arXiv:2303.11978v2 [math.CT] 9 Jun 2023

广义签名的计算图

Ioannis Markakis*

2023年3月21日

摘要

我们引入一种类型构成直接范畴的签名概念，并研究此类签名的计算图。此类签名的代数是预层，并为签名中的每个函数符号赋予一种解释；我们还描述了计算图如何产生签名。推广 Batanin 的工作后，我们证明，带有某些保持生成元的态射的计算图构成一个预层范畴，并描述了从代数到计算图的遗忘函子。由计算图自由生成的代数恰好是某个余纤维生成分解系统的余纤维对象，而上述伴随则给出了该分解系统在 Garner 意义下的普适余纤维替换。最后，我们说明多类型结构、弱 ω范畴以及代数半单纯 Kan 复形如何成为此类签名的代数，并提出弱多重范畴的概念。

1 引言

对于任何类型的数学结构，一个重要的问题是确定它可以由哪些底层数据自由生成。对于大多数代数结构，例如群或环，这些数据由生成元集给出；而对于高维结构，则需要结构更丰富的数据。例如，范畴可以由有向图自由生成。在所有这些例子中，我们关注的结构都是某个范畴上的某个单子 M 的代数 $\mathcal{C}$ ，而自由生成则通过 Eilenberg-Moore伴随来表达：

$$\mathcal{C} \underset{\mathrm{U}^{\mathrm{M}}}{\overset{\mathrm{F}^{\mathrm{M}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Alg}_{\mathrm{M}}$$

球状高阶范畴也存在类似的伴随，其中范畴 $\mathcal{C}$是球状集合范畴，而 M 是某个有限单子。不过在这种情况下，还有一种更一般的生成数据概念，称为计算图或多图 [6, 12, 32], ，它们通过沿边界球面粘合圆盘递归构造，类似于 CW复形。

*剑桥大学， im496@cam.ac.uk

本文介绍并研究更一般范畴 $\mathcal{C}$上的单子的计算图。更确切地说，我们令 $\mathcal{C} = [\mathcal{I}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ 为任意小直接范畴 $\mathcal{I}$上的预层范畴，并将其对象称为类型，将其态射称为面映射。每个类型 i 都会导出一个包含 $\partial\mathbb{D}^i \subseteq \mathbb{D}^i$，位于 $\mathcal{C}$ 中，其中 $\mathbb{D}^i = \mathcal{I}(-, i)$是由 i表示的可表示预层，而 $\partial\mathbb{D}^i$ 则是通过移除$\mathbb{D}^i$的最高维元素得到的子预层。这一更广泛的框架使我们能够统一处理高阶范畴的计算图，无论其底层几何结构是球状、半单纯还是立方等。

此外，我们还研究哪些数据能够在这样的范畴 $\mathcal{C}$上生成一个单子 M。当 $\mathcal{I}$ 是终对象范畴，因此 $\mathcal{C}$ 是集合范畴时，这个问题的答案之一是普适代数中的签名概念 [22]。粗略地说，它由一个函数符号集合 Σ 以及一个元数函数 $\mathsf{ar} : \Sigma \to \mathbb{N}$ 构成，该函数为每个符号指定其输入个数。一个 Σ-代数$\mathbb{X}$ 由一个集合 X 以及一个函数构成

$$f^{\mathbb{X}} : X^{\mathrm{ar}(f)} \to X$$

对每个函数符号 $f \in \Sigma$都给出一个函数。由 Σ 生成的单子 M_Σ，是由自由 Σ-代数伴随 $\mathsf{F}_\Sigma \dashv \mathsf{U}_\Sigma$ 所诱导的单子。

人们提出了签名的一种广义得多的概念，其中 $\mathcal{C}$ 是一个局部可呈现的富范畴，并以一个小稠密子范畴 $\mathcal{A}$ 中的元数 [10]取代自然数。展开$\mathcal{C} = [\mathcal{I}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ 是预层范畴时的定义，我们可以看到，签名 Σ 相当于对每个 $A \in \mathcal{A}$给出一个函数符号预层。等价地，它是一个预层$\Sigma : \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$，连同一个元数函数 $\mathsf{ar} : \Sigma_i \to \mathsf{ob}\,\mathcal{A}$，对每个类型$i$ 都给出该函数，并满足：对每个函数符号 $f \in \Sigma_i$ 和面映射$\delta : j \to i$，都有 $\mathsf{ar}(\delta^* f) = \mathsf{ar}(f)$。一个 Σ-代数 $\mathbb{X}$ 是一个预层 X，并附带一个函数

$$f^{\mathbb{X}} : \mathcal{C}(\mathrm{ar}(f), X) \to X_i$$

与面映射相容，因为

$$\delta^* f^{\mathbb{X}} = (\delta^* f)^{\mathbb{X}}.$$

由 Σ 生成的单子 M_Σ 仍然是由自由 Σ-代数伴随 $\mathsf{F}_\Sigma \dashv \mathsf{U}_\Sigma$ 所诱导的单子。在此设置下，每个元素 $t \in (\mathsf{M}_\Sigma\, A)_i$ 都可以看作是元数为 $A \in \mathcal{A}$ 的函数符号的形式复合，因为它导出了一个函数

$$t^{\mathbb{X}} : \mathcal{C}(A, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_\Sigma(\mathsf{F}_\Sigma\, A, X) \to X_i$$

通过求值得到。

这里，我们针对 $\mathcal{I}$ 是小直接范畴的情形，提出签名的一般化概念。我们的签名概念以与计算图将 $\mathcal{I}$ 上的预层一般化为生成数据相同的方式，对先前的概念作了推广。我们的签名仍由每个类型 i 对应的一组函数符号 Σ_i，以及元数函数 $\mathsf{ar} : \Sigma_i \to \mathsf{ob}\,\mathcal{C}$ 组成。不过，面映射 $\delta : j \to i$ 所诱导的函数并非构成预层，而是将一个函数

符号 $f \in \Sigma_i$ （其元数为 A ）映射为低维函数符号 $t_{f,\ \delta} \in \mathsf{M}_{\Sigma,\ j}\, A$ 的形式复合。为使这一定义精确，我们依据直接范畴的维数函数 $\dim : \mathrm{ob}\,\mathcal{I} \to \mathsf{Ord}$ 递归地进行构造，并通过相互归纳法，同时定义签名、 Σ-计算图以及诱导单子 M_Σ 的伴随。

使用由签名生成的单子有一个好处：计算图、它们的态射以及其上的自由代数都可以描述为归纳生成集，也就是说，它们本身都是由一组构造子自由生成的。为了说明这一概念，设 Σ 是普适代数意义下的一个签名。对于这样的签名 Σ ，计算图就是集合，而单子 M_Σ 将集合 X 映射到其 Σ-项集合。这是一个由以下构造子归纳生成的集合

- 对于每个 $x \in C$，都存在一个项 $\mathsf{var}(x)$，
- 对于每个 $f \in \Sigma$ 以及项 t_1、.....、t，都存在一个项 $f[t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)}]$，.....，$t_{\mathrm{ar}(f)}$。

这意味着集合 $\mathsf{M}_\Sigma\, X$ 是多项式自函子

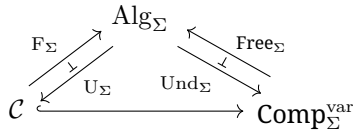
$$G(X) = C \amalg \coprod_{f \in \Sigma} X^{\mathrm{ar}(f)}$$

由上述构造子指定的初始代数。为了构造这个初始代数，我们先令 $X_{-1} = \emptyset$ 为初始集合，并通过令 $X_n = G(X_{n-1})$，对每个自然数 n构造一个递增的集合族。这个集合族的并集就是初始代数 [1]。关于归纳生成集的更详细介绍，见我们先前工作的 [14, 附录 A]。

这种对计算图和自由代数的表述，使我们能够简洁地证明关于球状计算子的已有结果 [6, 17]。在第 3 节中，我们证明，对于每个广义签名，计算图范畴及其某些生成元保持映射构成一个预层拓扑斯 Σ。为此，我们首先证明项函子是族可表示的；该函子将一个计算图映射为其上自由代数的底层预层。沿用 [20], 的说法，我们将表示此函子的计算图称为多复形，并从中找出一类称为复形的子集，它们对应于可表示计算子。本节中的证明与我们先前工作的证明类似 [14]。这一结果的关键在于，我们所考虑的单子是在一个签名上自由生成的；例如，对于自由严格 ω-范畴单子 [27]，这一结论便不成立。

在第 5 节中，我们研究由边界包含 $\partial\mathbb{D}^i \subseteq \mathbb{D}^i$ 生成的代数范畴上的弱分解系统。鉴于这些态射在第6节的例子中所起的作用，我们将其左类中的态射称为余纤维化，将右类中的态射称为平凡纤维化。我们证明，在严格 ω-范畴 [29]的情形中，计算图上的自由代数与余纤维代数是一致的。我们还构造了代数范畴与计算图及生成元保持映射的托扑斯 $\mathsf{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 之间的一个伴随，以扩展自由代

数伴随：



我们证明，所诱导的余单子是该弱分解系统的普适余纤维替换 [17]。

最后，在第6节中，我们介绍一些值得关注的签名及其代数。我们首先看到，多排序代数签名是以 S离散范畴为 S 类型的签名。接着，我们证明， ω范畴和代数半单纯 Kan 复形分别是以球体范畴和半单纯形范畴中的对象为类型的签名的代数。最后，我们提出完全弱无偏多重范畴这一新概念，将其定义为某个以立方体范畴中的对象为类型的签名的代数。

相关工作

我们的 $\mathcal{I}$类型签名是 Fiore 的带替换的 Σ_0模型的特例，正如 Subra maniam [34], 所解释的那样；他将 Fiore 的模型与自己的 $\mathcal{I}$类型理论进行了比较。尤其是， $\mathcal{I}$类型签名似乎与 Subramaniam 的依赖类型项签名密切相关。

为了对某些上下文范畴上的理论进行句法呈现，Subramaniam 在其论文 [34, 第 1 节6], 中引入了依赖类型类型签名。这种签名通过一系列类型声明 $\Gamma \vdash A$扩展了依赖类型论的结构化 Martin-L¨of。此类签名可视为局部有限直接范畴的呈现，其中声明的类型 A对应于范畴的对象，而声明它们所依据的上下文 Γ 则描述了指向该对象的态射；更精确地说，是移除了恒等态射后得到的可表示预层的子预层。在类型签名之上的依赖类型项签名，则是进一步通过一系列项声明进行扩展，这些项声明是如下形式的公理

$$\Delta \vdash t : A[\sigma],$$

其中， Δ 是类型签名上的一个上下文，$(\Gamma \vdash A)$是一个类型声明，而σ： $\Delta \to \Gamma$ 是一个上下文态射。

按我们的定义，一个 $\mathcal{I}$ 分类签名 Σ （其中范畴 $\mathcal{I}$ 局部有限，且其函数符号的元数是有限预层）可导出一个依赖类型项签名，其项声明就是 Σ 的函数符号。项声明的上下文 Δ 由函数符号的元数给出，类型 A 由输出类型给出，而代换 σ 则由函数符号的各个面组合而成。反过来，每个依赖类型项签名，若其中每个项声明的上下文 Δ 的维数都不超过类型 A 的维数（分别将其视为预层和范畴 $\mathcal{I}$ 的对象），则可导出一个 $\mathcal{I}$ 分类签名。维数上的这一自然条件是必要的，才能使由广义签名自由生成的单子与截断函子交换，这一点将在下文精确定义。

签名所自由生成的单子与截断函子交换，这一点将在下文精确定义。

记号

我们用 $\mathcal{I}$ 表示一个小直接范畴，其对象称为类型，态射称为面映射。所谓直接范畴，是指它带有一个函数 $\dim : \mathrm{ob}\mathcal{I} \to \mathbf{Ord}$，取值于序数类，并满足：当存在非恒等面映射 $j \to i$ 时，$\dim\, j < \dim i$。容易看出，$\mathcal{I}$ 必为骨架的，且没有非恒等自同态。给定一个预层 $X : \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$，我们用 X_i 表示 X 在类型 i 处的取值，用 $\delta^* : X_i \to X_j$ 表示其在面映射 $\delta : j \to i$ 处的取值。

给定一个序数 α，我们用 $\mathcal{I}_\alpha$ 表示 $\mathcal{I}$ 的全子范畴，其对象的维数至多为 α。沿子范畴包含拉回会诱导一个截断函子

$$\mathrm{tr}_\alpha : [\mathcal{I}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}].$$

沿该包含的左、右 Kan扩张分别定义截断函子的左、右伴随，称为骨架函子和余骨架函子 [31, Chapter 1]。对于$\beta \leq \alpha$，子范畴包含 $\mathcal{I}_\beta \subseteq \mathcal{I}_\alpha$ 类似地定义一个伴随三元组，容易看出以下条件均成立

$$\mathrm{tr}_\beta = \mathrm{tr}_\beta^\alpha \,\mathrm{tr}_\alpha \qquad \mathrm{tr}_\beta \,\mathrm{sk}_\beta = \mathrm{id} \qquad \mathrm{sk}_\beta = \mathrm{sk}_\alpha \,\mathrm{sk}_\beta^\alpha,$$

我们将其称为余循环条件。

致谢

我要感谢我的导师 Jamie Vicary 教授在本项目期间给予我的支持。此外，我要感谢奥纳西斯基金会提供的资助——奖学金编号：F ZQ 039-1/2020-2021。最后，我要感谢 Chaitanya Leena Subramaniam 与我进行了有益的交流。

2 签名与计算图

本节将定义 $\mathcal{I}$-分类签名这一类对象。我们还将同时为每个签名 Σ 定义一个计算图范畴，它扩展了 $\mathcal{I}$ 上的预层范畴，以及计算图的项预层。该定义通过超限递归给出。更准确地说，对于每个序数α，我们将定义一类维数为 α 的 $\mathcal{I}$-分类签名，并配以限制函数

$$(-)_\beta : \mathrm{Sig}_{\mathcal{I}}(\alpha) \to \mathrm{Sig}_{\mathcal{I}}(\beta)$$

对于 $\beta \leq \alpha$。此外，对于每个此类签名 Σ，我们将定义一个计算图范畴，并配以截断函子

$$\mathrm{tr}_\beta^\Sigma : \mathrm{Comp}_\Sigma \to \mathrm{Comp}_{\Sigma_\beta}$$

对于 $\beta \leq \alpha$。我们还将通过一个伴随来定义

$$\begin{aligned} \mathrm{Cptd}_\Sigma &: [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Comp}_\Sigma & \eta_\Sigma &: \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{Term}_\Sigma \,\mathrm{Cptd}_\Sigma \\ \mathrm{Term}_\Sigma &: \mathrm{Comp}_\Sigma \to [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] & \varepsilon_\Sigma &: \mathrm{Cptd}_\Sigma \,\mathrm{Term}_\Sigma \Rightarrow \mathrm{id} \end{aligned}$$

与截断函子相交换，即

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_\beta^\Sigma \,\mathrm{Cptd}_\Sigma &= \mathrm{Cptd}_{\Sigma_\beta} \,\mathrm{tr}_\beta^\alpha & \mathrm{tr}_\beta^\alpha \,\eta_\Sigma &= \eta_{\Sigma_\beta} \,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma \\ \mathrm{tr}_\beta^\alpha \,\mathrm{Term}_\Sigma &= \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta} \,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma & \mathrm{tr}_\beta^\Sigma \,\varepsilon_\Sigma &= \varepsilon_{\Sigma_\beta} \,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma \,. \end{aligned}$$

我们将此伴随诱导的单子记为 $(\mathsf{M}_\Sigma, \eta_\Sigma, \mu_\Sigma)$。限制函数和截断函子将满足以下余循环条件

$$\begin{aligned} (-)_\gamma^\alpha &= (-)_\gamma^\beta (-)_\beta^\alpha & (-)_\alpha^\alpha &= \mathrm{id} \\ \mathrm{tr}_\gamma^\Sigma &= \mathrm{tr}_\gamma^{\Sigma_\beta} \,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma & \mathrm{tr}_\alpha^\Sigma &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

对于 $\gamma \leq \beta \leq \alpha$。

在本节余下部分，我们固定一个序数 α，并假设上述数据已针对每个 $\beta \leq \alpha$ 定义，且满足余循环条件。我们接着也为 α 定义这些数据。定义中显而易见的循环性将在注 1 中解释。

签名 一个 $\mathcal{I}$ 分类的签名 Σ，其维数为 α，由以下部分组成

- 一个维数为 β 的签名 Σ_β，对每个 $\beta < \alpha$ 都有一个，并且满足：对于 $\gamma \leq \beta$，

$$(\Sigma_\beta)_\gamma = \Sigma_\gamma,$$

- 一个集合 Σ_i，其中包含每个维数为 α 的类型 i 的函数符号；并且对于每个函数符号 $f \in \Sigma_i$,
  - 一个关于 $\mathcal{I}_\alpha$ 的预层 B_f，称为该函数符号的元数，– 一个边界项 $t_{f,\delta} \in \mathsf{M}_{\Sigma_\beta,\, j}(\mathrm{tr}_\beta B_f)$，对于每个非恒等面映射 $\delta : j \to i$，其中 $\beta =$ 维数 j 满足：对于每个面映射 $\delta' : k \to j$,

$$(\delta')^*(t_{f,\delta}) = t_{f,\delta\delta'}.$$

限制函数 $(-)^\beta$ 关于 $\beta \leq \alpha$ 是显然的投影。

计算图 一个 Σ-计算图 C 由以下部分组成：

- 一个 Σ_β-计算图 C_β，对于每个 $\beta < \alpha$ 都满足：对于 $\gamma \leq \beta$，

$$\mathrm{tr}_\gamma^{\Sigma_\beta}(C_\beta) = C_\gamma,$$

- 每个类型 i、每个维数为 α 的生成元集合 V_i^C,

- 对于每个非恒等面映射 $\delta : j \to i$，其中 $\beta = \dim j$，都有一个粘合函数 $\phi_\delta^C : V_i^C \to \text{项}_{\Sigma_\beta,\, j}(C_\beta)$，且对于每个面映射 $\delta' : k \to j$，满足

$$(\delta')^* \phi_\delta^C = \phi_{\delta\delta'}^C.$$

计算图态射 $\sigma : C \to D$ 类似地由以下内容组成：

- 态射 $\sigma_\beta : C_\beta \to D_\beta$ 对每个 $\beta < \alpha$ 都有一个，并且满足对 $\gamma \le \beta$ 有：

$$\mathrm{tr}_\gamma^{\Sigma_\beta}(\sigma_\beta) = \sigma_\gamma$$

- 函数 $\sigma_i : V_i^C \to \mathsf{Term}_{\Sigma,i}(D)$ 对每个维数为 α 的类型 i 都有一个，并且对每个非恒等面映射 $\delta : j \to i$ 都满足：

$$\delta^* \sigma_i = \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(\sigma_\beta) \circ \phi_\delta^C$$

其中 $\beta = \dim j$。

一对态射 $\sigma : C \to D$ 和 $\tau : D \to E$ 的复合定义为

$$(\tau \circ \sigma)_\beta = \tau_\beta \circ \sigma_\beta \qquad\qquad (\tau \circ \sigma)_i = \mathrm{Term}_{\Sigma,i}(\tau) \circ \sigma_i$$

对于 $\beta < \alpha$ 和 i，它们的类型为 α。计算图 C 的恒等态射由恒等态射 id_{C_β} 以及将生成元包含到下文定义的项中的映射 $\mathsf{var} : V_i^C \to \mathsf{Term}_{\Sigma,\, i}(C)$ 给出。对于 $\beta \le \alpha$，截断函子 tr_β^Σ 是显然的投影。

包含函子 与预层 X相关联的计算图 $\mathsf{Cptd}_\Sigma X$ 由以下部分组成：对每个 $\beta < \alpha$，都有计算图 $\mathsf{Cptd}^{\Sigma_\beta}\, \mathsf{tr}_\beta X$；对每个维数为 α 的类型 i，都有集合 X_i；以及粘合函数

$$\phi_\delta^{\mathrm{Cptd}_\Sigma X} : X_i \xrightarrow{\delta^*} X_j \xrightarrow{\eta_{\Sigma_\beta, \mathrm{tr}_\beta X, j}} \mathrm{M}_{\Sigma_\beta,i}(\mathrm{tr}_\beta X)$$

对每个面映射 $\delta : j \to i$，其中 $\beta = \dim j$。由预层态射 $\sigma : X \to Y$ 诱导的计算图态射也类似地由以下部分组成：对每个 $\beta < \alpha$，都有 $\mathsf{Cptd}^{\Sigma_\beta}\, \mathsf{tr}_\beta \sigma$；以及复合

$$(\mathrm{Cptd}_\Sigma \sigma)_i : X_i \xrightarrow{\sigma_i} Y_i \xrightarrow{\mathrm{var}} \mathrm{M}_{\Sigma,i}\, Y$$

其中 var 是下文定义的生成元到项的包含。

项预层 计算图 C的项预层 $\mathsf{Term}_\Sigma(C)$ 定义如下。对于每个维数为 $\beta < \alpha$ 的类型 j，令

$$\mathrm{Term}_{\Sigma,j}(C) = \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(C_\beta).$$

由面映射 $\delta : k \to j$ 诱导的边界函数 δ^* 定义为

$$\mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(C_\beta) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,k}(C_\beta) = \mathrm{Term}_{\Sigma_\gamma,k}(C_\gamma)$$

其中 $\gamma = \dim k$。对于维数为 α 的类型 i，集合 $\mathsf{Term}_{\Sigma,\, i}(C)$ 由以下构造子归纳定义

- 对于每个生成元 $v \in V_i^C$，都存在一个项 $\mathsf{var}\, v$，
- 对于每个函数符号 $f \in \Sigma_i$和计算图式态射 $\tau : \mathsf{Cptd}_\Sigma\, B_f \to C$，都存在一个项 $f[\tau]$。

由非恒等面映射 $\delta : j \to i$ 诱导的函数 δ^* 递归定义如下：

$$\delta^*(\mathrm{var}\, v) = \phi_\delta^C(v) \qquad \delta^*(f[\tau]) = \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta, j}(\tau_\beta)(t_{f,\delta})$$

其中 $\beta = \mathsf{dim}\, j$。余循环条件保证此赋值定义了 $\mathcal{I}_\alpha$上的一个预层。计算图式态射 $\sigma : C \to D$ 对维数为 $\beta < \alpha$、类型为 j 的项t 的作用定义如下：

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\sigma)(t) = \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta}(\sigma_\beta)(t),$$

而它对维数为 α、类型为 i 的项的作用则递归定义如下：

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\sigma)(\mathrm{var}\, v) = \sigma_i(v) \qquad \mathrm{Term}_\Sigma(\sigma)(f[\tau]) = f[\sigma \circ \tau].$$

伴随 还需定义项伴随的单位和余单位。对于前者，给定 $\mathcal{I}_\alpha$上的一个预层 X，令

$$\eta_{\Sigma,X} : X \to \mathrm{Term}_\Sigma\, \mathrm{Cptd}_\Sigma\, X$$

在某个 $x \in X_i$ 上定义的预层态射如下：

$$\eta_{\Sigma,X,i}(x) = \begin{cases} \eta_{\Sigma_\beta, \mathrm{tr}_\beta\, X, i}(x), & \text{for } \dim i = \beta < \alpha \\ \mathrm{var}(x), & \text{for } \dim i = \alpha. \end{cases}$$

对于后者，给定一个 C 上的计算图 Σ，令

$$\varepsilon_{\Sigma,C} : \mathrm{Cptd}_\Sigma\, \mathrm{Term}_\Sigma\, C \to C$$

由每个 $\beta < \alpha$ 对应的$\varepsilon_{\Sigma_\beta, C_\beta}$ 以及集合的恒等态射组成的计算图式态射

$$V_i^{\mathrm{Cptd}_\Sigma\, \mathrm{Term}_\Sigma\, C} = \mathrm{Term}_{\Sigma,i}(C)$$

其中 i 的维数为 α。伴随的单位和余单位的自然性以及蛇形方程都很容易验证。至此，递归定义完成。

注 1. 尽管对于固定签名 Σ，计算图范畴和项函子的定义表面上存在循环性，但如下文所述，这仍是一个有效的数学定义。假设对于每个 $\beta < \alpha$，所有数据都已定义，则可以定义维数为 α 的签名。固定这样一个签名 Σ后，也可以定义计算图及其类型为 $\beta < \alpha$ 的项，以及对象上的包含函子。接着，固定一个计算图 C，便可通过归纳递归 [19]定义其维数为 α的项、边界函数，以及从元数到 C 的态射。

为理解归纳递归定义，我们为每个维数为 α 的 C 项，以及每个目标为C的计算图式态射，递归地赋予一个序数，称为其深度：

$$\begin{aligned}\operatorname{dpth}(\operatorname{var} v) &= 0\\ \operatorname{dpth}(f[\tau]) &= \operatorname{dpth}\tau + 1\\ \operatorname{dpth}(\sigma : D \to C) &= \sup\{\operatorname{dpth}(\sigma_i(v)) : \dim i = \alpha, v \in V_i^C\}.\end{aligned}$$

因此，项和态射的定义归结为对序数 γ 进行超限递归，以构造两个递增集合族，并取它们的并集。第一个集合族由集合 $\mathsf{Term}^{\gamma}_{\Sigma,i}(C; (t_\delta))$ 组成，其中包含类型为 i、深度至多为 γ 且边界由项 t_δ 给出的项。第二个集合族由集合 $\mathsf{Comp}^{\gamma}_{\Sigma}(B_f, C; (\sigma_\beta))$ 组成，其中包含从元数 $\mathsf{Cptd}_\Sigma B_f$ 到 C、深度至多为 γ 且截断由态射 σ_β 给出的态射。这些集合由以下递归公式定义

$$\operatorname{Term}^{\gamma}_{\Sigma,i}(C; (t_\delta)) = \left(\bigcap_{\delta} (\phi^C_\delta)^{-1}(t_\delta)\right) \amalg \coprod_{\substack{f\in\Sigma_i\\(\sigma_\beta)}} \bigcup_{\gamma'<\gamma} \operatorname{Comp}^{\gamma'}_{\Sigma}(B_f, C; (\sigma_\beta))$$

$$\operatorname{Comp}^{\gamma}_{\Sigma}(B_f, C; (\sigma_\beta)) = \prod_{\substack{\dim j=\alpha\\ b\in B_{f,j}}} \operatorname{Term}^{\gamma}_{\Sigma,j}(C; (\operatorname{Term}(\sigma_\beta)(t_{f,\delta})))$$

其中第一个余积遍历满足余循环条件的态射族 $\sigma_\beta : \mathsf{Cptd}^{\Sigma_\beta} \operatorname{tr}_\beta B_f \to C_\beta$（$\beta < \alpha$），并且对每个非恒等面映射 $\delta : j \to i$（其中 $\beta = \dim j$），都有 $\mathsf{Term}_\Sigma(\sigma_\beta)(t_{f,\delta}) = t_\delta$。第一个集合族对所有 γ 以及所有边界项族 (t_δ) 取并集，所得即为 C 中类型为 i 的项的集合。这些项的边界由显然的投影给出。同样，第二个集合族的并集给出从 $\mathsf{Cptd}_\Sigma B_f$ 到 C 的态射，而显然的投影给出这些态射的截断。定义项之后，我们还可以定义任意计算图之间的态射，以及一般情形下的截断函子。

请注意，我们将项集和态射集定义为遍历所有序数得到的递增族的并集。除非这些并集最终稳定，否则它们会产生真类，而非集合。为了说明我们的定义确实满足这一条件，令 λ 为一个正则基数，且严格大于集合 $\coprod_{\text{维数}\, j=\alpha} B_{f,j}$（其中包含每个维数为 α 的函数符号）。这样一个基数的存在性源于 $\mathcal{I}$ 是小的，且 Σ_i 是集合。一个简单的归纳论证表明，来自某个元数的所有项和态射的深度都严格小于 λ，而任意态射的深度至多为 λ。

定义这些之后，我们可以互递归地定义态射的复合和态射对项的作用，或者等价地，按深度归纳定义。随后，按深度归纳，我们可以证明复合具有结合性和单位元，且态射对项的作用具有函子性。确立这些性质之后，便很容易定义包含函子对态射的作用，以及伴随的单位和余单位。

骨架函子 给定一个维数为 α 的签名 Σ 和一个序数 $\beta < \alpha$，我们可以将 Σ_β 的计算图与没有维数高于 β 的生成元的 Σ 的计算图等同起来。更准确地说，我们可以递归地定义一个骨架函子和一个自然变换

$$\mathrm{sk}^\Sigma_\beta : \mathrm{Comp}_{\Sigma_\beta} \hookrightarrow \mathrm{Comp}_\Sigma \qquad\qquad \kappa^\Sigma_\beta : \mathrm{sk}^\Sigma_\beta \,\mathrm{tr}^\Sigma_\beta \Rightarrow \mathrm{id}$$

满足以下条件

$$\mathrm{tr}^\Sigma_\beta \,\mathrm{sk}^\Sigma_\beta = \mathrm{id} \qquad\qquad \mathrm{tr}^\Sigma_\beta \,\kappa^\Sigma_\beta = \mathrm{id} = \kappa^\Sigma_\beta \,\mathrm{tr}^\Sigma_\beta,$$

或者等价地，骨架函子是截断函子的左伴随，其单位为恒等态射，余单位为 κ^Σ_β。特别地，由此可知骨架函子是全忠实的，且在对象上是单射。

给定一个 Σ_β-计算图 C 和一个序数 $\gamma \le \alpha$，我们可以递归定义

$$C^\gamma = \begin{cases} \mathrm{tr}^{\Sigma_\beta}_\gamma \, C, & \text{if } \gamma \le \beta \\ ((C^{\gamma'})_{\gamma'<\gamma}, (\emptyset, \{\})_{\dim i = \gamma}) & \text{if } \beta < \gamma \le \alpha \end{cases} \qquad \mathrm{sk}^\Sigma_\beta \, C = C^\alpha,$$

其中 {}表示从空集合出发的唯一函数。类似地，对于一个 Σ_β-计算图的态射 $\sigma : C \to D$，我们递归定义

$$\sigma^\gamma = \begin{cases} \mathrm{tr}^{\Sigma_\beta}_\gamma \, \sigma, & \text{if } \gamma \le \beta \\ ((\sigma^{\gamma'})_{\gamma'<\gamma}, (\{\})_{\dim i = \gamma}) & \text{if } \beta < \gamma \le \alpha \end{cases} \qquad \mathrm{sk}^\Sigma_\beta \, \sigma = \sigma^\alpha.$$

此外，对于一个 Σ-计算图 D，我们递归定义余单位在 D处的分量：

$$\kappa^\Sigma_{\beta,C,\gamma} = \begin{cases} \mathrm{id}_{C_\gamma}, & \text{if } \gamma \le \beta \\ ((\kappa^\Sigma_{\beta,C,\gamma'})_{\gamma'<\gamma}, (\{\})_{\dim i = \gamma}) & \text{if } \beta < \gamma \le \alpha \end{cases} \qquad \kappa^\Sigma_{\beta,C} = \kappa^\Sigma_{\beta,C,\alpha}.$$

余单位的自然性以及上述两个条件都很容易验证。

无界签名 我们假设类型范畴 $\mathcal{I}$ 是小的。由此可知，存在一个最小序数 α，它大于或等于每个类型 $i \in \mathcal{I}$的维数。$\mathcal{I}$-排序签名的类 $\mathsf{Sig}_\mathcal{I}$ 就是维数为 α的签名类 $\mathsf{Sig}_\mathcal{I}(\alpha)$，其计算图和项的定义同上。

注意，这一定义实际上并不依赖于 α，因为对于任意 $\alpha' \ge \alpha$，限制函数 $(-)^{\alpha'}_\alpha$ 都是双射，而针对$\Sigma \in \mathsf{Sig}_\mathcal{I}(\alpha')$ 的截断函子 $\mathsf{tr}^\Sigma_\alpha$ 是与项伴随相容的范畴同构。根据此定义，任意维数 β 的 $\mathcal{I}$-类型签名与 $\mathcal{I}_\beta$-类型签名相同。

3 作为预层的计算图

我们定义了一种广义的计算图式态射 $\sigma : C \to D$，其中 C 的每个生成元都映射到 D的任意一项。相比之下，通常考虑的计算图态射限制更多，映射的不是任意项，而是生成元 [6, 17] 。本节将确定一个计算图子范畴，其中的态射保留生成元。我们将推广先前的工作 [14], ，证明对于每个签名，该子范畴都是一个预层拓扑斯，并确定其定义站点。在本节余下部分，设Σ 是某个维数 α 的 $\mathcal{I}$-类型签名。

定义 2. Σ-计算图的态射 $\sigma : C \to D$ 当且仅当对每个 $\beta < \alpha$，$\mathrm{tr}^{\Sigma}_{\beta}(\sigma)$ 都是变量到变量的；并且对每个维数为 α 的类型 i 和生成元 $v \in V_i^C$， $\sigma_i(v)$ 都是生成元。

换言之，变量到变量态射 $\sigma : C \to D$ 由所有 $\beta < \alpha$ 对应的变量到变量态射 σ_β 以及对每个维数为 α 的类型 i 所对应的函数 $\sigma_i \colon V_i^C \to V_i^D$组成，并满足通常的余循环条件和粘合条件

$$\phi^D_\delta \circ \sigma_i = \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta}(\sigma_\beta) \circ \phi^C_\delta$$

对每个维数为 $\beta < \alpha$ 的类型 j 以及态射 $\delta \colon j \to i$都成立。变量到变量态射在复合下封闭，且包含恒等态射，因此构成一个子范畴，我们将其记为

$$\zeta_\Sigma : \mathrm{Comp}^{\mathrm{var}}_\Sigma \to \mathrm{Comp}_\Sigma$$

截断函子和骨架函子保持变量到变量态射这一类，因此它们限制为变量到变量态射子范畴之间的一个伴随。此外，对于每个维数至多为 α 的类型 i，将计算图 C 映射到其类型为 i 的生成元集合 V_i^C这一赋值可以扩展为一个函子

$$V_i^\bullet : \mathrm{Comp}^{\mathrm{var}}_\Sigma \to \mathrm{Set}$$

注 3. 容易看出，若两个态射的复合 $\sigma\tau$ 是变量到变量的，那么 τ 也必然如此。特别地，计算图之间的同构都是变量到变量的。由 $V_i^\bullet$ 的函子性可知，计算图之间的同构会在生成元集合之间诱导双射。反过来则可通过按签名维度归纳轻松证明。

容易看出，一般而言，计算图范畴既不完备也不余完备。例如，只要签名中至少包含一个函数符号，该范畴就没有终对象。相反，变量到变量态射构成的子范畴既完备又余完备，且包含函子保持余极限和连通极限。

命题 4. 计算图与变量到变量态射构成的范畴是余完备的，且包含 ζ_Σ 是余连续的。

证明. 设 $F\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 是一个由计算图和变量到变量态射组成的小图表。根据签名的维数 α 归纳，我们可以假设已为所有 $\beta < \alpha$ 构造了余极限余锥 $(\sigma_{\beta,\,d} : (Fd)_\beta \to C_\beta)_{d\in\mathcal{D}}$，并且截断函子严格保持这些余锥。于是，我们可以为维数为 α 的每个类型 i 构造生成元集合 $(\sigma_{i,\,d}\colon V_i^{Fd} \to V_i^C)_{d\in\mathcal{D}}$ 的余极限。

令 C 为由以下内容构成的计算图：对每个 $\beta < \alpha$，生成元的集合V_i^C对应于维数为 α 的 i，粘合函数 $\phi_\delta^C\colon V_i^C \to \mathsf{Term}_{\Sigma_\beta,j}(C_\beta)$ 对每个非恒等面映射 $\delta : j \to i$ 给出，并由这些态射上的余极限的泛性质定义

$$V_i^{Fd} \xrightarrow{\phi_\delta^{Fd}} \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}((Fd)_\beta) \xrightarrow{\mathrm{Term}(\sigma_{\beta,d})} \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(C_\beta).$$

其中 $\beta = \dim j$。态射 $\sigma_{\beta,d}$ 和函数 $\sigma_{i,d}$ 构成变量到变量态射的余锥 $(\sigma_d : Fd \to C)_{d\in\mathcal{D}}$，其在计算图范畴以及变量到变量态射子范畴中的泛性质很容易验证。此外，截断函子严格保持该余锥，由此完成归纳法。

□

命题 5. 计算图范畴及其变量到变量态射构成的范畴有一个终对象 $\mathbb{I}^\Sigma$。

证明。假设对每个 $\beta < \alpha$都给定了终端计算图 $\mathbb{I}^{\Sigma_\beta}$，且它们被截断函子严格保持。对于维数为 α的每个类型 i，我们可以构造极限

$$V_i{}^{\mathbb{I}^\Sigma} = \lim_{\substack{\dim j=\beta<\alpha \\ \delta:j\to i}} \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(\mathbb{I}^{\Sigma_\beta})$$

终端计算图 $\mathbb{I}^\Sigma$ 由计算图 $\mathbb{I}^{\Sigma_\beta}$ 以及每个维数为 α 的类型 i 对应的那些集合组成。其粘合函数是从该极限出发的显然投影。

□

终端计算图的存在意味着，受限项函子 $\mathsf{Term}_\Sigma^{\mathrm{var}} = \mathsf{Term}_\Sigma \circ \zeta_\Sigma$ 可以细化为一个以 $\mathsf{Term}_\Sigma(\mathbb{I}^\Sigma)$ 上的切片范畴为目标的函子。这个切片范畴等价于 $\mathsf{Term}_\Sigma(\mathbb{I}^\Sigma)$ 的元素范畴上的预层范畴；按照 [20] 的说法，我们将其对象称为多复形。

定义 6。多复形是终端计算图的一个项。

我们将多复形 p 的类型记作 $\mathsf{sort}(p)$。多复形构成一个范畴 Pplex_Σ，其中态射 $\delta\colon p \to p'$ 是满足 $\delta^*(p') = p$ 的面映射 $\mathsf{sort}(p) \to \mathsf{sort}(p')$。上一段所述的项函子的细化由以下函子给出

$$\mathcal{T}_\Sigma : \mathrm{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}} \times \mathrm{Pplex}_\Sigma^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$
$$\mathcal{T}_{\Sigma,p}C = \{t \in \mathrm{Term}_{\Sigma,\mathrm{sort}(p)}(C) \;:\; \mathrm{Term}_\Sigma(!)(t) = p\}$$

其中 ! 是到终端计算图的唯一变量到变量态射。

命题 7. 对每个多复形 p，函子 $\mathcal{T}_{\Sigma,p}$ 都是可表的。

证明。通过对 α 使用归纳法，我们可以首先假设，对于每个维数为 $\beta < \alpha$ 的多复形 p，$\mathcal{T}_{\Sigma_\beta,\, p}$ 都是可表的。如果 $|p|_\beta$ 是表示它的一个 Σ_β-计算图，那么对于每个 Σ-计算图 C，都存在一个自然同构

$$\mathcal{T}_{\Sigma,p}C = \mathcal{T}_{\Sigma_\beta,p}C_\beta \cong \mathrm{Comp}^{\mathrm{var}}_{\Sigma_\beta}(|p|_\beta, C_\beta) \cong \mathrm{Comp}^{\mathrm{var}}_{\Sigma}(\mathrm{sk}^\Sigma_\beta|p|_\beta, C),$$

因此，$\mathcal{T}_{\Sigma,p}$ 由 $|p| = \mathsf{sk}_\beta|p|_\beta$ 表示。还需证明，对于维数为 α 的多复形 p，$\mathcal{T}_{\Sigma,p}$ 也是可表的。我们将按照 p 的深度递归地构造这样的表示。

给定一个维数小于 α 或深度小于 p 的多复形 p'，我们用 $|p'|$ 表示计算图，它表示 $\mathcal{T}_{\Sigma,p'}$。我们还用 $t_{p'}$ 表示 $\mathcal{T}_{\Sigma,p'}(|p'|)$ 中诱导该表示的普遍项。最后，给定此类多复形之间的态射 $\delta\colon p'' \to p'$，我们用 $|\delta|\colon |p''| \to |p'|$ 表示与自然变换 $\mathcal{T}_\delta$ 相对应的态射。

首先，假设 p 是一个维数为 α、深度为 0 的多复形，并令 i 为其类型。则存在一个多复形族 $p_\delta \in \mathsf{Term}_{\Sigma,j}(\mathbb{I}^\Sigma)$，其指标为非恒等态射 $\delta\colon j \to i$，且满足通常的余循环条件，并且 $p = \mathsf{var}(p_\delta)$。于是余极限

$$D = \operatorname*{colim}_{\substack{\dim j < \alpha \\ \delta : j \to i}} |p_\delta|$$

根据命题 4 中关于余极限的描述，α 是一个没有维数为 α 的生成元的计算图。令 inc_δ 表示到该余极限的典范嵌入，并令 $|p|$ 表示由所有 D_β 组成的计算图；对于所有 $\beta < \alpha$，它都有唯一一个类型为 i、生成元为 $*$ 的计算图，其粘合函数为

$$\phi^{|p|}_\delta(*) = \mathcal{T}_{\Sigma,p_\delta}(\mathrm{inc}_\delta)(t_{p_\delta}),$$

且没有其他维数为 α 的生成元。另令 $t_p = \mathsf{var}(*)$。利用定义 D 的余极限的泛性质，以及 D 没有顶维生成元这一事实，不难看出，在 t_p 处求值诱导出一个自然同构

$$\mathrm{Comp}^{\mathrm{var}}_{\Sigma}(|p|, C) \cong \{v \in V^C_i \;:\; \phi^C_\delta(v) \in \mathcal{T}_{\Sigma,p_\delta}C \text{ for all } \delta\} \cong \mathcal{T}_pC$$

对于每个计算图 C。

最后，假设 p具有正深度，因此它具有如下形式：$p = f[\tau]$，其中 $f \in \Sigma_i$是一个函数符号，且 $\tau\colon \mathsf{Cptd}_\Sigma B_f \to \mathbb{I}^\Sigma$。于是，我们可以在项伴随下对 τ作转置，得到 $\tau^\dagger\colon B_f \to \mathsf{Term}_\Sigma(\mathbb{I}^\Sigma)$；该转置将 $b \in B_{f,\, j}$映射为 $\tau_j(b)$。根据归纳假设，我们可以构造余极限

$$|p| = \operatorname*{colim}_{b \in B_{f,j}} |\tau^\dagger|(b)$$

在 B_f 的元素范畴上。变量到变量态射 $\rho\colon |p| \to C$ 与满足边界映射相容的项族 $\hat{}\rho(b) \in \mathcal{T}_{\Sigma,\, \tau^\dagger(b)}C$ 自然双射；等价地，它们与满足 $\mathsf{Term}(!)\hat{}\rho = \tau^\dagger$ 的态射 $\hat{}\rho\colon B_f \to \mathsf{Term}_\Sigma(C)$ 自然双射。相应地，这些态射又与满足 $\tau = ! \circ \hat{}\rho^\dagger$ 的态射 $\hat{}\rho^\dagger\colon \mathsf{Cptd}_\Sigma B_f \to C$ 相对应；等价地，与项 $f[\hat{}\rho^\dagger] \in \mathcal{T}_pC$ 相对应。 □

推论 8. 项的限制函子 $\mathsf{Term}_{\Sigma}^{var}$ 保持连通余极限。

证明。对于每个类型 i，函子 $\mathsf{Term}_{\Sigma,\,i}^{\mathrm{var}}$ 是所有类型为 i 的多复形 p 所对应的可表对象$\mathcal{T}_{\Sigma,\,p}$ 的余积。由可表函子的连续性，以及集合的连通极限与任意余积可交换，即得所需结果。

□

推论 9。计算图及变量到变量态射构成的范畴是完备的，且包含 ζ_{Σ} 保留连通极限。

证明。我们已经证明 $\mathsf{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}$有一个终对象，因此只需证明它具有由包含到 Comp_{Σ}的函子保留的连通极限。为此，设 $F\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}$是一个由计算图及变量到变量态射构成的小型连通图表。按签名维度归纳，我们可以假设，对于每个 $\beta < \alpha$，极限锥 $(\sigma_{\beta,\,d}\colon C_{\beta} \to (Fd)_{\beta})_{d\in\mathcal{D}}$均已构造，且被包含函子严格保留。于是，对于维数为 α的每个类型 i，我们可以构造生成元集合的极限 $(\sigma_i\colon V_i^C \to V_i^{Fd})_{d\in\mathcal{D}}$。对于每个非恒等面映射 $\delta\colon j \to i$，由推论 8 可知，态射

$$\mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(\sigma_{\beta,d}) : \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(C_\beta) \to \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}((Fd)_\beta),$$

其中 $\beta =$ 维数 j，构成一个极限锥。我们令 $\phi_{\delta}^{C}\colon V_i^C \to \mathsf{Term}_{\Sigma_\beta,\,j}(C_\beta)$ 为由极限泛性质在这些函数上诱导的函数

$$V_i^C \xrightarrow{\sigma_{i,d}} V_i^{Fd} \xrightarrow{\phi_\delta^{Fd}} \mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}((Fd)_\beta).$$

令 C 为由以下部分构成的计算图：对所有 $\beta < \alpha$，集合 V_i^C对应每个维数为 α 的类型i，以及上述粘合函数。态射$\sigma_{\beta,\,d}$ 和函数 $\sigma_{i,\,d}$ 构成一个锥 $(\sigma\colon C \to Fd)_{d\in\mathcal{D}}$，其在变量到变量态射子范畴中的泛性质可立即验证。由于 $\mathsf{Term}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}$ 保持连通极限，因此它在计算图及所有态射范畴中的泛性质也很容易得出。最后，这个极限锥被截断函子严格保持，从而完成归纳法。

□

至此，我们已具备证明 $\mathsf{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}$ 是预层拓扑斯所需的全部要素。我们将终端计算图$\mathbb{I}^{\Sigma}$的一个生成元定义为一个复形。复形构成 $\mathsf{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}$ 的直接子范畴 Plex_{Σ}，其中

$$\mathrm{Plex}_{\Sigma}(p,p') = \mathrm{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}(|p|,|p'|) \cong \mathcal{T}_{\Sigma,p}(|p'|)$$

以及 $\dim p = \dim(\mathrm{sort}(p))$。复形在族意义上表示将一个计算图映射到其生成元的函子，即存在自然同构

$$V_i^C \cong \coprod_{\substack{p\in\mathrm{Plex}_\Sigma \\ \mathrm{sort}(p)=i}} \mathrm{Comp}_{\Sigma}^{\mathrm{var}}(|p|, C).$$

由命题 4 中变量到变量态射的余极限构造可轻易看出，复形所表示的函子是余连续的。此外，根据注 3，它们共同反映同构。因此，以下定理是 [14, 命题 5.14] 的直接推论。

定理 10. 神经函子 $N : \mathbf{Comp}_\Sigma^{var} \to [\mathbf{Plex}_\Sigma^{op}, \mathbf{Set}]$ 定义如下

$$(NC)(p) = \mathrm{Comp}_\Sigma^{var}(|p|, C) \cong \{v \in V^C_{\mathrm{sort}(p)} \ : \ \mathrm{Term}_\Sigma(!)(\mathrm{var}\, v) = p\},$$

是一个范畴等价。

4 签名上的代数

本节中，我们介绍 $\mathcal{I}$-类型签名的语义。我们将 Σ 的代数定义为项单子 $\mathbf{M}_\Sigma$ 的代数，并用更简单的方式描述它们：它们是配备了函数的预层，对应于 Σ 的每个函数符号，并满足由边界项所规定的某些边界公理。根据定义，计算图产生自由代数；我们将证明，计算图的广义态射恰好就是它们所生成的代数之间的态射。与之前一样，本节中，Σ 表示某个维数为 α 的 $\mathcal{I}$-类型签名。

定义 11. Σ-代数是由项伴随 $\mathbf{Cptd}_\Sigma \dashv \mathbf{Term}_\Sigma$ 所诱导的单子 $(\mathbf{M}_\Sigma, \eta_\Sigma, \mu_\Sigma)$ 的代数。我们将其范畴记作 $\mathbf{Alg}_\Sigma = \mathbf{Alg}_{\mathbf{M}_\Sigma}$。

因此，代数 $\mathbb{X} = (X, u_\mathbb{X})$ 由定义在 $\mathcal{I}_\alpha$ 上的载体预层 X，以及一个态射 $u^\mathbb{X} : \mathbf{M}_\Sigma(X) \to X$（即 $\mathbf{M}_\Sigma$-作用）构成，并满足以下单位公理和结合公理

$$u^\mathbb{X} \circ \eta_\Sigma = \mathrm{id} \qquad\qquad u^\mathbb{X} \circ \mu_\Sigma = u^\mathbb{X} \circ \mathrm{M}_\Sigma(u^\mathbb{X}).$$

单位公理规定了该作用在生成元上的取值：

$$u^\mathbb{X}(\mathrm{var}\, x) = x$$

对每个 $i \in \mathcal{I}_\alpha$ 和 $x \in X_i$ 都成立。另一方面，结合公理为复合项给出了一个递归公式：给定一个复合项 $t = f[\tau]$，我们可以在项伴随下将 τ 转置为 $\tau^\dagger$：$B_f \to \mathbf{M}_\Sigma(X)$。根据定义，$\tau = \varepsilon_{\Sigma,\ X} \circ \mathbf{Cptd}_\Sigma(\tau^\dagger)$，因此

$$u^\mathbb{X}(f[\tau]) = u^\mathbb{X}\mu_\Sigma(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(\tau^\dagger)]) = u^\mathbb{X}(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(u^\mathbb{X}\tau^\dagger)]). \tag{1}$$

我们将维数为 $\beta \leq \alpha$、属于 $\mathbb{X}$ 的函数符号 $f \in \Sigma_i$ 的解释定义为函数

$$f^\mathbb{X} : [\mathcal{I}_\beta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}](B_f, \mathrm{tr}_\beta\, X) \to X_i$$

在态射 $\sigma : B_f \to \mathsf{tr}_\beta X$ 上定义为

$$f^{\mathbb{X}}(\sigma) = u^{\mathbb{X}}(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(\sigma)]).$$

递归公式表明，代数 $\mathbb{X}$ 由其载体预层和函数符号的解释唯一确定。此外，只要满足某个边界条件，这些解释函数就可以自由选取。

命题 12. 设 X 是 $\mathcal{I}_\alpha$上的一个预层。作用 $u : \mathsf{M}_\Sigma(X) \to X$ 与以下各族之间存在双射:

- 作用 $u_\beta : \mathsf{M}^{\Sigma_\beta}(\mathsf{tr}_\beta X) \to \mathsf{tr}_\beta X$，其中 $\beta < \alpha$
- 函数 $\hat{f} : [\mathcal{I}^{op}, \text{集合}](B_f, X) \to X_i$，其中 i维数为 α且 $f \in \Sigma_i$,

满足通常的余循环条件，以及以下边界条件

$$\delta^* \hat{f} = u_\beta(\mathrm{M}_{\Sigma_\beta}(-)(t_{f,\delta}))$$

对于非恒等面映射 $\delta : j \to i$，其中 $\beta = \mathsf{dim}\, j$。

ˆ 证明。如上所述，态射 u_β 和函数 f 唯一确定 u。反过来，给定这样的态射和函数，我们可以递归地构造这样的 u。首先，我们定义 u 在维数为 $\beta < \alpha$ 的项上与 u_β一致，并将其在维数为 α 的生成元 $x \in X_i$ 上定义为

$$u(\mathrm{var}\, x) = x.$$

根据余循环条件以及每个 u_β 都满足单位公理这一事实，这种赋值与边界映射相容。然后，我们通过递归公式 (1) 将 u 定义在维数为 α的复合项 $t = f[\tau]$上:

$$u(f[\tau]) = \hat{f}(u \circ \tau^\dagger).$$

根据边界条件，这种赋值与面映射相容，因此它定义了一个态射 u: $\mathsf{M}_\Sigma(X) \to X$。

该态射对维数小于 α 的项满足结合公理，并对所有项满足单位公理。单位公理还蕴含维数为 α 的生成元满足结合公理，因此令 $t = f[\rho]$ 为 Cptd_Σ $\mathsf{M}_\Sigma(X)$ 中一个维数为 α 的复合项。按深度归纳，我们可以假设结合公理在 ρ 的转置 $\rho^\dagger : B_f \to \mathsf{M}_\Sigma\mathsf{M}_\Sigma X$ 的像中成立，并计算得

$$\begin{aligned}
u \circ \mathrm{M}_\Sigma(u)(t) &= u(f[(\mathrm{Cptd}_\Sigma\, u) \circ \rho]) \\
&= \hat{f}(u \circ ((\mathrm{Cptd}_\Sigma\, u) \circ \rho)^\dagger) \\
&= \hat{f}(u \circ \mathrm{M}_\Sigma(u) \circ \rho^\dagger) \\
&= \hat{f}(u \circ \mu_\Sigma \circ \rho^\dagger) \\
&= \hat{f}(u \circ (\varepsilon_\Sigma \rho)^\dagger) \\
&= u(f[\varepsilon_\Sigma \rho]) \\
&= u \circ \mu_\Sigma(t)
\end{aligned}$$

因此，所有项都满足结合公理，而 $\mathbb{X} = (X, u)$ 是一个代数。

接下来还需证明，这个代数能够导出我们最初给定的数据。余循环条件意味着，对于每个 $\beta < \alpha$，都有 $\mathsf{tr}_\beta\, u = u$。因此，设$f \in \Sigma_i$ 的维数为 α，且 $\tau\colon B_f \to X$。根据转置的定义和单位公理，我们有

$$u \circ \mathrm{Cptd}_\Sigma(\tau)^\dagger = u \circ \mathrm{M}_\Sigma(\tau) \circ \eta_\Sigma = u \circ \eta_\Sigma \circ \tau = \tau$$

因此

$$f^{\mathbb{X}}(\tau) = u(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(\tau)]) = \hat{f}(u \circ \mathrm{Cptd}_\Sigma(\tau)^\dagger) = \hat{f}(\tau).$$

我们看到，f 在这个代数中的解释与函数 $\hat{f}$一致，从而证明了该命题中的双射。□

代数 $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 之间的代数态射是满足以下条件的态射 $\sigma\colon X \to Y$：

$$u^{\mathbb{Y}} \circ (\mathrm{M}_\Sigma\, \sigma) = \sigma \circ u^{\mathbb{X}}.$$

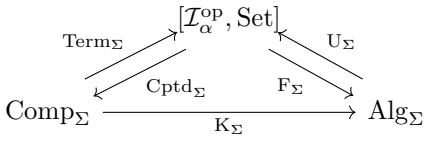
这个方程很容易推出，代数态射必须保持解释函数

$$\sigma \circ f^{\mathbb{X}} = f^{\mathbb{Y}}(\mathrm{tr}_\beta\, \sigma \circ -) \tag{2}$$

对于每个维数为 $\beta \leq \alpha$的 $f \in \Sigma_i$，递归公式 (1) 立即表明，反过来结论也成立。

命题 13. 代数态射 $\sigma\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是它们的底层预层之间的态射 $\sigma\colon X \to Y$，并且对 Σ的每个函数符号都满足方程 (2)。

在本节余下部分，我们将研究计算图与代数之间的联系。根据定义，代数范畴配备了一个伴随 $\mathsf{F}_\Sigma \dashv \mathsf{U}_\Sigma$，其对应于 $\mathcal{I}_\alpha$ 上的预层范畴；此外还有一个函子 K_Σ，它从计算图范畴出发，使得下图中的三角形在两个方向上都交换。



遗忘函子 U_Σ 将一个代数映射到其载体预层，而比较函子 K_Σ 将一个计算图 C 映射到其项预层 $\mathsf{Term}_\Sigma(C)$，并赋予其作用 $u^C = \mathsf{Term}_\Sigma(\varepsilon_{\Sigma,\, C})$。从现在起，我们将 K_Σ 视为子范畴包含，并在记号中省略它。这种记号上的滥用部分地由命题 15 证明是合理的。

引理 14. 若态射 $\sigma, \tau\colon C \to \mathbb{X}$ 从一个计算图到一个代数，并且在 C 的所有生成元上取值相同，则它们相等。

证明. 按签名的维数 α 归纳，我们可以假设对于所有 $\beta < \alpha$ 都有 $\mathsf{tr}_\beta\,\sigma = \mathsf{tr}_\beta\,\tau$，因此只需证明它们在维数为 α 的复合项上也取值相同。给定一个项 $t = f[\rho]$，我们还可以通过结构归纳假设这些态射在转置 $\rho^\dagger$ 的像中的项上也取值相同。由此可知

$$\begin{aligned}\sigma(f[\rho]) &= \sigma \circ u^C(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma\,\rho^\dagger]) \\ &= u^{\mathbb{X}} \circ \mathrm{M}_\Sigma(\sigma)(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma\,\rho^\dagger]) \\ &= u^{\mathbb{X}}(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(\sigma\rho^\dagger)]) \\ &= u^{\mathbb{X}}(f[\mathrm{Cptd}_\Sigma(\sigma'\rho^\dagger)]) \\ &= \cdots = \tau(f[\rho]),\end{aligned}$$

因此，这两个态射相等。 □

命题 15. 函子 K_Σ 是全忠实的。

证明. 复合 $\mathsf{Term}_\Sigma = \mathsf{U}_\Sigma\mathsf{K}_\Sigma$ 显然是忠实的，因此 K_Σ也必然是忠实的。为证明它是满的，设 C, D 为计算图，且 $\sigma : \mathsf{K}_\Sigma\,C \to \mathsf{K}_\Sigma\,D$ 是一个代数态射。根据维数归纳法，我们可以假设，对于每个 $\beta < \alpha$，都存在唯一的计算图式态射 $\rho_\beta : C_\beta \to D_\beta$，使得

$$\mathrm{K}_{\Sigma_\beta}(\rho_\beta) = \mathrm{tr}_\beta\,\sigma. \tag{3}$$

这些态射的唯一性意味着通常的余循环条件均成立。设 $\rho : C \to D$ 由所有 $\beta < \alpha$ 对应的 ρ_β 以及函数组成

$$\rho_i = \sigma_i \circ \mathrm{var} : V_i^C \to \mathrm{Term}_{\Sigma,i}(D)$$

对于每个维数为 α的类型 i。利用等式 (3)，容易看出 ρ 是一个定义良好的计算图式态射。代数态射 σ 和 $\mathsf{K}_\Sigma(\rho)$在生成元上的取值相同，因此根据引理 14，它们必定相等。 □

命题 16. 从计算图到代数 $\mathbb{X}$ 的态射 $\sigma : C \to \mathbb{X}$ 与以下对象一一对应：

- 对每个 $\beta < \alpha$，都有态射 $\rho_\beta : \mathsf{tr}_\beta\,C \to \mathsf{tr}_\beta\,\mathbb{X}$，
- 对维数为 α的每个类型 i，都有函数 $\rho_i : V_i^C \to X_i$，

满足通常的余循环条件以及边界条件

$$\delta^*\rho_i = \rho_{\beta,j}\phi_\delta^C$$

对于非恒等面映射 $\delta : j \to i$，其中 $\beta = \mathsf{dim}\,j$。

证明。态射 σ 通过令 $\rho_\beta = \mathsf{tr}_\beta\,\sigma$ 对 $\beta < \alpha$ 成立，并令 $\rho_i = \sigma_i \circ \mathsf{var}$ 对维数为 α的 i 成立，从而导出此类数据。此外，根据引理 14，此赋值是单射，因此只需根据这些数据构造一个态射 $\sigma : C \to \mathbb{X}$。

对于维数为 $\beta < \alpha$的项，我们令 σ 与 ρ_β一致；对于维数为 α、类型为 i 的生成元，我们令 σ 与 ρ_i一致。根据余循环条件和边界条件，此赋值与面映射相容。给定一个类型为 i的复合项 $t = f[\tau]$，我们可以依据深度递归地假设，σ已在转置 $\tau^\dagger$ 的像上定义，并令

$$\sigma(f[\tau]) = f^{\mathbb{X}}(\sigma\tau^\dagger).$$

给定一个非恒等面映射 $\delta\colon j \to i$，令 $\beta = \dim j$，并计算得

$$\begin{aligned}
\delta^*\sigma(f[\tau]) &= \delta^* f^{\mathbb{X}}(\sigma\tau^\dagger) \\
&= u^{\mathbb{X}} \circ (\mathrm{M}_\sigma\, \sigma) \circ (\mathrm{M}_\Sigma\, \tau^\dagger)(t_{f,\delta}) \\
&= \sigma \circ \mathrm{Term}_\Sigma(\varepsilon_{\Sigma,C}) \circ (\mathrm{M}_\Sigma\, \tau^\dagger)(t_{f,\delta}) \\
&= \sigma \circ \mathrm{Term}_\Sigma(\tau)(t_{f,\delta}) \\
&= \sigma(\delta^*(f[\tau])),
\end{aligned}$$

因此，这一赋值定义了一个预层态射 $\sigma : \mathsf{Term}_\Sigma\, C \to X$，它限制为态射 ρ_β 和函数 ρ_i。接下来只需证明 σ 是一个代数态射。根据命题 13，只需证明它保持 Σ中每个函数符号的解释。对于维数为 $\beta < \alpha$的函数符号，情况确实如此，因为 ρ_β 是一个代数态射。另一方面，设 $f \in \Sigma_i$ 的维数为 α，且 $\hat{}\tau\colon B_f \to \mathsf{Term}_\Sigma(C)$ 是一个态射。那么

$$\begin{aligned}
\sigma(f^C(\hat{\tau})) &= \sigma(f[\varepsilon_{\Sigma,C}\, \mathrm{Cptd}_\Sigma(\hat{\tau})]) \\
&= f^{\mathbb{X}}(\sigma(\varepsilon_{\Sigma,C}\, \mathrm{Cptd}_\Sigma(\hat{\tau}))^\dagger) \\
&= f^{\mathbb{X}}(\sigma\hat{\tau}^{\dagger\dagger}) = f^{\mathbb{X}}(\sigma\hat{\tau})
\end{aligned}$$

因此，σ 是一个代数态射。 □

推论 17. 从一个没有维数大于等于 β 的生成元的计算图到任意代数 $\mathbb{X}$ 的态射 $\sigma : C \to \mathbb{X}$，与满足通常余循环条件的每个 $\gamma < \beta$ 对应的一族态射 $\sigma_\gamma : \mathsf{tr}^\Sigma_\gamma\, C \to \mathsf{tr}^\Sigma_\gamma\, \mathbb{X}$ 之间存在双射。

5 计算图的余纤维性

计算图最近已被证明有助于研究 ω-范畴的同伦论。球面上的自由 ω-范畴到圆盘上的自由ω-范畴的包含，在由 ω-范畴及其严格态射构成的范畴中余纤维地生成一个弱分解系统；对于该系统，计算图是余纤维的。此外，计算图与 ω-范畴之间存在一个伴随 [6]，它生成此分解系统的普适余纤维替换余单子 [17]。对于严格的 ω-范畴，这个弱分解系统是某个模型结构的一部分 [25], ，并且已证明，反过来，每个余纤维的严格 ω-范畴都是由计算图自由生成的 [29]。

对于我们的 $\mathcal{I}$-类型理论，关于计算图的大多数结果都可原样成立。命题 16 描述了由计算图自由生成的代数的一个泛性质，类似于自由 ω-范畴的泛性质 [33], ; 利用这一性质可以构造自由代数函子的右伴随

$$\mathrm{Free}_\Sigma : \mathrm{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}} \xhookrightarrow{\zeta_\Sigma} \mathrm{Comp}_\Sigma \xhookrightarrow{\mathrm{K}_\Sigma} \mathrm{Alg}_\Sigma\,.$$

我们将证明，这个伴随诱导的余单子是某个弱分解系统的普适余纤维替换，并且由计算图自由生成的代数就是余纤维对象。

为引入记号，固定一个维数为 α 的 $\mathcal{I}$ 类型签名 Σ。类型 $i \in \mathcal{I}_\alpha$ 上的可表计算胞腔是计算图

$$\mathbb{D}^i_\Sigma = \mathrm{Cptd}_\Sigma(\mathcal{I}_\alpha(-, i)).$$

它的边界是通过移除其最高维生成元得到的计算图，或者等价地，通过

$$\partial\mathbb{D}^i_\Sigma = \mathrm{Cptd}_\Sigma\left(\operatorname*{colim}_{\delta : j \to i} \mathcal{I}_\alpha(-, j)\right)$$

其中余极限取遍所有非恒等态射 $\delta : j \to i$。边界包含

$$\iota_{\Sigma,i} : \partial\mathbb{D}^i_\Sigma \hookrightarrow \mathbb{D}^i_\Sigma$$

是由预层态射诱导的计算图式态射，其在 δ 处的分量为 $\delta_* = (\delta \circ -)$。下面的命题是米田引理和项伴随的直接推论。

命题 18. 计算图 $\mathbb{D}^i$ 表示类型 i 的项函子 $\mathsf{Term}_{\Sigma,i}$。其边界 $\partial\mathbb{D}^i_\Sigma$ 表示类型 i 的类型函子

$$\mathrm{Type}_{\Sigma,i} = \lim_{\delta : j \to i} \mathrm{Term}_{\Sigma,j}$$

而边界包含 $\iota_{\Sigma,\ i}$ 诱导出自然变换，将项 t 映射为项族 $(\delta^* t)$。

改用伴随 $\mathsf{F}_\Sigma \dashv \mathsf{U}_\Sigma$，不难看出，将代数 $\mathbb{X}$ 映射到集合 X_i 的函子由 $\mathbb{D}^i_\Sigma$ 上的自由代数表示，而由 $\partial\mathbb{D}^i_\Sigma$ 上的自由代数表示的函子也有类似的描述。

根据推论 35，边界包含 $I = \{\iota_{\Sigma,i} : \quad i \in \mathcal{I}_\alpha\}$ 余纤维生成代数范畴中的一个弱分解系统（$\mathcal{L}$，$\mathcal{R}$），其依据是小对象论证。我们将 $\mathcal{L}$ 的态射称为余纤维化，并将 $\mathcal{R}$ 的态射称为平凡纤维化。当唯一态射 $\emptyset \to \mathbb{X}$ 从初始代数出发是一个余纤维化时，我们称代数 $\mathbb{X}$ 为余纤维。我们还将态射 $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 称为余纤维化替换，当它是一个平凡纤维化且 $\mathbb{X}$ 为余纤维时。

命题 19。计算图上的自由代数是余纤维。

证明。我们将证明，对于每个计算图 C，唯一态射 $\emptyset \to C$ 是代数范畴中的边界包含之余积的推出所构成的超限复合。余纤维化在这些运算下封闭是一个标准结果 [23]。为此，我们将引入骨架函子的一个变体。

令 $\mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta} C$ 为通过移除 C 中维数至少为 β 的所有生成元而得到的计算图，其中每个 $\beta \leq \alpha + 1$

$$\mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta} C = \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\beta}((\mathrm{tr}^{\Sigma}_{\gamma} C)_{\gamma<\beta}, (\emptyset, \{\})_{\dim j=\beta}).$$

生成元集合的包含会诱导出变量到变量态射

$$\kappa^{\beta}_{\gamma} : \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\gamma} C \to \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta}$$

对于每个满足显然的余循环条件的 $\gamma \leq \beta$。这些数据定义了一个变量到变量态射链；根据命题 4，该链是余连续的，且其超限复合为 $\emptyset \to C$。剩下要证明的是，当把该链视为代数链时，它仍然是余连续的，并且对于每个 $\beta \leq \alpha$，态射 $\kappa^{\beta+1}_{\beta}$ 是边界包含之余积的推出。

对于前者，设 $\beta \leq \alpha$ 是一个极限序数，并设

$$\tau^{\gamma} : \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\gamma} C \to \mathbb{X}$$

是这个链限制到 β 后的余锥。那么这些态射

$$\tau_{\gamma} = \mathrm{tr}^{\Sigma}_{\gamma}(\tau^{\gamma+1}) : \mathrm{tr}^{\Sigma}_{\gamma} \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta} C \to \mathbb{X}$$

满足余循环条件，并由推论 17 得到一个态射 $\tau : \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta} C \to \mathbb{X}$。由引理 14 可立即得出，$\tau$ 是唯一一个满足以下条件的态射：对于每个 $\gamma < \beta$，都有 $\tau^{\gamma} = \tau\kappa^{\beta}_{\gamma}$。因此，当把这个链视为代数链时，它在 中是余连续的。

对于后者，给定一个序数 $\beta \leq \alpha$，我们可以构造如下交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{\dim i=\alpha \\ v\in V_i^C}} \partial\mathbb{D}^i_{\Sigma} & \xrightarrow{(\iota_{\Sigma,i})} & \coprod_{\substack{\dim i=\alpha \\ v\in V_i^C}} \mathbb{D}^i_{\Sigma} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial\beta} C & \xrightarrow[\kappa^{\beta+1}_{\beta}]{} & \mathrm{sk}^{\Sigma}_{\partial(\beta+1)} C \end{array}$$

其中，ψ 在命题 18 的双射下对 C 中维数为 β 的生成元进行分类，而 ϕ 则对它们的边界类型进行分类。左伴随函子 F_{Σ}保余极限，而 Cptd_{Σ} 反映余极限，因此该方形的两个余积也是代数的余积。利用底行计算图的推论 17 和命题 16，我们可知该方形是代数的一个推出。

□

在上面命题的证明中，我们将每个计算图描述为由边界包含的余积的推出构成的超限复合。这个描述使我们能够定义一个右伴随

$$\mathrm{Und}_\Sigma : \mathrm{Alg}_\Sigma \to \mathrm{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}}$$

到自由函子 Free_Σ，它将计算图映射为其生成的代数。这个伴随定义了代数范畴上的一个余单子，其底层带基点自函子记作

$$\begin{aligned} \mathrm{Cof}_\Sigma &: \mathrm{Alg}_\Sigma \to \mathrm{Alg}_\Sigma \\ r_\Sigma &: \mathrm{Cof}_\Sigma \Rightarrow \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Und_Σ 的定义是关于签名维数 α 的递归定义，因此假设对于所有 $\beta < \alpha$，伴随 $\mathsf{Free}_{\Sigma_\beta} \dashv \mathsf{Und}^{\Sigma_\beta}$ 均已定义，且它们与截断函子相容。

代数 $\mathbb{X}$ 的底层计算图 $\mathsf{Und}_\Sigma\,\mathbb{X}$ 由计算图 $\mathsf{Und}^{\Sigma_\beta}\mathsf{tr}_\beta^\Sigma\,\mathbb{X}$（其中 $\beta < \alpha$）以及由下列拉回方块定义的生成元集合和粘合函数组成

$$\begin{array}{ccccc} V_i^{\mathrm{Und}_\Sigma\,\mathbb{X}} & \dashrightarrow & & & X_i \\ \downarrow{\scriptstyle (\phi_\delta^{\mathrm{Und}_\Sigma\,\mathbb{X}})} & & & & \downarrow{\scriptstyle (\delta^*)} \\ \lim\limits_{\substack{\dim j=\beta<\alpha \\ \delta:j\to i}} (\mathrm{Cof}_{\Sigma_\beta}\,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma\,\mathbb{X})_j & \xrightarrow[(r_{\Sigma_\beta})]{} & \lim\limits_{\substack{\dim j=\beta<\alpha \\ \delta:j\to i}} (\mathrm{tr}_\beta^\Sigma\,\mathbb{X})_j & = & \lim\limits_{\substack{\dim j=\beta<\alpha \\ \delta:j\to i}} X_j. \end{array}$$

对每个维数为 α 的类型 i 均如此。由态射 $\sigma\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 诱导的变量到变量态射 $\mathsf{Und}_\Sigma\,\sigma$ 同样由态射 $\mathsf{Und}^{\Sigma_\beta}\mathsf{tr}_\beta^\Sigma\,\sigma$（其中 $\beta < \alpha$）以及维数为 α 的类型 i 对应的函数 $V_{\mathrm{Und}_i\ \Sigma\,\mathbb{X}} \to V^{\mathrm{Und}_i\ \ \Sigma\,\mathbb{Y}}$ 组成，其分量为

$$(\mathrm{Und}_\Sigma\,\sigma)_i((t_\delta), x) = (((\mathrm{Cof}_{\Sigma_\beta}\,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma\,\sigma)(t_\delta)), \sigma(x)).$$

此赋值具有函子性，并且显然与截断函子交换。伴随 $r_{\Sigma,\mathbb{X}} : \mathsf{Cof}_\Sigma\,\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 的余单位是命题 16 中双射下与态射 $r_{\Sigma_\beta,\mathrm{tr}_\beta^\Sigma\,\mathbb{X}}$ 及投影函数 $V_{\mathrm{Und}_i\ \ \Sigma\,\mathbb{X}} \to X_i$ 相对应的态射。

命题20. 函子 Und_Σ 是 Free_Σ 的右伴随。

证明。变量到变量态射 $\sigma\colon C \to \mathsf{Und}_\Sigma\,\mathbb{X}$ 由变量到变量态射 $\sigma_\beta\colon C_\beta \to \mathsf{Und}^{\Sigma_\beta}\mathsf{tr}_\beta^\Sigma\,\mathbb{X}$ 构成，它们满足通常的余循环条件，且有一对函数

$$\begin{aligned} \sigma_{i,1} &: V_i^C \to \lim_{\substack{\dim j=\beta<\alpha \\ \delta:j\to i}} (\mathrm{tr}_{\Sigma_\beta}\,\mathbb{X})_j \\ \sigma_{i,2} &: V_i^C \to X_i \end{aligned}$$

满足粘合条件，并且 $(\sigma_{i,1},\sigma_{i,2})$ 定义了一个到拉回 $V_{\mathrm{Und}_i}{}^{\Sigma\,\mathbb{X}}$ 的函数。粘合条件等价于

$$\sigma_{i,1} = (\mathrm{Term}_{\Sigma_\beta}(\sigma_\beta) \circ \phi^C_\delta)_{\delta:j\to i},$$

在这种情况下，另一个条件就变为

$$\delta^*\sigma_{i,2} = r_{\Sigma_\beta}\,\mathrm{Term}_{\Sigma_\beta,j}(\sigma_\beta)\phi^C_\delta$$

对于非恒等面映射 $\delta\colon\ j\to i$，其中 $\beta = \dim j$。根据归纳假设，态射 σ_β 与满足相同余循环条件的态射 $\sigma^\dagger_\beta\colon\ C_\beta \to \mathbf{tr}^\Sigma_\beta\,\mathbb{X}$ 一一对应。在此双射下，上述条件变为

$$\delta^*\sigma_{i,2} = \sigma^\dagger_{\beta,j}\phi^C_\delta,$$

因此，态射 $\sigma^\dagger_\beta$ 和函数 $\sigma_{i,\ 2}$ 唯一确定一个态射$\sigma^\dagger\colon\ C\to\mathbb{X}$，这由命题 16 得出。利用引理 14，容易看出该双射由 $\sigma^\dagger = r_{\Sigma,\ \mathbb{X}}\circ\mathbf{Free}_\Sigma\,\sigma$ 给出。因此，该双射是自然的，且r_Σ 是伴随的余单位。

□

回顾一下，平凡纤维化是由边界包含生成的因子分解系统右类中的态射，因此它们是代数态射 $\sigma\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$，使得每个形如以下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathbb{D}^i_\Sigma & \xrightarrow{T} & \mathbb{X} \\ \big\downarrow & \overset{v(i,T,t)}{\nearrow} & \big\downarrow\sigma \\ \mathbb{D}^i_\Sigma & \xrightarrow{t} & \mathbb{Y} \end{array}$$

存在对角提升 $v(i,T,t)$。代数平凡纤维化则是带有为每个此类方块选择提升的平凡纤维化。具有共同目标 $\mathbb{Y}$ 的代数平凡纤维化之间的态射，是切片范畴 $\mathbf{Alg}_\Sigma\,/\mathbb{Y}$ 中保持这些提升的态射。

余单位 $r_{\Sigma,\ \mathbb{X}}\colon\mathbf{Cof}_\Sigma\,\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ 可以赋予如下代数平凡纤维化结构：形如以下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathbb{D}^i_\Sigma & \xrightarrow{T} & \mathrm{Cof}_\Sigma\,\mathbb{X} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow r_{\Sigma,\mathbb{X}} \\ \mathbb{D}^i_\Sigma & \xrightarrow{t} & \mathbb{X} \end{array}$$

相当于选择 $\mathbf{Cof}_\Sigma\,\mathbb{X}$ 中的相容项 $T = (t_\delta)^{\delta:j\to i}$，以及满足相容条件的一个元素 $t\in X_i$

$$r_{\Sigma,\mathbb{X}}(t_\delta) = \delta^* t,$$

或者等价地说，是类型为 i 的 $\mathbf{Cof}_\Sigma\,\mathbb{X}$ 的生成元 (T,t)。这个方块的一个提升由与项相对应的态射给出

$$v(i,T,t) = \mathrm{var}(T,t).$$

不难看出，$(r_{\Sigma,\ \mathbb{X}}, v)$ 是以 $\mathbb{X}$ 为目标的代数平凡纤维化中的初始对象。给定任意代数平凡纤维化 $(\sigma:\ \mathbb{Y} \to \mathbb{X}, v')$，我们可以递归地定义一个态射 $\tau : \mathsf{Cof}_{\Sigma}\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 到代数平凡纤维化：对每个 $\beta \leq \alpha$，令态射 $\tau_\beta : \mathsf{tr}^{\Sigma}_{\beta}\mathsf{Cof}_{\Sigma}\mathbb{X} \to \mathsf{tr}^{\Sigma}_{\beta}\mathbb{Y}$ 根据命题 16 的双射对应于态射 τ_γ （其中 $\gamma < \beta$ ）以及函数 $\tau_i :\ V_{i}^{\mathrm{Und}_{\Sigma}\mathbb{X}} \to Y_i$，其定义如下

$$\tau_i((t_\delta)_{\delta:j\to i}, t) = v'(i, (\tau_\beta(t_\delta))_{\delta:j\to i}, t).$$

态射 $\tau = \tau_\alpha : \mathsf{Cof}_{\Sigma}\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是代数平凡纤维化的态射，因为 $r_{\Sigma,\ \mathbb{X}} = \sigma\tau$ 并且

$$\tau \circ v(i, T, t) = v'(i, \tau \circ T, t)$$

对于上述每个交换方块都成立。此外，根据引理 14，τ 是唯一的。将这一观察与命题 2.6]中的识别准则 [17, 结合起来，可得以下推论。

推论 21. 带基点自函子 $(\mathsf{Cof}_{\Sigma}, r_{\Sigma})$ 是由边界包含余纤维生成的弱分解系统的通用余纤维余单子的底层自函子。

由推论 32 所示，存在一个取值于自由代数的余纤维替换函子，且计算图范畴具有柯西完备性。利用这两点，我们可以用证明严格 ω-范畴 [29]时所用的同一论证，证明命题 19 的逆命题。

推论 22. 余纤维代数是由计算图生成的自由代数。

证明。设 $\mathbb{X}$ a 是一个余纤维代数。根据推论 21，存在一个计算图C 以及一个平凡纤维化 $r:\ C \to \mathbb{X}$。由于 $\mathbb{X}$ 是余纤维的，映射 r 存在一个节 $s:\ \mathbb{X} \to C$。作为一个节，端同态 $sr:\ C \to C$ 是幂等的，因此根据命题 19，存在一个计算图 D 以及态射ι: $D \to C$ 和 $\pi:\ C \to D$，使得

$$\pi\iota = \mathrm{id} \qquad\qquad \iota\pi = sr$$

由此可得，$r\iota:\ D \to \mathbb{X}$ 是一个同构，其逆为 $\pi s:\ \mathbb{X} \to D$，因此 $\mathbb{X}$ 是由一个计算图自由生成的。 □

6 高阶范畴

过去几十年来，人们提出了许多高阶范畴结构的定义，其中不少可以描述为某个形状范畴上的预层 $\mathcal{I}$，它们要么配备了额外运算（代数模型），要么满足某些条件（几何模型）。在某些情况下，后者通常可以替换为前者 [11, 30], ，而后者在我们的框架中更容易描述。本节将说明 Le- inster 的弱 ω范畴 [26], 和代数半单纯 Kan 复形（一种

∞-群胚模型）是某些签名的代数。我们还将提出一种完全弱多重范畴的签名，其灵感来自ω-范畴的签名。鉴于 opetopic 高阶范畴 [5] 是 opetopes 直接范畴上的预层 [13], ，而 fair 范畴是“fat Delta”直接范畴上的预层 [24], ，我们认为，它们的某种变体也应当能够描述为某个签名的代数。

普适代数 任意集合 S 上的离散范畴，都可以通过赋予其一个常值维数函数而成为直接范畴。于是， S-类型签名由一个以 S为索引的集合族 $\Sigma = (\Sigma_s)_{s\in S}$ 以及对于每个 $s \in S$ 和 $f \in \Sigma_s$的一个以 S为索引的集合族 B_f 给出。此类签名的代数同样是以 S为索引的集合族 $X = (X_s)_{s\in S}$ ，并配备一个函数

$$f^{\mathbb{X}} : \mathrm{Set}^S(B_f, X) \to X_s$$

对于每个类型 $s \in S$ 和函数符号 $f \in \Sigma_s$。

令 S 为单元素集合，即可得到普适代数中通常所说的（无穷元）签名。例如，令 $\Sigma = \{+, 0, -\}$ 由三个元素组成，其元数分别是一个含两个元素的集合、空集和单元素集合，即可得到群论的语言。群可以描述为满足某些方程公理的代数。

环上的模同样可以表示为满足某些方程的某个签名的代数。在这种情况下，类型集合 S 由两个元素 R 和 V组成，分别表示环元素和向量。集合Σ_R 包含两个元数为 $y_R \amalg y_R$的函数符号 $+^R$、$\cdot^R$，用于 $y_\bullet$ Yoneda 嵌入；两个元数为空族的函数符号 0^R、1^R；以及一个元数为 y_R的函数符号 $-^R$ 。集合 Σ_V 中同样包含元数显而易见的函数符号 $+^V$、0^V、$-^V$，以及一个元数为 $y_R \amalg y_V$的函数符号 $\cdot^V$。我们希望通过这些例子，能够清楚地看出如何将任意多类型签名纳入我们的框架。

Kan 复形 代数拓扑中的一个经典结果表明，空间与单纯集合的同伦理论是等价的。最近有人证明，可以在半单纯集合上定义一种弱模型结构，从而呈现相同的理论。这种弱模型结构的余纤维化是单态射，生成无环余纤维化的是角包含，而弱等价是指实现后成为空间同伦等价的态射 [21, 定理 5.5。6]。这种结构可以转移为代数纤维对象范畴上的实际模型结构，我们将在下文讨论这一点 [11, 例 33]。

为明确记号，令 Δ_+ 为非空有限序数与严格单调函数所构成的范畴。该范畴的对象为自然数

$[n]=\{0,\dots,n\}$，态射由面映射生成

$$\delta_i^n:[n-1]\to[n]$$
$$\delta_i^n(j)=\begin{cases}j, & \text{if } j<i\\ j+1, & \text{if } i\le j\end{cases}$$

对于 $n>0$ 和 $0\le i\le n$，满足单纯恒等式

$$\delta_i^{n+1}\delta_j^n=\delta_{j+1}^{n+1}\delta_i^n$$

对于 $n>0$ 和 $0\le i\le j\le n$。显然， Δ_+ 是一个直接范畴，其维数函数为 $\dim([n])=n$。其上的预层称为半单纯集。

我们用 $\Delta[n]$ 表示由 $[n]$ 表示的半单纯集合，并将其边界 $\partial\Delta[n]$ 定义为移除最高维元素 $\mathrm{id}_{[n]}$ 后得到的半单纯子集。对于每个 $n>0$ 和 $0\le k\le n$，我们将半单纯角 $\Lambda^k[n]$ 定义为从 $\partial\Delta[n]$ 中移除面 δ_k^n 后得到的子集。代数半单纯 Kan 复形 $\mathbb{X}$ 是一个半单纯集合 X，并且为以下形式的每个图表指定了提升：

$$\begin{array}{ccc}\Lambda^k[n] & \xrightarrow{\sigma} & X\\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta[n]. & & \end{array}$$

这些提升的选择显然相当于两个运算

$$\mathrm{face}_{k,n}^{\mathbb{X}}:[\Delta_+^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}](\Lambda^k[n],X)\to X_{n-1}$$
$$\mathrm{fill}_{k,n}^{\mathbb{X}}:[\Delta_+^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}](\Lambda^k[n],X)\to X_n$$

满足某些边界条件，从而分别给出缺失面的像以及 $\Delta[n]$ 的内部。代数半单纯 Kan 复形之间的态射是保持所选提升的预层态射。

从上述描述中，很容易提取一个 Δ_+-分类签名 $\Sigma_{\mathrm{Kan}}=(\Sigma_{\mathrm{Kan},\,n})_{n\in\mathbb{N}}$，其代数为代数半单纯 Kan 复形。该签名 $\Sigma_{\mathrm{Kan},\,n}$ 具有两族类型为 $[n]$ 的函数符号。第一族由符号 $\mathsf{face}_{k,\,n+1}$ 组成，其对应于 $0\le k\le n+1$，元数为 $\Lambda^k[n+1]$，边界项为

$$t_{\mathrm{face}_{k,n+1},\delta}=\mathrm{var}(\delta_k^{n+1}\circ\delta)$$

对于每个非恒等态射 $\delta:\ [m]\to[n]$。第二部分由符号 $\mathsf{fill}_{k,\,n}$ 构成，用于 $n>0$ 和 $0\le k\le n$，其元数为 $\Lambda^k[n]$，边界项为

$$t_{\mathrm{fill}_{k,n},\delta}=\begin{cases}\mathrm{face}_{k,n}[\mathrm{id}], & \text{if } \delta=\delta_k^n,\\ \mathrm{var}(\delta), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

不难看出，这些边界项族满足赋予一个类型所需的上循环条件，并且它们对应于运算 $\mathsf{face}_{k,\ n}$ 和 $\mathsf{fill}_{k,\ n}$ 必须满足的边界条件。

如上所述，代数半单纯 Kan 复形范畴具有一个与空间等价的模型结构。代数 Kan 复形的弱等价是指在对底层半单纯集合进行几何实现后成为同伦等价的态射；而两个弱分解系统分别由边界包含集合$\partial\Delta[n] \subseteq \Delta[n]$和角包含集合 $\Lambda^k[n] \subseteq \Delta[n]$ 余纤维生成，它们均视为自由代数半单纯集合之间的态射。特别地，（余纤维、平凡纤维化）弱分解系统与第 5 节讨论的系统一致，因此计算图就是余纤维复形。

球状范畴 本文的启发性例子是球状弱 ω范畴 [7, 26]理论。我们在先前的工作 [14], 中对这一例子进行了深入研究，并给出了一个 $\mathbb{G}$类型签名，其代数与 Leinster 的 ω范畴一致。其类型底层范畴 $\mathbb{G}$ 是球体范畴，其对象为自然数，态射由以下元素生成

$$s_n, t_n : (n) \to (n+1)$$

满足球状性条件

$$s_{n+1}s_n = t_{n+1}s_n \qquad\qquad s_{n+1}t_n = t_{n+1}t_n.$$

这显然是一个维数函数为恒等态射的直接范畴。其上的预层称为球状集合；由于球状性条件，可以将它们直观地表示为一系列有向圆盘。

签名 Σ_{cat} 的元数由一族以有根平面树为索引的球状集合给出，我们称这些树为 Batanin 树 [7]。关于这族对象的其他描述，见 [9, 14, 26]。这族对象包含一个球状集合 Bat，其满足 $s_n^* = t_n^* = \partial_n$。此外，对于每棵 Batanin 树 B, 它还包含一个球状集合 $\mathsf{Pos}\, B$ ，以及一对包含

$$s_n^B : \mathrm{Pos}(\partial_n B) \to \mathrm{Pos}\, B \qquad\qquad t_n^B : \mathrm{Pos}(\partial_n B) \to \mathrm{Pos}\, B$$

对于每棵满足球状性条件的树 $B \in \mathsf{Bat}_{n+1}$ 。

这一族球状集合已有深入研究，因为它在族意义上表示自由严格 ω-范畴单子。在严格的 ω-范畴中，由 Batanin 树索引的胞腔图表有唯一的复合；而在任意的 ω-范畴中，它们的复合仅在高阶相干胞腔意义下唯一。这一点



图 1：前四个可表示球状集合。



图 2：分别对应于 2-胞竖直复合和互换公理的 Batanin 树。

可以通过多种等价方式加以精确表述，例如使用可缩的球状算子 [7, 26], 协调器来刻画 ω-范畴 [28], ，以及类型论 CaTT [15]。这些方法与下文所述方法之间的等价性 [4, 8, 14]已得到确立。

签名 $\Sigma_{\mathrm{cat}} = (\Sigma_{\mathrm{cat},n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是递归定义的。不存在类型为 0 的函数符号，因为对象不应有任何复合方式。签名 $\Sigma_{\mathrm{cat},n+1}$ 具有一族函数符号 $\mathsf{coh}_{B,A}$ ，其中 $B \in \mathsf{Bat}_{n+1}$是一个 Batanin 树，且 $A = (a, b)$ 是 $\mathsf{Pos}\, B$ 中类型为 n 的一对项，满足

- 的源与靶 a 和 b 相同,
- $a = \mathsf{M}_{\Sigma_{\mathrm{cat}}\, n}(s_n^B)(a')$，其中 a' 是 $\mathsf{Pos}(\partial_n B)$ 中对应于一个满态射的某个项,
- $b = \mathsf{M}_{\Sigma_{\mathrm{cat}}\, n}(t_n^B)(b')$，其中 b' 是 $\mathsf{Pos}(\partial_n B)$ 中对应于一个满态射的某个项。

$\mathsf{coh}_{B,A}$ 的元数由 $\mathsf{tr}_{n+1}\, \mathsf{Pos}\, B$ 给出，其最高维边界项由下式给出

$$t_{\mathsf{coh}_{B,A},s_n} = a \qquad\qquad t_{\mathsf{coh}_{B,A},t_n} = b.$$

其余边界项由余循环条件唯一确定。选择这个签名的动机在于， a', b' 表示复合 B边界的各种方式，而这应当确定复合 B的一种典范方式。当 $B \in \mathsf{Bat}_{n+1}$ 满足 $s_n^B = t_n^B = \mathsf{id}$ 时，也就是说其维数至多为 n时， a' 和 b' 对应于复合 B 和 $\mathsf{coh}_{B,\ A}$ 的不同方式，从而得到复合之间的一个相干胞。

类似地，通过允许将 $\mathsf{coh}_{B,\ A}$ 作为函数符号，我们可以为 ω-群胚构造一个签名 Σ_{grpd} ，其中包括所有满足以下条件的对象：一个 Batanin 树 $B \in \mathsf{Bat}_{n+1}$ ，以及一对具有相同源和目标的项 $A = (a, b)$。此定义的动机在于，球状集合 $\mathsf{Pos}\, B$ 的几何实现是可缩的，因此其上的自由 ω-群胚应当是平凡纤维化的。

多重范畴 严格多重范畴是 n-重范畴的无限维推广。它们由一组对象 $X_\emptyset$、每个方向 $i \in \mathbb{N}$ 上的一组箭头 X_i ，以及更一般地，对每个基数为 n的 $I \subseteq \mathbb{N}$ ，都有一组 n维立方体 X_I 组成，并配有面映射和满足结合律且含单位元的复合运算

$$+_i : X_I \times_{X_{I\setminus\{i\}}} X_I \to X_I$$

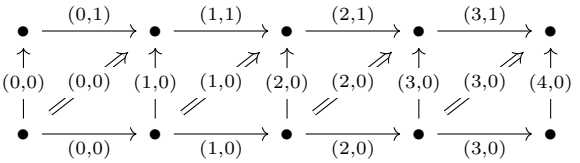


图 3：网格 $G = (4, 1, 0, 0, \ldots)$ 的位置半多重集合。

对每个 $i \in I$，这些复合运算都满足通常的交换律。近期有人提出了它们的弱化版本 [18], ，其中复合 $+_0$ 严格满足结合律并含单位元，而其余复合运算则只在高维胞腔意义下满足结合律并含单位元。在此，我们提出多重范畴的另一种无偏版本，它在所有方向上都是弱的。

我们从这样一个范畴 $\mathbb{M}_+$ 出发：其对象为自然数的有限子集，态射为

$$\delta_J^\alpha : I \setminus J \to I$$

对于 $J \subseteq I$ 和 $\alpha : J \to \{0,1\}$。态射的复合由不交并给出

$$\delta_J^\alpha \delta_K^\beta = \delta_{J \cup K}^{(\alpha,\beta)}$$

其中 $(\alpha, \beta) : J \cup K \to \{0,1\}$ 是由不交并的泛性质所诱导的映射。等价地，$\mathbb{M}_+$ 中的态射由面映射生成

$$\delta_i^\alpha : I \setminus \{i\} \to I$$

对于 $i \in I$ 和 $\alpha \in \{0,1\}$，并满足交换条件

$$\delta_i^\alpha \delta_j^\beta = \delta_j^\beta \delta_i^\alpha.$$

显然，$\mathbb{M}_+$ 是一个直接范畴，其维数由基数给出。我们将其上的预层称为半多重集合。

在严格多重范畴中迭代复合运算，可以以唯一的方式复合立方体的网格形数组。由于网格由各个方向上的立方体数量唯一确定，我们令 Grid_I 为序列 G 的集合：$I \to \mathbb{N}$，并对 $J \subseteq I$ 定义：

$$d_J = (\delta_J^\alpha)^* : \mathrm{Grid}_I \to \mathrm{Grid}_{I \setminus J}$$

该函数将序列在 J 处的值遗忘。这个赋值轻易地定义了一个半多重集合。

网格 G 的位置半多重集合 $\mathsf{Pos}\, G$：$I \to \mathbb{N}$ 由该网格的立方体组成。将每个立方体与其最靠近原点的顶点等同，我们得到如下描述。除非满足 $J \subseteq I$，否则集合 $\mathsf{Pos}_J G$ 为空；若满足，则它由满足以下条件的点 $R \in \mathbb{N}^I$ 组成：对所有 $i \in I$，$R(i) \leq G(i)$，且当 $i \in J$ 时，不等式严格成立。面 $d_K^\alpha R \in \mathsf{Pos}_{J \setminus K} G$ 定义为

$$(d_K^\alpha R)(i) = \begin{cases} R(i) + \alpha(i), & \text{when } i \in K \\ R(i), & \text{when } i \in I \setminus K \end{cases}$$

此外，对于每个网格 $G \in \mathsf{Grid}_I$、子集 $J \subseteq I$ 和态射 $\delta_J^\alpha \colon I \setminus J \to I$，都存在一个包含

$$\delta_J^{\alpha,G} : \mathrm{Pos}(d_J G) \to \mathrm{Pos}\, G$$
$$(\delta_J^{\alpha,G} R)(i) = \begin{cases} R(i), & \text{when } i \in I \setminus J \\ \alpha(i) \cdot G(i), & \text{when } i \in J \end{cases}$$

这些数据形式恰好构成一个半多重集合族。

签名 $\Sigma_{\mathrm{mcat}} = (\Sigma_{\mathrm{mcat},n})_{n\in\mathbb{N}}$ 以递归方式定义，与 Σ_{cat} 类似。签名 $\Sigma_{\mathrm{mcat},0}$ 不包含类型为 $\emptyset$ 的函数符号。签名 $\Sigma_{\mathrm{mcat},n}$ 对于 $n > 0$，对每个大小为 n 的子集 $I \subset \mathbb{N}$，都有一个元数为 I 的函数符号族。该族由符号 $\mathsf{coh}_{G,A}$ 构成，其中 $G \in \mathsf{Grid}_I$ 是一个网格，而 $A = (t_i^\alpha)_{i\in I,\alpha\in\{0,1\}}$ 是 $\mathsf{Pos}\, G$ 中类型为 $I \setminus \{i\}$ 的 $\Sigma_{\mathrm{mcat},n}$-项的集合，并满足

- $(\delta_j^\beta)^* t_i^\alpha = (\delta_i^\alpha)^* t_j^\beta$，
- $t_i^\alpha = \mathsf{M}_{\Sigma_{\mathrm{mcat}}\, n}(\delta^\alpha{}_{,i}{}^{G})(t_i^{\alpha\prime})$，其中某个项 $t_i^{\alpha\prime}$ 对应于一个满态射。

$\mathsf{coh}_{G,\ A}$ 的元数由 $\mathsf{tr}_n\, \mathsf{Pos}\, G$ 给出，其最高维边界项由以下内容给出

$$t_{\mathrm{coh}_{G,A},\delta_i^\alpha} = t_i^\alpha.$$

其余边界项由余循环条件确定。

计算图的一个分解系统

如定理 10 所示，计算图及变量到变量态射构成的范畴是一个预层拓扑斯。因此，每个变量到变量态射都可以分解为一个满态射后接一个单射。事实上，在计算图及任意态射构成的范畴中，这一结论更普遍地成立：满态射与变量到变量单射构成一个正交分解系统。

包含 $\zeta_\Sigma : \mathsf{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}} \hookrightarrow \mathsf{Comp}_\Sigma$ 是忠实的，并且保留连通极限和余极限，因此它保留并反映满态射和单射。利用定理 10 的神经函子是一个等价，我们可以看到，变量到变量态射 $\sigma : C \to D$ 是计算图的单射，当且仅当对于每个类型 i，函数 $\sigma_i : V_i^C \to V_i^D$ 都是单射。

为了刻画计算图的满态射，我们引入计算图式态射的支撑。直观而言，支撑捕捉了目标中用于定义该态射的生成元。我们将看到，当且仅当一个态射的支撑包含其目标中的每个生成元时，它才是满态射。

定义 23. 设 C a Σ-计算图，且 i 为一种类型。某个维数为 $\beta \leq \alpha$ 的类型 j 上的项 $t \in \mathrm{Term}_{\Sigma,j}(C)$ 的类型 i 的支撑递归定义如下:

$$\mathrm{supp}_i(\mathrm{var}\, v) = \{v \,:\, i = j\} \cup \bigcup_{\mathrm{id} \neq \delta : k \to j} \mathrm{supp}_i(\phi^C_\delta(v))$$
$$\mathrm{supp}_i(f[\tau]) = \bigcup_{\substack{k \in \mathcal{I}_\beta \\ b \in B_{f,k}}} \mathrm{supp}_i(\tau_k(b))$$

态射 $\sigma : D \to C$ 的类型 i 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}_i(\sigma) = \bigcup_{\substack{j \in \mathcal{I}_\alpha \\ v \in V^D_j}} \mathrm{supp}_i(\sigma_j(v)).$$

递归地可知，类型为 j 的项中，类型 i 的支撑为空，除非存在一个态射 $\delta : j \to i$；这尤其意味着 $\dim j \leq \dim i$。下面的引理表明，支撑在边界映射下封闭；这尤其意味着某个项的支撑与对其进行分类的态射相同。其证明是一个简单的相互归纳论证，留给读者。

引理 24. 设 C 为一个计算图， i 为一个类型，且 $t \in \mathrm{Term}_{\Sigma,j}(C)$ 为 C 中某个维数为 $\beta \leq \alpha$的类型 j 的项。对于每个面映射 $\delta : k \to j$,

$$\mathrm{supp}_i(\delta^* t) \subseteq \mathrm{supp}_i(t),$$

而对于每个 Σ-计算图之间的态射 $\sigma : C \to D$,

$$\mathrm{supp}_i(\mathrm{Term}_\Sigma(\sigma)(t)) = \bigcup_{\substack{k \in \mathcal{I}_\beta \\ v \in \mathrm{supp}_k(t)}} \mathrm{supp}_i(\sigma_k(v)).$$

命题 25. 两个计算图态射在一个项上相同，当且仅当它们在该项支撑中的每个生成元上都相同。

证明. 设 $\sigma, \sigma' : C \to D$ 为计算图态射。对签名的维数作归纳，只需证明结论对项 t of C 中维数为 α的类型 j的项成立。先假设 $t = \mathrm{var}\, v$ 是一个生成元。由于 $v \in \mathrm{supp}_j(v)$，一个方向显然成立。反过来，假设 σ 和 σ' 在t上相同。那么对于每个 $\delta : k \to j$，它们在 $\phi^C_\delta(v)$ 上也必定相同。根据归纳假设，它们在所有 $\phi^C_\delta(v)$ 的支撑上相同，因此在 t 的支撑上也相同。

现在假设 $t = f[\tau]$。那么 σ和 σ'在 t上一致，当且仅当 $\sigma\tau = \sigma\tau'$。这相当于它们对每个 $k \in \mathcal{I}_{\dim j}$ 和 $b \in B_{f,\,k}$，都在 $\tau_k(b)$上一致。根据归纳假设，这等价于它们在每个$\tau_k(b)$的支撑上一致。换言之，它们在这些支撑的并集上一致，而该并集就是 t的支撑。 □

推论 26. 若一个态射的支撑包含每个生成元，则它是满态射。

这个推论的逆命题也成立。我们将通过证明每个计算图式态射都能唯一分解为两个态射的复合来推导这一点：第一个态射的支撑包含所有生成元，第二个态射是变量到变量单态射。关于变量到变量态射支撑的下述引理，也可以用按深度归纳法轻松证明。

引理 27. 变量到变量态射 $\sigma\colon C \to D$ 的支撑恰好由函数 σ_i 的像中的生成元组成。

引理 28. 设 $\rho\colon D \to E$ 是一个变量到变量单态射，$\sigma\colon C \to D$ 是任意态射。那么，对于某个 $\sigma'\colon C \to D$，有 $\sigma = \rho\sigma'$，当且仅当 σ 的支撑包含于 ρ 的支撑中。此外，这种分解是唯一的。

证明. 由于 ρ 是单态射，分解的唯一性显然成立；而由引理 24 可知，这一条件也是分解存在的必要条件。按签名的维数归纳，我们可以假设，对于所有 $\beta < \alpha$，这一条件对 Σ_β-计算图的态射都是充分的。

我们对 σ 的深度进行归纳。首先，假设 $C = \mathbb{D}^i_\Sigma$，且 σ 将生成元 $t = \mathsf{var}\, v$ 分类。由引理 27，存在 $v' \in V_i^D$，它经由 ρ 映射到 t。与 $\mathsf{var}\, v'$ 对应的态射给出了所需的分解。若 σ 将项 $t = f[\tau]$ 分类，则

$$\mathrm{supp}_i(\sigma) = \mathrm{supp}_i(t) = \mathrm{supp}_i(\tau),$$

因此，根据归纳假设，存在一个分解 $\tau = \rho\tau'$。与 $f[\tau']$ 对应的态射经由 ρ 给出 σ 的一个分解。

现在任取 C 和 σ。根据归纳假设，存在唯一的 $\sigma'_\beta\colon C_\beta \to D_\beta$，使得对于所有 $\beta < \alpha$，都有 $\sigma_\beta = \rho_\beta\sigma'_\beta$；并且对于每个维数为 α 的生成元 $v \in V_i^C$，都存在唯一的项$\sigma'_i(v) \in \mathsf{Term}_\Sigma(D)$，使得

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\rho)(\sigma'_i(v)) = \sigma_i(v).$$

由唯一性，这些数据组合成一个态射 $\sigma'\colon C \to D$，使得$\sigma = \rho\sigma'$。

□

命题 29. 每个态射都可以分解为一个支撑包含所有生成元的态射，后接一个变量到变量单态射。

证明。令 $\sigma\colon C \to D$ 为任意态射。我们将递归地构造一个变量到变量单态射 $\iota_\sigma : \mathsf{supp}\,\sigma \to D$，其中 $\mathsf{supp}\ \sigma$的生成元由 $V_{\mathrm{supp}_i}{}^{\sigma} = \mathsf{supp}_i\,\sigma$ 给出，而 σ_i是显然的子集包含映射。$\mathsf{supp}\,\sigma$ 的粘合映射递归定义如下：给定一个面映射 $\delta\colon j \to i$，以及某个 $v \in \mathsf{supp}_i\,\sigma$，由引理 28，存在唯一的项 $\phi_\delta^{\mathrm{supp}\,\sigma}(v)$ 属于 $\mathsf{supp}\,\sigma$，满足

$$\mathrm{Term}_{\Sigma_\beta}(\iota_{\sigma,\beta})\phi_\delta^{\mathrm{supp}\,\sigma}(v) = \phi_\delta^C(v),$$

其中 $\beta =$ 维数为 j。唯一性蕴含余循环条件 $\delta^* \phi_{\delta'}^{\operatorname{supp}\sigma} = \phi_{\delta'\delta}^{\operatorname{supp}\sigma}$，因此这些数据定义了一个计算图 $\operatorname{supp}\sigma$ 以及一个从该计算图出发的变量到变量单态射。此外，根据构造，

$$\operatorname{supp}_i(\iota_\sigma) = \operatorname{supp}_i(\sigma),$$

因此，根据同一个引理，存在唯一的

$$\pi_\sigma : C \to \operatorname{supp}\sigma$$

使得 $\sigma = \pi_\sigma \iota_\sigma$。一个简单的递归论证表明，$\pi_\sigma$ 的支撑包含 $\operatorname{supp}\sigma$ 的所有生成元。□

推论30。满态射的支撑包含所有生成元。

证明。若 σ 是满态射，则变量到变量单态射 ι_σ 也是满态射。由于 $\mathbf{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 是一个托扑斯，ι_σ 必须可逆，因此在生成元上是双射。所以，它的支撑包含所有生成元。根据引理 24，此类态射在复合下封闭，因此 $\sigma = \pi_\sigma \iota_\sigma$ 的支撑也必须包含所有生成元。□

推论31。满态射和变量到变量单态射构成一个正交分解系统。

证明。这两个类都包含同构，并且在复合下封闭。此外，每个态射都可分解为一个满态射后接一个变量到变量单态射，因此只需证明该分解在唯一同构意义下唯一 [2, 命题14。7]。唯一性由左类为满态射可得，因此只需证明存在性。为此，设 $\sigma :\ C \to D$ 是一个满态射，$\rho :\ D \to E$ 是一个变量到变量单态射，并考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\pi_{\rho\sigma}} & \operatorname{supp}\sigma \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{\chi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\iota_\sigma} \\ D & \xrightarrow{\rho} & E \end{array}$$

由于 σ 是满态射，ρ、$\sigma\rho$ 和 $\iota_{\sigma\rho}$ 的支撑相同。两次应用引理 28，可得到图表中的对角提升 χ，以及反方向的提升 χ^{-1}。根据定义，

$$\iota_{\rho\sigma}\chi\chi^{-1} = \iota_{\rho\sigma} \qquad\qquad \rho\chi^{-1}\chi = \rho.$$

由于 ρ 和 $\iota_{\rho\sigma}$ 是单态，态射 χ 是同构，其逆为 χ^{-1}。□

推论 32。计算图范畴是柯西完备的。

证明。设 $\sigma :\ C \to C$ 是一个计算图的幂等态射。根据推论31，存在一个分解 $\sigma = \iota\pi$，其中 π 是满态射，ι 是单态。由于 $\sigma\sigma = \sigma$，可得 $\pi\iota = \mathrm{id}$。因此，每个计算图的幂等态射都可分裂。□

B 项单子的若干性质

最后，我们讨论项单子的若干技术性质，即它是笛卡尔且可达的。由后一性质，我们将推导出 Σ-代数范畴是局部可呈现的，因而是完备且余完备的，并且每个态射集合都余纤维生成一个弱分解系统。通常， Σ 表示某个维数为 α 的 $\mathcal{I}$-排序签名。

命题 33. 项单子是笛卡尔的。

证明. 令 $\mathsf{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}\colon [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}},\mathsf{Set}] \to \mathsf{Comp}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 为预层到计算图的包含在变量到变量态射子范畴上的限制。对每个类型 i，复合 $V_i^\bullet \circ \mathsf{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 都是余连续的，因为它将预层 X 映到集合 X_i。根据第 3 节中 $V_i^\bullet$ 的分解，函子 $\mathcal{T}_p \circ \mathsf{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 对每个复形 p 都保连通极限。由定理 10，$\mathsf{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 也必定保这些极限。最后，推论 8 蕴含复合 $\mathrm{M}_\Sigma = \mathsf{Term}_\Sigma^{\mathrm{var}}\mathsf{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}$ 也必定保这些极限。

还需证明 η_Σ 和 μ_Σ 是笛卡尔自然变换。对于前者，令 $\sigma\colon X \to Y$ 为一个预层态射，并考虑自然性方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{\Sigma,X}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{\Sigma,Y}} \\ \mathrm{M}_\Sigma(X) & \xrightarrow{\mathrm{M}_\Sigma(\sigma)} & \mathrm{M}_\Sigma(Y) \end{array}$$

预层范畴中的拉回是逐对象计算的，因此我们需要证明，对于每个类型 i，满足相容条件的对 $t \in \mathrm{M}_{\Sigma,\, i}(X)$ 和 $y \in Y_i$

$$\mathrm{M}_\Sigma(\sigma)(t) = \eta_{\Sigma,Y}(y) = \mathrm{var}\, y$$

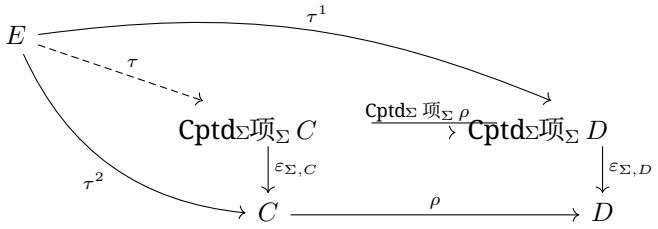
都能唯一地提升为 X_i 的一个元素。由相容条件可推出， t 必须是一个生成元，因此对于唯一的 $x \in X_i$，有 $t = \eta_{\Sigma,\, X}(x)$。将 t 代入相容条件后，我们得到 $y = \sigma(x)$，所以该方块是一个拉回。

单子的乘法可写成如下的须化复合

$$\mu_\Sigma = \mathrm{Term}_\Sigma\, \varepsilon_\Sigma(\zeta_\Sigma\, \mathrm{Cptd}_\Sigma^{\mathrm{var}}).$$

Σ项函子由 $\mathbb{D}_\Sigma^i$ 可表，因此保持拉回。因此，只需证明 $\varepsilon_\Sigma\zeta_\Sigma$ 是笛卡尔的。于是，设 $\rho\colon C \to D$ 是计算图之间的变量到变量态射，并假设实线部分交换——

给定如下形式的交换图表



按签名维度归纳，我们可以假设对于所有 $\beta < \alpha$， $\varepsilon_{\Sigma_\beta}\zeta_{\Sigma_\beta}$ 都是笛卡尔的。接下来按 τ^1 的深度递归，证明存在唯一的 τ 使得上方整个图表交换。

首先，假设 $E = \mathbb{D}^i_\Sigma$ 对于某个类型 i，该类型属于类型 α，并进一步假设τ^1将生成元 $t_1 = \mathsf{var}\, t_1'$分类，其中 $t_1' \in \mathsf{Term}_{\Sigma,i}(D)$。那么 τ^2将某个项 $t_2 \in \mathsf{Term}_{\Sigma,i}(C)$ 分类，使得

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\rho)(t_2) = t_1'.$$

态射 τ必须将某个生成元分类，才能使下方三角形交换；而要使左侧三角形交换，该生成元必须是 $\mathsf{var}(t_2)$。反过来，将 $\mathsf{var}\, t_2$ 分类的态射会使图表交换，因此存在唯一的 τ 使图表交换。

接着，假设 τ^1将复合项 $t_1 = f[\lceil\tau^1\rceil]$分类，并令 t_2为由 τ^2分类的项。那么

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\rho)(t_2) = f[\varepsilon_{\Sigma,D}\hat{\tau}^1]$$

且 ρ是变量到变量的，因此对于某个满足以下条件的τ^2，有 $t_2 = f[\lceil\tau^2\rceil]$：

$$\rho\hat{\tau}^2 = \varepsilon_{\Sigma,D}\hat{\tau}^1.$$

根据递归假设，存在唯一的 $\hat{\tau}\colon B_f \to \mathsf{Cptd}_\Sigma\mathsf{Term}_\Sigma C$，使得

$$\hat{\tau}^1 = (\mathrm{Cptd}_\Sigma\,\mathrm{Term}_\Sigma\,\rho)\hat{\tau} \qquad\qquad \hat{\tau}^2 = \varepsilon_{\Sigma,C}\hat{\tau}.$$

与项 $f[\lceil\tau\rceil]$对应的态射 τ使上面的图表可交换，并且很容易看出它是唯一的。

最后，令 E 为任意对象。于是根据递归假设，对于每个 $\beta < \alpha$，都存在唯一的 $\tau_\beta\colon E_\beta \to \mathsf{tr}^\Sigma_\beta\,\mathsf{Cptd}_\Sigma\mathsf{Term}_\Sigma C$，使上面的图表的显然的截断版本成立；并且对于每个维数为 α 的 i，都存在唯一的 $\mathsf{Cptd}_\Sigma\mathsf{Term}_\Sigma C$ 中的项 $\tau_i(v)$，使得

$$\mathrm{Term}_\Sigma(\varepsilon_{\Sigma,C})(\tau_i(v)) = \tau_i^2(v) \qquad (M_\Sigma\,\mathrm{Term}_\Sigma\,\rho)(\tau_i(v)) = \tau_i^1(v).$$

根据唯一性，我们可以轻易推得，这些态射和项构成一个态射 $\tau\colon C \to D$，使得上述图表交换。不难看出，所述 τ 是唯一的。

□

命题 34。单子 M_Σ 对某个正则基数 λ 保持 λ-滤过余极限。

证明。令 λ 为一个正则基数，且严格大于不交并集 $\coprod_j B_{f,j}$ 的基数，其中包含每个类型 $i \in \mathcal{I}_\alpha$ 以及每个函数符号 $f \in \Sigma_{i,F}$。这样的 λ 存在，因为类型范畴和函数符号集合都是小的。为了证明 M_Σ 保持 λ-滤过余极限，只需证明对于每个类型 i，$\mathrm{M}_{\Sigma,i}$ 都保持这些余极限。由签名的维数归纳法，我们可以假设对于所有 $\beta < \alpha$，$\mathrm{M}^{\Sigma_\beta}$ 都保持 λ-滤过余极限，因此只需证明对于维数为 α 的 i，$\mathrm{M}_{\Sigma,i}$ 保持这些余极限。

为此，对每个序数 $\gamma \leq \lambda$ 定义：

$$\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma,i} : [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$$

它是一个函子，将预层 X 映射到 $\mathsf{Cptd}_\Sigma X$ 中类型为 i、递归深度至多为 γ 的项的集合。对于每个函数符号 $f \in \Sigma_i$，还定义一个函子

$$\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma,i,f} : [\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$$

它将预层 X 映射到深度至多为 β 的态射集合 $\mathsf{Cptd}_\Sigma(B_f) \to \mathsf{Cptd}_\Sigma(X)$。关于递归深度的讨论表明，当 $\beta = \lambda$ 时，我们分别得到类型为 i 的所有项的集合和所有态射，因此只需证明这些函子保持 λ-滤过余极限。

我们对序数 γ 进行递归。函子 $\mathrm{M}^0_{\Sigma,\,i}$ 是余连续的，因为它将 X 映到集合 X_i。当 $\gamma < \lambda$ 时，函子 $\mathrm{M}^{\gamma+1}_{\Sigma\,i}$，分解为

$$\mathrm{M}^{\gamma+1}_{\Sigma,i} = \mathrm{M}^0_{\Sigma,i} \amalg \coprod_{f \in \Sigma_i} \mathrm{M}^\gamma_{\Sigma,i,f}$$

而当 $\gamma \leq \lambda$ 是极限序数时，我们有

$$\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma,i} = \operatorname*{colim}_{\gamma' < \gamma} \mathrm{M}^{\gamma'}_{\Sigma,i}\,.$$

在这两种情况下，由归纳假设以及余极限与余极限的交换性可知，该函子保持 λ-滤过余极限。最后，给定任意函数符号 $f \in \Sigma_i$ 和任意的 $\gamma \leq \lambda$，考虑从预层 B_f 的元素范畴出发的函子：它将 $j \in \mathcal{I}_\alpha$ 和 $b \in B_{f,\,j}$ 映到集合 $\mathrm{M}_{\Sigma,\,j}$（当 $\dim j < \alpha$ 时），否则映到 $\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma\,,\,j}$。该函子的定义域是 λ-小的，其极限为 $\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma\,,\,i,\,f}$。由归纳假设以及 λ-小极限与 λ-滤过余极限的交换性可知，$\mathrm{M}^\gamma_{\Sigma\,,\,i,\,f}$ 保持 λ-滤过余极限。归纳至此完成。

□

推论 35. 代数范畴是局部可呈现的。

证明。设 λ 为一个正则基数，使得 M_Σ 保持 λ-滤过余极限。范畴 $[\mathcal{I}_\alpha^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ 是局部有限可呈现的，因为它是一个预层范畴 [3,例 1.1.12]，，因此也是 λ-可呈现的 [3, 注 1.1.20]。因此，代数范畴是局部λ-可呈现范畴上的一个 λ-可达单子的代数范畴。因此，它也是一个局部 λ-可呈现范畴 [3,注 2.2.78]。

□

参考文献

[1] Jiˇr´ı Ad´amek。《范畴语言中的自由代数与自动机实现》。Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae，015(4):589–602，1974。[2] Jiˇr´ı Ad´amek、Horst Herrlich 和 George E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴：猫之乐》。纯粹与应用数学。Wiley，1990。[3]Jiˇr´ı Ad´amek 和 Jiˇr´ı Rosick´y。《局部可呈现与可达范畴》。剑桥大学出版社，第一版，1994。doi:10.1017/CBO9780511600579。

[4] Dimitri Ara. 关于 Grothendieck 的 ∞-群胚¨及一种 ∞-范畴 ´变体。博士论文，巴黎第七大学（巴黎狄德罗大学），2010年。

[5]John C. Baez 和 James Dolan。高维代数 III：n-范畴与 opetope 代数。《数学进展》135(2)：145–206，1998年。arXiv:q-alg/9702014, doi:10.1006/aima.1997.1695。[6]Michael A. Batanin。球状集合上有限元单子的计算图。载于《高阶范畴论》，《当代数学》第230卷，第37–57页。美国数学会，1998年。doi:10.1090/conm/230/03337。[7] Michael A. Batanin。作为弱 n-范畴理论自然环境的幺半球状范畴。《数学进展》136(1)：39–103，1998年。doi:10.1006/aima.1998.1724。[8] Thibaut Benjamin。弱 ω-范畴及相关高阶结构的类型论方法。博士论文，巴黎综合理工学院，2020年。[9] Clemens Berger。高阶范畴的胞腔神经。《数学进展》169(1)：118–175，2002年。doi:10.1006/aima.2001.2056。[10]John Bourke 和 Richard Garner。单子与理论。《数学进展》351：1024–1071，2019年。arXiv:1805.04346，doi:10.1016/j.aim.2019.05.016。[11] John Bourke 和 Simon Henry。重新审视代数余纤维对象与纤维对象，2020年。arXiv:2005.05384。[12]Albert Burroni。高维字问题及其在等式逻辑中的应用。《理论计算机科学》115(1)：43–62，1993年。doi:10.1016/0304-3975(93)90054-W。[13]Eugenia Cheng。opetopes 范畴与 opetopic 集合范畴。《范畴论及其应用》 11：353–374，2003 年。arXiv:math/0304284。

[14] Christopher J. Dean、Eric Finster、Ioannis Markakis、David Reutter 和 Jamie Vicary。作为归纳类型的弱 ω-范畴计算图，2022年。arXiv:2208.08719。[15] Eric Finster 和 Samuel Mimram。弱 ω-范畴的类型论定义。载于第32届ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，第1–12页。ACM，2017年。arXiv:1706.02866，doi:10.5555/3329995.3330059。[16] Marcelo Fiore。二阶与依赖排序抽象语法。载于第23届IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，第57–68页，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，2008年。IEEE。doi:10.1109/LICS.2008.38。[17]Richard Garner。高阶范畴的同态。《数学进展》224(6)：2269–2311，2010年。arXiv:0810.4450，doi:10.1016/j.aim.2010.01.022。[18] Marco Grandis 和 Robert Par´e。多重范畴导论（论弱多重范畴与松弛多重范畴，I）。《拓扑与范畴几何笔记》LVII(2)：103–159，2016年。[19]Peter Hancock、Conor McBride、Neil Ghani、Lorenzo Malatesta 和 Thorsten Altenkirch。小归纳递归。载于《类型化λ演算及其应用》，第7941卷，第156–172页。施普林格·柏林·海德堡，2013年。doi:10.1007/978-3-642-38946-7_13。[20] Simon Henry。非幺多面图构成预层范畴。《高阶结构》3(1)：248–291，2019年。arXiv:1711.00744。[21] Simon Henry。经典与构造数学中的弱模型范畴。《范畴论及其应用》35(24)：875–958，2020年。arXiv:1807.02650。[22] Wilfrid Hodges。《模型论》，《数学及其应用百科全书》第42卷。剑桥大学出版社，1993年。[23] Mark Hovey。《模型范畴》。《数学调查与专著》第63号。美国数学会，再版，2007年。[24]Joachim Kock。高阶范畴中的弱恒等箭头。《国际数学研究论文集》，2006年。arXiv:math/0507116，doi:10.1155/IMRP/2006/69163。[25] Yves Lafont、Fran¸cois M´etayer 和 Krzysztof Worytkiewicz。ω-范畴上的folk模型结构。《数学进展》224(3)：1183–1231，2010年。arXiv:0712.0617，doi:10.1016/j.aim.2010.01.007。[26] Tom Leinster。《高阶运算子，高阶范畴》。《伦敦数学学会讲义丛书》第298号。剑桥大学出版社，2004年。arXiv:math/0305049。

[27] Mihaly Makkai 和 Marek Zawadowski。《3-计算胞腔范畴不是笛卡尔闭的》。《纯粹与应用代数杂志》，212(11):2543–2546，2008年。arXiv:0710.5202，doi:10.1016/j.jpaa.2008.04.010。[28] Georges Maltsiniotis。《Grothendieck ∞-群胚，以及另一种 ∞-范畴的定义》，2010年。arXiv:1009.2331。[29]Fran.cois M´etayer。《高维范畴中的余纤维对象》。《同调、同伦与应用》，10(1):181–203，2008年。doi:10.4310/HHA.2008.v10.n1.a7。[30]Thomas Nikolaus。《高阶范畴的代数模型》。《数学研究》，21(1-2):52–75，2011年。arXiv:1003.1342，doi:10.1016/j.indag.2010.12.004。[31] Emily Riehl。《范畴同伦论》。新数学专著第24卷。剑桥大学出版社，2014年。[32]Ross Street。《以范畴值2-函子为指标的极限》。《纯粹与应用代数杂志》，8(2):149–181，1976年。doi:10.1016/0022-4049(76)90013-X。[33] Ross Street。《定向单形的代数》。《纯粹与应用代数杂志》，49(3):283–335，1987年。doi:10.1016/0022-4049(87)90137-X。[34] Chaitanya Leena Subramaniam。《从依赖类型论到高阶代数结构》。博士论文，计算机科学基础研究所，巴黎，2021年。arXiv:2110.02804。