arXiv:2303.11979v1 [cs.CE] 21 Mar 2023

结合高阶度量插值与几何隐式化，实现曲线 r-自适应

Guillermo Aparicio-Estrems, Abel Gargallo-Peir´o, Xevi Roca*

巴塞罗那超级计算中心，西班牙巴塞罗那 *08034*

摘要

我们详细介绍如何使用牛顿法，针对离散高阶度量场进行基于畸变的曲线 r-自适应，同时匹配目标几何。具体而言，我们结合两项：用于衡量与目标度量偏差的畸变项，以及用于衡量与目标边界偏差的惩罚项。对于这一组合，我们考虑四个要素。首先，为表示度量场，我们详细介绍在曲线（直边）网格上的对数欧几里得高阶度量插值。其次，针对这种度量插值，我们详细介绍物理坐标中的一阶和二阶导数。第三，为表示区域边界，我们针对二维和三维非均匀有理B样条模型提出一种隐式表示。第四，针对这种隐式表示，我们求得其一阶和二阶导数。度量插值和隐式表示的导数使得我们能够使用牛顿法最小化目标函数。通过这种二阶最小化，生成的网格能够同时匹配目标度量的曲线特征和目标边界。在曲线（直边） r-自适应中，利用二阶优化同时匹配度量和几何是一项前所未有的能力。这项能力对于全局和基于腔体的曲线（直边）高阶网格自适应至关重要。

关键词：r-适应，网格优化，曲线高阶网格

*通讯作者电子邮箱：guillermo.aparicio@bsc.es (Guillermo Aparicio-Estrems), abel.gargallo@bsc.es (Abel Gargallo-Peir´o), xevi.roca@bsc.es (Xevi Roca)

提交至《计算机辅助设计》的预印本 *2023*年*3*月*22*日

1. 引言

在不改变网格拓扑的情况下重新定位网格节点的能力称为 r-适应性，是许多基于 PDE 的自适应应用中的关键组成部分 [1, 2, 3]。在这些应用中，为了提高解的精度，误差指示器或估计器会确定网格的目标拉伸和对齐方式。随后，为匹配这些目标特征， r-适应过程会修改整个网格（全局） [4, 5] ，或修改先前重新网格化的空腔（局部） [6, 7, 8]。

无论哪种情况， r-自适应都有助于在直边网格[3, 4, 6, 9, 10]上自由度数量固定时提高解的精度。然而，在许多应用中，直边网格可能并非高效的支撑结构。尤其是在某些应用中，为了匹配高度弯曲的解特征，必须人为增加额外的直边网格单元 [11]。

为有效匹配弯曲的解特征，许多研究人员近来开始采用弯曲高阶网格。这些网格可通过各向异性过程 [12], 、针对弯曲边的测地线方法 [13, 14], 、激波跟踪方法 [15, 16, 17], 以及变形类比方法 [18, 19]，以逐点变化的方式进行拉伸和对齐。或者，与直边单元 [4, 5], 一样，弯曲 r-自适应也可由畸变度量驱动。这些度量在逐点定义，并考虑目标变形矩阵 [20] 或目标度量 [21]。

在自适应应用中，目标变形和度量事先并未知晓。这些目标场是在事后根据最后一个网格上的解重构得到的。具体而言，该网格承载了目标场最终的离散表示。这种离散表示对于在自适应过程中插值所需的场值至关重要。然而，为了同时保持几何精度，网格自适应过程必须设计为能够匹配目标曲线边界。因此，要实现高阶自适应，我们需要能够在高阶网格上插值目标场，同时匹配目标边界。

鉴于上述问题，我们旨在采用牛顿优化，使基于畸变的曲线 r自适应适配离散高阶度量场和几何模型。本工作扩展了我们此前的工作 [22]。在此扩展中，我们还详细说明了如何将基于优化的r自适应与有效网格到有效网格的弯曲方法兼容地结合起来。为此，我们提出了一种隐式模型表示，用于度量

网格与目标几何之间的偏差。

对于基于优化的r自适应，我们需要三个现有要素。首先，为了最小化畸变，我们使用 [23, 24]中的专用求解器。其次，我们将度量场表示为曲线高阶网格上的对数欧几里得高阶度量插值 [25] 。第三，我们采用与 [26] 中类似的方法，在曲线背景网格中定位物理点。我们还需要将基于畸变的曲线 r自适应框架 [21]扩展到离散度量场。

为了匹配曲线边界，我们还需要三个现有要素。首先，采用一种非插值方法来匹配目标曲线几何[27, 28]。其次，采用一种隐式 CAD 几何表示方法，用于表示二维NURBS曲线和三维NURBS曲面 [29] ，或嵌入式 NURBS 实体 [30] ，例如三维曲线。第三，采用一系列连接和修剪操作，以组合各个实体的隐式表示[29, 31]。

为了将基于优化的 r自适应与网格弯曲相结合，本文的主要创新体现在两个方面。首先，对于非插值网格弯曲方法，我们提出了一种模型隐式化 [29, 30, 31]。其次，我们还给出了模型隐式表示的一阶和二阶导数。如 [22], 中所述，我们还给出了对数欧几里得高阶度量插值在物理坐标下的一阶和二阶导数。模型隐式化导数和度量插值导数对于使用牛顿法进行畸变最小化至关重要，其目标是实现曲线几何。这种最小化为曲线 r自适应带来了前所未有的二阶优化结果：针对曲线（直边）几何，在曲线（直边）网格上实现离散高阶度量表示。

本文旨在通过牛顿法实现 r自适应，但并不关注 r自适应，也不关注 h自适应循环。具体而言，我们详细介绍如何优化高阶网格坐标，使其符合目标度量和曲线边界。随后，为验证该方法及其相应导数，我们对初始各向同性和各向异性直边网格进行优化。这些结果不涉及任何自适应循环，因为我们希望证明牛顿法是否可用。

本文其余部分组织如下。第2节概述相关工作。第3节介绍高阶单元度量感知测度的预备知识。第4节详细介绍高阶度量插值及其导数。第5节提出一种

用于 NURBS 模型的隐式表示，并求得该表示的一阶和二阶导数。此外，我们详细介绍了兼顾度量偏差和几何偏差的目标函数。第6节展示了针对不同几何、网格和度量应用牛顿法所得的结果。最后，我们给出结论。

2. 相关工作

接下来，我们概述与匹配目标离散场和目标几何模型相关的工作。关于离散场匹配，我们概述了目标变形、目标度量以及离散场表示方面的研究。对于几何模型匹配，相关工作涉及非插值网格弯曲、曲面拟合方法和隐式几何表示。

关于变形矩阵的匹配，文献 [20]详细介绍了将曲线 r-自适应应用于离散目标场的畸变优化。该方法非常适用于仿真驱动的 r-自适应 [26, 32]。它通过在离散场上插值目标矩阵，评估物理点处的畸变。尽管目标矩阵的导数并非为零，该方法仍假设它们为零。此外，它还假设二阶导数为零。由于该方法将非零导数视为零，尽管采用了牛顿法，曲线 r-自适应最小化实际上对应于拟牛顿法。

为了使曲线 r自适应网格与解析场相匹配，可以采用基于畸变的牛顿最小化方法 [21, 23, 24]。解析度量的公式在 [21], 中推导，同时在 [23, 24] 中提出了专用的全局化策略和预条件牛顿共轭梯度法，以最小化网格畸变。由于该方法处理的是解析度量，因此未规定由离散高阶场表示的度量的导数。

对于离散场表示，一种方便的方法是采用对数欧几里得 [33] 高阶度量插值 [25]。这种度量插值驱动一种基于空腔的自适应方法，通过局部平滑曲线二次边来改进重新网格化空腔。为平滑这些边，该方法会优化中间节点位置。优化仅使用对数欧几里得度量插值关于曲线边坐标的一阶导数。因此，该方法不会

提供离散度量场在物理坐标中的一阶和二阶导数。

文献 [27, 28] 提出了以非插值方式逼近目标几何的高阶网格弯曲方法。具体而言，研究开发了一种新方法，可同时针对单元质量和基于距离的几何近似对弯曲高阶网格进行优化。为此，提出了一种罚函数法来求解约束最小化问题。

文献 [34] 介绍了以场插值为基础的既有曲面拟合方法。这些方法专为根据解处理动态变化几何而设计。为此，需要使用背景网格对解进行插值。此外，背景网格的分辨率决定了动态几何的精度。因此，对于 CAD 模型，背景网格分辨率控制着几何精度。

与既有方法不同，隐式 CAD 几何表示方法无需使用背景网格，即可提供用于几何近似的场 [29, 30, 31]。具体而言，首先计算每个 NURBS 实体的隐式表示。这适用于二维NURBS曲线和三维NURBS曲面 [29] ，也适用于一般的嵌入式 NURBS 实体 [30]。随后，应用凸包合取与归一化、凸包裁剪以及 NURBS合取，将各个实体的表示组合起来 [29, 31]。即使这些表示并非模型的完整表示，也能作为一种实用工具，以实体为单位表示模型。

3. 预备知识：高阶单元的度量感知指标

本节回顾文献 [21] 中关于配备度量的高阶单元的基于雅可比矩阵的质量度量的定义。对于单纯形 [5], ，定义并计算基于雅可比矩阵的度量需要三个单元：主单元、理想单元和物理单元；线性三角形的情形见图 1。主单元（E^M）是定义等参映射所依据的单元。等边单元 $\left(E^{\triangle}\right)$ 表示各向同性情形下的目标构型。物理单元（E^P）是待测量的单元。

为总结 [21], 中的结果，我们给出以等边单元 $E^{\triangle}$ 表示的度量畸变度量表达式。首先，需要计算从主单元到等边单元和物理单元的映射，分别记为 $\phi_{\triangle}$ 和 ϕ_P。通过这些映射，

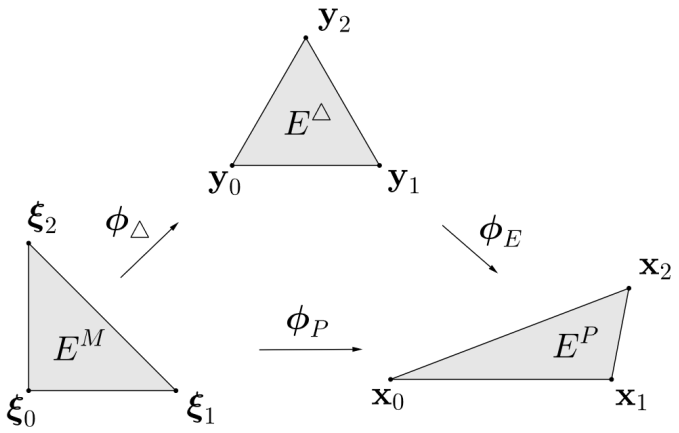


图 1：线性情形下主单元、理想单元与物理单元之间的映射。

我们通过复合确定等边单元与物理单元之间的映射

$$\boldsymbol{\phi}_E : E^{\triangle} \xrightarrow{\boldsymbol{\phi}_{\triangle}^{-1}} E^M \xrightarrow{\boldsymbol{\phi}_P} E^P.$$

如 [21], 中所述，我们定义配备逐点度量 $\mathbf{M}$ 的高阶单元 E^P 在点 $\mathbf{y} \in E^{\triangle}$ 处的逐点畸变度量：

$$\mathcal{N}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y}) = \frac{\operatorname{tr}\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M}\left(\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right) \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)}{d\left(\det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M}\left(\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right) \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)\right)^{1/d}}, \tag{1}$$

其中，映射 $\boldsymbol{\phi}_E$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y}) := \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_P(\boldsymbol{\phi}_{\triangle}^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_{\triangle}^{-1}(\mathbf{y}).$$

这里，$\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_P$ 和 $\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_{\triangle}$ 分别表示物理映射和等边变换的雅可比矩阵。具体而言，物理映射可以用 d-单纯形形函数 N_i表示，即

$$\boldsymbol{\phi}_P(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_i,$$

其中，$n = \binom{d+p}{p}$ 是节点数，$\boldsymbol{\xi}$ 是主坐标，而$\mathbf{x}_i$ 表示高阶节点的物理坐标。此外，

等边映射可以用线性形函数N_i表示，即

$$\boldsymbol{\phi}_{\triangle}\left(\boldsymbol{\xi}\right)=\sum_{i=1}^{d+1}N_i(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}_i,$$

其中$\mathbf{y}_i$ 是正单纯形的坐标 d。

请注意， $\mathcal{N}$ 是一个非线性算子，它将正单纯形与物理单元之间的映射转换为从一个点到标量的映射。在本文中，对于算子，我们采用不带括号的标准记法。

请注意，畸变度量与度量$\mathbf{M}(\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y}))$的计算无关，无论采用解析表示还是离散表示。

为了检测倒置单元 [35, 36, 37, 38]，我们对方程（1）分母中的行列式进行正则化。具体而言，我们定义

$$\sigma_0=\frac{1}{2}(\sigma+|\sigma|),$$

其中

$$\sigma=\det\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)\sqrt{\det\left(\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)\right)}.$$

然后，我们将物理单元 E^P 在点$\mathbf{y}\ \in E^{\triangle}$ 处的逐点正则化畸变度量定义为

$$\mathcal{N}_0\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y}):=\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)\cdot\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y}))}{d\sigma_0^{2/d}},\tag{2}$$

其中，我们引入下标 0，以区分正则化算子与非正则化算子。此外，我们定义相应的逐点质量度量

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})=\frac{1}{\mathcal{N}_0\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})}.\tag{3}$$

最后，我们将正则化单元畸变定义为

$$\eta_{(E^P,\mathbf{M})}:=\frac{\int_{E^{\triangle}}\mathcal{N}_0\boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}}{\int_{E^{\triangle}}1\ d\mathbf{y}},$$

及其对应的质量

$$\mathrm{q}_{(E^P,\mathbf{M})}=\frac{1}{\eta_{(E^P,\mathbf{M})}}.\tag{4}$$

我们可以根据给定的畸变度量 [21, 23, 24, 39]，通过移动网格节点来改进网格配置。 [21]中提出了一种对配备目标度量 $\mathbf{M}$ 的网格 $\mathcal{M}$ 进行畸变（质量）优化的方法，该度量描述了网格单元所需的对齐和拉伸情况。要优化给定的网格 $\mathcal{M}$，首先定义网格畸变如下:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) := \sum_{E^P \in \mathcal{M}} \int_{E^\triangle} \left(\mathcal{N}_0 \boldsymbol{\phi}_E(\mathbf{y})\right)^2 \, d\mathbf{y}, \tag{5}$$

这使得可以提出以下全局最小化问题

$$\mathcal{M}^* := \operatorname{argmin}_{\mathcal{M}} \mathcal{F}(\mathcal{M}), \tag{6}$$

根据 $\mathcal{F}$ 改进网格配置。特别是，本文中，公式（6）中的最小化问题的自由度对应于网格节点的空间坐标。

为评估公式（6）中提出的畸变最小化公式，需要输入度量。文献 [21] 已将所述 r 自适应程序应用于解析度量。在下一节中，我们将详细介绍将所提出的框架扩展到离散度量所需的插值过程。

4. 对数欧几里得度量插值

本节将阐述一种度量插值过程，该过程既可用于畸变评估（公式（2）），也可用于其优化（公式（6））。第 4.1 节将首先详细介绍针对线性单元和高阶单元的对数欧几里得度量插值，该方法分别首次发表于 [33] 和 [25, 40], 。然后，在第 4.2 节中，我们将介绍本研究的一项贡献：对数欧几里得插值的梯度和海森矩阵。其计算结果将用于畸变最小化问题。

4.1. 度量插值

本节介绍背景网格上的对数欧几里得度量插值的定义。首先，我们结合相应示意图介绍映射及其参数所需的记号。其次，我们详细说明插值过程。

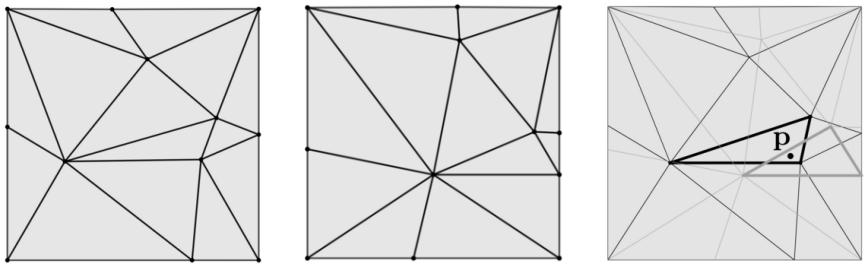


图2：点定位：(a) 物理网格，(b) 背景网格，以及 (c) 对应物理单元和背景单元中的一个点$\mathbf{p}$（粗边）。

为了计算公式（2）中采用离散度量的度量感知畸变度量，需要两种网格。一方面，物理单元网格 $\mathcal{M}$（图2(a)）是对单元进行变形以求解公式（6）所述问题的区域。另一方面，ˆ 背景网格 $\mathcal{M}$（图2(b)）是一种将离散度量值作为节点场存储的网格。

为评估逐点度量感知畸变度量，我们需要计算逐点度量值的插值。为此，需要对两个网格进行定位 [26, 41, 42]。具体而言，一个物理点$\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ 位于背景网格 $\mathcal{M}$ 中，度量在此处进行插值，见图2(c)。接下来，我们将介绍此定位过程所需的单元和映射。

我们通过主单元 E^M对等边单元上的式 (2) 所示畸变度量进行积分。具体而言，为进行度量评估，我们通过 $\boldsymbol{\phi}_P$将每个积分点 $\boldsymbol{\xi} \in E^M$ 映射到物理单元 E^P上的一个点$\mathbf{p}$，见图3。为计算$\mathbf{p}$ 处的度量，我们需要在背景网格中定位$\mathbf{p}$ ，度量值ˆ存储于此，见图3中 E^P 与背景单元 E^P 的交线。此外，图3展示了如何从求积点获取用于插值度量的坐标。具体而言，我们将参考点 $\boldsymbol{\xi} \in E^M$ 映射到物理点$\mathbf{p} = \boldsymbol{\phi}_P(\boldsymbol{\xi}) \in E^P$，并将其ˆ识别为背景网格上的点 $\hat{\mathbf{p}} \in E^P$，其原像为背景参考点 $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) \in E^{\hat{M}}$。

给定一个物理点$\mathbf{p}$，我们方便地用 ψ 表示从包含$\mathbf{p}$ 的背景单元到坐标的任意映射

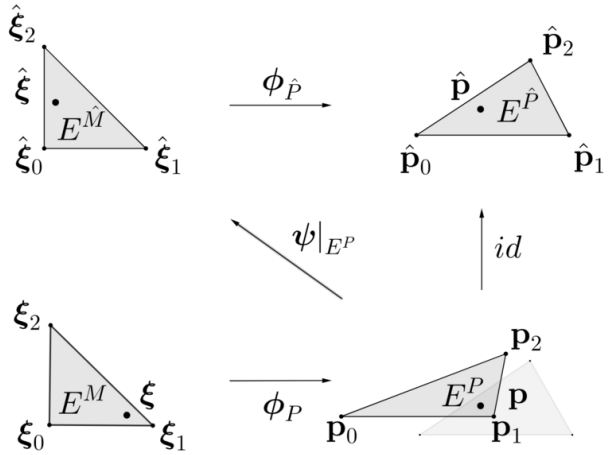


图3：主单元与物理单元之间的映射（下方），以及它们的背景对应物（上方）。

ˆ在背景主单元 E^M 中。使用此记法，我们将物理点$\mathbf{p}$ 投影到背景ˆ主单元 E^M 中的点 $\boldsymbol{\xi}$，理解为对非线性函数 $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \psi(\mathbf{p})$ 的求值。

为了计算这个非线性函数，我们利用以下事实：在物理单元 E^P 与固定背景ˆ单元 E^P 的交线上定义的 $\psi|_{E^P}$ 的表达式为

$$\begin{array}{rccc} \psi|_{E^P}: & E^P \cap E^{\hat{P}} & \to & E^{\hat{M}} \\ & \mathbf{p} & \mapsto & \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1}(\mathbf{p}). \end{array} \tag{7}$$

具体而言，我们通过对平方距离应用牛顿最小化，求解图像项中的非线性逆表达式，即公式 (7)。也就是说，如 [41]，第2.3节所述，我们求解

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \operatorname{argmin} \lim_{\hat{\zeta}} \left|\left| \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}\left(\hat{\zeta}\right) - \mathbf{p} \right|\right|^2.$$

结果是背景主单元中点坐标的数值近似。另一种替代方法 [26] 是求解向量方程的零点

$$\boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}\right) - \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

计算出与给定物理点相关联的背景主坐标后，需要在相应的主坐标处插值背景网格所支持的度量。为此，我们采用 [33, 25]中提出的对数欧几里得插值:

$$\mathbf{M}\left(\hat{\mathbf{N}}\right) := \exp\left(\mathbf{L}(\hat{\mathbf{N}})\right), \quad \mathbf{L}(\hat{\mathbf{N}}) := \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{N}_j \log \hat{\mathbf{M}}_j, \tag{8}$$

其中，对于主单元 E^{M} 的第 j 个节点，$\mathbf{M}_j$ 和 N_j 分别表示对应的度量值和形函数。此外，$\mathbf{N}$表示所有形函数，$n = \binom{d+p}{p}$ 是节点数，而p是插值次数，对应于主单元 E^{M} 的多项式次数。最后，$\mathbf{M}(\mathbf{N})$ 由基于特征值的矩阵指数函数表征

$$\mathbf{M}\left(\hat{\mathbf{N}}\right) = \mathbf{U} \cdot \exp \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

其中，$\mathbf{D}$, $\mathbf{U}$ 由矩阵$\mathbf{L}(\mathbf{N})$ =的特征值分解得到：$\mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$。最后，对于每个物理点$\mathbf{p}$，度量插值为$\mathbf{M}\left(\mathbf{N}(\psi(\mathbf{p}))\right)$。

4.2. 梯度和海森矩阵

本节给出以物理坐标表示的背景网格上度量插值的梯度和海森矩阵表达式。为此，我们先详细说明单个单元上的度量插值情况，然后再介绍背景网格上的情况。具体而言，我们的方法使用了[43]中给出的特征值分解的梯度和海森矩阵。

为计算度量 $\mathbf{M}$ 的导数，我们首先对公式 (9) 中给出的基于特征值的指数矩阵函数求导，然后对公式 (8) 中给出的$\mathbf{L}$ 函数求导。记x_j $\mathbf{p}$ 的坐标，并记 $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_{jk} := \partial_j \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}$ 为关于$\mathbf{p}$的物理坐标的偏导数，我们便可计算公式 (8) 中度量插值的空间导数。具体而言，一阶导数为

$$\partial_j \mathbf{M}(\hat{\mathbf{N}}) = \partial_j \exp \mathbf{L}(\hat{\mathbf{N}}) = \partial_j \left(\mathbf{U} \cdot \exp \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right) = \\ (\partial_j \mathbf{U}) \cdot \exp \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot (\partial_j \exp \mathbf{D}) \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \exp \mathbf{D} \cdot \left(\partial_j \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right),$$

二阶导数为

$$\partial_{jk}\mathbf{M}(\hat{\mathbf{N}}) = \partial_{jk}\exp\mathbf{L}(\hat{\mathbf{N}}) = \partial_{jk}\left(\mathbf{U}\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right) = (\partial_{jk}\mathbf{U})\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \partial_{k}\mathbf{U}\cdot(\partial_{j}\exp\mathbf{D})\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \partial_{k}\mathbf{U}\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\left(\partial_{j}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right) + (\partial_{j}\mathbf{U})\cdot\partial_{k}\exp\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U}\cdot(\partial_{jk}\exp\mathbf{D})\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U}\cdot\partial_{k}\exp\mathbf{D}\cdot\left(\partial_{j}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right) + (\partial_{j}\mathbf{U})\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\partial_{k}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U}\cdot(\partial_{j}\exp\mathbf{D})\cdot\partial_{k}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U}\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\left(\partial_{jk}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right).$$

注意，由于矩阵 $\mathbf{D}$ 是对角矩阵，因此有

$$\begin{aligned}\partial_{j}\exp\mathbf{D} &= \exp(\mathbf{D})\cdot\partial_{j}\mathbf{D},\\ \partial_{jk}\exp\mathbf{D} &= \exp(\mathbf{D})\cdot(\partial_{k}\mathbf{D}\cdot\partial_{j}\mathbf{D} + \partial_{jk}\mathbf{D}).\end{aligned}$$

所给出的度量一阶和二阶导数分别需要特征值分解（特征值与特征向量）的一阶和二阶空间导数。相关计算列于附录 A 节。

此外，特征值与特征向量的导数取决于公式 (8) 中给出的函数 $\mathbf{L}$ 的导数。具体而言，它们为

$$\nabla\mathbf{L} = \sum_{j}\left(\log\hat{\mathbf{M}}_{j}\right)\nabla\hat{N}_{j},\quad \nabla^{2}\mathbf{L} = \sum_{j}\left(\log\hat{\mathbf{M}}_{j}\right)\nabla^{2}\hat{N}_{j},$$

其中，∇ 是关于物理坐标的梯度。因此，为了在物理点 $\mathbf{p}$处对度量插值 $\mathbf{M}\left(\hat{\mathbf{N}}(\psi(\mathbf{p}))\right)$ 求导，需要公式 (7) 中给出的映射 ψ 以及形函数 $\mathbf{N}$ 的导数。

$\psi|_{E^P}$ 由于参数空间各对应的物理单元上的 ϕ^{-1} 各项给出。为求得形函数 $\mathbf{N}$ 关于物理坐标 $\mathbf{p}$的导数，我们考虑复合 $\mathbf{N}\circ\psi|_{E^P}$ and 以及映射 $\psi|_{E^P}$ 在每个片 $E^P\cap E^P$处的限制所涉及的链式法则。最终得到梯度

$$\nabla\hat{\mathbf{N}} = \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}^{-1}_{\hat{P}}, \tag{10}$$

其中，$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}$ 是相对于 $\boldsymbol{\xi}$ 坐标的梯度，而海森矩阵

$$\nabla^{2}\hat{N}_{j} = \left(\nabla\boldsymbol{\phi}^{-1}_{\hat{P}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\nabla^{2}_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}\hat{N}_{j}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}^{-1}_{\hat{P}} + \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}\hat{N}_{j}\cdot\nabla^{2}\boldsymbol{\phi}^{-1}_{\hat{P}}, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1} &= \left(\nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}} \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}\right)^{-1}, \\ \nabla^2 \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1} = \nabla\left(\left(\nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}} \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}\right)^{-1}\right) &= -\nabla \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1} \cdot \nabla_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}^2 \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}} \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}_{\hat{P}}^{-1}. \end{aligned}$$

5. 隐式 CAD 表示：度量与几何感知优化

本文提出一种通过度量几何偏差的隐式化方法实现的高阶网格弯曲方法。首先，在第5.1节中，我们介绍用于网格弯曲过程的模型隐式化。然后，在第 5.2 节中，我们详细说明隐式表示的一阶和二阶导数。最后，在第5.3节中，我们探讨如何采用罚函数法求解弯曲问题对应的约束二阶最小化过程。

5.1. 隐式 *CAD* 表示

本节介绍二维曲线以及三维曲线和曲面的逐实体 CAD 表示。为此，我们考虑嵌入式 NURBS [30], 的隐式表示，以及针对隐式表示的布尔代数运算 [29, 31]。随后，我们将这些表示组合起来，得到 CAD 模型的隐式表示。最后，我们详细介绍所采用方法的算法。

我们考虑由一系列 NURBS 实体组成的 CAD 模型 Λ 。这些 NURBS 实体可以分解为一系列贝塞尔片Γ_i, $i = 1, \ldots\ldots n$。具体而言，我们用参数化来描述嵌入在 D 维空间中的 d 维贝塞尔片$\Gamma \subset \mathbb{R}^D$

$$\varphi_\Gamma : [0,1]^d \to \mathbb{R}^D, \ \ \varphi_\Gamma(u) \in \Gamma, \ u \in [0,1]^d.$$

此外， Γ 的隐式表示可以按照 [30] 中的方法获得

$$\gamma_\Gamma : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}, \ \ \gamma_\Gamma(x) = 0 \text{ if and only if } x \in \Gamma.$$

我们的目标是获得模型 Λ 的表示 γ_Λ，该表示由各片 Γ_i 的表示 γ_{Γ_i} 构成。为组合这些隐式表示，我们对实值函数 [31] 执行代数布尔运算。

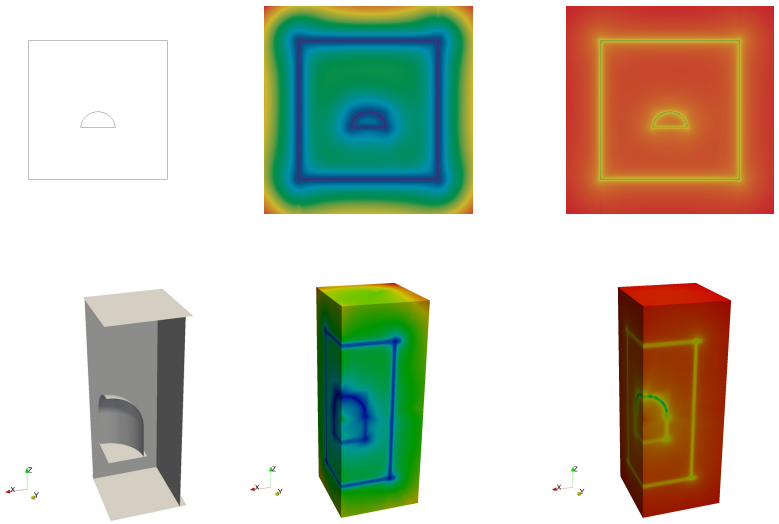


图 4：二维 CAD 几何（第一行）和三维 CAD 几何（第二行）的隐式表示。各列依次展示 CAD 模型，以及采用线性刻度和对数刻度的隐式表示。

图 4 展示了一个二维模型和一个三维模型。它们通过 B´ézier 参数化 φ_{Γ_i} 映射，其水平集由隐式函数 γ_Λ 表示。水平集分别以线性和对数刻度显示。如图所示，这些函数在模型处的数值为零。此外，它们在远离模型区域时平滑递增。

CAD 模型的隐式表示需要对 NURBS 实体进行节点预处理。具体而言，需要执行两次节点插入过程 [29]。第一次节点插入用于将 NURBS 实体分解为 B´ézier 片。第二次节点插入用于避免 $p \geq 3$ 次曲线发生自交。在这种情况下，我们执行自交检测过程。请注意，自交点由方程 $\|\nabla\gamma_\Gamma\| = 0$ 给出。然后，我们通过沿参数线进行一维二分搜索，使量 $\|\nabla\gamma_\Gamma\|^2$ 最小化，从而检测自交。

为了在对应的区域内裁剪隐式表示，我们考虑 B´zier 曲面片控制点的凸包。具体而言，对于退化情形，我们将控制点集向外延伸。为计算延伸方向，我们通过奇异值分解进行零空间计算。由此定义出一个有效的凸包。我们将此过程应用于

二维线段、三维平面、三维曲线和三维圆柱面所对应的退化情形。此外，我们还将此过程应用于近似退化情形，例如近乎平坦的曲线和曲面。

对于每个贝塞尔曲面片 Γ，我们考虑其在射影空间 $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^D\right)$ 中定义的隐式表示 γ。具体而言，曲面片控制点确定一个矩阵向量，即三维空间中的 $\mathbb{M}=(\mathbb{M}_x,\ \mathbb{M}_y,\ \mathbb{M}_z,\ \mathbb{M}_w)$，对应于射影坐标 $x,\ y,\ z$，和 w。接着，我们将点 $\mathbf{x}\in\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^D\right)$ 处的隐式表示定义为 [30] 中所示

$$\gamma(\mathbf{x}):=\det\left(\mathbb{M}(\mathbf{x})\cdot\mathbb{M}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\right),\quad \mathbb{M}(\mathbf{x}):=\mathbb{M}\ \mathbf{x}. \tag{12}$$

例如，在三维空间中，我们令 $\mathbf{x}=(x,\ y,\ z,\ 1)$，因此，$\mathbb{M}\,\mathbf{x}=\mathbb{M}_x x+\mathbb{M}_y y+\mathbb{M}_z z+\mathbb{M}_w$。最后，我们对函数 $\gamma(\mathbf{x})$ 进行归一化，确保它们在组装过程 [29]中相匹配。具体而言，我们将归一化函数 $\hat{}\gamma$ 定义为

$$\hat{\gamma}:=\frac{\gamma}{\|\nabla\gamma\|}. \tag{13}$$

方程（13）中描述的贝塞尔曲面片的隐式函数延伸至无限参数空间。因此，通常采用凸包运算对曲面片进行修剪，以确保该函数不会超出曲面片边界 [29, 31]。具体而言，我们首先计算 CH (Γ)，即贝塞尔曲面片 Γ的凸包的隐式表示。然后，为了获得经 CH (Γ) 修剪后的 Γ 的隐式表示，我们使用文献 [31] 提出的裁剪函数，记作 trim

$$\gamma_{\overline{\Gamma}}:=\hat{\gamma}_{\mathrm{CH}(\Gamma)}\ \mathrm{trim}\ \hat{\gamma}_{\Gamma}=\sqrt{\hat{\gamma}_{\Gamma}^2+\left(\frac{\sqrt{\hat{\gamma}_{\Gamma}^4+\hat{\gamma}_{\mathrm{CH}(\Gamma)}^2}-\hat{\gamma}_{\mathrm{CH}(\Gamma)}}{2}\right)^2}, \tag{14}$$

其中，γ_Γ 表示贝塞尔片 Γ，见公式（12）。方程（14）的修剪操作在所有满足$\hat{}\gamma_\Gamma\neq 0$的点处均为二阶可微。这里，函数$\gamma_\Gamma$ 是贝塞尔片 Γ 在其参数域 Dom Γ 中的隐式表示，该参数域由非均匀有理B样条凸包 CH (Γ)确定。

对于给定模型 $\Lambda=\{\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_n\}$，其隐式化 γ_Λ 通过对 B´ezier 片 Γ_i[29]的隐式化 γ_{Γ_i} 进行 r合取 $\wedge$ 得到。具体而言，对于每个B´ezier 片 Γ_i，我们递归地更新模型

算法 1 隐式化

输入： $\Lambda := \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots, \Gamma_n\}$

输出： γ_Λ

1: **对于** $i = 1, \ldots, n$ **do**
2: $\gamma_{\Gamma_i} = \Gamma_i$ 的归一化隐式化
3: $\hat{\gamma}_{\mathrm{CH}(\Gamma_i)} = \Gamma_i$凸包的归一化隐式化，$\mathrm{CH}(\Gamma_i)$
4: $\gamma_{\overline{\Gamma}_i}$ =使用 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma_i}$修剪 $\hat{}\gamma_{\Gamma_i})$
5: **如果** $i = 1$，**则**
6: $\gamma_\Lambda \leftarrow \gamma_{\overline{\Gamma}_1}$
7: **else**
8: $\gamma_\Lambda \leftarrow \gamma_\Lambda \wedge \gamma_{\Gamma_i}$ r-合取
9: **结束如果**
10: **结束循环**

表示如下

$$\gamma_\Lambda \leftarrow \gamma_\Lambda \wedge \gamma_{\overline{\Gamma}_i} := \gamma_\Lambda + \gamma_{\overline{\Gamma}} - \sqrt{{\gamma_\Lambda}^2 + {\gamma_{\overline{\Gamma}}}^2}. \tag{15}$$

为了获得贝塞尔片 Γ 的凸包表示 $\mathrm{CH}(\Gamma)$，我们对凸包实体的超平面函数应用 r-合取。具体而言，对于凸包 $\mathrm{CH}(\Gamma)$ 的每个超平面实体 H，我们考虑其单位法向分量 $\mathbf{n}$ 和仿射项 b。于是，H 的隐式表示为

$$\gamma_{\mathrm{H}}(\mathbf{x}) := \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + b. \tag{16}$$

在我们的情形中，表示 γ_{H} 的符号选择为：当 $\gamma_{\mathrm{H}} < 0$ 位于 $\mathrm{CH}(\Gamma)$ 所围成的凸区域之外时取该值，否则取 $\gamma_{\mathrm{H}} \geq 0$。接下来，我们对每个超平面 H 应用 r-合取运算，以获得凸包表示 $\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma)}$，参见公式 (15)。最后，通过应用公式 (13)，得到其归一化版本 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma)}$。

在算法 1 中，我们描述如何获得模型 Λ的隐式表示γ_Λ。在第 2 行，我们计算其每个贝塞尔片 Γ_i 的隐式函数 γ_{Γ_i}，并对其进行归一化，见方程（12）和（13）。然后，在第 3 行，我们利用贝塞尔控制点的凸包性质进行修剪 [29]。我们首先通过对超平面函数进行成对 r-合取，获得凸包 $\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma_i}$的隐式表示$)$，见方程（16）。然后，我们计算其归一化表示 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma_i)}$,

见方程（13）。在第 4 行，我们根据 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma_i)}$对贝塞尔片表示 $\hat{}\gamma_{\Gamma_i}$ 进行修剪，见方程（14）。所得表示记为 $^{\gamma}{}_{\Gamma_i}$。最后，在第 5–9 行，我们通过对 $^{\gamma}{}_{\Gamma_i}$进行成对 r-合取，获得模型 Λ 的隐式表示，见方程（15）。

5.2. 梯度和海森矩阵

接下来，我们介绍几何隐式化的梯度和海森矩阵。在第5.1节中，我们通过凸包和 B´ézier 片归一化表示的修剪与 r-合取操作来描述几何隐式化。因此，本节将介绍修剪与 r-合取操作的导数。为求完整，我们在附录B中详细说明凸包和 B´ézier 片归一化表示的导数。

如第5.1节所述，我们执行 an r-合取操作以获得模型表示。导数的计算方式十分直接。令 $\nabla f * \nabla g$ 表示系数为 $\partial_j f \partial_k g$ 的矩阵，其中 $j,\ k = 1$, ..., d。那么，式 (15) 中给出的 r- 合取的导数为

$$\nabla\ f \wedge g = \nabla f + \nabla g - \nabla\ \sqrt{f^2 + g^2}, \tag{17}$$

and

$$\nabla^2\ f \wedge g = \nabla^2 f + \nabla^2 g - \nabla^2\ \sqrt{f^2 + g^2}, \tag{18}$$

其中

$$\nabla\ \sqrt{f^2 + g^2} = \frac{f\nabla f + g\nabla g}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \tag{19}$$

and

$$\nabla^2\ \sqrt{f^2 + g^2} = \frac{\nabla f * \nabla f + f\nabla^2 f + \nabla g * \nabla g + g\nabla^2 g}{\sqrt{f^2 + g^2}} - \frac{\nabla\sqrt{f^2 + g^2} * \nabla\sqrt{f^2 + g^2}}{\sqrt{f^2 + g^2}}. \tag{20}$$

根据式 (15)，我们认为 $f := \gamma_\Lambda$ 且 $g := \gamma_{\Gamma^\circ}$。

与 r-合取类似，我们计算修剪操作的导数，如方程（14）所示。注意到以下关系后，我们简化了计算：

$$\tilde{h} := f\ \mathrm{trim}\ h = \sqrt{f^2 + g^2} \quad \text{for} \quad g := \frac{\sqrt{h^4 + f^2} - f}{2},$$

其中，按照方程（14），我们考虑 $f := \hat{\gamma}_{\mathrm{CH}(\Gamma)}$，$h := \hat{\gamma}_{\Gamma}$，以及$h := \gamma_{\Gamma^\circ}$。然后，为了求得修剪操作的导数，我们对项 $\sqrt{f^2+g^2}$ 求导，见方程（19）和（20）。在这种情况下，g 的导数可按如下方式计算：

$$\nabla g = \frac{1}{2}\left(\frac{2h^3\nabla h + f\nabla f}{\sqrt{h^4+f^2}} - \nabla f\right), \tag{21}$$

and

$$\nabla^2 g = \frac{1}{2}\left(\frac{2h^2\left(h\nabla^2 h + 3\nabla h * \nabla h\right) + f\nabla^2 f + \nabla f * \nabla f}{\sqrt{h^4+f^2}} - \right.$$
$$\left. \frac{\nabla\sqrt{h^4+f^2} * \nabla\sqrt{h^4+f^2}}{\sqrt{h^4+f^2}} - \nabla^2 f\right),$$

其中，术语 $\nabla\sqrt{h^4+f^2}$ 可由函数 f 和 h^2 根据方程（19）计算得到。

我们可以看到，r-合取和修剪操作的导数都需要凸包和 B´zier 片的归一化表示的导数。为求完整起见，我们在附录B中详细说明这些导数。

5.3. 最小化度量偏差和几何偏差

本节将介绍对文献 [27, 44] 中提出的方法的修改，该方法用于生成兼具最佳网格质量和几何精度的弯曲高阶网格。此技术将畸变度量与几何 L^2-差异度量合并为一个目标函数。单元畸变项考虑网格质量，而 L^2-差异项则考虑网格近似目标几何所引入的几何误差。在本文中，目标几何采用隐式表示。

我们的输入数据是一个 CAD 模型 Λ，由多个几何实体构成，其排列方式满足

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k,$$

其中，每个几何实体都由子实体组成。这些子实体在二维中是曲线，在三维中是曲线和曲面。在三维中，我们认为曲线直接嵌入其所在空间。

在我们的表示中，我们认为曲线是线段的像。此外，我们认为曲面是矩形区域的像。对于三维情形，我们采用曲线和曲面的隐式化。这样，我们便可以使内部曲线（曲面）节点指向相应曲线（曲面）的隐式化结果。

接下来，我们提出 CAD 模型 Λ 的逐实体隐式表示，并用它来度量网格与模型之间的几何偏差。具体而言，对于每个几何实体 Λ_k，我们考虑其隐式表示，见第 5 节。该几何实体由一组边界网格实体近似表示，记为 $\partial\mathcal{M}(\Lambda_k)$。本文并非度量几何误差，而是通过水平集值平方的平均值来衡量几何偏差。位于目标 CAD 实体上时，该项为零；取平方则确保其在零水平集处可导。具体而言，该偏差度量在候选边界网格实体上积分如下：

$$\mathcal{G}\left(\partial\mathcal{M}\left(\Lambda_k\right)\right) := \int_{\partial\mathcal{M}(\Lambda_k)} \gamma^2. \tag{22}$$

请注意，模型表示 γ_{Λ_k} 在零水平集处不可微。通过考虑平方函数 ${\gamma_{\Lambda_k}}^2$，我们避免了导数奇异性。

我们的目标是确定一个在网格质量和几何偏差方面最优的物理网格 $\mathcal{M}$。首先，第3节介绍网格质量偏差项——畸变。其次，我们考虑公式（22），以计入几何偏差。最后，我们定义用于网格质量和几何偏差的泛函。

$$\mathcal{H}\left(\mathcal{M};\lambda\right) := \mathcal{F}\left(\mathcal{M}\right) + \lambda\mathcal{G}\left(\partial\mathcal{M}\right), \tag{23}$$

其中

$$\mathcal{G}\left(\partial\mathcal{M}\right) := \sum_{k=1}^{n} \mathcal{G}\left(\partial\mathcal{M}\left(\Lambda_k\right)\right),$$

并且，其中 λ 对应惩罚参数。该参数 λ 可以通过启发式方法或 [44]自动过程来选择。

为处理角点和几何边，我们区分几何中的目标点节点与目标曲线节点。对于点，我们将相应节点与相邻曲线关联。此外，对于该节点，

算法 2 畸变最小化

输入: Λ, $\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathbf{M}}$ ε, λ
输出: $\mathcal{M}^*$

$\mathbf{X} \leftarrow$坐标($\mathcal{M}$)
$\partial\mathbf{X} \leftarrow$ 坐标($\partial\mathcal{M}$)
$\mathbf{M} := \mathbf{M}\left(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{M}}, \mathbf{X}\right)$ ▷ 第 4.1 节
$\nabla\mathbf{M} := \nabla\mathbf{M}\left(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{M}}, \mathbf{X}\right)$; $\nabla^2\mathbf{M} := \nabla^2\mathbf{M}\left(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{M}}, \mathbf{X}\right)$ ▷ 第 4.2 节
$\gamma := \gamma\ (\Lambda, \partial\mathbf{X})$ ▷ 第5.1节
$\nabla\gamma := \nabla\gamma(\Lambda, \partial\mathbf{X})$; $\nabla^2\gamma := \nabla^2\gamma(\Lambda, \partial\mathbf{X})$ ▷ 第 5.2 节
$\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbf{X},\mathbf{M})$; ▷ 第3节，公式（5）
$\nabla\mathcal{F} := \nabla\mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{M}\ \nabla\mathbf{M})$; $\nabla^2\mathcal{F} := \nabla^2\mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{M}\ \nabla\mathbf{M}\ \nabla^2\mathbf{M})$
$\mathcal{G} := \mathcal{G}(\partial\mathbf{X}\ \gamma)$; ▷ 第 5 节，公式（22）
$\nabla\mathcal{G} := \nabla\mathcal{G}(\partial\mathbf{X}\ \gamma, \nabla\gamma)$; $\nabla^2\mathcal{G} := \nabla^2\mathcal{G}(\partial\mathbf{X}\ \gamma, \nabla\gamma, \nabla^2\gamma)$
$\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{F} + \lambda\mathcal{G}$ ▷ 第 5 节，公式（23）
$\mathbf{X}^* \leftarrow$ 非线性求解器 $(\mathcal{H}, \nabla\mathcal{H}, \nabla^2\mathcal{H}, \mathbf{X}\ \varepsilon)$ ▷ 第3节，公式（6）
$\mathcal{M}^* \leftarrow$ 更新 $\mathcal{M}$ 的坐标，使用$\mathbf{X}^*$

目标函数会考虑该节点到所有相邻曲线的距离度量。因此，最优节点会靠近目标点，因为它靠近所有相邻曲线。对于曲线，我们将相应节点与该曲线及相邻曲面关联。此外，对于这些节点，目标函数会考虑它们到该曲线及两个相邻曲面的距离度量。因此，最优节点会靠近目标曲线和两个相邻曲面。

在算法 2 中，我们概述畸变最小化的结构。算法的输入包括：一个 CAD 模型 Λ、一个物理网格 $\mathcal{M}$、一个配备离散度量 $\mathbf{M}$ 的背景网格 $\hat{\mathcal{M}}$、一项残差容差 ε，以及一个惩罚参数 λ。输出是优化后的物理网格 $\mathcal{M}^*$，其连接关系与 $\mathcal{M}$ 相同，并与度量 $\mathbf{M}$ 和曲线边界 Λ 匹配。为概述该算法，我们设置变量，并根据先前定义的函数及其导数，声明相应的函数及其导数。我们回顾一下，对数欧几里得插值 $\mathbf{M}$ 和隐式化 γ 的值及导数的实现细节分别详见第4节和第 5 节。请注意， $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的导数取决于相应的导数

$\mathbf{M}$ 和 γ，分别。

算法 2 的步骤如下。首先，我们分别将体网格和边界网格的坐标赋给 $\mathbf{X}$ 和 $d\mathbf{X}$。根据这些坐标，$\hat{}$我们声明离散度量 $\mathbf{M}$ 的对数欧几里得插值及其导数 $\nabla\hat{}\mathbf{M}$ 和 $\nabla^2\,\hat{}\mathbf{M}$，参见第4节。此外，根据 CAD 模型$\Lambda$，我们声明关于 $d\mathbf{X}$ 的隐式化 γ 及其导数 $\nabla\gamma$ 和 $\nabla^2\gamma$，参见第 5 节。随后，我们声明畸变泛函 $\mathcal{F}$ 和边界泛函 $\mathcal{G}$。对于这些泛函，我们还声明其导数对度量$\mathbf{M}$ 插值和几何隐式化 γ 的值及导数的依赖关系。根据这些声明，我们可以依据泛函 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 以及惩罚参数 λ，按照公式（23）设置目标函数 $\mathcal{H}$ 。最后，我们调用一个二阶非线性求解器，将目标函数最小化至残差容差 ε。由此得到自适应网格 $\mathcal{M}^*$，其坐标为 $\mathbf{X}^*$，且连接关系与 $\mathcal{M}$ 相同。

6. 结果

本节将通过一个二维示例和一个三维示例，说明我们的曲线 r 自适应畸变最小化框架如何应用于高阶度量插值，同时保留边界的隐式表示 $\hat{}$。首先，我们生成背景网格 $\mathcal{M}$，并在背景网格节点处评估解析度量$\mathbf{M}$ 。其次，我们生成初始物理网格 $\mathcal{M}$，并通过插值度量来测量其畸变（质量）。然后，按照本文提出的框架，通过重新定位节点，最小化公式（6）中提出的网格畸变问题。此外，在最后几个示例中，我们考虑一个计入几何偏差的边界项。我们重新定位节点，在保留边界曲线特征的同时，最小化畸变度量。

为总结结果，我们给出了公式 (4) 的单元质量统计表，以及初始网格和优化网格的图示。具体而言，我们展示了初始网格和优化网格的最小质量、最大质量、平均质量和标准差。值得注意的是，在所有情况下，优化网格都提高了最小单元质量，且不含任何反转单元。此外，优化后的网格由与目标度量张量对齐并

拉伸以匹配目标度量张量的单元组成。在所有图示中，网格均按照公式（3）中给出的逐点质量着色。

由于我们的目标是利用详细的导数优化网格畸变，因此我们不提供网格有效性的数学证明，而是详细说明如何以数值方式确保单元雅可比矩阵为正。具体而言，我们采用一种数值有效到有效方法，其中包含四个要点。首先，为了获得数值上有效的结果，我们确保积分点处的网格有效性。其次，为了初始化优化，我们从一个数值有效的网格开始。第三，为了惩罚倒置单元，我们修改逐点畸变（公式（3）），使雅可比矩阵非正时畸变值为无穷大。具体而言，对于非正的单元雅可比矩阵，我们将其正则化为零，因此其倒数为无穷大。需要注意的是，这些倒数出现在畸变表达式中，因此决定了无穷大的畸变值。第四，为了确保网格位移在数值上有效，我们为牛顿法配备了回溯线搜索。具体而言，如果网格优化更新在任一积分点处无效，则目标函数（公式（6））为无穷大。在这种情况下，将步长减半，直至得到有效的网格更新。

作为概念验证，我们使用 Julia 1.6.2[45]开发了一个网格优化器。为此，我们使用了以下外部软件包：Arpack v0.5.0、ILUZero v0.1.0 和 TensorOperations v3.1.0。此外，我们使用 MATLAB 偏微分方程工具箱 [46] 生成初始各向同性线性非结构化二维和三维网格（结构化网格通过细分生成），并使用 MMG 算法 [47]生成初始各向异性线性非结构化二维和三维网格。为构建几何模型，我们使用 FreeCAD 软件[48]。最后，我们使用 Quickhull（Qhull）算法 [49] 执行几何模型隐式化所需的凸包计算，参见第 5 节。

Julia 原型代码是顺序执行的，对应于本文提出的方法以及[21, 23, 24]中提出的方法的实现。在所有示例中，优化的目标都是求解非线性无约束多变量函数的最小值。具体而言，网格优化器使用无约束线搜索全局化，并采用迭代式预条件共轭梯度线性求解器。停止条件设定为：绝对均方根残差达到$\frac{\|\nabla f(\ x\ \|_{\ell^2})}{\sqrt{n}}$（针对 $x \in \mathbb{R}^n$）且小于 10^{-4}，或步长小于 10^{-4}。每个优化过程均在一台配备两颗英特尔

Xeon Platinum 8160 中央处理器的节点上执行，每颗处理器有 24 个核心，频率为 2.10 GHz，配备 96 GB 随机存取存储器。

接下来，我们首先介绍待生成网格的目标域以及域上所考虑的度量（第6.1节）。第6.2节介绍四边形域和六面体域的优化结果。第6.3节将我们提出的基于离散插值的过程与 [21, 23, 24]中的解析方法进行比较。最后，在第6.4节和第6.5节中，我们展示如何应用离散度量方法，优化与 MMG 算法生成的给定度量相适配的各向异性网格。具体而言，在第6.5节中，我们说明基于度量插值方法的网格自适应方法与曲线边界兼容。

6.1. 区域和度量

对于二维示例，我们考虑四边形域 $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$；对于三维示例，我们考虑六面体域 $\Omega = [-0.5, 0.5]^3$。每个域都配有与边界层相匹配的度量。具体而言，我们的目标度量$\mathbf{M}$ 由一个边界层度量、一个对角矩阵$\mathbf{D}$ 以及变形映射 φ 表征，其表达式如下

$$\mathbf{M} = \nabla\varphi^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla\varphi. \tag{24}$$

接下来，我们首先详细介绍边界层度量$\mathbf{D}$，然后介绍变形映射 φ。

在二维情形（三维情形）中，边界层沿 x 轴（xy 平面）对齐。它确定了沿 x 方向（xy 方向）的恒定单位单元尺寸，以及沿 y 方向（z 方向）的非恒定单元尺寸。该垂直单元尺寸随距 x 轴（xy 平面）的距离线性增大，增大系数为 $\alpha = 2$，且初始值为最小值 $h_{\min} = 0.01$ （$h_{\min} = 0.02$）。因此，在 $y = -0.5$ 和 $y = 0.5$ 之间（在 $z = -0.5$ 和 $z = 0.5$ 之间），拉伸比从 1 : 100 渐变至 1 : 1（从 1 : 50 渐变至 1 : 1）。我们将二维情形的度量定义为:

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/h(y)^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

其中，函数 h 定义为

$$h(x) := h_{\min} + \alpha|x|.$$

类似地，三维情形的度量为

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h(z)^2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

公式（24）中的变形映射 φ 使二维示例中的$\mathbf{D}$ 拉伸沿给定曲线对齐，并使三维示例中的拉伸沿给定曲面对齐。在二维情形中，我们将映射 φ 定义为

$$\varphi(x, y) = \left(x, \frac{10y - \cos(2\pi x)}{\sqrt{100 + 4\pi^2}} \right),$$

而在三维情形中，映射定义为

$$\varphi(x, y, z) = \left(x, y, \frac{10z - \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)}{\sqrt{100 + 8\pi^2}} \right).$$

图5展示了公式（25）和（26）中所给度量的各向异性商 [50] 。具体而言，度量张量$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 的各向异性商为

$$\text{quo} = \max_{i=1,\ldots,d} \sqrt{\frac{\det(\mathbf{M})}{\lambda_i^d}}$$

其中 $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, d$ 是$\mathbf{M}$的特征值。所考虑的度量$\mathbf{M}$在靠近由以下点描述的曲线处达到最高各向异性水平：$(x, y) \in \Omega$，满足 $\varphi(x, y) = (x, 0)$（二维情形）；而在靠近由以下点描述的曲面处达到最高各向异性水平：$(x, y, z) \in \Omega$，满足 $\varphi(x, y, z) = (x, y, 0)$（三维情形）。

6.2. 畸变最小化：初始各向同性直边网格

本例展示了在配备第6.1节所述度量的区域上，对初始各向同性网格进行优化所得的结果。我们首先介绍初始网格 $\mathcal{M}$ 以及对度量进行插值的背景网格 $\hat{\mathcal{M}}$ 。接着介绍优化后的网格$\mathcal{M}^*$ ，最后展示优化过程所得的结果。本文中，背景网格和物理网格的多项式次数相同。

初始网格 $\mathcal{M}$ 的多项式次数分别为 1、2 和 4。这三个网格的节点数大致相同，且在整个区域内的分辨率也大致相同。特别是在二维中，

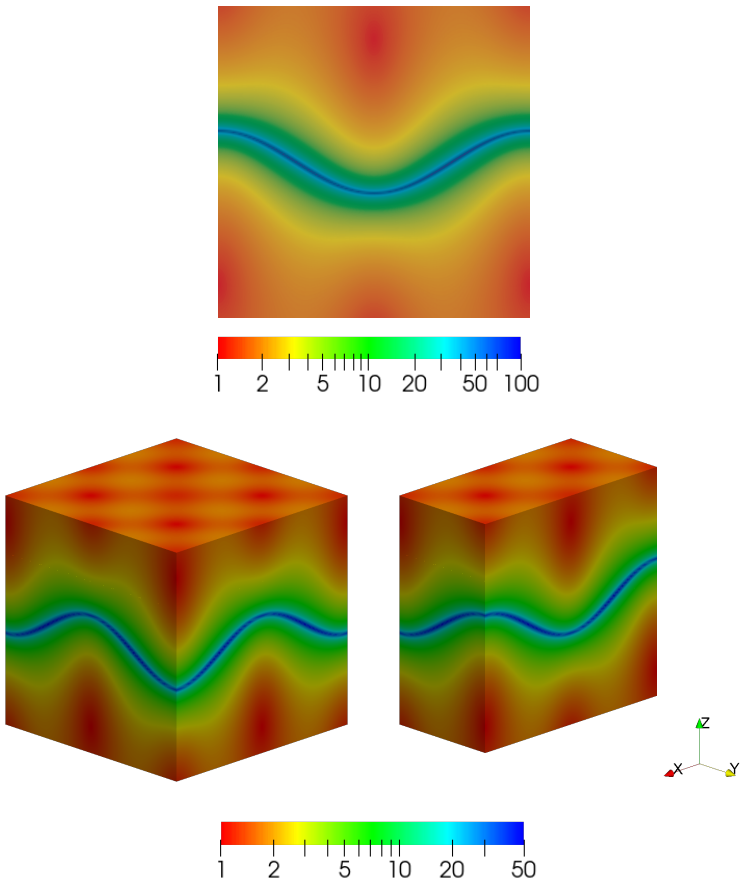


图5：目标度量的各向异性商值（对数刻度）：（上）二维情形；（左下）三维情形的边界；（右下）三维情形的实体切片。

三个初始网格分别由 312、321 和 337 个节点以及 558、144 和 38 个三角形组成，见图 6(a)、6(b) 和 6(c)。在三维中，它们分别由 2 356、2 362 和 2 373 个节点以及 11 699、1 464 和 184 个四面体组成。图 7(a)、7(b)、7(c) 和图 8(a)、8(b)、8(c) 分别展示了裁剪后的三维网格和网格边界。网格根据公式（3）中给出的逐点拉伸和对齐质量度量进行着色。蓝色点表示质量较低，红色点表示质量较高。正如我们所观察到的，位于拉伸比最高区域的单元，其质量低于位于各向同性区域的单元。

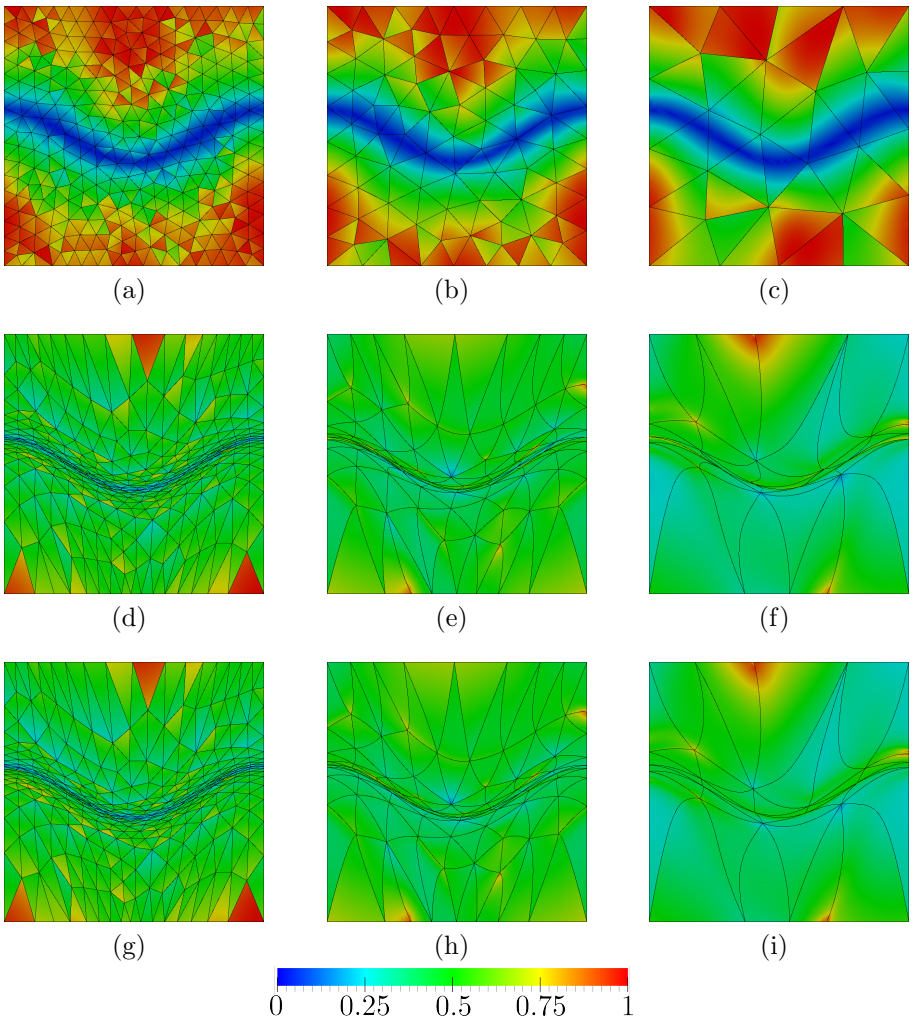


图 6：按列分别展示多项式次数为 1、2 和 4 的三角网格的逐点畸变。按行分别展示初始直边各向同性网格、采用离散度量优化的网格，以及采用解析度量优化的网格。

我们为每个网格配置公式（24）中给出的度量。度量值通过第4节介绍的对数欧几里得插值法获得。具体而言，我们对背景网格 $\mathcal{M}$ 上的度量进行插值。根据初始网格 $\mathcal{M}$ 的多项式次数，背景网格的多项式次数分别为 1、2 和 4。我们使这三个背景网格的节点数几乎相同，并使其

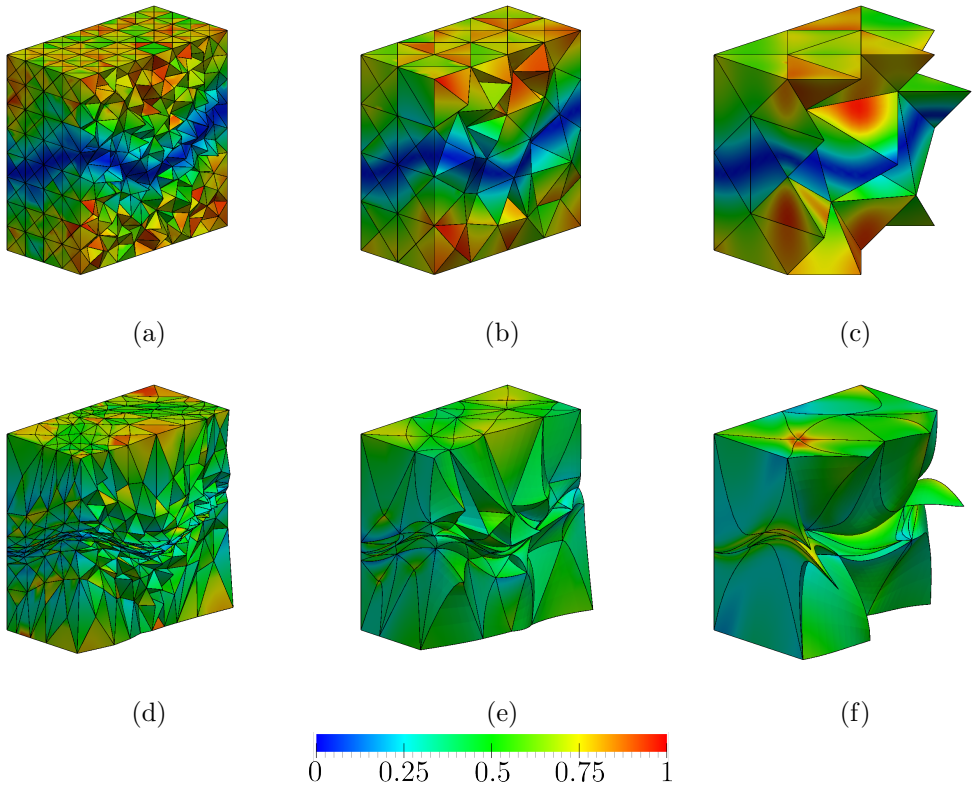


图7：各列分别为多项式次数为 1、2 和 4 的裁剪四面体网格；各行分别为初始直边各向同性网格，以及由初始网格优化得到的网格。

在区域 $h_{\min}/2$ 内具有几乎相同的分辨率。具体而言，二维背景网格的分辨率为 $h_{\min}/2 = 0.005$。它们分别由 65 170、64 329 和 62 761 个节点，以及 129 318、31 910 和 7 782 个三角形组成。三维背景网格的分辨率为 $h_{\min}/2 = 0.01$。它们分别由 1 773 415、1 798 531 和 1 837 851 个节点，以及 10 438 221、1 319 008 和 168 441 个四面体组成。

为了获得最优配置 $\mathcal{M}^*$，我们按照第3节所述，在保持连接关系不变的同时，通过重新定位网格节点来最小化网格畸变。内部节点的坐标以及边界切向坐标是设计变量。因此，内部节点可以自由移动，顶点节点固定，其余边界节点则被约束为沿区域 Ω 的边界面滑动。图6(d)、6(e)、6(f)展示了优化后的二维网格。在三维情形中，图7(d),

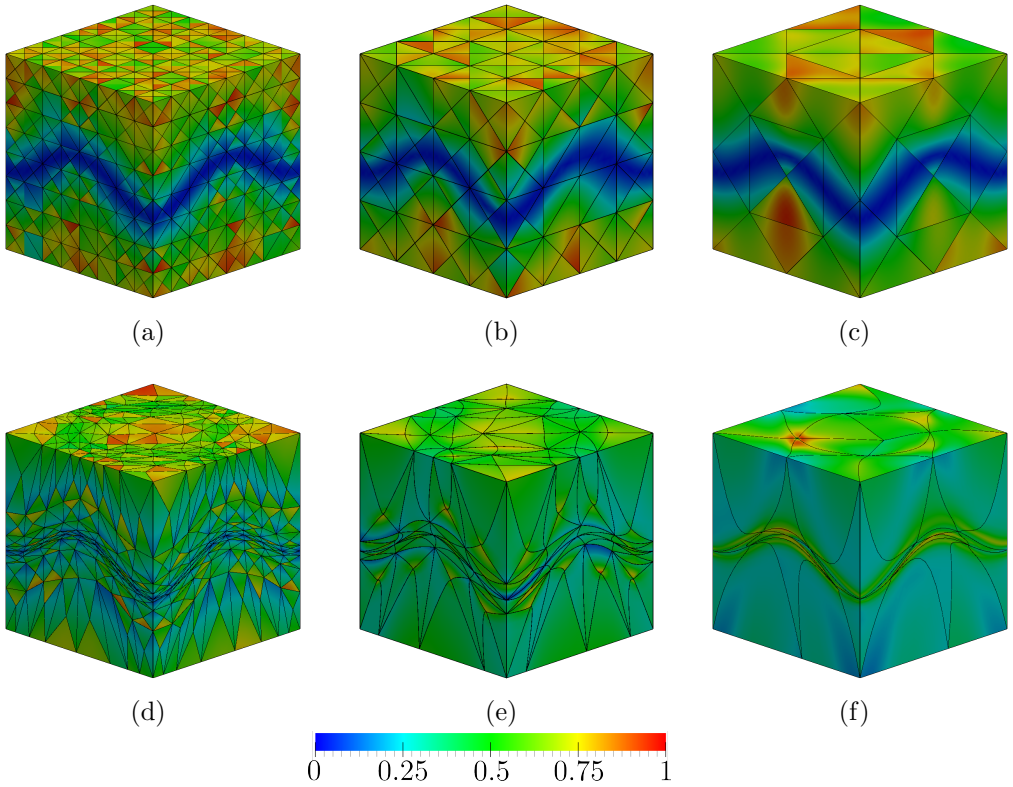


图8：多项式次数分别为1、2和4的四面体网格边界（按列排列）。初始直边各向同性网格及由初始网格优化得到的优化网格（按行排列）。

7(e)、7(f)以及8(d)、8(e)、8(f)分别展示了裁剪后的三维网格和网格边界。我们按照图5中的坐标轴进行对齐。可以看到，各向异性区域内的单元受到压缩，以实现度量所规定的拉伸和对齐。

表1和表2分别展示了二维和三维情形下初始网格与优化网格的质量统计。与初始配置相比，所有优化网格的最小质量均有所提高，单元质量的标准差也有所降低。此外，比较曲线网格与直边网格可以发现，曲线网格具有更大的灵活性。也就是说，曲线网格在提高最小质量和降低标准差方面效果更显著。这是因为曲边单元能够以逐点意义逼近度量的曲线拉伸，因此近似得更加准确。

表 1：采用插值二维度量的初始网格和优化网格的质量统计。

Mesh deg.	最小值		最大值		Mean		标准差	
	初始	最终	初始	最终	初始	最终	初始	最终
1	0.0299	0.1724	0.9957	0.9551	0.6100	0.4462	0.2769	0.1039
2	0.0554	0.2878	0.9921	0.6268	0.5918	0.4545	0.2835	0.0638
4	0.0803	0.3072	0.9835	0.5806	0.5339	0.4439	0.2922	0.0760

表2：采用插值三维度量的初始网格和优化网格的质量统计。

Mesh deg.	最小值		最大值		Mean		标准差	
	初始	最终	初始	最终	初始	最终	初始	最终
1	0.0175	0.1222	0.9905	0.9334	0.5550	0.4236	0.2660	0.1241
2	0.0320	0.2987	0.9695	0.7467	0.5194	0.4576	0.2735	0.0691
4	0.0409	0.3231	0.8931	0.6737	0.4490	0.4702	0.2711	0.0749

表 3：采用解析二维度量的初始网格和优化网格的质量统计。

Mesh deg.	最小值		最大值		Mean		标准差	
	初始	最终	初始	最终	初始	最终	初始	最终
1	0.0279	0.1684	0.9957	0.9581	0.6100	0.4484	0.2770	0.1088
2	0.0563	0.3358	0.9921	0.6432	0.5919	0.4569	0.2835	0.0623
4	0.0799	0.3096	0.9835	0.6318	0.5339	0.4473	0.2923	0.0634

6.3. 验证：解析与离散

为验证所提出的方法，我们将高阶度量插值下二维曲线 r 自适应的结果，与通过解析度量评估得到的结果进行比较。基于上一节所示的初始网格，我们通过评估解析度量表达式来优化畸变度量，而不是在背景网格中对其进行插值。图 6 展示了初始网格和优化网格。它们依据解析度量表达式，按照公式（3）的逐点质量度量进行了着色。

为定量比较两组结果，我们计算了优化配置节点坐标之间的最大距离，

线性、二次和四次情形下的最大距离分别约为 $2.2 \cdot 10^{-2}$、 $7.6 \cdot 10^{-2}$ 和 $8.2 \cdot 10^{-2}$，得到的节点配置相近；将图 6(d)、6(e)、6(f)分别与图 6(g)、6(h)、6(i)进行比较即可观察到这一点。表 3 展示了采用解析度量评估得到的初始网格和优化网格的质量统计。为比较两种方法在质量提升方面的效果，我们计算了所分析质量统计平均值之间的差，结果低于 10^{-2}。因此，采用所提出的度量插值过程进行优化所带来的质量提升，与解析度量所带来的提升相当；所有情形均获得了最小质量高于 0.1 的高质量配置。

6.4. 畸变最小化：初始各向异性直边网格

第6.2节展示了在配备度量的区域中，应用度量插值过程优化各向同性网格的结果。然而在实际应用中，各向异性网格是通过结合拓扑网格操作和网格r自适应过程生成的；前者会改变网格连通性 [6]。为展示一个实际示例，我们考虑一个初始各向异性直边网格。随后，我们应用本文介绍的各向异性r自适应方法。

尽管我们使用 MMG[47], 生成适应目标度量的网格，但我们的目的并非将畸变最小化方法与 MMG 软件包进行比较。实际上，我们认可 MMG，因为它能够生成初始直边网格，使其拉伸和对齐方式与目标度量相匹配。

首先，我们考虑公式（24）中给出的目标度量，其中包含$h_{\min} = 0.01$。其次，我们使用 MATLAB 生成输入尺寸为 $h_{\min}/2 = 0.005$ 的线性各向同性三角形背景网格 $\mathcal{M}$ 。根据物理网格 $\mathcal{M}$ 的尺寸对目标度量进行归一化：线性、二次和四次情形分别为 0.0625, 0.125, 和 0.25。选择这些尺寸是为了根据网格多项式次数获得可比的网格分辨率。然后，将每个背景网格与在背景网格顶点处计算的目标度量配对。我们应用 MMG 算法，得到多项式次数为 1、2 和 4 的初始直边各向异性物理网格 $\mathcal{M}$ ，见图 9(a)、9(b) 和 9(c)。具体而言，这些物理网格分别由 1 161 个节点和 2 137 个三角形、1 333 个节点和 624 个三角形，以及 1 525 个节点和 180 个三角形组成。

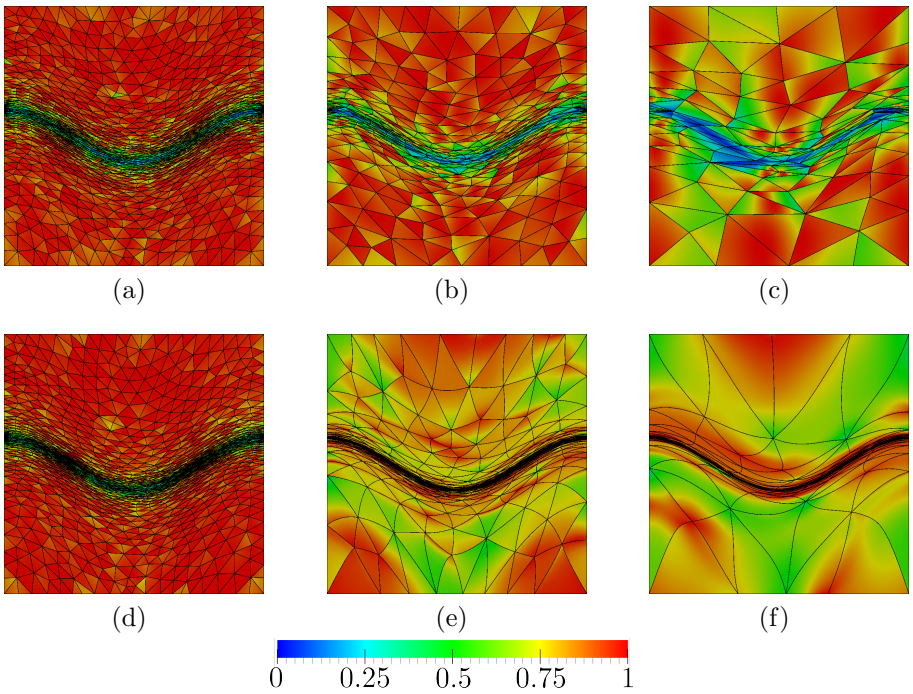


图9：按列展示多项式次数为1、2和4的三角网格的逐点畸变；按行展示初始直边各向异性网格，以及由初始网格生成的优化网格。

表4：采用插值二维度量的初始 MMG 网格和优化网格的质量统计。

Mesh deg.	最小值		最大值		Mean		标准差	
	初始	最终	初始	最终	初始	最终	初始	最终
1	0.0365	0.1794	0.9988	0.9989	0.7806	0.7961	0.2273	0.2040
2	0.0624	0.6300	0.9982	0.9913	0.6966	0.8692	0.2558	0.0788
4	0.0424	0.6063	0.9774	0.9965	0.5677	0.9137	0.2681	0.0886

随后，使用本文提出的度量插值方法对物理网格 $\mathcal{M}$ 进行优化。图 9(d)、9(e) 和 9(f) 展示了优化后的网格 $\mathcal{M}^*$。可以看到，各向异性区域中的单元受到压缩，从而达到度量所规定的拉伸和对齐。

表4展示了初始网格和优化网格的质量统计数据。与初始配置相比，所有优化网格的最小值均有所提高，单元质量的标准差也有所降低。我们得出结论：在度量数据相同、因而输入也相同的情况下，r自适应网格后处理提高了 MMG 算法生成网格的质量。此外，对于直边情况，我们提出了一种全局方法，在应用 h 自适应方法后，改善度量所规定的拉伸和对齐。

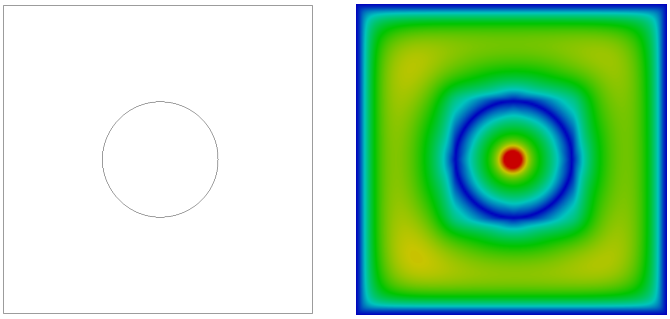
对于固定的度量，初始直边网格通常越好，优化网格也越好。例如，在不同阶数下，初始各向异性网格的平均质量统计数据（表4）优于各向同性网格（表1）。各向异性网格之所以具有这一优势，是因为其拓扑和几何经过调整，能够匹配目标度量相应的缩放。预先进行的这种度量匹配有助于曲线优化达到更好的最终质量。

与第6.2节中的示例一样，将曲线网格与直边网格进行比较时，我们发现曲线网格具有更大的灵活性。也就是说，曲线网格在最小质量和标准差方面的改善幅度更大。这是因为曲边单元能够逐点意义上近似度量的曲线拉伸，因此精度更高。

6.5. 畸变最小化：曲线边界

下面我们将说明，我们的方法也适用于曲线边界。我们将在第6.5.1节讨论一个二维示例，并在第6.5.2节讨论一个三维示例。为此，我们首先使用 FreeCAD[48] 构建几何模型。接下来，我们考虑其隐式表示，参见第 5 节。然后，我们生成背景网格和初始物理网格，并与离散度量耦合，参见第 4 节。最后，我们应用第 3 节中介绍的 r自适应方法，同时考虑离散度量和几何的隐式表示。这样便能得到优化后的物理网格，在保留边界曲率的同时近似度量的拉伸和对齐。

为了适应我们所考虑的曲线边界，我们在所提出的泛函中加入一个边界项，以考虑网格相对于区域边界的偏差，参见第5.3节。具体而言，在所有示例中，我们将惩罚参数设为 $\lambda := 10^4$ ，参见公式（23）。此外，为了



(a) (b)

图 10：带圆孔正方形二维模型的参数化 CAD 和全局隐式表示。

近似度量拉伸，我们采用本文提出的度量插值方法优化网格。最后，在优化网格泛函时，所有网格节点的坐标都是自由的，也就是说，在二维情形下，每个网格节点都在 $\mathbb{R}^2$中移动；在三维情形下，则在 $\mathbb{R}^3$中移动。

6.5.1. 二维曲线模型：带圆形孔的正方形

对于二维模型 Λ_1，我们考虑一个带圆孔的正方形。具体而言，区域记为 $\Omega_1 = K_1 \backslash C_1$，其中 $K_1 = [-0.5, 0.5]^2$ 是一个正方形，而 C_1 是一个半径为 0.18、以原点为中心的圆，见图 10(a)。区域 Ω_1 有两条边界，一条是正方形的边界 K_1，另一条是圆的边界 C_1。图 10(b) 展示了使用第 5.1节所述方法得到的边界 $\Lambda_1 := \partial\Omega_1$, 的全局隐式表示。虽然内边界是光滑的，但外边界包含角点等尖锐特征。

我们为区域 Ω_1 配置公式（24）中给出的目标度量，其中 $h_{\min} = 0.01$。随后，我们使用 MATLAB 生成两种各向同性ˆ三角形背景网格 $\mathcal{M}$，其多项式次数分别为 2 和 4。它们在 Ω_1 上的输入分辨率为 $h_{\min}/2 = 0.005$，即输入尺寸分别为 0.01 和 0.02。二次情形下，我们按尺寸 $h = 0.25$对目标度量进行归一化；四次情形下，则按尺寸 $h = 0.5$ 进行归一化。接着，将每个背景网格与在ˆ背景网格顶点处取值的目标度量相结合。对于每个背景网格 $\mathcal{M}$，我们通过应用 MMG 算法得到初始的直边各向异性物理网格 $\mathcal{M}$，见图 11(a) 和 11(e)。二次和四次物理

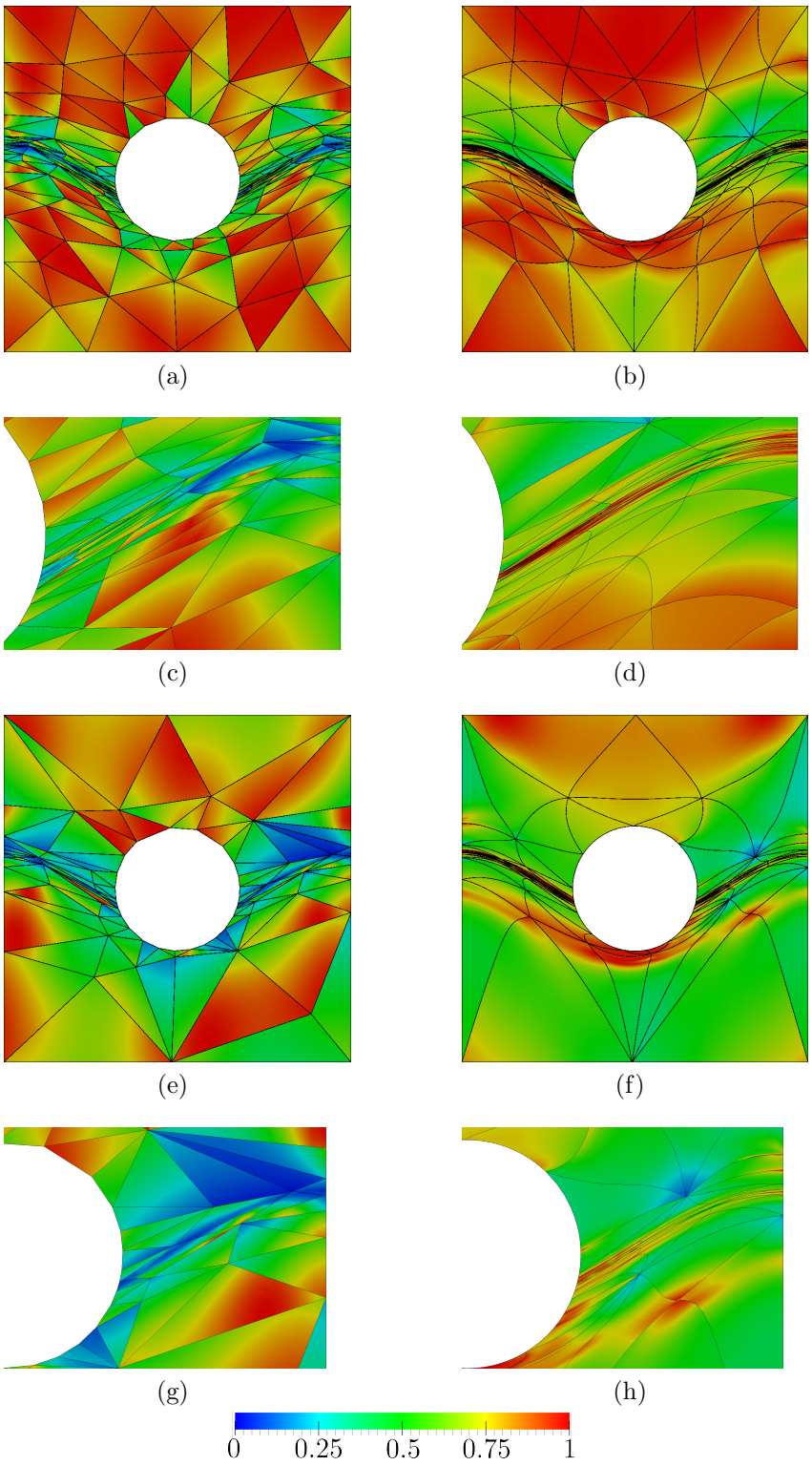


图11：第一、二（放大）行中多项式次数为 2 的三角网格，以及第三、四（放大）行中多项式次数为 4 的三角网格的逐点畸变。各列分别展示初始直边各向异性网格和优化网格。34

表 5：带圆形孔的正方形上的初始 MMG 和采用插值二维度量的优化网格的质量统计。

Mesh deg.	最小值		最大值		Mean		标准差	
	初始	最终	初始	最终	初始	最终	初始	最终
2	0.0823	0.4140	0.9914	0.9943	0.5764	0.8224	0.2508	0.1281
4	0.0590	0.4045	0.9646	0.9850	0.4177	0.7321	0.2292	0.1461

网格分别由 518 个节点和 220 个三角形，以及 944 个节点和 106 个三角形组成。请注意，由于 MMG 算法需要线性背景网格，我们对背景网格进行细分，以保持其分辨率。具体而言，MMG 算法所用的线性背景网格，是通过将二次背景网格细分一次、将四次背景网格细分两次得到的。

在图 11(b) 和图 11(f) 中，我们展示了优化网格 $\mathcal{M}^*$。可以看到，各向异性区域中的单元被压缩，以实现度量所规定的拉伸和对齐。请注意，边界单元经过弯曲处理，以同时匹配度量和弯曲的计算域边界。表 5 展示了初始网格和优化网格的质量统计。与初始配置相比，优化网格的单元质量最小值、平均值和标准差均有所改善。

从结果中可以看出，与直边单元相比，曲边单元在保留边界曲线特征的同时，能够更忠实地逼近度量。在这种情况下，拉伸方向几乎与几何的切线方向对齐。对于直边单元，如图 11(c) 和图 11(g) 所示，在拉伸区域累积更多自由度，可能会降低非拉伸区域的边界表示质量。相比之下，对于曲边单元，如图 11(d) 和图 11(h) 所示，我们观察到，单个曲边单元对边界的表示比多个直边单元更忠实。曲边单元的这种灵活性使自由度能够从非拉伸区域滑移并累积到拉伸区域，从而形成高质量单元。因此，我们可以看到，单元会根据度量的拉伸和对齐方式进行拉伸、对齐和弯曲。因此，曲边单元能够改进对

度量的表示，同时保留边界的曲线特征。

我们使用一个未经优化的原型来展示，详细的导数使牛顿法得以应用。尽管如此，为了说明计算成本，接下来我们将报告匹配目标度量和曲线边界时的实际运行时间，以及耗时最多的部分。由于该原型未经优化，这份报告可作为未来改进的初步参考。

对于这个二维示例，二次情形的总实际运行时间为 2 194 秒，四次情形则为 17 911 秒。第二种情形的实际运行时间更长，主要有两个原因：网格点的数量和多项式次数。

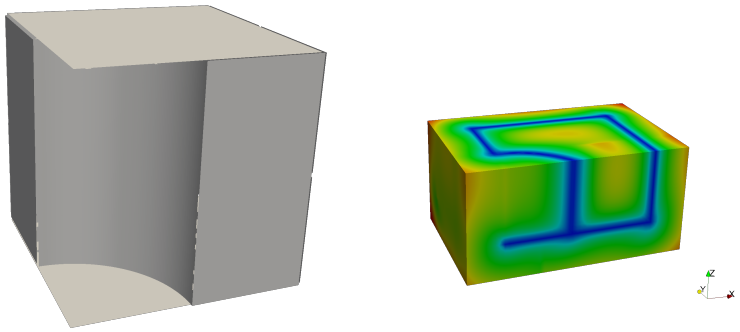
首先，四次情形的网格点更多（944 个），而二次情形为 518 个。请注意，两种情形的初始网格均为根据相应度量缩放进行适配的直边网格。这种缩放考虑了二次单元与四次单元之间的点数差异。遗憾的是，适配后得到的直边网格在二次和四次情形下分别包含 220 个和 106 个单元。因此，初始网格的点数并不相当，这使二次示例在计算上更具优势。

其次，阶数越高，计算成本也越高。对于更高阶数，目标函数的海森矩阵会变得更稠密，而且初始近似更差。在稠密度方面，值得注意的是，四阶单元对海森矩阵的贡献所含的非零项约为二阶单元的六倍。在此示例中，计算每个四阶单元对海森矩阵的贡献需要 0.15 秒，而计算每个二阶单元的贡献需要 0.03 秒。至于初始近似较差的原因，这是因为初始直边网格为一阶，因此对于四阶而言，阶数差距更大。在此示例中，四阶的非线性问题需要迭代 693 次，而二阶需要迭代 229 次。

最后，对于这两种阶数，计算成本最高的部分都是计算单元对梯度和海森矩阵的贡献；这项计算需要用到度量插值和几何隐式化的导数。对于度量插值，计算导数所耗费的实际运行时间占总时间的 45

6.5.2. 三维曲面模型：由圆柱体裁切的立方体

对于三维模型 Λ_2，我们考虑一个由圆柱体裁切的立方体。具体而言，我们将区域记为 $\Omega_2 = K_2 \backslash C_2$，其中 $K_2 = [-0.5, 0]^2 \times [-0.25, 0.25]$ 是一个长方体，而 C_2 是一个半径为



(a) (b)

图12：立方体被圆柱体裁剪后的三维模型的参数化 CAD 和切片全局隐式表示。

0.25、高度为 $1/2$且以原点为中心的圆柱体，见图12(a)。区域 Ω_2 的边界由七条曲线和七个曲面组成。其中，六个曲面对应立方体 K_2 的六个面，另一个曲面对应圆柱体C_2。六条曲线分别对应立方体各个曲面边界上的边界曲线，另一条曲线则对应圆柱体 C_2 的曲面边界与立方体的交线。我们在图12(b)中展示了使用第5.1节所述方法得到的边界 $\Lambda_2 := \partial\Omega_2$, 的全局隐式表示。尽管内边界是光滑的，外边界却包含角点和锐边等尖锐特征。

我们为区域 Ω_2 赋予公式（24）中给出的目标度量，其中 $h_{\min} = 0.02$。随后，我们使用 MATLAB 在 Ω_2上生成一个输入分辨率为 $h_{\min} = 0.02$ 的二次各向同性ˆ四面体背景网格 $\mathcal{M}$ ，即输入尺寸为 0。04。我们根据 size$h = 0.5$ 对目标度量进行归一化。然后，将每个背景网格与在背景网格顶点处计算的目标度量ˆ耦合。基于该背景网格 $\mathcal{M}$，我们通过应用 MMG 算法得到初始二次直边各向异性物理网格 $\mathcal{M}$，见图13(a)、图13(c)和图13(e)。该物理网格由 1 261 个节点和 695 个四面体组成。请注意，由于 MMG 算法需要线性背景网格，我们将二次背景网格细分一次，以保持其分辨率。

在图 13(b)、13(d) 和 13(f) 中，我们展示了优化网格

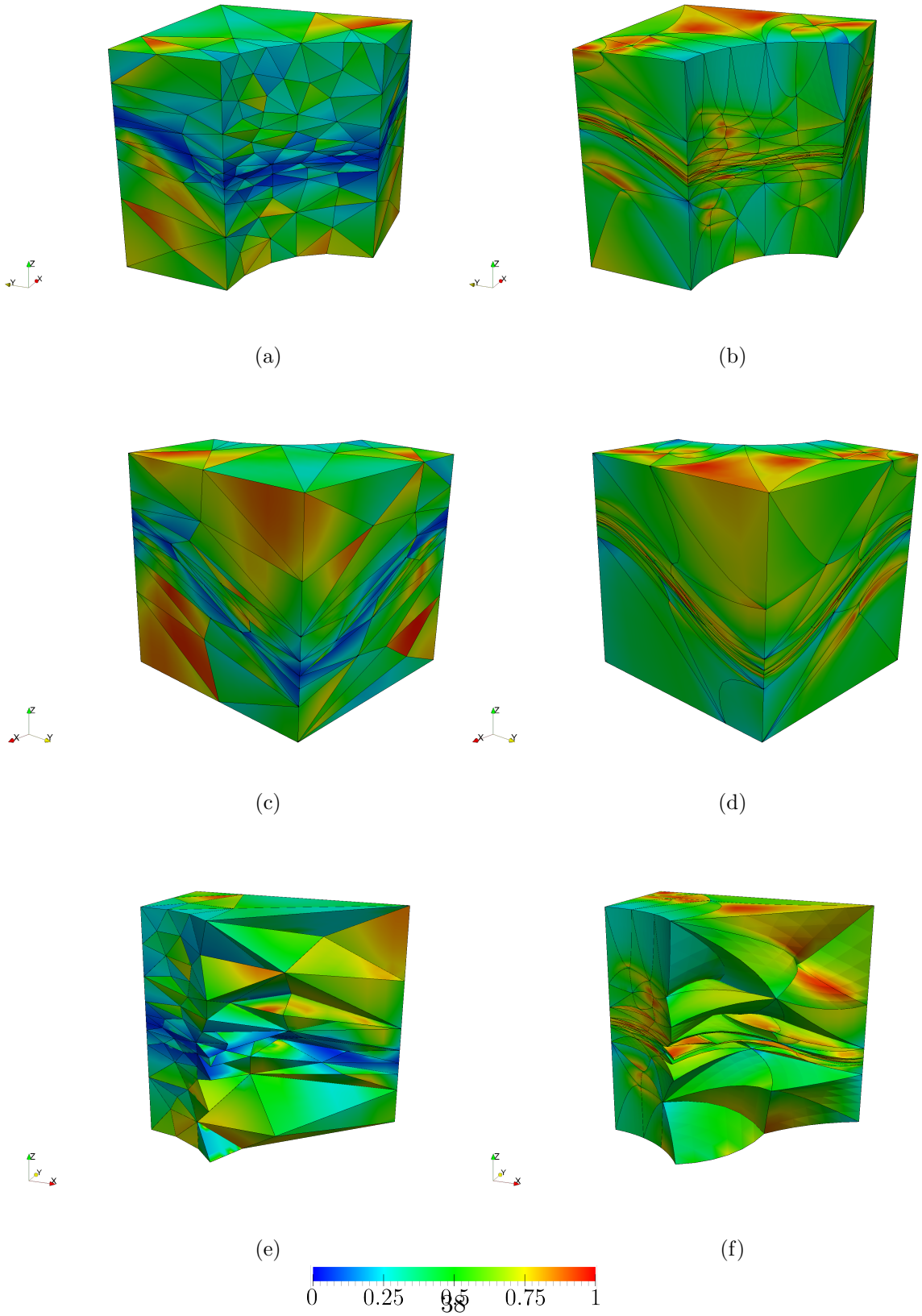


图13：二次四面体网格的逐点畸变。各列分别为初始直边各向异性网格和优化网格。

表 6：立方体被圆柱体裁剪时，初始 MMG 网格与采用插值三维度量的优化网格的质量统计。

Mesh	最小值	最大值	Mean	标准差
初始	0.0506	0.9489	0.3519	0.1874
优化后	0.3315	0.9198	0.6661	0.1144

$\mathcal{M}^*$。我们观察到，各向异性区域中的单元会被压缩，以达到度量所规定的拉伸和对齐。请注意，边界单元经过弯曲，以同时匹配度量和曲面域边界。表6展示了初始网格和优化网格的质量统计。与初始配置相比，优化网格的单元质量最小值、平均值和标准差均有所改善。

从结果中可以看出，与直边单元相比，曲边单元在保留边界曲线特征的同时，能够更忠实地逼近度量。在本例中，拉伸方向与几何曲率彼此独立。因此，对于直边单元，如图 13(e)所示，增加拉伸程度可以降低边界分辨率。也就是说，边界所达到的分辨率会限制拉伸程度，反之亦然。相较之下，对于曲边单元，如图 13(f)所示，我们观察到，在保留边界曲线特征的同时，可以在拉伸方向上分配更多自由度。与前文相同，我们得出结论：曲边单元能够在保留边界曲线特征的同时，更好地表示度量。

7. 结论

总之，我们在针对度量和几何目标的曲线 r 自适应中，获得了前所未有的二阶优化结果。我们将曲线背景网格中的离散度量表示为高阶对数欧几里得度量插值。对于这种度量插值，我们详细推导了关于物理坐标的一阶和二阶导数。此外，我们将几何模型视为 NURBS 实体的隐式表示。对于这种隐式表示，我们详细推导了一阶和二阶导数。

度量插值和隐式表示的导数使我们能够使用牛顿法最小化目标函数，该目标函数同时考虑度量偏差和几何偏差。离散度量的结果与解析度量的结果吻合良好。在所有结果中，该方法都利用了曲线高阶单元的非恒定雅可比矩阵。这一机制使该技术能够同时匹配度量和几何的曲线特征。

为了实现我们的目标，我们已在曲线 r自适应中启用了牛顿法。不过，我们也规划了近期的新方向和改进。首先，为了展示我们方法的应用以及自适应曲线网格的优势，我们计划将曲线网格 r自适应到无黏流的稳态。目前，我们无法获得所需的离散度量，因为还需要为高阶方法 [1, 51]实现现有的目标导向误差估计器。其次，我们展示了曲线 r自适应的一项关键要素。不过，将曲线 r自适应与曲线 h自适应结合起来可能会更加高效。为了说明这种结合，我们使用了一个外部的直边自适应网格生成器。然而，为了在 h自适应中恰当地满足高阶方法的要求，必须对曲线网格使用局部空腔算子。关于这些曲线算子，我们计划将现有方法 [14, 16, 25, 52] 与我们的方法相结合。具体而言，我们针对高阶度量和曲线边界提出的畸变最小化方法也可以优化局部空腔。为此，我们将使空腔内部与目标高阶度量相匹配，同时让旧空腔边界表示目标几何。

从长远来看，这种匹配度量与几何特征的能力，可能是曲线高阶自适应中一个颇具吸引力的要素。具体而言，在目标导向或基于指示子的自适应过程中，可以在当前网格上构造一个高阶度量场，以逼近目标几何。组合方法将驱动曲线 r 自适应，根据解和几何（空腔）边界的曲线特征，全局（局部）地重新定位当前曲线网格（重新网格化的空腔）。

8. 致谢

本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划、依据资助协议编号715546提供的资助。本研究还获得了

加泰罗尼亚政府通过资助编号2017 SGR 1731提供的资助。X. Roca的研究部分获得了西班牙经济与竞争力部通过个人资助协议RYC-2015-01633提供的支持。

附录 A. 特征值分解的导数

本附录详细介绍特征值分解（特征值与特征向量）的一阶和二阶空间导数，这些内容最初发表于 [43]，此处采用我们的符号重新表述。

考虑 $\ell = 1, ..., d$，特征向量$\mathbf{u}_\ell$ 对应特征值 λ_ℓ的特征值方程

$$\mathbf{L}_\ell \mathbf{u}_\ell := (\mathbf{L} - \lambda_\ell \mathbf{I})\, \mathbf{u}_\ell = 0,$$

其中，$\mathbf{L}$ 是对称矩阵，$\mathbf{I}$ 是单位矩阵。然后，分别对其求一阶和二阶导数，可得

$$0 = \partial_j \left(\mathbf{L}_\ell \mathbf{u}_\ell\right) = \left(\partial_j \mathbf{L}_\ell\right) \cdot \mathbf{u}_\ell + \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_j \mathbf{u}_\ell, \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{jk} \left(\mathbf{L}_\ell \mathbf{u}_\ell\right) = \left(\partial_{jk} \mathbf{L}_\ell\right) \cdot \mathbf{u}_\ell + \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_{jk} \mathbf{u}_\ell + \\ \left(\partial_j \mathbf{L}_\ell\right) \cdot \partial_k \mathbf{u}_\ell + \left(\partial_k \mathbf{L}_\ell\right) \cdot \partial_j \mathbf{u}_\ell. \end{aligned} \tag{A.2}$$

对于每个 ℓ，首先将$\mathbf{u}_\ell$ 左乘方程 (A.1)，计算特征值 λ_ℓ的一阶导数。然后，通过求解方程 (A.1) 中其余的未知项，可得特征向量$\mathbf{u}_\ell$的一阶导数。具体而言，特征值和特征向量的一阶导数为

$$\partial_j \lambda_\ell = \mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \partial_j \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_\ell, \quad \partial_j \mathbf{u}_\ell = -\mathbf{L}_\ell^{+} \cdot \partial_j \mathbf{L}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell,$$

其中，运算 $\mathbf{L}_\ell^{+}$ 是矩阵 $\mathbf{L}_\ell$的摩尔－彭若斯伪逆矩阵。由于矩阵 $\mathbf{L}_\ell$ 是奇异的，因此我们使用摩尔－彭若斯伪逆矩阵而非逆矩阵。此外，冗余方程会自动满足。

二阶导数通过类似的过程获得。对于每个 ℓ，首先将式 (A.2) 左乘 $\mathbf{u}_\ell$，计算特征值 λ_ℓ 的二阶导数。然后，通过求解式 (A.2) 中剩余的未知项，可得到二阶

特征向量 $\mathbf{u}_\ell$的导数。特别地，特征值的二阶导数为

$$\partial_{jk}\lambda_\ell = \mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \left(\partial_k \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_j \mathbf{u}_\ell + \partial_j \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_k \mathbf{u}_\ell + \partial_{jk}\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_\ell\right),$$

$$\partial_{jk}\mathbf{u}_\ell = -\mathbf{L}_\ell^{+} \cdot \left(\partial_k \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_j \mathbf{u}_\ell + \partial_j \mathbf{L}_\ell \cdot \partial_k \mathbf{u}_\ell + \partial_{jk}\mathbf{L}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell\right) - \left(\partial_j \mathbf{u}_\ell \cdot \partial_k \mathbf{u}_\ell\right)\mathbf{u}_\ell,$$

其中，特征向量二阶导数的最后一项，是通过施加归一化条件的二阶导数 $\mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}_\ell = 1$得到的。

$$0 = \partial_{jk}\left(\mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}_\ell\right) = 2\partial_{jk}\mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{u}_\ell + 2\partial_j \mathbf{u}_\ell^{\mathrm{T}} \cdot \partial_k \mathbf{u}_\ell.$$

附录B. 隐式表示的导数

本附录详细介绍 B´ezier 片的归一化表示、凸包表示和隐式表示的一阶和二阶导数。这些导数用于计算隐式表示的梯度和海森矩阵，详见第 5.2 节。

在此，我们考虑方程 (13) 中给出的归一化表示 $\hat{}\gamma$ 的梯度和海森矩阵。与前文相同，我们用 $\nabla f * \nabla g$ 表示系数为 $\partial_j f \partial_k g$ 的矩阵，其中 $j,\ k = 1, ..., d$。此外，我们考虑对称项 $\nabla f \otimes \nabla g := \nabla f * \nabla g + \nabla g * \nabla f$，它由系数为 $\partial_j f \partial_k g + \partial_k f \partial_j g$ 的矩阵给出，其中 $j,\ k = 1, ..., d$。于是，归一化表示的导数为

$$\nabla\hat{\gamma} = \frac{\nabla\gamma - \hat{\gamma}\nabla\|\nabla\gamma\|}{\|\nabla\gamma\|}, \tag{B.1}$$

and

$$\hat{\gamma}\nabla^2\hat{\gamma} = \frac{\hat{\gamma}\nabla^2\gamma - \hat{\gamma}^2\nabla^2\|\nabla\gamma\| - \nabla\hat{\gamma} \otimes \hat{\gamma}\nabla\|\nabla\gamma\|}{\|\nabla\gamma\|}, \tag{B.2}$$

where

$$\hat{\gamma}\nabla\|\nabla\gamma\| = \frac{\hat{\gamma}\nabla^2\gamma \cdot \nabla\gamma}{\|\nabla\gamma\|},$$

$$\hat{\gamma}^2\nabla^2\|\nabla\gamma\| = \frac{\hat{\gamma}^2\nabla^3\gamma \cdot \nabla\gamma + \hat{\gamma}\nabla^2\gamma \cdot \hat{\gamma}\nabla^2\gamma - \hat{\gamma}\nabla\|\nabla\gamma\| * \hat{\gamma}\nabla\|\nabla\gamma\|}{\|\nabla\gamma\|}.$$

我们发现，它们需要 γ 的一阶、二阶和三阶导数。此外，在对修剪操作求导时，我们也考虑这些项；关于 $h = \hat{}\gamma$，请参见公式 (21) 和 (22)。具体而言，链

式法则涉及项 $\nabla\hat{}\gamma$ 和 $\hat{}\gamma\nabla^{2}\hat{}\gamma$，以及项 $\nabla\gamma$、 $\gamma\nabla^{2}\gamma$ 和 $\gamma^{2}\nabla^{3}\gamma$。正如我们所见，这一观察很有益，因为直接计算二阶和三阶导数 $\nabla^{2}\gamma$ 和 $\nabla^{3}\gamma$ 时，会在 γ 对应的零水平集处出现奇异性。因此，我们不直接计算这些导数，而是考虑它们与表示 γ 的乘积。

接下来，我们计算凸包表示 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma)}$ 的导数。特别需要注意的是，这些导数很容易求得，因为每个超平面实体的表示都是线性的。然后，我们对超平面表示之间的 r-合取进行求导，见公式（17）和（18）。最后，我们对凸包表示 $\hat{}\gamma_{\mathrm{CH}(\Gamma)}$ 的归一化进行求导，见公式（B.1）和（B.2）。

现在，我们计算公式（12）中行列式 γ 的导数。也就是说， $\nabla\gamma$、 $\gamma\nabla^{2}\gamma$ 和 $\gamma^{2}\nabla^{3}\gamma$。首先，使用雅可比公式计算行列式的梯度

$$\nabla\gamma\left(\mathbf{x}\right)=\mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\nabla\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right), \tag{B.3}$$

其中 $\mathbb{N}(\mathbf{x}):=\mathbb{M}(\mathbf{x})\cdot\mathbb{M}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$。为避免在片 Γ 处出现奇异性问题，我们考虑伴随矩阵 $\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}(\mathbf{x})\right)$，而非逆矩阵。具体而言， $\mathbb{N}(\mathbf{x})$ 的伴随矩阵由转置余子式矩阵定义，并满足关系 $\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}(\mathbf{x})\right)=\gamma(\mathbf{x})\,\mathbb{N}(\mathbf{x})^{-1}$ [29]。其次，我们通过对迹函数 $\nabla\gamma$中的项求导来计算高阶导数 $\gamma\nabla^{2}\gamma$ 和 $\gamma^{2}\nabla^{3}\gamma$，见公式（B.3）。特别地，采用与第 4.2 节相同的记号，我们计算每个 j 和 k 的二阶导数，如下所示

$$\gamma\left(\mathbf{x}\right)\partial_{jk}\gamma\left(\mathbf{x}\right)=\mathrm{tr}\left(\gamma\left(\mathbf{x}\right)\partial_{k}\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\partial_{j}\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)+\gamma\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\partial_{jk}\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right).$$

此外，三阶导数为

$$\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\partial_{jk\ell}\gamma\left(\mathbf{x}\right)=\mathrm{tr}\left(\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\partial_{k\ell}\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\partial_{j}\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)+\left(\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\partial_{k}\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\partial_{j\ell}\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)+\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\partial_{\ell}\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\partial_{jk}\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right),$$

对于每个 j、 k 和 ℓ。请注意，不存在三阶项 $\partial_{jk\ell}\mathbb{N}(\mathbf{x})$，因为$\mathbb{N}(\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 是一个二次函数，参见公式（12）。

最后，我们给出伴随矩阵 $\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}(\mathbf{x})\right)$ 的导数。具体而言，我们将其表示为逆矩阵的导数乘以行列式。然后，为了将所得表达式改写为

伴随矩阵的形式，我们将两个表达式都乘以行列式 γ。具体而言，梯度为

$$\gamma\left(\mathbf{x}\right)\nabla\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)=\gamma\left(\mathbf{x}\right)\nabla\left(\gamma\left(\mathbf{x}\right)\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)^{-1}\right)=\\ \mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\nabla\gamma\left(\mathbf{x}\right)-\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\cdot\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right).$$

我们通过计算海森矩阵，采用相同的推理

$$\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\nabla^{2}\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)=\gamma\left(\mathbf{x}\right)^{2}\nabla\left(\frac{1}{\gamma\left(\mathbf{x}\right)}\gamma\left(\mathbf{x}\right)\nabla\mathrm{adj}\left(\mathbb{N}\left(\mathbf{x}\right)\right)\right).$$

具体而言，使用与第 4.2 节相同的记号，对于每个 j 和 k，我们有

$$\gamma^{2}\partial_{jk}\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)=\left(\gamma\partial_{jk}\gamma\right)\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)+\left(\partial_{j}\gamma\right)\gamma\partial_{k}\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)-\left(\partial_{k}\gamma\right)\gamma\partial_{j}\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)-\gamma\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)\cdot\partial_{jk}\mathbb{N}\cdot\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)-\gamma\partial_{k}\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)\cdot\partial_{j}\mathbb{N}\cdot\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)-\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right)\cdot\partial_{j}\mathbb{N}\cdot\gamma\partial_{k}\text{伴随}\left(\mathbb{N}\right),$$

为简洁起见，我们省略函数 γ 和 $\mathbb{N}$对$\mathbf{x}$ 变量的依赖关系。

参考文献

[1]M. Yano, D. L. Darmofal，基于优化的各向异性单纯形网格自适应框架，《计算物理学杂志》231 (22) (2012) 7626–7649。[2] A. Loseille, F. Alauzet，连续网格框架（第一部分）：适定的连续插值误差，SIAM 数值分析杂志 49 (1) (2011) 38–60。doi:doi.org/10.1137/090754078.[3]T. Coupez, L. Silva, E. Hachem, 隐式边界与自适应各向异性网格划分，载于：《科学计算网格生成与自适应的新挑战》，施普林格，2015年，第1–18页。[4] W. Huang, R. D. Russell, 《自适应动网格方法》，应用数学科学第174卷，施普林格，2011年。[5] P. M. Knupp，代数网格质量度量，SIAM J. Numer. Anal. 23 (1) (2001) 193–218。

[6] F. Alauzet, A. Loseille，计算流体力学各向异性网格自适应十年进展，《计算机辅助设计》，爱思唯尔 72 (1) (2016) 13–39。[7] C. Gruau, T. Coupez，针对自然与多域度量的三维非结构各向异性四面体网格生成与自适应，《计算机方法与应用力学及工程》194 (48-49) (2005) 4951–4976。[8] P. Frey, F. Alauzet，计算流体力学计算的各向异性网格自适应，《计算机方法与应用力学及工程》194 (48-49) (2005) 5068–5082。[9] F. Hecht，Bamg：二维各向异性网格生成器，用户指南。法国国家信息与自动化研究所，罗康库尔。[10] T. Coupez，基于长度分布张量和边误差的各向异性自适应网格划分度量构造，《计算物理学杂志》230 (7) (2011) 2391–2405。[11] K. J. Fidkowski, D. L. Darmofal，计算流体力学中基于输出的误差估计与网格自适应综述，《美国航空航天学会会刊》49 (4) (2011) 673–694。[12] T. Coupez，面向高阶各向异性网格自适应的基准框架，203 (2017) 141–153，研究札记，第26届国际网格划分圆桌会议。[13] A. Johnen, C. Geuzaine, T. Toulorge, J.-F. Remacle，曲线有限元的质量度量，TILDA：航空领域工业级大涡模拟/直接数值模拟（2021） 221。[14] R. Zhang, A. Johnen, J.-F. Remacle，曲线网格自适应，载于：国际网格研讨会，施普林格，2018年，第57–69页。[15] M. J. Zahr, P.-O. Persson，用于高阶精度激波追踪的基于优化的不连续伽辽金方法，载于：2018年美国航空航天学会航空航天科学会议，2018年，第0063页。[16] M. J. Zahr, A. Shi, P.-O. Persson，使用基于优化的高阶间断伽辽金方法进行隐式激波追踪，《计算物理学杂志》410 (2020) 109385。

[17]M. J. Zahr、P.-O. Persson，针对存在附着激波的流动的一种 r-自适应高阶间断伽辽金方法，载于：AIAA Scitech 2020 论坛，2020年，第 0537 页。[18] J. Marcon、M. Turner、D. Moxey、S. J. Sherwin、J. Peir´o，一种高阶 r-自适应的变分方法，IMR26。[19]J. Marcon、G. Castiglioni、D. Moxey、S. J. Sherwin、J. Peir´o，可压缩流的 rp-自适应，《国际工程数值方法期刊》121 (23) (2020) 5405–5425。[20] V. Dobrev、P. Knupp、T. Kolev、K. Mittal、V. Tomov，高阶网格的目标矩阵优化范式，《SIAM科学计算杂志》41 (1) (2019) B50–B68。[21] G. Aparicio-Estrems、A. Gargallo-Peir´o、X. Roca，为线性与曲线二维网格定义一种考虑拉伸与对齐的质量度量，载于：国际网格研讨会，施普林格，2018年，第 37–55 页。[22] G. Aparicio-Estrems、A. Gargallo-Peir´o、X. Roca，通过畸变最小化实现曲线 r-自适应的高阶度量插值，载于：2022 年 SIAM 国际网格研讨会论文集，Zenodo，2022年，第 1–12 页。[23] G. Aparicio-Estrems、A. Gargallo-Peir´o、X. Roca，曲线网格的各向异性优化：牛顿法的专用线搜索与信赖域全局化，载于：国际网格研讨会，2019年。[24] G. Aparicio-Estrems、A. Gargallo-Peir´o、X. Roca，拉伸并对齐分片多项式网格以匹配曲线各向异性特征，载于：国际谱方法与高阶方法会议，2021年。[25] L. Rochery、A. Loseille，P2 腔算子与黎曼曲线边长度优化：通往高阶网格自适应之路，载于：AIAA Scitech 2021 论坛，2021年，第 1781 页。[26] V. Dobrev、P. Knupp、T. Kolev、V. Tomov，基于目标矩阵优化范式，迈向高阶网格的仿真驱动优化，载于：国际网格研讨会，施普林格，2018年，第 285–302 页。

[27] E. Ruiz-Giron´es、J. Sarrate、X. Roca，生成兼具最优质量和几何精度的曲线高阶网格，Procedia Engineering 163 (2016) 315–327。[28] E. Ruiz-Giron´es、A. Gargallo-Peir´o、J. Sarrate、X. Roca，一种用于基于畸变的网格移动与弯曲、施加边界条件的增广拉格朗日公式，Procedia Engineering 203 (2017) 362–374。[29] K. Upreti、T. Song、A. Tambat、G. Subbarayan，富集等几何分析的代数距离估计，《应用力学与工程中的计算方法》280 (2014) 28–56。[30] B. Laurent，有理 B´ézier 曲线与曲面的隐式矩阵表示，《计算机辅助设计》46 (2014) 14–24。[31] A. Biswas、V. Shapiro，具有非零梯度的近似距离场，《图形模型》66 (3) (2004) 133–159。[32]V. Dobrev、P. Knupp、T. Kolev、K. Mittal、R. Rieben、V. Tomov，ALE 流体动力学中高阶网格的仿真驱动优化，《计算机与流体》208 (2020) 104602。[33] V. Arsigny、P. Fillard、X. Pennec、N. Ayache，用于扩散张量快速简易计算的对数欧几里得度量，《医学磁共振》56 (2006) 411–421。[34] P. Knupp、T. Kolev、K. Mittal、V. Z. Tomov，用于高阶网格优化的自适应曲面拟合与切向松弛，arXiv 预印本 (2021) arXiv–2105。[35] L. V. Branets、V. A. Garanzha，三线性映射的畸变度量：在三维网格生成中的应用，《应用数值线性代数》9 (6-7) (2002) 511–526。[36] E. J. L´opez、N. M. Nigro、M. A. Storti，移动网格的同步解纠缠与平滑，《国际数值方法工程杂志》76 (7) (2008) 994–1019。[37]J. M. Escobar、E. Rodr´íguez、R. Montenegro、G. Montero、J. M. Gonz´ález-Yuste，四面体网格的同步解纠缠与平滑，《计算方法与应用力学和工程》192 (25) (2003) 2775–2787。

[38] A. Gargallo-Peir´o、X. Roca、J. Peraire、J. Sarrate，《优化正则化畸变度量以生成曲面高阶非结构四面体网格》，《国际数值方法工程杂志》103（2015）342–363。[39] A. Gargallo-Peir´o，《高阶非结构方法中曲线网格的验证与生成》，博士论文，加泰罗尼亚理工大学（2014）。[40] D. Ekelschot、M. Ceze、S. M. Murman、A. Garai，《利用离散度量张量进行并行高阶各向异性网格划分》，载于：AIAA Scitech 2019 论坛，2019年，第1993页。[41] K. Mittal、S. Dutta、P. Fischer，《用于不可压缩流的非协调 Schwarz 谱元方法》，《计算机与流体》191（2019）104237。[42] J. Sitaraman、M. Floros、A. Wissink、M. Potsdam，《利用重叠与自适应网格进行非定常流计算的并行区域连通性算法》，《计算物理学杂志》229（12）（2010）4703–4723。[43] A. L. Andrew、K.-W. E. Chu、P. Lancaster，《矩阵函数特征值与特征向量的导数》，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》14（4）（1993）903–926。[44]E. Ruiz-Giron´es、X. Roca，《基于虚拟几何的并行预条件网格弯曲：自动惩罚与阶次延续》，《计算机辅助设计》（2022）103208。[45] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski、V. B. Shah，《Julia：一种数值计算的新方法》，《SIAM 评论》59（1）（2017）65–98。[46] MATLAB，9.3.0.713579 版（R2017b），MathWorks 公司，马萨诸塞州纳蒂克，2017年。[47] C. Dobrzynski，《Mmg3d：用户指南》，博士论文，法国国家信息与自动化研究所（2012）。[48] J. Riegel、W. Mayer、Y. van Havre，FreeCAD（2016）。[49] C. B. Barber、D. P. Dobkin、H. Huhdanpaa，《用于凸包的 Quickhull 算法》，《ACM 数学软件汇刊》（TOMS）22（4）（1996）469–483。

[50] A. Loseille、R. L¨ohner, 《空气动力学中的各向异性自适应模拟》, AIAA 2010-16949th AIAAAerospaceSciencesMeeting, 费尔法克斯, 弗吉尼亚州, 美国。[51] O. Coulaud、A. Loseille, 《三维基于度量的超高阶各向异性网格自适应》, Procedia Engineering 163, 第25届国际网格研讨会。[52] R. Feuillet、A. Loseille、F. Alauzet, 《p2网格优化及其应用》, 《计算机辅助设计》124。