{(\omega,f)}(u_0, \ldots, u_{n-3}, x, y, v) \geq 0. \tag{6}$$

第一个不等式推出

$$\begin{vmatrix} \omega_1(u_0) & \dots & \omega_1(u_{n-2}) & \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n(u_0) & \dots & \omega_n(u_{n-2}) & \omega_n(x) & \omega_n(y) \\ f(u_0) & \dots & f(u_{n-2}) & f(x) & f(y) \end{vmatrix} \geq 0.$$

按最后一行展开这个行列式，该不等式等价于

$$f(y)P(x) - f(x)P(y) \geq R(x,y) \qquad ((x,y) \in \sigma_2(I \cap \mathbb{K})), \tag{7}$$

其中 $P\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 和 $R\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$P(z) := \Phi_\omega(u_0, \dots, u_{n-2}, z)$$

and

$$R(x,y) := \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} f(u_i) \Phi_\omega(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i-1}, \dots, u_{n-2}, x, y)$$

对于 $z \in [a,b]$，我们有 $(u_0, \dots, u_{n-2}, z) \in \sigma_n(I)$。因此，根据切比雪夫系统的正性和连续性，可知 P 在 $[a,b]$上为正且连续。我们还可以看到， R 在 $[a,b]^2$ 上连续，并且对于所有 $z \in [a,b]$，都有 $R(z,z) = 0$。将 $x = a$ 代入 (7)，得到

$$f(y) \geq \frac{R(a,y) + f(a)P(y)}{P(a)} \qquad (y \in [a,b] \cap \mathbb{K}).$$

该不等式右侧是 y 上的连续函数，定义在紧区间$[a,b]$上，因此有下界。由此， $f|_{[a,b]\cap\mathbb{K}}$ 也有下界。将$y = b$ 代入 (7)，可得

$$\frac{f(b)P(x) - R(x,b)}{P(b)} \geq f(x) \qquad (x \in [a,b] \cap \mathbb{K}).$$

按照上文的类似论证，该不等式推出 $f|_{[a,b]\cap\mathbb{K}}$ 有上界，因此存在一个正数 K，使得对于 $x \in [a,b] \cap \mathbb{K}$，有 $|f(x)| \leq K$。

现在考虑 (6) 中的第二个不等式。它可以改写为

$$\begin{vmatrix} \omega_1(u_0) & \dots & \omega_1(u_{n-3}) & \omega_1(x) & \omega_1(y) & \omega_1(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n(u_0) & \dots & \omega_n(u_{n-3}) & \omega_n(x) & \omega_n(y) & \omega_n(v) \\ f(u_0) & \dots & f(u_{n-3}) & f(x) & f(y) & f(v) \end{vmatrix} \geq 0.$$

沿最后一行展开该行列式后，该不等式等价于

$$f(x)Q(y) - f(y)Q(x) \geq S(x,y) \qquad ((x,y) \in \sigma_2(I \cap \mathbb{K})), \tag{8}$$

其中， $Q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 和 $S\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$Q(z) := \Phi_\omega(u_0, \dots, u_{n-3}, z, v)$$

and

$$S(x,y) := \sum_{i=0}^{n-3} (-1)^{n-1-i} f(u_i) \Phi_\omega(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i-1}, \dots, u_{n-3}, x, y, v) - f(v)\Phi_\omega(u_0, \dots, u_{n-3}, x, y).$$

由于 $(u_0, \dots, u_{n-3}, z, v) \in \sigma_n(I \cap \mathbb{K})$，切比雪夫系统的正性和连续性可知， Q 是定义在 $[a,b]$ 上的正连续函数。我们还可知， S 在 $[a,b]^2$ 上连续，并且对于所有 $z \in [a,b]$， $S(z,z) = 0$。

对于 $x,y\in[a,b]\cap\mathbb{K}$，不等式 (7) 和 (8) 表明

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &\geq \frac{P(y)-P(x)}{P(x)}f(x)+\frac{R(x,y)}{P(x)} \geq -K\frac{|P(y)-P(x)|}{P(x)}+\frac{R(x,y)}{P(x)} =: A(x,y),\\ f(y)-f(x) &\leq \frac{Q(y)-Q(x)}{Q(x)}f(x)+\frac{S(x,y)}{Q(x)} \leq \frac{|Q(y)-Q(x)|}{Q(x)}K+\frac{S(x,y)}{Q(x)} =: B(x,y). \end{aligned} \tag{9}$$

这些不等式右端定义的函数 A 和 B 在$[a,b]^2$上连续，因此在 $[a,b]^2$上一致连续。因此，对所有 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对所有满足 $\|(x,y)-(u,v)\|<\delta$的 (x,y)、$(u,v)\in[a,b]^2$，我们有

$$\max(|A(x,y)-A(u,v)|,|B(x,y)-B(u,v)|)<\varepsilon.$$

特别地，若 $|x-y|<\delta$，则代入 $(u,v)=(x,x)$，并利用 A和 B在正方形 $[a,b]^2$的对角点处为零这一事实，上述不等式可推出

$$\max(|A(x,y)|,|B(x,y)|)<\varepsilon.$$

因此，鉴于 （9）中的不等式， x， $y\in[a,b]\cap\mathbb{K}$且 $|x-y|<\delta$，我们得到 t

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon.$$

这证明 $f|_{[a,b]\cap\mathbb{K}}$是一致连续的，因此 $f|_{I\cap\mathbb{K}}$是局部一致连续的。若 f是 $(\mathbb{K}_+,\omega)$-仿射的，则它也是 $(\mathbb{K}_+,\omega)$-凸的，因此我们有相同的结论。

鉴于引理 2.1 中的稠密集 $D=I\cap\mathbb{K}$，存在一个连续函数$g\colon I\to\mathbb{R}$ 使得 $g(x)|_{I\cap\mathbb{K}}=f(x)|_{I\cap\mathbb{K}}$。

最后，我们证明 g是 ω-凸的（分别为 ω-仿射的）。设 $(y_0,\dots,y_n)$ 是 $\sigma_{n+1}(I)$ 中的任意元素。于是，由于 $\mathbb{K}$在 I中稠密，对每个 $j\in\{0,\dots,n\}$，存在一个序列 $(x_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$，该序列属于 $\sigma_{n+1}(I\cap\mathbb{K})$，并且当 $k\to\infty$ 时收敛到 y_j。然后，利用 f的 $(\mathbb{K}_+,\omega)$-凸性（分别为 $(\mathbb{K}_+,\omega)$-仿射性），我们得到 (5) 成立，从而得到

$$\begin{aligned} &\Phi_{(\omega,g)}(x_{k,0},x_{k,1},\dots,x_{k,n})=\Phi_{(\omega,f)}(x_{k,0},x_{k,1},\dots,x_{k,n})\geq 0\\ &(\text{resp. } \Phi_{(\omega,g)}(x_{k,0},x_{k,1},\dots,x_{k,n})=\Phi_{(\omega,f)}(x_{k,0},x_{k,1},\dots,x_{k,n})=0). \end{aligned}$$

由 g的连续性可知，函数 $\Phi_{(\omega,g)}$ 连续。取极限 $k\to\infty$后，上述不等式（分别为等式）推出

$$\Phi_{(\omega,g)}(y_0,\dots,y_n)\geq 0 \qquad (\text{resp. } \Phi_{(\omega,g)}(y_0,\dots,y_n)=0).$$

因此， g 是 ω-凸（分别为 ω-仿射）。 □

推论 2.3. 设 $n\geq 2$和 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\colon I\to\mathbb{R}^n$是一个 n 维正切比雪夫系统。若 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是 ω-凸（分别为 ω-仿射），则它在 I 上连续。

证明. 该推论由定理 2.2 应用于 $\mathbb{K}:=\mathbb{R}$ 得出。 □

推论 2.4. 设 $n\geq 2$和 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\colon I\to\mathbb{R}^n$是一个 n 维正切比雪夫系统。若 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是 ω-詹森凸（分别为 ω-詹森仿射），则存在一个连续的 ω-凸（分别为 ω-仿射）函数 $g\colon I\to\mathbb{R}$，使得 $g|_{I\cap\mathbb{Q}}=f|_{I\cap\mathbb{Q}}$。

证明。根据定理 1.1， f 的 ω-Jensen凸性（分别地， ω-Jensen仿射性）意味着它是$(\mathbb{Q}_+,\omega)$-凸（分别地，$(\mathbb{Q}_+,\omega)$-仿射）的。现在将定理 2.2 应用于 $\mathbb{K}:=\mathbb{Q}$，即可得到推论的陈述。□

下面的陈述将著名的伯恩斯坦–多伊奇定理 [1] 扩展到了 ω-Jensen凸性的情形。

定理 2.5. 若 $f:I\to\mathbb{R}$ 是 ω-詹森凸函数，且在 I的某个非空开子集上有界，则它在 I上连续。

证明。设 U 是 I 的一个非空开子区间，且 f 在 U 上以 $K \geq 0$为界。证明的第一部分将说明， f 在 I 上局部有界；也就是说，对每个 $v \in I$，都存在一个包含 v 的开集 $V \subseteq I$，使得 f 在 V上有界。

令 $v \in I$ 为任意元素。若 $v \in U$，则该命题对 $V = U$ 成立。因此，我们可以假设 $v \notin U$。取一个闭区间 $[a, b] \subset U$。于是，要么 $v < a$，要么 $b < v$。现在考虑 $v < a$ 的情形。

我们选取一些有理数 $a - v < r_1 < \cdots < r_n < b - v$。于是有$v < a < v + r_1 < \cdots < v + r_n < b$。可以构造 v 的一个有界邻域 W，使得$\overline{W} \subseteq I$，并且对所有 $x \in W$，都有 $x < a < x + r_1 < \cdots < x + r_n < b$。现在， f 的 ω-詹森凸性与定理 1.1 可推出 f 是 $(\mathbb{Q}_+, \omega)$-凸的，因此我们可以得到

$$\Phi_{\omega,f}(x, x + r_1, \ldots, x + r_n) \geq 0$$

对所有 $x \in W$。该不等式意味着

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(x + r_1) & \ldots & \omega_1(x + r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \omega_n(x) & \omega_n(x + r_1) & \ldots & \omega_n(x + r_n) \\ f(x) & f(x + r_1) & \ldots & f(x + r_n) \end{vmatrix} \geq 0.$$

按最后一行展开行列式，得到

$$\begin{aligned} &(-1)^n f(x)\Phi_\omega(x + r_1, \ldots, x + r_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} f(x + r_i)\Phi_\omega(x, x + r_1, \ldots, x + r_{i-1}, x + r_{i+1}, \ldots, x + r_n) \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

由 f 在 U 上的有界性以及包含关系 $x+r_i \in [a, b] \subseteq U$，可得 $(-1)^{n+i} f(x+r_i) \leq K$。由 ω 的连续性以及切比雪夫系统的正性可知，函数

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_\omega(x, x + r_1, \ldots, x + r_{i-1}, x + r_{i+1}, \ldots, x + r_n)}{\Phi_\omega(x + r_1, \ldots, x + r_n)}$$

在紧集 $\overline{W}$ 上有上界，即不超过一个正数 L。因此，不等式 (10) 意味着，对所有 $x \in W$，

$$(-1)^{n-1} f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} f(x + r_i) \frac{\Phi_\omega(x, x + r_1, \ldots, x + r_{i-1}, x + r_{i+1}, \ldots, x + r_n)}{\Phi_\omega(x + r_1, \ldots, x + r_n)} \leq KL,$$

这意味着 $(-1)^{n-1} f$ 在 W 上有上界。

为了证明 $(-1)^{n-1} f$ 在 v 的某个邻域 $V \subseteq W$ 上有下界，我们还固定 $v_0 \in I$，使得 $v_0 < v$。现在选取有理数

$$1 < \frac{a - v_0}{v - v_0} < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \frac{b - v_0}{v - v_0}.$$

于是我们有

$$a < v_0 + r_2(v - v_0) < v_0 + r_3(v - v_0) < \cdots < v_0 + r_n(v - v_0) < b.$$

现在可以构造一个 V 的邻域，使得 $V \subseteq W$，并且对所有 $x \in V$，都有

$$v_0 + r_0(x - v_0) < v_0 + r_1(x - v_0) < a < v_0 + r_2(x - v_0) < \cdots < v_0 + r_n(x - v_0) < b$$

其中 $r_0 = 0$ 且 $r_1 = 1$。再次应用定理 1.1，我们得出

$$\Phi_{(\omega,f)}(v_0 + r_0(x - v_0), v_0 + r_1(x - v_0), v_0 + r_2(x - v_0), \ldots, v_0 + r_n(x - v_0)) \geq 0,$$

也就是说，

$$\Phi_{(\omega,f)}(v_0, x, v_0 + r_2(x - v_0), \ldots, v_0 + r_n(x - v_0)) \geq 0,$$

对所有 $x \in V$，当 $x \in V$ 时，这个不等式等价于

$$\begin{vmatrix} \omega_1(v_0) & \omega_1(x) & \omega_1(v_0 + r_2(x - v_0)) & \dots & \omega_1(v_0 + r_n(x - v_0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(v_0) & \omega_n(x) & \omega_n(v_0 + r_2(x - v_0)) & \dots & \omega_n(v_0 + r_n(x - v_0)) \\ f(v_0) & f(x) & f(v_0 + r_2(x - v_0)) & \dots & f(v_0 + r_n(x - v_0)) \end{vmatrix} \geq 0.$$

为简洁起见，我们记 $s_i(x) := v_0 + r_i(x - v_0)$，$i \in \{2, \dots, n\}$。按最后一行展开行列式，得到

$$\begin{aligned}(-1)^n f(v_0)\Phi_\omega(x, s_2(x), \dots, s_n(x)) + (-1)^{n-1} f(x)\Phi_\omega(v_0, s_2(x), \dots, s_n(x)) \\ + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} f(s_i)\Phi_\omega(v_0, x, s_2(x) \dots, s_{i-1}(x), \dots, s_{i+1}(x), \dots, s_n(x)) \geq 0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} f(x) \geq (-1)^{n-1} f(v_0) \frac{\Phi_\omega(x, s_2(x), \dots, s_n(x))}{\Phi_\omega(v_0, s_2(x), \dots, s_n(x))} \\ + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i-1} f(s_i) \frac{\Phi_\omega(v_0, x, s_2(x) \dots, s_{i-1}(x), \dots, s_{i+1}(x), \dots, s_n(x))}{\Phi_\omega(v_0, s_2(x), \dots, s_n(x))}.\end{aligned} \tag{11}$$

由 f在 U上的有界性以及包含关系 $s_i(x) \in [a, b] \subseteq U$，可得 $(-1)^{n-i-1} f(s_i(x)) \geq -K$。切比雪夫系统 ω 的连续性和正性表明，函数

$$x \mapsto \frac{\Phi_\omega(x, s_2(x), \dots, s_n(x))}{\Phi_\omega(v_0, s_2(x), \dots, s_n(x))} \quad \text{and} \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_\omega(v_0, x, s_2(x) \dots, s_{i-1}(x), \dots, s_{i+1}(x), \dots, s_n(x))}{\Phi_\omega(v_0, s_2(x), \dots, s_n(x))}$$

在紧集$\overline{V} \subseteq \overline{W}$上，这些函数分别有正数 M 和 N作为上界。因此，不等式 (11) 表明，对所有 $x \in V$，

$$(-1)^{n-1} f(x) \geq -|f(v_0)|M - KN,$$

这证明 $(-1)^{n-1} f$ 在 V上有下界。由双侧有界性可知，$(-1)^{n-1} f$ 在 V上有界，因而 f 在 V上也有界。

为了完成定理的证明，我们必须验证 f 在 I 的任意一点处的连续性。令 $v \in I$ 任意。根据我们在第一部分中证明的内容，存在 v 的一个邻域 $V \subseteq I$，使得 f 在 V 上以 K 为界。我们将证明， f 在 V 的每个紧子区间 $[a, b]$ 上都一致连续。特别地，这意味着 f 在 v 处连续。

令 $[a, b] \subseteq V$。我们固定 V 中的其他元素 $a_1 < b_1 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a < b < a_n < b_n$。然后定义函数 Ψ_1：$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a, b]^2 \to \mathbb{R}$和$\Psi_2$：
$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-2}, b_{n-2}] \times [a, b]^2 \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$，定义如下

$$\Psi_1(v_1, \dots, v_{n-1}, x, y) := \left|1 - \frac{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, y)}{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, x)}\right| + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_{n-1}, x, y)}{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, x)}\right|.$$

and

$$\begin{aligned}\Psi_2(v_1, \dots, v_{n-2}, x, y, v_n) := &\left|1 - \frac{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-2}, x, v_n)}{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-2}, y, v_n)}\right| + \frac{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-2}, x, y)}{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-2}, y, v_n)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \left|\frac{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_{n-2}, x, y, v_n)}{\Phi_\omega(v_1, \dots, v_{n-2}, y, v_n)}\right|.\end{aligned}$$

因此，函数 Ψ_1 和 Ψ_2 在紧矩形上连续，故它们一致连续。另一方面，对于所有 $x\in[a,b]$ 以及 $(v_1,\dots,v_{n-1},v_n)\in[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$，均有 $\Psi_1(v_1,\dots,v_{n-1},x,x)=\Psi_2(v_1,\dots,v_{n-2},x,x,v_n)=0$。

因此，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得对于所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 x、$y\in[a,b]$，以及所有 $(v_1,\dots,v_{n-1},v_n)\in[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]$,

$$\Psi_1(v_1,\dots,v_{n-1},x,y)=\Psi_1(v_1,\dots,v_{n-1},x,y)-\Psi_1(v_1,\dots,v_{n-1},x,x)<\frac{\varepsilon}{K},$$
$$\Psi_2(v_1,\dots,v_{n-2},x,y,v_n)=\Psi_2(v_1,\dots,v_{n-2},x,y,v_n)-\Psi_2(v_1,\dots,v_{n-2},x,x,v_n)<\frac{\varepsilon}{K}.$$

现在选取满足 $x<y<x+\delta$ 的 x、$y\in[a,b]$。然后选取有理数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，使得

$$\frac{a_i-x}{y-x}<\lambda_i<\frac{b_i-x}{y-x},\qquad i\in\{1,\dots,n\}.$$

那么，采用记号 $v_i:=(1-\lambda_i)x+\lambda_i y$，我们有

$$a_i<v_i<b_i,\quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

首先定义

$$r_i:=\frac{v_i-v_1}{y-v_1}\quad(i\in\{1,\dots,n-1\}),\qquad r_n:=\frac{x-v_1}{y-v_1},\qquad r_{n+1}:=\frac{y-v_1}{y-v_1}.$$

显然，由于不等式链 $v_1<v_2\cdots<v_{n-1}<x<y$，我们有 $r_1=0<r_2<\cdots<r_n<r_{n+1}=1$。另一方面，对于 $i\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$r_i=\frac{v_i-v_1}{y-v_1}=\frac{(1-\lambda_i)x+\lambda_i y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}{y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y))}=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(y-x)}{(1-\lambda_1)(y-x)}=\frac{\lambda_i-\lambda_1}{1-\lambda_1}\in\mathbb{Q},$$

and

$$r_n=\frac{x-v_1}{y-v_1}=\frac{x-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}{y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y))}=\frac{\lambda_1(x-y)}{(1-\lambda_1)(y-x)}=\frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1}\in\mathbb{Q}.$$

利用定理 1.1，f 的 ω-詹森凸性意味着

$$\Phi_{(\omega,f)}(v_1+r_1(y-v_1),\dots,v_1+r_{n-1}(y-v_1),v_1+r_n(y-v_1),v_1+r_{n+1}(y-v_1))\geq 0,$$

根据数 r_0、r_1、.....、r_{n-1}、r_n 的定义，可得

$$\Phi_{(\omega,f)}(v_1,\dots,v_{n-1},x,y)\geq 0.$$

现在，由上述不等式可得

$$\begin{vmatrix}\omega_1(v_1) & \dots & \omega_1(v_{n-1}) & \omega_1(x) & \omega_1(y)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \omega_n(v_1) & \dots & \omega_n(v_{n-1}) & \omega_n(x) & \omega_n(y)\\ f(v_1) & \dots & f(v_{n-1}) & f(x) & f(y)\end{vmatrix}\geq 0.$$

沿最后一行展开该行列式，我们得到

$$f(y)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-1},x)-f(x)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-1},y)$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}f(v_i)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1}\dots,v_{n-1},x,y)\geq 0.$$

根据切比雪夫系统的正性以及 f over V 的有界性，上述不等式可得

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(y) &\le f(x)\left(1-\frac{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-1},y)}{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-1},x)}\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}f(v_i)\frac{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1}\dots,v_{n-1},x,y)}{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-1},x)}\\
&\le K\Psi_1(v_1,\dots,v_{n-1},x,y)<\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其次，定义

$$
s_i:=\frac{v_i-v_1}{v_n-v_1}\quad(i\in\{1,\dots,n-2\}\cup\{n\}),\qquad s'_{n-1}:=\frac{x-v_1}{v_n-v_1},\quad s''_{n-1}:=\frac{y-v_1}{v_n-v_1}.
$$

根据链式不等式 $v_1<v_2\cdots<v_{n-2}<x<y<v_n$，我们有 $s_1=0<s_2<\cdots<s'_{n-1}<s''_{n-1}<s_n=1$。另一方面，对于 $i\in\{1,\dots,n-2\}\cup\{n\}$,

$$
s_i=\frac{v_i-v_1}{v_n-v_1}=\frac{(1-\lambda_i)x+\lambda_i y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}{(1-\lambda_n)x+\lambda_n y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(y-x)}{(\lambda_n-\lambda_1)(y-x)}=\frac{\lambda_i-\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\in\mathbb{Q},
$$

$$
s'_{n-1}=\frac{x-v_1}{v_n-v_1}=\frac{x-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}{(1-\lambda_n)x+\lambda_n y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}=\frac{-\lambda_1(y-x)}{(\lambda_n-\lambda_1)(y-x)}=\frac{-\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\in\mathbb{Q}
$$

and

$$
s''_{n-1}=\frac{y-v_1}{v_n-v_1}=\frac{y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}{(1-\lambda_n)x+\lambda_n y-((1-\lambda_1)x+\lambda_1 y)}=\frac{(1-\lambda_1)(y-x)}{(\lambda_n-\lambda_1)(y-x)}=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}\in\mathbb{Q}.
$$

现在利用定理 1.1，f 的 ω-Jensen 凸性意味着

$$
\Phi_{(\omega,f)}(v_1+s_1(v_n-v_1),\dots,v_1+s'_{n-1}(v_n-v_1),v_1+s''_{n-1}(v_n-v_1),v_1+s_n(v_n-v_1))\ge 0,
$$

根据数 $s_1,s_2,\dots,s'_{n-1},s''_{n-1},s_n$ 的定义，可得

$$
\Phi_{(\omega,f)}(v_1,\dots,v_{n-2},x,y,v_n)\ge 0.
$$

这个不等式可以写成

$$
\begin{vmatrix}
\omega_1(v_1) & \dots & \omega_1(v_{n-2}) & \omega_1(x) & \omega_1(y) & \omega_1(v_n)\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\omega_n(v_1) & \dots & \omega_n(v_{n-2}) & \omega_n(x) & \omega_n(y) & \omega_n(v_n)\\
f(v_1) & \dots & f(v_{n-2}) & f(x) & f(y) & f(v_n)
\end{vmatrix}\ge 0.
$$

沿最后一行展开这个行列式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&f(v_n)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},x,y)-f(y)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},x,v_n)+f(x)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},y,v_n)\\
&+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n-i-1}f(v_i)\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1}\dots,v_{n-2},x,y,v_n)\ge 0,
\end{aligned}
$$

by 根据切比雪夫系统的正性，上述不等式等价于

$$
\begin{aligned}
f(y)-f(x) &\le f(y)\left(1-\frac{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},x,v_n)}{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},y,v_n)}\right)+f(v_n)\frac{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},x,y)}{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},y,v_n)}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n-i-1}f(v_i)\frac{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1}\dots,v_{n-2},x,y,v_n)}{\Phi_\omega(v_1,\dots,v_{n-2},y,v_n)}\\
&\le K\Psi_2(v_1,\dots,v_{n-2},x,y,v_n)<\epsilon.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

因此，不等式 (12) 和 (13) 表明，对于所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 x、$y\in[a,b]$，

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

成立。这证明 f 在 $[a,b]$上一致连续。闭区间 $[a,b]\subseteq V$ 是任意的，因此 f 在 V上连续。□

定理 2.6. 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是一个在 I的某个非空开子集上有界的函数。那么，当且仅当对于某些 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$，它是 ω-詹森仿射函数。

证明。 首先假设 f 是一个 ω-詹森仿射函数。那么，它是 ω-詹森凸的，由定理 2.5 可知， f在 I 上连续。我们先证明，对于所有 $x_0,x_1,\ldots,x_n\in I$，

$$\Phi_{\omega,f}(x_0,x_1,\ldots,x_n)=0. \tag{14}$$

事实上，如果点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$中有两个重合，那么这个等式显然成立。我们可以假设这些点两两不同，并且 $x_0<x_1<\cdots<x_n$。设$0<r_{1,k}<\cdots<r_{n,k}$是分别收敛于 $0<x_1-x_0<\cdots<x_n-x_0$的有理数列。那么，根据定理 1.1，对于所有 $k\in\mathbb{N}$， f的 ω-詹森仿射性推出

$$\Phi_{\omega,f}(x_0,x_0+r_{1,k},\ldots,x_0+r_{n,k})=0.$$

利用 f 的连续性并取极限 $k\to\infty$，可得（14）成立。

任意固定 $x_1<\cdots<x_n$于 I中。于是，

$$\Phi_{\omega,f}(x,x_1,\ldots,x_n)=0.$$

对所有 $x\in I$均成立，即，

$$\begin{vmatrix}\omega_1(x) & \omega_1(x_1) & \ldots & \omega_1(x_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_n(x) & \omega_n(x_1) & \ldots & \omega_n(x_n)\\ f(x) & f(x_1) & \ldots & f(x_n)\end{vmatrix}=0.$$

沿第一列展开此行列式，得到

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\omega_i(x)\Phi_{\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\ldots,\omega_n,f}(x_1,\ldots,x_n)+(-1)^n f(x)\Phi_\omega(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

因此，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\Phi_{\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\ldots,\omega_n,f}(x_1,\ldots,x_n)}{\Phi_\omega(x_1,\ldots,x_n)}\omega_i(x).$$

现在，显然取 α_1、.....、 $\alpha_n\in\mathbb{R}$，即可看出 $f=\alpha_1\omega_1+\cdots+\alpha_n\omega_n$成立。

反向命题显然成立：如果 f 是坐标函数ω的线性组合，那么根据行列式的标准性质，$\Phi_{\omega,\ f}$ 恒等于零。□

以下问题似乎很重要：关于ω 的什么充要条件能够确保存在不连续的 ω-詹森仿射函数或不连续的 ω-詹森凸函数？以下结果给出了一个充分条件。为表述并证明这一充分条件，我们需要下面的引理。

引理 2.7。 假设存在一个正连续函数 $\omega_0:\ I\to\mathbb{R}_+$ 以及一个矩阵$M=(a_{i,\ j})_{1\le i\le n,\ 0\le j\le n-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\omega_i(x)=(a_{i,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{i,1}x+a_{i,0})\cdot\omega_0(x)\qquad(x\in I,\ i\in\{1,\ldots,n\}). \tag{15}$$

于是 $\det(M)>0$，并且对于所有 $(x_1,\ldots,x_n)\in\sigma_n(I)$，

$$\Phi_\omega(x_1,\ldots,x_n)=\omega_0(x_1)\cdots\omega_0(x_n)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{\pi_n}(x_1,\ldots,x_n). \tag{16}$$

此外，设 $f\colon I\to\mathbb{R}$。那么，对于所有 $(x_0,\ldots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)$，

$$\Phi_{\omega,f}(x_0,\ldots,x_n)=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{\pi_n,f/\omega_0}(x_0,\ldots,x_n). \tag{17}$$

证明。由 (15) 中的等式以及行列式的乘积法则可得，对所有 $(x_1,\ldots,x_n)\in\sigma_n(I)$，

$$\begin{aligned}
&\Phi_\omega(x_1,\ldots,x_n)\\
&=\begin{vmatrix}(a_{1,n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_1+a_{1,0})\omega_0(x_1) & \ldots & (a_{1,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_n+a_{1,0})\omega_0(x_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{n,n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_1+a_{n,0})\omega_0(x_1) & \ldots & (a_{n,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_n+a_{n,0})\omega_0(x_n)\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_1)\cdots\omega_0(x_n)\begin{vmatrix}a_{1,n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_1+a_{1,0} & \ldots & a_{1,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_n+a_{1,0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_1+a_{n,0} & \ldots & a_{n,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_n+a_{n,0}\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_1)\cdots\omega_0(x_n)\begin{vmatrix}a_{1,0} & \ldots & a_{1,n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,0} & \ldots & a_{n,n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1^0 & \ldots & x_n^0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_1)\cdots\omega_0(x_n)\det(M)\cdot\Phi_{\pi_n}(x_1,\ldots,x_n),
\end{aligned}$$

这证明了 (16)。

行列式 $\Phi_{\pi_n}(x_1,\ldots,x_n)$ 的值等于 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)>0$（因为它是范德蒙德型的）。因此，切比雪夫系统 ω 的正性、函数 ω_0 的正性以及等式 (16) 可推出 $\det(M)>0$。

由 (15) 中的等式以及行列式的乘积法则再次可得，对所有 $(x_0,\ldots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)$，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\omega,f}(x_0,\ldots,x_n)\\
&=\begin{vmatrix}(a_{1,n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_0+a_{1,0})\omega_0(x_0) & \ldots & (a_{1,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_n+a_{1,0})\omega_0(x_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{n,n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_{n,0}x_1+a_{n,0})\omega_0(x_0) & \ldots & (a_{n,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_n+a_{n,0})\omega_0(x_n)\\ f(x_0) & \ldots & f(x_n)\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\begin{vmatrix}a_{1,n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_0+a_{1,0} & \ldots & a_{1,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{1,1}x_n+a_{1,0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_0+a_{n,0} & \ldots & a_{n,n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_{n,1}x_n+a_{n,0}\\ \frac{f}{\omega_0}(x_0) & \ldots & \frac{f}{\omega_0}(x_n)\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\begin{vmatrix}a_{1,0} & \ldots & a_{1,n-1} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,0} & \ldots & a_{n,n-1} & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_0^0 & \ldots & x_n^0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_0^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\\ \frac{f}{\omega_0}(x_0) & \ldots & \frac{f}{\omega_0}(x_n)\end{vmatrix}\\
&=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{\pi_n,f/\omega_0}(x_0,\ldots,x_n),
\end{aligned}$$

这表明 (17) 成立。 □

定理 2.8。假设存在一个正连续函数 $\omega_0\colon\ I\to\mathbb{R}_+$ 以及一个矩阵 $M=(a_{i,\ j})_{1\le i\le n,\ 0\le j\le n-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 (15) 成立。那么，$f\colon\ I\to\mathbb{R}$ 是一个 ω-詹森凸（分别为 ω-詹森仿射）函数，当且仅当 $\frac{f}{\omega_0}$ 是一个 π_n-詹森凸（分别为 π_n-詹森仿射）函数。

证明。 根据引理 2.7 的公式 (17)，对所有的 $h>0$ 和 $x\in I\cap(I-nh)$，我们有

$$\Phi_{\omega,f}(x,x+h,\dots,x+nh)=\prod_{i=0}^{n}\omega_0(x+ih)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{\pi_n,f/\omega_0}(x,x+h,\dots,x+nh).$$

由于 $\det(M)$ 为正且函数 ω_0 为正，因此不等式$\Phi_{\omega,f}(x,x+h,\dots,x+nh)\geq 0$成立，当且仅当 $\Phi_{\pi_n,f/\omega_0}(x,x+h,\dots,x+nh)\geq 0$成立。这表明，$f$ 是 ω-詹森凸的，当且仅当 $\frac{f}{\omega_0}$ 是 π_n-詹森凸的。

类似地，$\Phi_{\omega,f}(x,x+h,\dots,x+nh)=0$成立，当且仅当 $\Phi_{\pi_n,f/\omega_0}(x,x+h,\dots,x+nh)=0$ 成立，这证明了 f 是 ω-詹森仿射的，当且仅当 $\frac{f}{\omega_0}$ 是 π_n-詹森仿射的。□

我们需要回顾以下关于 π_n-詹森仿射函数的刻画。

定理 2.9。 函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是 π_n-*Jensen* 仿射函数，当且仅当存在一个常数$A_0\in\mathbb{R}$、一个加性函数 $A_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$、一个对称双加性函数 $A_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$、..... 以及一个对称 $(n-1)$- 加性函数 $A_{n-1}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，使得

$$f(x)=A_{n-1}(x,\dots,x)+\cdots+A_2(x,x)+A_1(x)+A_0\qquad(x\in I).\tag{18}$$

推论 2.10。 假设存在一个正连续函数 $\omega_0\colon I\to\mathbb{R}_+$ 和一个矩阵$(a_{i,\,j})_{1\leq i\leq n,\,0\leq j\leq n-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$使得式$(15)$成立。那么，$f\colon I\to\mathbb{R}$是一个 ω-*Jensen* 仿射函数，当且仅当存在一个常数 $A_0\in\mathbb{R}$、一个加性函数 $A_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$、一个对称双加性函数 $A_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$、.....以及一个对称$(n-1)$-加性函数$A_{n-1}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，使得

$$f(x)=\big(A_{n-1}(x,\dots,x)+\cdots+A_2(x,x)+A_1(x)+A_0\big)\omega_0(x)\qquad(x\in I).\tag{19}$$

证明。 首先假设 f 是 ω-Jensen 仿射函数。于是，根据定理 2.8，$\frac{f}{\omega_0}$ 是 π_n-Jensen 仿射函数。因此，根据定理 2.9，存在常数 $A_0\in\mathbb{R}$、加性函数 $A_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$、对称双加性函数 $A_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，.....以及对称的$(n-1)$-加性函数 $A_{n-1}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，使得

$$\frac{f}{\omega_0}(x)=A_{n-1}(x,\dots,x)+\cdots+A_2(x,x)+A_1(x)+A_0\qquad(x\in I).$$

这证明了 f 具有形式 (19)。

为证明逆向蕴含，假设存在常数 $A_0\in\mathbb{R}$、加性函数 $A_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$、对称双加性函数 $A_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，.....以及对称的$(n-1)$-加性函数 $A_{n-1}\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，使得 (19) 成立。于是，根据定理 2.9，$\frac{f}{\omega_0}$ 是一个 π_n-Jensen 仿射函数。由定理 2.8 可知，这意味着 f 是 ω-Jensen 仿射函数。□

3. 关于扩展切比雪夫系统的赖特凸性

1954年，Wright [14] 提出了一个凸性概念，它强于Jensen凸性，弱于凸性。若函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为赖特凸

$$f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)\leq f(x)+f(y)\qquad(x,y\in I,\,t\in[0,1]).$$

Ng [9],给出了赖特凸性的刻画及最终理解，他证明了 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是赖特凸函数，当且仅当它具有形式 $f=g+A|_I$，其中$g\colon I\to\mathbb{R}$ 是凸函数，$A\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可加函数。

赖特凸性的高阶推广由 Gilányi 和 Páles [2]引入如下。若函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为阶赖特凸$(n-1)$:

$$\Delta_{h_1}\cdots\Delta_{h_n}f(x)\geq 0$$

该条件对所有 h_1、.....、$h_n > 0$ 以及 $x \in I \cap (I - (h_1 + \cdots + h_n))$均成立。容易看出，1 阶赖特凸等价于通常意义上的赖特凸性。

下文中，我们将高阶赖特凸性的概念扩展到切比雪夫系统的情形。设 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ 是一个正的 n维切比雪夫系统。我们称 $\overline{\omega} : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 ω 的扩张，当且仅当存在一个连续函数$\omega_{n+1} : I \to \mathbb{R}$，使得 $\overline{\omega} := (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ 且 $\overline{\omega}$是一个正的（$n+1$）维切比雪夫系统。

设 ω 是一个正的 n维切比雪夫系统，且 $\overline{\omega}$ 是 ω的一个任意固定扩张。若对所有 $h_1, \ldots, h_n > 0$ 以及$x \in I \cap (I - (h_1 + \cdots + h_n))$，不等式成立，则称函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 是$\overline{\omega}$-赖特凸

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \frac{\Phi_{(\omega,f)}(x, x + h_{i_1}, \ldots, x + h_{i_1} + \cdots + h_{i_n})}{\Phi_{\overline{\omega}}(x, x + h_{i_1}, \ldots, x + h_{i_1} + \cdots + h_{i_n})} \geq 0 \tag{20}$$

成立，其中求和遍历元素 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有排列 $(i_1, \ldots, i_n)$。

我们的首个结果建立了 ω-凸性、$\overline{\omega}$-赖特凸性与 ω-詹森凸性之间的联系。

定理 3.1. 设 ω 是一个正的 n 维切比雪夫系统，且 $\overline{\omega}$ 是 ω 的扩张。那么，每个 ω-凸函数都是 $\overline{\omega}$-赖特凸的，而每个 $\overline{\omega}$-赖特凸函数都是 ω-詹森凸的。

证明。首先假设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是 ω-凸的。那么，对于所有 $h_1, \ldots, h_n > 0$ 以及 $x \in I \cap (I - (h_1 + \cdots + h_n))$ 的元素 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有排列 $(i_1, \ldots, i_n)$，我们有

$$\Phi_{(\omega,f)}(x, x + h_{i_1}, \ldots, x + h_{i_1} + \cdots + h_{i_n}) \geq 0.$$

另一方面 ，由切比雪夫系统 $\overline{\omega}$ 的正性，我们也有

$$\Phi_{\overline{\omega}}(x, x + h_{i_1}, \ldots, x + h_{i_1} + \cdots + h_{i_n}) > 0.$$

这些不等式表明，式 (20) 在所示定义域上成立，因此 f 是 $\overline{\omega}$-赖特凸的。

为验证第二个断言，假设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是$\overline{\omega}$-赖特凸的。在不等式 (20) 中取 $h_1 := \cdots = h_n := h > 0$，对所有 $h > 0$ 和 $x \in I \cap (I - nh)$，我们得到

$$\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x, x + h, \ldots, x + nh)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x, x + h, \ldots, x + nh)} \geq 0. \tag{21}$$

由于切比雪夫系统 $\overline{\omega}$ 为正，可知 $\Phi_{\overline{\omega}}(x, x + h, \ldots, x + nh)$ 为正，因此我们可以得出 $\Phi_{(\omega,f)}(x, x + h, \ldots, x + nh) \geq 0$，这表明 f 是ω-詹森凸的。□

下一个定理描述了 $\overline{\omega}$-赖特凸性与 $(n-1)$ 阶赖特凸性之间的联系。

定理 3.2. 假设存在一个正连续函数 $\omega_0 : I \to \mathbb{R}_+$ 和一个矩阵 $M := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，使得(15) 成立。定义 $\omega_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ 为 $\omega_{n+1}(t) := t^n \omega_0(t)$。那么 $\overline{\omega} := (\omega, \omega_{n+1})$ 是切比雪夫系统 ω的一个扩张。此外，我们有以下断言：

(i) 对于所有 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_{n+1}(I)$，等式

$$\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)} = [x_0, x_1, \ldots, x_n; f/\omega_0] \tag{22}$$

成立。此外，函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 是 ω-凸的，当且仅当 f/ω_0 是$(n-1)$阶凸函数。

(ii) 对所有的 $h_1,\dots,h_n>0$ 以及 $x\in I\cap(I-(h_1+\cdots+h_n))$，等式

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)}\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n})}{\Phi_{\overline{\omega}}(x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n})}=\frac{\Delta_{h_1}\cdots\Delta_{h_n}(f/\omega_0)(x)}{h_1\cdots h_n} \tag{23}$$

成立。此外，函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 是 $\overline{\omega}$-赖特凸的，当且仅当 f/ω_0 是 $n-1$ 阶的赖特凸函数。

证明。我们首先验证 $\overline{\omega}=(\omega,\omega_{n+1})$ 是一个正切比雪夫系统。设 $(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)$。然后，应用引理 2.7 中 $f:=\omega_{n+1}$ 对应的等式 (17)，可得

$$\begin{aligned}\Phi_{\overline{\omega}}(x_0,x_1,\dots,x_n)&=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{(\pi_n,\omega_{n+1}/\omega_0)}(x_0,x_1,\dots,x_n)\\&=\omega_0(x_0)\cdots\omega_0(x_n)\cdot\det(M)\cdot\Phi_{\pi_{n+1}}(x_0,x_1,\dots,x_n)>0.\end{aligned} \tag{24}$$

最后一个不等式源于 $\Phi_{\pi_{n+1}}(x_0,x_1,\dots,x_n)$ 是一个范德蒙德行列式且 $x_0<x_1<\cdots<x_n$。这确实证明了 $\overline{\omega}$ 是一个正切比雪夫系统。

在证明的其余部分，记 $g:=f/\omega_0$。为证明断言 (i) 成立，固定 $(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)$。根据引理 2.7，我们有等式 (17)。将该等式与 (24) 结合，可得

$$\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x_0,x_1,\dots,x_n)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x_0,x_1,\dots,x_n)}=\frac{\Phi_{(\pi_n,g)}(x_0,x_1,\dots,x_n)}{\Phi_{\pi_{n+1}}(x_0,x_1,\dots,x_n)}.$$

根据差商理论，我们有如下恒等式

$$\frac{\Phi_{(\pi_n,g)}(x_0,x_1,\dots,x_n)}{\Phi_{\pi_{n+1}}(x_0,x_1,\dots,x_n)}=[x_0,x_1,\dots,x_n;g],$$

结合前一个等式可知，(22) 成立。

函数 f 是 $\overline{\omega}$-凸的，当且仅当对于所有的 $(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\sigma_{n+1}(I)$，(22) 左侧非负。根据该等式，这当且仅当右侧非负时成立，也就是说，当且仅当 f/ω_0 是 $(n-1)$ 阶凸的。

为证明断言 (ii)，令 h_1、…、$h_n>0$ 和 $x\in I\cap(I-(h_1+\cdots+h_n))$ 为固定值。因此，令 $x_j:=x+h_1+\cdots+h_j$（其中 $j\in\{0,\dots,n\}$），由 (22) 可得

$$\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x,x+h_1,\dots,x+h_1+\cdots+h_n)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x,x+h_1,\dots,x+h_1+\cdots+h_n)}=[x,x+h_1,\dots,x+h_1+\cdots+h_n;g].$$

将该等式应用于 $(h_{i_1},\dots,h_{i_n})$（而非 $(h_1,\dots,h_n)$），其中 $(i_1,\dots,i_n)$ 是 $(1,\dots,n)$ 的任意排列，可知

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)}\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n})}{\Phi_{\overline{\omega}}(x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n})}=\sum_{(i_1,\dots,i_n)}[x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n};g].$$

另一方面，根据论文 [2], ，我们有

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)}[x,x+h_{i_1},\dots,x+h_{i_1}+\cdots+h_{i_n};g]=\frac{\Delta_{h_1}\dots\Delta_{h_n}g(x)}{h_1\cdots h_n}$$

成立；结合前一个等式即可推出（23）。

函数 f 是 $\overline{\omega}$-赖特凸的，当且仅当对于所有 h_1，……，$h_n>0$ 和 $x\in I\cap(I-(h_1+\cdots+h_n))$，(23) 式的左边非负。根据这个等式，当且仅当右边非负时，这一结论成立；也就是说，当 f/ω_0 是 $(n-1)$ 阶赖特凸函数时成立。□

在下面的结果中，我们证明了一个关于 $\overline{\omega}$-赖特凸性的刻画定理，前提是所涉及的切比雪夫系统与多项式系统有很强的关联。该结果推广了 Maksa 和 Páles 的分解定理 [7] ，该定理与多项式系统有关。作者最近在 [11] 中给出了该定理的另一种更初等的证明。

定理3.3。假设存在一个正连续函数 $\omega_0 : I \to \mathbb{R}_+$ 和一个矩阵$M := (a_{i,j})_{1\le i\le n,\, 0\le j\le n-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ，使得式 **(15)** 成立。定义 $\omega_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ 为 $\omega_{n+1}(t) := t^n\omega_0(t)$，并令 $\overline{\omega} := (\omega, \omega_{n+1})$。那么，函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 是 $\overline{\omega}$-*Wright* 凸的，当且仅当存在一个 ω-凸函数 $F : I \to \mathbb{R}$，并且对于每个 $k \in \{1, \dots, n-1\}$，存在一个对称的 k-可加映射 $A_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 和一个实常数 A_0，使得对所有 $x \in I$，

$$f(x) = F(x) + (A_0 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x, \dots, x))\omega_0(x). \tag{25}$$

证明。 为证明必要性，假设函数 f 是 $\overline{\omega}$-Wright 凸的。那么，定理 3.2 的断言 (ii) 意味着 f/ω_0 是阶数为 $(n-1)$ 的 Wright 凸函数。高阶 Wright 凸函数的分解定理 [7] 表明，存在一个函数 $G : I \to \mathbb{R}$，它是阶数为 $(n-1)$ 的凸函数；还存在一个实常数 A_0，并且对于每个 $k \in \{1, \dots, n-1\}$，存在一个对称的k-可加映射 $A_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ，使得对所有 $x \in I$，

$$\frac{f}{\omega_0}(x) = G(x) + A_0 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x, \dots, x). \tag{26}$$

这意味着 (25) 在 $F := G\omega_0$ 的条件下成立，并且 F/ω_0 是 $(n-1)$ 阶凸的。由定理 3.2 的断言 (i) 可知，函数 F 是 ω-凸的。

为证明充分性, 假设 (25) 成立，将 (25) 乘以 $1/\omega_0(x)$，可得 t

$$\frac{f}{\omega_0}(x) = \frac{F}{\omega_0}(x) + (A_0 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x, \dots, x)).$$

由于函数 F 是 ω-凸的，因此定理 3.2 的断言 (i) 蕴含 F/ω_0 是 $(n-1)$ 阶凸的。再次根据高阶 Wright凸函数的分解定理 [7], ，我们可以得出 f/ω_0 是 $(n-1)$ 阶 Wright凸的。因此，定理 3.2 的断言 (ii) 表明函数 f 是 $\overline{\omega}$-Wright凸的。□

在接下来的结果中，我们将证明：如果二维多项式系统的扩张不是次数至多为二次的多项式，那么关于该二维多项式系统的凸性（即标准凸性）等价于关于这一扩张的 Wright凸性。为了证明这一结果，我们需要以下关于次数至多为二次的多项式的刻画。

引理 3.4. 设 $\rho : I \to \mathbb{R}$ 是满足以下函数方程的连续函数

$$\frac{\rho(z) - \rho(y)}{z - y} = \frac{\rho(z + u) - \rho(y - u)}{(z + u) - (y - u)}, \qquad u \ge 0,\ y, z \in (I + u) \cap (I - u),\ z + u \ge y. \tag{27}$$

那么 ρ 是 I上的至多二次多项式。

证明. 若 $u > 0$ 且 $y \in (I + u) \cap (I - u)$，则由 ρ的连续性，右侧的极限在 $z \to y$时存在，这表明 ρ 在 y 处可微，因此我们得到

$$\rho'(y) = \frac{\rho(y + u) - \rho(y - u)}{2u}, \qquad u > 0,\ y \in (I + u) \cap (I - u). \tag{28}$$

由于 $u > 0$ 是任意的，因此 ρ 在 I 上处处可微。现在，上述等式右端关于 y 可微，这意味着 ρ 二阶可微。重复这一论证可知， ρ 在 I 上三阶可微。我们将证明 ρ''' 在 I 上恒为零。

任取固定的 $y \in I$。重新整理方程 (28)，可得

$$2u\rho'(y) = \rho(y+u) - \rho(y-u), \qquad u \in (y-I) \cap (I-y).$$

对 u 将此等式求三次导数，可得

$$0 = \rho'''(y+u) + \rho'''(y-u), \qquad u > 0,\, y \in (I+u) \cap (I-u).$$

代入 $u = 0$，可得 $\rho'''(y) = 0$。因此，ρ''' 在 I 上恒为零。这说明 ρ 必须是次数至多为二次的多项式。□

定理 3.5. 假设存在一个正连续函数 $\omega_0 \colon I \to \mathbb{R}_+$ 以及一个矩阵$M := (a_{i,j})_{1\le i\le 2, 0\le j\le 1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，使得(15) 对 $n = 2$成立。假设 $\omega_3 \colon I \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，且 $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 是 $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ 的扩张，并且 ω_3/ω_0 不是次数至多为二次的多项式。那么，每个 $\overline{\omega}$-*Wright* 凸函数都是 ω-凸的，也就是说，$\overline{\omega}$-赖特凸性等价于 ω-凸性。

证明。在定理的条件下，假设 $f \colon I \to \mathbb{R}$ 是一个 $\overline{\omega}$-赖特凸函数。也就是说，不等式

$$\frac{\Phi_{(\omega,f)}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)} + \frac{\Phi_{(\omega,f)}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)}{\Phi_{\overline{\omega}}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)} \ge 0$$

对所有 h_1、$h_2 > 0$ 和 $x \in I \cap (I - (h_1+h_2))$均成立。利用引理 2.7可知，此不等式等价于

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_0(x)\omega_0(x+h_1)\omega_0(x+h_1+h_2)\cdot \det(M)\cdot \Phi_{\pi_2, f/\omega_0}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)}{\omega_0(x)\omega_0(x+h_1)\omega_0(x+h_1+h_2)\cdot \det(M)\cdot \Phi_{\pi_2,\omega_3/\omega_0}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)} \\
&+ \frac{\omega_0(x)\omega_0(x+h_2)\omega_0(x+h_1+h_2)\cdot \det(M)\cdot \Phi_{\pi_2, f/\omega_0}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)}{\omega_0(x)\omega_0(x+h_2)\omega_0(x+h_1+h_2)\cdot \det(M)\cdot \Phi_{\pi_2,\omega_3/\omega_0}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)} \ge 0,
\end{aligned}$$

化简后得到

$$\frac{\Phi_{\pi_2, f/\omega_0}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)}{\Phi_{\pi_2,\omega_3/\omega_0}(x, x+h_1, x+h_1+h_2)} + \frac{\Phi_{\pi_2, f/\omega_0}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)}{\Phi_{\pi_2,\omega_3/\omega_0}(x, x+h_2, x+h_1+h_2)} \ge 0. \tag{29}$$

这意味着 $g := f/\omega_0$ 是 $\overline{\pi}_2$-赖特凸的，其中 $\overline{\pi}_2(t) := (1, t, \rho(t))$且 $\rho := \omega_3/\omega_0$。注意，对于 $\varphi \in \{g, \rho\}$ 和 $i \in \{1, 2\}$，有

$$\begin{aligned}
\Phi_{(\pi_2,\varphi)}(x, x+h_i, x+h_1+h_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+h_i & x+h_1+h_2 \\ \varphi(x) & \varphi(x+h_i) & \varphi(x+h_1+h_2) \end{vmatrix} \\
&= h_{3-i}\varphi(x) - (h_1+h_2)\varphi(x+h_i) + h_i\varphi(x+h_1+h_1).
\end{aligned}$$

利用这个公式，不等式 (29) 现在表示

$$\begin{aligned}
&\frac{h_2 g(x) - (h_1+h_2)g(x+h_1) + h_1 g(x+h_1+h_2)}{h_2\rho(x) - (h_1+h_2)\rho(x+h_1) + h_1\rho(x+h_1+h_2)} \\
&\quad + \frac{h_1 g(x) - (h_1+h_2)g(x+h_2) + h_2 g(x+h_1+h_2)}{h_1\rho(x) - (h_1+h_2)\rho(x+h_2) + h_2\rho(x+h_1+h_2)} \ge 0
\end{aligned} \tag{30}$$

对所有 h_1、$h_2 > 0$ 和 $x \in I \cap (I - (h_1+h_2))$均成立。

根据我们的假设，(π_2, ρ) 是 π_2 的扩张，且 ρ 不是次数不超过二次的多项式。由引理 3.4 可知，ρ 不满足函数方程 (27)，这意味着存在 $u \ge 0$, $y, z \in (I+u) \cap (I-u)$，使得 $z + u \ge y$，从而

$$\frac{\rho(z) - \rho(y)}{z - y} \ne \frac{\rho(z+u) - \rho(y-u)}{(z+u) - (y-u)}.$$

令 $x := y-u$, $h := z-y+2u$, $t := z-y+u$。则 $z = x+t$, $y = x+h-t$ 和 $z+u = x+h$，因此上述关系表明

$$h(\rho(x+t)-\rho(x+h-t))+(h-2t)(\rho(x+h)-\rho(x)) \neq 0 \tag{31}$$

对于某个 $h>0$、$x \in I \cap (I-h)$ 和 $t \in (0,h)$。

设 $h>0$ 和 $x \in I \cap (I-h)$ 固定，使得对于某个 $t \in (0,h)$，(31) 成立。定义 $T \subseteq (0,h)$ 为使 (31) 成立的那些值 t 的集合。于是集合 T 非空，并且由 ρ 的连续性可知，它也是开集。令 T_+ 和 T_- 分别表示使 (31) 左侧为正和为负的元素 $t \in T$ 的（不相交）子集。那么这些子集中至少有一个非空（并且也是开集）。

由于 g 是 π_2-赖特凸，因此定理 3.1 蕴含 g 是 π_2-詹森凸，也就是说，它在标准意义下是詹森凸的。根据 Rodé 定理 [13]，g 是詹森仿射函数的逐点最大值；也就是说，对于所有 $p \in I$，存在一个加性函数 $A_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$g(y) \geq A_p(y-p)+g(p) \qquad (p,y \in I). \tag{32}$$

代入 $y := x+t$ 和 $y := x+h-t$，取代 $t \in T$ 和 $p \in I$，得到

$$g(x+t) \geq A_p(x+t-p)+g(p) \qquad g(x+h-t) \geq A_p(x+h-t-p)+g(p).$$

因此，令 $h_1 := t$ 和 $h_2 := h-t$，不等式 (30) 得出

$$\frac{(h-t)g(x)-h\big(A_p(x+t-p)+g(p)\big)+tg(x+h)}{(h-t)\rho(x)-h\rho(x+t)+t\rho(x+h)} + \frac{tg(x)-h\big(A_p(x+h-t-p)+g(p)\big)+(h-t)g(x+h)}{t\rho(x)-h\rho(x+h-t)+(h-t)\rho(x+h)} \geq 0.$$

利用 A_p 的加性，并将含有 $A_p(t)$ 的项移至右边，不等式等价于

$$\begin{aligned} &\frac{(h-t)g(x)-h\big(A_p(x-p)+g(p)\big)+tg(x+h)}{(h-t)\rho(x)-h\rho(x+t)+t\rho(x+h)} \\ &\quad + \frac{tg(x)-h\big(A_p(x+h-p)+g(p)\big)+(h-t)g(x+h)}{t\rho(x)-h\rho(x+h-t)+(h-t)\rho(x+h)} \\ &\geq \frac{h(\rho(x+t)-\rho(x+h-t))+(h-2t)(\rho(x+h)-\rho(x))}{((h-t)\rho(x)-h\rho(x+t)+t\rho(x+h))(t\rho(x)-h\rho(x+h-t)+(h-t)\rho(x+h))}hA_p(t). \end{aligned} \tag{33}$$

该不等式表明，A_p 在 T_+ 上有上界，在 T_-上有下界。因此，A_p 在 T的某个非空开子集上有上界或有下界。根据加性函数的众所周知的性质，这意味着 A_p 是连续的，即存在一个实常数 a_p，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$，$A_p(x) = a_p x$ 成立。因此，由 (32) 可知，g 是连续仿射函数的逐点最大值。因此，g 必定是凸函数（按标准意义）。由此可得，$f = g\omega_0$ 是 ω-凸的。□

前一个定理的类似结论是否适用于三维或更高维情形，似乎仍是一个未解决的问题。

参考文献

[1] F. Bernstein 和G. Doetsch，《论凸函数理论》，《数学年鉴》76 (1915)，第4期，514–526页。[2] A. Gilányi 和 Zs. Páles，《关于高阶凸函数》，《数学不等式及其应用》11 (2008)，第2期，271–282页。

[3] E. Hopf, 《关于实变量实函数的某些高阶差商与其可微性之间的关系》，博士论文，柏林腓特烈–威廉大学，1926年。[4] S. Karlin, 《全正性。第一卷》，斯坦福大学出版社，斯坦福，加利福尼亚州，1968年。[5] S. Karlin 和 W. J. Studden, 《切比雪夫系统：及其在分析学与统计学中的应用》，纯数学与应用数学丛书，第XV卷，Interscience 出版社、约翰·威立父子出版公司，纽约—伦敦—悉尼，1966年。[6] M. Kuczma, 《函数方程与不等式理论导论》，卡托维兹西里西亚大学科研论文集，第489卷，国家科学出版社—西里西亚大学，华沙—克拉科夫—卡托维兹，1985年，第2版（A. Gilányi 编），Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2009年。[7] Gy. Maksa 和 Zs. Páles, 《高阶赖特凸函数的分解》，《数学分析与应用杂志》359 (2009)，439–443页。[8] J. Matkowski, 《广义凸函数与 Zs. Páles 问题的解》，《德布勒森数学出版物》73 (2008)，第3–4期，421–460页。[9] C. T. Ng, 《生成舒尔凸和的函数》，《一般不等式》第5卷（奥伯沃尔法赫，1986）（W. Walter 编），国际数值数学丛书，第80卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔—波士顿，1987年，第433–438页。[10] T. Popoviciu, 《凸函数》，科学与工业新知，第992号，Hermann et Cie，巴黎，1944年。[11] Zs. Páles 和 M.K. Shihab, 《重新探讨高阶赖特凸函数的分解》，《数学成果》77 (2022)，第2期，第73号论文，11页。[12] Zs. Páles 和 É. Székelyné Radácsi, 《关于切比雪夫系统的高阶凸性性质的刻画》，《方程数学》90 (2016)，第1期，193–210页。[13] G. Rodé, 《Hahn–Banach 定理的一个抽象版本》，《巴塞尔数学档案》31 (1978)，474–481页。[14] E. M. Wright, 《一个关于凸函数的不等式》，《美国数学月刊》61 (1954)，620–622页。

（Zs. Páles）德布勒森大学数学研究所，匈牙利电子邮件地址：pales@science.unideb.hu

（M. K. Shihab）德布勒森大学数学与计算科学博士生院，匈牙利；伊拉克基尔库克大学纯科学教育学院数学系电子邮件地址：mahmood.kamil@science.unideb.hu；mahmoodkamil30@uokirkuk.edu.iq