arXiv:2303.11984v1 [math.CO] 21 Mar 2023

关于森林的独立复形上的多面体连接的同伦型

Kengo Okura

Abstract. 我们考察一类包含森林的独立复形的单纯复形。我们证明，若单纯复形K 属于此类，则多面体连接 $\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}, \emptyset)$ 同伦等价于一族形如 $\Sigma^r X_{i_1} * X_{i_2} * \cdots * X_{i_k}$ 的 CW 复形的楔和，其中 $\underline{X}$ 是一族 $\{X_i\}_{i\in V(K)}$ CW 复形， Σ 表示未约化悬挂。我们将此结果用于研究图 H 在森林 G上的字典序积 $G[H]$ 的独立复形的同伦型。我们用 L_m 表示一个有 m 个顶点且没有分支的树。我们证明，当 $m \neq 2$ 时， $L_m[H]$ 的独立复形的几何实现同伦等价于球面的楔和；而 H 的独立复形的几何实现同伦等价于一族维数相同的球面的楔和。

1. Introduction

设 $\mathcal{C}$ 是一个（方便的）空间范畴或抽象单纯复形范畴。考虑一个结合运算 $\star\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，满足若 $i_A\colon A\to X$ 和 $i_b\colon B\to Y$ 都是包含映射，则 $i_A\star i_B\colon A\star B\to X\star Y$ 也是包含映射。对于定义在 $[m]=\{1,2,\dots,m\}$ 上的抽象单纯复形 K，以及一族空间（复形）对 $(\underline{X},\underline{A})=\{(X_i\supset A_i)\}_{i\in[m]}$，我们可以定义 $X_1\star X_2\star\cdots\star X_m$ 的子空间（子复形）之并 $\mathcal{Z}_K^\star(\underline{X},\underline{A})$，如下所示：

$$\mathcal{Z}_K^\star(\underline{X},\underline{A})=\bigcup_{\sigma\in K} Y_1^\sigma\star Y_2^\sigma\star\cdots\star Y_m^\sigma,\quad Y_i^\sigma=\begin{cases}X_i & (i\in\sigma),\\ A_i & (i\notin\sigma).\end{cases}$$

（下文中，若（X_i， A_i）$=$（X， A）（$i\in[m]$）对于某一对（X， A）成立，则记作（$\underline{X}$， $\underline{A}$）$=$（X， A）。这一构造的一个典型例子是多面体积 $\mathcal{Z}_K^\times$（$\underline{X}$， $\underline{A}$），它由 Bahri、Bendersky、Cohen 和 Gitler 定义 [3]，此后受到了许多研究者的关注。

我们假设 $\mathcal{C}$ 是有限 CW 复形（或抽象单纯复形）的范畴，且 $\star$ 是连接运算 $*$。那么 $\mathcal{Z}_K^*(\underline{X},\underline{A})$ 是以 K 为底、由族 $(\underline{X},\underline{A})$ 构成的多面体连接，该概念由 Ayzenberg[2] 定义。本文研究满足某一条件的单纯复形 K 上有限 CW 复形的多面体连接的同伦型。该条件是顶点可分解性的一个更强版本，由 Bj¨orner 和 Wachs [5]，引入，因此我们称之为 s-顶点可分解性。我们得到以下

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05E45，05C69，05C76。*Key words and phrases.* 多面体连接，同伦型，独立复形，字典序积。

分解。在此，我们设

$$X^{*k} = \begin{cases} \underbrace{X * X * \cdots * X}_{k} & (k > 0) \\ \emptyset & (k = 0), \end{cases}$$
$$\Sigma^r X = X * S^{r-1},$$

其中 S^d 表示 d维球面。

定理 1.1. 设 K 是定义在 $[m]$ 上的连通的非空 s-顶点可分解单纯复形，且 $\underline{X} = \{X_i\}_{i\in[m]}$ 是一族有限 CW 复形。则有

$$\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}, \emptyset) \simeq \bigvee_{\alpha\in A} \left(\Sigma^{r_\alpha} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right)$$

对于一族 $\{(r_\alpha, k_{1,\alpha}, \ldots, k_{m,\alpha})\}_{\alpha\in A}$ 非负整数元组。

我们将多面体连接的相关结果应用于图的独立复形。本文中，图 G 始终指没有重边和自环的有限无向图。其顶点集和边集分别记为 $V(G)$ 和 $E(G)$。若子集 σ 属于 $V(G)$，且其中任意两个顶点 σ 均不相邻，则称其为独立集。G 的独立集在取子集后仍为独立集，因此构成一个抽象单纯复形。我们称这个抽象单纯复形为 G 的独立复形，并记为 $I(G)$。即

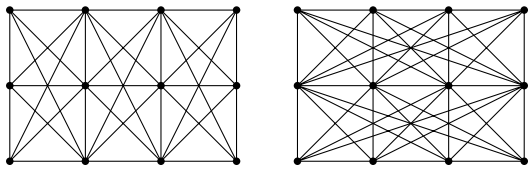
$$I(G) = \{\sigma \subset V(G) \mid uv \notin E(G) \text{ for any } u, v \in \sigma \}.$$

图的独立复形与其他由图构造的单纯复形同样重要，并已在许多不同背景下得到研究。

自 Kozlov [14] 确定了 $|I(L_n)|$ 和 $|I(C_n)|$ 的同伦型以来，关于图的独立复形几何实现的研究便一直在进行。其中，L_m 是一棵有 m 个顶点且没有分支的树，而 C_n 是一个有 n 个顶点的圈（$n \geq 3$）。以往研究中经常使用的一种工具是离散 Morse 理论。这种方法由 Forman[9] 提出，后由 Chari [7] 重新表述。Bousquet-M´elou、Linusson 和 Nevo [6] 以及 Thapper [16] 通过将离散 Morse 理论作为一种称为匹配树的组合算法来执行，研究了网格图的独立复形。然而，仅凭离散 Morse 理论很难区分每个维数上的胞腔数量相同的两个 CW 复形。当离散 Morse 理论无法使用时，我们需要采用拓扑方法。例如，将一个图的独立复形表示为其子图的独立复形之并，便是一种有效的方法，Engstr¨om[8], 、Adamaszek [1], 和 Barmak [4] 都采用过这种方法。Iriye [12], 同时使用这些方法研究了一些网格图的独立复形，并猜想任意圆柱形方格网图的独立复形的几何实现都同伦等价于球面的楔和。

正如 Harary[10] 所提到的，对于给定的两个图 G_1和 G_2，可以用多种方式在 $V(G_1)\times V(G_2)$上构造图结构。圆柱形方格图是 L_m 与 C_n的笛卡尔积。考虑 L_m 与 C_n 的其他积，并研究其独立复形的几何实现，似乎是很自然的。本文关注的是字典序积。字典序积 $G[H]$ 可视为含有 # $(V(G))$ 个伪顶点。其中每个伪顶点都与 H 同构，且两个伪顶点“相邻”的条件是

对应的顶点 G 相邻。Vander Meulen 和 Van Tuyl 从组合学的角度研究了字典积的独立复形 [18] 。



$L_4[L_3]$ $L_3[L_4]$

FIGURE 1. 字典序积 $L_4[L_3]$ 和 $L_3[L_4]$。

以下结论将我们对 s-顶点可分解单纯复形上的多面体连接的研究，与对森林上字典序积的独立复形的研究联系起来。

- 对于两个图 G、H，有

$$|I(G[H])| \cong \mathcal{Z}^*_{I(G)}(|I(H)|, \emptyset). \tag{1-1}$$

- 如果图 G 是森林，那么 $I(G)$ 是 s-顶点可分解的。

利用这些结论，我们可以推出关于独立复形的以下结果 x
字典序积的1.1定理。

定理 1.2. 设 G 是一片森林，H 是一个图。假设 G 不存在顶点 u，使得对任意 $v \in V(G)$，都有 $uv \in E(G)$，并且 $|I(H)|$ 同伦等价于球面的楔和。那么，$|I(G[H])|$ 同伦等价于球面的楔和。

此前已有多项研究探讨了这样的图：其独立复形的几何实现同伦等价于球面的楔和。例如，Van Tuyl and Villarreal 的结果 [17, 定理 2.13] 表明，若 G 是弦图，则 $|I(G)|$ 要么是可缩的，要么同伦等价于球面的楔和。（之后，Woodroofe [19, 定理 1] 对这一结果作了进一步完善。）Kawamura [13, 定理 1.1] 也证明了这一事实。

我们还给出以下显式计算。

定理 1.3. 设 X 是一个有限 CW 复形。那么我们有

$$\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X, \emptyset) \simeq \begin{cases} X & (n = 1), \\ X \sqcup X & (n = 2), \\ X^{*2} \sqcup X & (n = 3), \\ \bigvee\limits_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^r X^{*k} \right) & (n \geq 4). \end{cases}$$

这里，$\binom{p}{q}$ 表示二项式系数。若 $q < 0$ 或 $p < q$，则定义 $\binom{p}{q} = 0$。因此，楔和项的数量是有限的。

这一计算推导出以下结果。

定理 1.4. 若 $|I(H)| \simeq \bigvee_n S^k$，则

$$|I(L_m[H])| \simeq \begin{cases} \bigvee_n S^k & (m=1), \\ \left(\bigvee_n S^k\right) \sqcup \left(\bigvee_n S^k\right) & (m=2), \\ \left(\bigvee_{n^2} S^{2k+1}\right) \sqcup \left(\bigvee_n S^k\right) & (m=3), \\ \bigvee\limits_{d\geq 0} \left(\bigvee_{\sum_{p\geq 0} n^p \binom{p+1}{3(d-pk+1)-m}\binom{d-pk+1}{p}} S^d\right) & (m\geq 4). \end{cases}$$

尽管这恰恰是我们无法使用离散 Morse 理论的情形，我们仍成功确定了 $|I(L_m[H])|$的同伦型。借助 Kozlov 的计算 [14, 命题 5。2], 我们可以根据定理 $|I(L_m[C_n])|$ 确定任意 $m \geq 1$ 和 $n \geq 3$ 的同伦类型1.4。这一结果与圆柱形方格网图的情形形成对比；对于后者，我们无法轻易确定较大 m时的同伦型， n。

2. Preliminaries

对于正整数 m，我们设 $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$。我们用 pt 表示单点空间，用 S^d 表示 d 维球面。

设 $(X_1, x_1) \ldots, (X_n, x_n)$ 为带基点空间。这些带基点空间的楔和 $\bigvee_{i\in[n]} X_i$ 定义为

$$\bigvee_{i\in[n]} X_i = \bigsqcup_{i\in[n]} X_i \Big/ (x_i \sim x_j \text{ for any } i, j \in [n]).$$

若 $(X_1, x_1) \ldots, (X_n, x_n)$ 是 CW 对，且 X_i 连通，那么将基点 x_i 替换为另一个 0-胞腔 y_i 不会改变楔和的同伦型。因此，非空连通 CW 复形 $X_1, \ldots, X_n$ 的楔和 $X_1 \vee \cdots \vee X_n$ 在同伦意义下是良定义的。我们用 $\bigvee_n X$ 表示 X 的 n 个副本的楔和。即

$$\bigvee_n X = \begin{cases} \underbrace{X \vee \cdots \vee X}_{n} & (n \geq 1), \\ \mathrm{pt} & (n = 0). \end{cases}$$

尽管 0 维球面 S^0 并非连通，我们仍采用以下记号:

$$\bigvee_n S^0 = \underbrace{\mathrm{pt} \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{pt}}_{n+1},$$

$$X \vee \left(\bigvee_n S^0\right) = X \sqcup \underbrace{\mathrm{pt} \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{pt}}_{n}.$$

本文讨论有限 CW 复形。对于两个 CW 复形，已知连接 $X * Y$具有 CW 结构，其胞腔为 $X \times Y \times (0, 1)$ 的乘积胞腔，或为 X 或 Y 的胞腔（见 [11]）。我们将不加证明地使用连接的以下性质。

命题 2.1. 设 X, Y 为有限 CW 复形，且 $X_1, X_2 \subset X$, $Y_1, Y_2 \subset Y$ 为子复形。

(1) $X_1 * Y_1$ 是 $X * Y$的子复形。

(2) 我们有

$$(X_1 \cup X_2) * Y \cong (X_1 * Y) \cup (X_2 * Y),$$
$$(X_1 \cap X_2) * (Y_1 \cap Y_2) \cong (X_1 * Y_1) \cap (X_2 * Y_2).$$

对于空间 X， X 的非约化悬挂记作 ΣX，定义如下：

$$\Sigma X = X * S^0.$$

本文中经常会用到非约化悬挂，因为下面的引理起着重要作用。

引理 2.2. 设 X 是有限 CW 复形， X_1、 X_2 是 X 的子复形，且 $X = X_1 \cup X_2$。若包含映射 i_1： $X_1 \cap X_2 \to X_1$ 和 i_2： $X_1 \cap X_2 \to X_2$ 均为零伦，则有

$$X \simeq X_1 \cup_{\mathrm{pt}} X_2 \cup_{\mathrm{pt}} \Sigma(X_1 \cap X_2).$$

此外，假设 X_1 和 X_2 连通，则有

$$X \simeq X_1 \vee X_2 \vee \Sigma(X_1 \cap X_2).$$

证明. 有

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 &\simeq (X_1 \cup X_2) \times [0,1] \\ &\simeq X_1 \times \{0\} \cup (X_1 \cap X_2) \times [0,1] \cup X_2 \times \{1\} \end{aligned}$$

因为 $(X_1, X_1 \cap X_2)$ 和 $(X_2, X_1 \cap X_2)$ 是 CW 对。

设 $u \in X_1$ 和 $v \in X_2$ 为点，使得 $i_1 \simeq c_u$ 和 $i_2 \simeq c_v$，其中c_u： $X_1 \cap X_2 \to X_1$ 和 c_v： $X_1 \cap X_2 \to X_2$ 分别是到 u 和 v的常值映射。于是，由于 (X, X_1) 和 (X, X_2) 是 CW 对，我们有

$$\begin{aligned} & X_1 \times \{0\} \cup (X_1 \cap X_2) \times [0,1] \cup X_2 \times \{1\} \\ \simeq & X_1 \cup_{\{(u,0)\}} (X_1 \cap X_2) * \{(u,0),(v,1)\} \cup_{\{(v,1)\}} X_2 \\ = & X_1 \cup_{\{(u,0)\}} \Sigma(X_1 \cap X_2) \cup_{\{(v,1)\}} X_2. \end{aligned}$$

这就是所需的结论。 □

命题 2.3. 设 X, Y, Z 为有限非空 CW 复形。则有

$$(X \sqcup Y) * Z \simeq (X * Z) \vee (Y * Z) \vee \Sigma Z.$$

特别地，我们有

$$\Sigma(X \sqcup Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee S^1.$$

证明。 由命题2.1，我们有

$$(X \sqcup Y) * Z \cong (X * Z) \cup_{\emptyset * Z} (Y * Z).$$

由引理 2.2 可得所需结论，因为两个包含映射 $\emptyset * Z \to X * Z$， $\emptyset * Z \to Y * Z$ 是零伦的。 □

命题 2.4. 设 X、 Y、 Z 是非空有限 CW 复形。则有

$$(X \vee Y) * Z \simeq (X * Z) \vee (Y * Z).$$

特别地，我们有

$$\Sigma(X \vee Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y.$$

证明。根据命题2.1，我们有

$$(X \vee Y) * Z \cong (X * Z) \cup_{\mathrm{pt} * Z} (Y * Z).$$

由引理 2.2 可得所需结论，因为 pt $* Z$ 是可缩的。 □

有限抽象单纯复形 K 是给定有限集 V（K）的有限子集构成的集合，且满足：若 $\sigma \in K$ 和 $\tau \subset \sigma$，则 $\tau \in K$。本文中，我们省略“有限”和“抽象”这两个修饰词。 K 的元素称为 K 的单纯形。对于 K 的单纯形 σ，定义 dim $\sigma = \#(\sigma) - 1$，其中 $\#(\sigma)$ 表示 σ 的基数。 K 的几何实现记为 $|K|$。

设 V 是有限集， F_1、……、 $F_t \subset V$ 是 V 的一族子集。在 V 上定义单纯复形 $\langle F_1$、……、 $F_t\rangle$ 如下：

$$\langle F_1, \ldots, F_t \rangle = \{\sigma \subset V \mid \sigma \subset F_i \text{ for some } i \in [t]\}.$$

特别地， $\langle [n+1] \rangle$ 称为 n-单纯形，记作 Δ^n。

如果 $L \subset K$ 是单纯复形，则称 $L \subset K$ 为 K 的子复形。对于单纯复形 K 及其顶点 v，我们将 K的子复形 $\mathrm{st}_K(v)$、$\mathrm{dl}_K(v)$、$\mathrm{lk}_K(v)$ 定义为

$$\begin{aligned}
\mathrm{st}_K(v) &= \{\sigma \in K \mid \sigma \cup \{v\} \in K\}, \\
\mathrm{dl}_K(v) &= \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma\}, \\
\mathrm{lk}_K(v) &= \{\sigma \in K \mid \sigma \cup \{v\} \in K, v \notin \sigma\}.
\end{aligned}$$

根据定义，有

$$K = \mathrm{st}_K(v) \cup_{\mathrm{lk}_K(v)} \mathrm{dl}_K(v). \tag{2-1}$$

设 $\{K_i\}_{i \in [m]}$是一个单纯复形族。 $K_1, \ldots, K_m$的连接记作 $K_1 * \cdots * K_m$，它是如下定义的一个单纯复形：

$$K_1 * \cdots * K_m = \left\{ \sigma \subset \bigsqcup_{i \in [m]} V(K_i) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma \cap V(K_i) \in K_i \\ \text{for any } i \in [m] \end{array} \right\}. \tag{2-2}$$

有限无向简单图 G 是一个有序对 $(V(G)\ E(G))$，其中 $V(G)$ 是有限集， $E(G)$ 是 $2^{V(G)}$ 的子集，并且对于任意 $e \in E(G)$，都有 $\#(e) = 2$。 $V(G)$ 的元素称为 G的顶点， $E(G)$ 的元素称为 G的边。为了表示 $e = \{u, v\}$ $(u, v \in V(G))$，我们记作 $e = uv$。本文中，我们省略“有限”“无向”和“简单”这几个修饰词，称 G 为图。

对于顶点 $v \in V(G)$，其在 G 中的开邻域 $N_G(v)$ 定义为

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

v 在 G 中的闭邻域 $\overline{N}_G(v)$ 定义为 $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \sqcup \{v\}$。

图 G 的导出子图 H 是满足以下条件的图：

$$\begin{aligned}
&V(H) \subset V(G), \\
&E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}.
\end{aligned}$$

对于 G 的两个导出子图 H、K，顶点集为 V（H）$\cap V$（K）的导出子图记为 $H \cap K$，顶点集为 V（H）$\setminus V$（K）的导出子图记为 $H \setminus K$。若 V（G）$= V$（H）$\sqcup V$（K），且对于任意 $u \in V$（H）和 $v \in V$（K）均有 $uv \notin E$（G），则记作 $G = H \sqcup K$。对于子集 $U \subset V$（G），$G \setminus U$ 是 G 的导出子图，满足 V（$G \setminus U$）$= V$（G）$\setminus U$。

设 L_n 是一棵有 n 个顶点且没有分支的树， C_n 是一个有 n 个顶点的圈（ $n \geq 3$）。也就是说

$$V(L_n) = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad E(L_n) = \{ij \mid |i-j| = 1\},$$
$$V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad E(C_n) = E(L_n) \cup \{n1\}.$$

若图 G G 对任意 $n \geq 3$ 都不包含 C_n 作为导出子图，则称 G 为森林。

回忆一下，图 G G的独立复形 $I(G)$ 是一个单纯复形 x
定义如下

$$I(G) = \{\sigma \subset V(G) \mid uv \notin E(G) \text{ for any } u, v \in \sigma \}.$$

对于 G 的一个导出子图 H， $I(H)$ 是 $I(G)$ 的一个子复形。此外，若 H、K 是 G 的导出子图，则 $I(H \cap K) = I(H) \cap I(K)$。

设 G 是一个图， v 是 G的一个顶点。根据定义，有

$$\mathrm{st}_{I(G)}(v) = I(G \setminus N_G(v)),$$
$$\mathrm{dl}_{I(G)}(v) = I(G \setminus \{v\}),$$
$$\mathrm{lk}_{I(G)}(v) = I(G \setminus \overline{N}_G(v)).$$

3. S-Vertex-Decomposable Simplicial Complex

本节中，我们定义一类称为 s-顶点可分解单纯复形的单纯复形。

定义 3.1. 设 K 是一个单纯复形。若满足以下条件，我们称 K 是 s-顶点可分解的:

- K 是一个单纯形或 $\{\emptyset\}$，或者
- 存在 K 的顶点 v、 w， 使得 – $\mathrm{dl}_K(v)$、$\mathrm{lk}_K(v)$ 是 s-顶点可分解的，并且 – $\mathrm{dl}_K(v)$ =$\mathrm{st}_K(w)$。我们称 v 为 K 的一个 s-剥离顶点。

s-顶点可分解单纯复形的一个重要例子是森林的独立复形。

定理 3.2. 设 G 是一个图。若 G 是一片森林，则 $I(G)$ 是 s-顶点可分解的。

证明。我们对 # $(V(G))$ 使用归纳法来证明该定理。若 #$(V(G)) = 0$，则$I(G) = \{\emptyset\}$，它是 s-顶点可分解的。

对于非负整数 n，假设对于任意森林 G'， 只要 # $(V(G')) < n$， $I(G')$ 就是 s-顶点可分解的。设 G 是一个满足 # $(V(G)) = n$ 的森林。若 G 没有边，则 $I(G)$ 是 s-顶点可分解的，因为 $I(G) = \Delta^{n-1}$。若 G 至少有一条边，则 G 有一个叶节点 l。令 $v \in V(G)$ 为 G 中唯一满足 $vl \in E(G)$ 的顶点。根据归纳法的假设，$\mathrm{dl}^{I(G)}(v) = I(G \setminus \{v\})$、$\mathrm{lk}^{I(G)}(v) = I(G \setminus \overline{N}_G(v))$ 均为 s-顶点可分解的。此外，我们有

$$\mathrm{dl}_{I(G)}(v) = I(G \setminus \{v\}) = I(G \setminus N_G(l)) = \mathrm{st}_{I(G)}(l).$$

因此， I（G）是 s-顶点可分解的。 □

注记 3.3. 定理 3.2 的逆命题并不成立。一个反例如 G图 2所示。

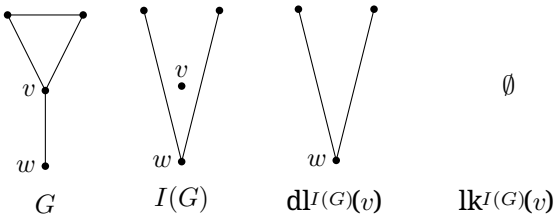


FIGURE 2. 一个图 G，满足 $I(G)$ 是 s-顶点可分解的，但 G 不是森林

我们注意到，如果一个 s-顶点可分解的单纯复形不连通，那么它必有 2 个连通分支，且其中一个连通分支是一个 0-单纯形。

命题 3.4. 设 K 是一个非空的 s-顶点可分解单纯复形。如果 K 不连通，那么

$$K = \mathrm{st}_K(w) \sqcup \langle\{v\}\rangle,$$

对于某个 $v, w \in V(K)$。

证明. 我们首先注意到，由于 K 不连通，K 不是一个单纯形。因此，存在 v, w，使得 $\mathrm{dl}_K(v)$、$\mathrm{lk}_K(v)$ 均为 s-顶点可分解的，并且 $\mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$。这里我们有

$$K = \mathrm{st}_K(v) \cup_{\mathrm{lk}_K(v)} \mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(v) \cup_{\mathrm{lk}_K(v)} \mathrm{st}_K(w).$$

因此，如果 K 不连通，那么 $\mathrm{lk}_K(v)$ 必须为空，因为 $\mathrm{st}_K(v)$ 和 $\mathrm{st}_K(w)$ 都是连通的。因此，由于 $\mathrm{lk}_K(v) = \emptyset$ 蕴含 $\mathrm{st}_K(v) = \langle\{v\}\rangle$，我们得到所需的结论。□

回顾[5, 定义 11。1]如果一个单纯复形 K 称为顶点可分解，当且仅当

- K 是一个单纯形，或者是 $\{\emptyset\}$，或者
- 存在一个顶点 v 属于 K，使得 – $\mathrm{dl}_K(v)$、$\mathrm{lk}_K(v)$ 是顶点可分解的，并且 – $\mathrm{lk}_K(v)$ 的任何极大单形都不是 $\mathrm{dl}_K(v)$ 中的极大单形。

我们证明，s-顶点可分解性是顶点可分解性的一种更强形式。

引理 3.5。设 K 是一个单纯复形，v、w 是 K 的顶点，且 $\mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$。那么我们有

(1) $v \neq w$, (2) $\mathrm{lk}_K(w) = \mathrm{dl}_K(v) \cap \mathrm{dl}_K(w)$, (3) $\mathrm{lk}_K(v) \subset \mathrm{lk}_K(w)$.

证明。由 $v \notin \mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w) \ni w$，可得 $v \neq w$。我们还得到

$$\mathrm{lk}_K(w) = \mathrm{st}_K(w) \cap \mathrm{dl}_K(w) = \mathrm{dl}_K(v) \cap \mathrm{dl}_K(w).$$

因此，为了证明 (3)，还需证明 $\mathrm{lk}_K(v) \subset \mathrm{dl}_K(w)$。由 $\{v, w\} \notin K$ 可知，由于 $v \notin \mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$。因此，若 $\sigma \in \mathrm{lk}_K(v)$ 包含 w，则可推出 $\{v, w\} \subset \sigma \cup \{v\} \in K$，矛盾。于是，对于任意 $\sigma \in \mathrm{lk}_K(v)$，都有 $w \notin \sigma$。□

命题 3.6. 设 K 是一个单纯复形。若 K 是 s-顶点可分解的，则 K 是顶点可分解的。

证明。设 K 是一个 s-顶点可分解单纯复形。我们对 # $(V(K))$ 使用归纳法来证明该命题。如果 # $(V(K)) = 0$，那么 $K = \{\emptyset\}$ 是顶点可分解的。

对于非负整数 n，假设若 K' 是一个 s-顶点可分解单纯复形，且 # $(V(K'))$ $< n$，则 K' 是顶点可分解的。考虑满足 # $(V(K)) = n$ 的 K。若 $K = \Delta^{n-1}$，则 K 是顶点可分解的。假设存在 K 的顶点 v、w，使得

- $\mathrm{dl}_K(v)$、$\mathrm{lk}_K(v)$ 均为 s-顶点可分解的，并且
- $\mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$。

根据归纳法的假设，$\mathrm{dl}_K(v)$ 和 $\mathrm{lk}_K(v)$ 均为顶点可分解的。此外，对于 $\mathrm{lk}_K(v)$ 的任意极大单形 $\sigma \in$，我们有

$$\sigma \subsetneq \sigma \cup \{w\} \in \mathrm{st}_K(w) = \mathrm{dl}_K(v).$$

上述包含关系由引理 3.5得出。因此，σ 不是 $\mathrm{dl}_K(v)$ 中的极大元。因此，K 是顶点可分解的。□

4. Homotopy type of Polyhedral Join over S-Vertex-Decomposable Simplicial Complex

如第 1 节所定义，有限 CW 复形（或单纯复形）的多面体连接 定义如下。

定义 4.1（基于 [2, 定义 4.2、观察 4.3]）。设 K 是以 $[m]$ 为顶点集的单纯复形，且 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i\in[m]}$ 是一族有限 CW 对。对于一个单纯形 $\sigma \in K$，我们定义 $(\underline{X}, \underline{A})^{*\sigma}$ 为

$$(\underline{X}, \underline{A})^{*\sigma} = Y_1 * Y_2 * \cdots * Y_m,\ Y_i = \begin{cases} X_i & (i \in \sigma), \\ A_i & (i \notin \sigma). \end{cases}$$

$(\underline{X}, \underline{A})^{*\sigma}$ 是 $X_1 * \cdots * X_m$ 的子复形，由命题 2.1可知。

$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}, \underline{A})$ 是 $X_1 * \cdots * X_m$ 的子复形，定义为

$$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma\in K} (\underline{X}, \underline{A})^{*\sigma}$$

（并集在 $X_1 * \cdots * X_m$ 中取。）

若 X_i 是一个单纯复形，且 A_i 是 X_i的子复形，那么 $\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}, \underline{A})$ 根据（2-2）定义为一个单纯复形。

下面我们考虑多面体连接 $\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}, \emptyset)$，其中 K 是一个单纯复形，$\underline{X}$ 是有限 CW 复形族。我们将这个多面体连接记为 $\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})$。

$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})$ 对单纯复形 K上的运算具有良好的性质。

命题 4.2. 设 K 是一个单纯复形，$\underline{X} = \{X_v\}_{v\in V(K)}$ 是有限 CW 复形族。

(1) 设 $L \subset K$ 是 K 的子复形。则 $\mathcal{Z}^*_L(\underline{X})$ 是 $\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})$ 的子复形。(2) 设 L_1、$L_2 \subset K$ 是 K 的子复形，且满足 $K = L_1 \cup L_2$。那么我们有

$$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}) = \mathcal{Z}^*_{L_1}(\underline{X}) \cup_{\mathcal{Z}^*_{L_1\cap L_2}(\underline{X})} \mathcal{Z}^*_{L_2}(\underline{X}).$$

证明。(1) 由多面体连接的定义直接得出。下面证明 (2)。首先，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) &= \bigcup_{\sigma\in K}(\underline{X},\emptyset)^{*\sigma}\\ &= \left(\bigcup_{\sigma\in L_1}(\underline{X},\emptyset)^{*\sigma}\right)\cup\left(\bigcup_{\tau\in L_2}(\underline{X},\emptyset)^{*\tau}\right)\\ &= \mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X})\cup\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X}).\end{aligned}$$

注意到由 (1) 可得 $\mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X})\cap\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X})\supset\mathcal{Z}_{L_1\cap L_2}^*(\underline{X})$，因此只需证明 $\mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X})\cap\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X})\subset\mathcal{Z}_{L_1\cap L_2}^*(\underline{X})$。对于一点 $x\in\mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X})\cap\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X})$，存在 $\sigma\in L_1$ 和 $\tau\in L_2$ 使得

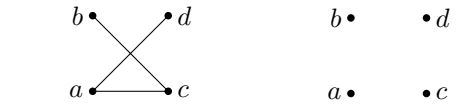
$$\begin{aligned}x&\in(\underline{X},\emptyset)^{*\sigma}\cap(\underline{X},\emptyset)^{*\tau}\\ &= (A_1*\cdots*A_m)\cap(B_1*\cdots*B_m) && \left(\begin{aligned}A_i&=\begin{cases}X_i & (i\in\sigma)\\ \emptyset & (i\notin\sigma)\end{cases}\\ B_i&=\begin{cases}X_i & (i\in\tau)\\ \emptyset & (i\notin\tau)\end{cases}\end{aligned}\right)\\ &= (A_1\cap B_1)*\cdots*(A_m\cap B_m) && \left(A_i\cap B_i=\begin{cases}X_i & (i\in\sigma\cap\tau)\\ \emptyset & (i\notin\sigma\cap\tau)\end{cases}\right)\\ &= (\underline{X},\emptyset)^{*(\sigma\cap\tau)}.\end{aligned}$$

第二个等式由命题 2.1 得出。因此，我们得到 $x\in\mathcal{Z}_{L_1\cap L_2}^*(\underline{X})$，因为$\sigma\cap\tau\in L_1\cap L_2$。 □

注 4.3. 命题 4.2 对于 $\mathcal{Z}_K^*(\underline{X},\underline{A})$ 并不成立，若 $\underline{A}\neq\emptyset$。例如，考虑 $K=\langle\{1\},\{2\}\rangle$, $L_1=\langle\{1\}\rangle$, $L_2=\langle\{2\}\rangle$, 以及 $X_1=a\sqcup b$, $A_1=a$,$X_2=c\sqcup d$, $A_2=c$，其中 a,b,c,d均为点。于是

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}_K^*(\underline{X},\underline{A})=(ac\cup bc)\cup(ac\cup ad)=bc\cup ac\cup ad,\\ &\mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X},\underline{A})\cup_{\mathcal{Z}_{L_1\cap L_2}^*(\underline{X},\underline{A})}\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X},\underline{A})=(a\sqcup b)\sqcup(c\sqcup d),\end{aligned}$$

其中 ac, bc, ad 表示线段（见图3）。



$(X_1*A_2)\cup(A_1*X_2)$ $\qquad$ $X_1\cup X_2$

FIGURE 3. An example of $\mathcal{Z}_{L_1\cup L_2}^*(\underline{X},\underline{A})\neq\mathcal{Z}_{L_1}^*(\underline{X},\underline{A})\cup\mathcal{Z}_{L_2}^*(\underline{X},\underline{A})$

命题 4.4. 设 K、L 是单纯复形，$\underline{X}=\{X_v\}_{v\in V(K)\sqcup V(L)}$ 是有限 CW 复形族。则有

$$\mathcal{Z}_{K*L}^*(\underline{X})\cong\mathcal{Z}_K^*(\underline{X})*\mathcal{Z}_L^*(\underline{X}).$$

证明. 注意， $K*L$ 的每个单纯形都是若干单纯形 $\sigma\in K$ 和 $\tau\in L$ 的不交并。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^*_{K*L}(\underline{X}) &= \bigcup_{\sigma\sqcup\tau\in K*L}(\underline{X},\emptyset)^{*(\sigma\sqcup\tau)}\\ &= \bigcup_{\sigma\in K,\tau\in L}((\underline{X},\emptyset)^{*\sigma}*(\underline{X},\emptyset)^{*\tau})\\ &\cong \left(\bigcup_{\sigma\in K}(\underline{X},\emptyset)^{*\sigma}\right)*\left(\bigcup_{\tau\in L}(\underline{X},\emptyset)^{*\tau}\right)\\ &= \mathcal{Z}^*_K(\underline{X})*\mathcal{Z}^*_L(\underline{X}).\end{aligned}$$

注意，同胚可由命题2.1得出。 □

现在考虑具有 K s-顶点可分解性的 $\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})$。以下定理对本文至关重要。

定理 4.5. 设 K 是一个单纯复形。假设存在v、 w这两个 K的顶点，使得 $\mathrm{lk}_K(v)\neq\emptyset$ 且 $\mathrm{dl}_K(v)=\mathrm{st}_K(w)$。设 $\underline{X}=\{X_v\}_{v\in V(K)}$是一个非空有限 CW 复形族。则有

$$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})\simeq\Sigma\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})\vee\left(\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*X_v\right)\vee\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X}).$$

证明。 由命题4.2 以及分解（2-1），可得

$$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})=\mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}_K(v)}(\underline{X})\cup_{\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})}\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X}).$$

设 $i:\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}K(v)}(\underline{X})\to\mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}K(v)}(\underline{X})$ 和 $j:\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}K(v)}(\underline{X})\to\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}K(v)}(\underline{X})$ 是包含映射。由命题4.4，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}_K(v)}(\underline{X}) &= \mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)*\langle\{v\}\rangle}(\underline{X})\\ &\cong \mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*X_v,\\ \mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X}) &= \mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}_K(w)}(\underline{X})\\ &\cong \mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(w)}(\underline{X})*X_w.\end{aligned}$$

设 $x\in X_v$ 和 $y\in X_w$ 为点。于是，有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*\{x\}&\subset\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*X_v,\\ \mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*\{y\}&\subset\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(w)}(\underline{X})*\{y\}\\ &\subset\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(w)}(\underline{X})*X_w.\end{aligned}$$

注意，第二个包含映射由引理 3.5 得出。这些包含映射表明 i， j 是零伦的。因此，由引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}) =&\mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}_K(v)}(\underline{X})\cup_{\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})}\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X})\\ \simeq&\Sigma\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})\vee\mathcal{Z}^*_{\mathrm{st}_K(v)}(\underline{X})\vee\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X})\\ \simeq&\Sigma\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})\vee\left(\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X})*X_v\right)\vee\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X}).\end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

注 4.6。 定理 $_K(v)=\mathrm{st}_K(w)$”中的假设不能替换为“4.5 $\mathrm{lk}_K(v)$ 中没有极大单形是 $\mathrm{dl}_K(v)$ 中的极大单形 ”，该说法出现在

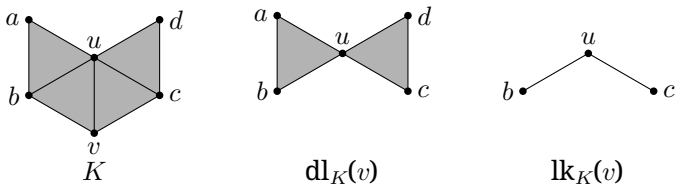


FIGURE 4. 一个不满足定理 v 中的假设的例子4.5

顶点可分解性的定义中。考虑图 K 和一个顶点 v，如图 4所示。

我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) \simeq\ & (X_u * X_a * X_b) \vee (X_u * X_b * X_v) \vee (X_u * X_v * X_c) \\ & \vee (X_u * X_c * X_d) \vee \Sigma(X_u * X_b) \vee \Sigma(X_u * X_v) \vee \Sigma(X_u * X_c),\\ \mathcal{Z}_{\mathrm{dl}_K(v)}^*(\underline{X}) \simeq\ & (X_u * X_a * X_b) \vee (X_u * X_c * X_d) \vee \Sigma X_u,\\ \mathcal{Z}_{\mathrm{lk}_K(v)}^*(\underline{X}) \simeq\ & (X_u * X_b) \vee (X_u * X_c) \vee \Sigma X_u\end{aligned}$$

通过与定理 4.5证明中相同的论证。因此，我们得出

$$\begin{aligned}& \Sigma\mathcal{Z}_{\mathrm{lk}_K(v)}^*(\underline{X}) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathrm{lk}_K(v)}^*(\underline{X}) * X_v\right) \vee \mathcal{Z}_{\mathrm{dl}_K(v)}^*(\underline{X})\\ \simeq & \Sigma((X_u * X_b) \vee (X_u * X_c) \vee \Sigma X_u)\\ & \vee ((X_u * X_b) \vee (X_u * X_c) \vee \Sigma X_u) * X_v\\ & \vee (X_u * X_a * X_b) \vee (X_u * X_c * X_d) \vee \Sigma X_u\\ \simeq & (X_u * X_a * X_b) \vee (X_u * X_b * X_v) \vee (X_u * X_v * X_c)\\ & \vee (X_u * X_c * X_d) \vee \Sigma(X_u * X_b) \vee \Sigma(X_u * X_v) \vee \Sigma(X_u * X_c)\\ & \vee \Sigma X_u \vee \Sigma^2 X_u\\ \simeq & \mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) \vee \Sigma X_u \vee \Sigma^2 X_u\\ \not\simeq & \mathcal{Z}_K^*(\underline{X}).\end{aligned}$$

定理 1.1 和定理 1.3 可由定理 4.5得到。

定理 *1.1* 的证明。 若 K 是一个单纯形，则有

$$\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) = X_1 * \cdots * X_m.$$

我们对 m 使用归纳法证明该定理。若 $m = 1$，则 $K = \Delta^0$ 和$\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) = X_1$。令 n 为一个正整数。假设对于任意满足 # $(V(K'))$ $< n$ 的 s-顶点可分解单纯复形 K'，$\mathcal{Z}_{K'}^*(\underline{X})$ 都可以按照定理 1.1 分解。考虑一个满足 # $(V(K)) = n$、且不是单纯形的 s-顶点可分解单纯复形 K。令 v, w 为 K 的顶点，使得

- $\mathrm{dl}_K(v)$ 和 $\mathrm{lk}_K(v)$ 均为 s-顶点可分解，并且
- $\mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$。

我们有 $\mathrm{lk}_K(v) \neq \emptyset$，因为 K 是连通的。因此，由定理 4.5，我们得到

$$\mathcal{Z}_K^*(\underline{X}) \simeq \Sigma\mathcal{Z}_{\mathrm{lk}_K(v)}^*(\underline{X}) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathrm{lk}_K(v)}^*(\underline{X}) * X_v\right) \vee \mathcal{Z}_{\mathrm{dl}_K(v)}^*(\underline{X}).$$

由于 $\mathrm{dl}_K(v) = \mathrm{st}_K(w)$ 是连通的，且 $\#(V(\mathrm{dl}_K(v))) < \#(V(K)) = n$，根据归纳法的假设，我们得到

$$\mathcal{Z}^*_{\mathrm{dl}_K(v)}(\underline{X}) \simeq \bigvee_{\beta\in B}\left(\Sigma^{s_\beta} X_1^{*l_{1,\beta}} * \cdots * X_m^{*l_{m,\beta}}\right)$$

对于一个族 $\{(s_\beta, l_{1,\ \beta}, \ldots, l_{m,\ \beta})\}_{\beta\in B}$。

若 $\mathrm{lk}_K(v)$ 连通，则存在 $\{(r_\alpha, k_{1,\ \alpha}, \ldots, k_{m,\ \alpha})\}_{\alpha\in A}$，使得

$$\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) \simeq \bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right).$$

因此，我们得到

$$\Sigma\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) \simeq \bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha+1} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right),$$

$$\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) * X_v \simeq \bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_v^{*(k_{v,\alpha}+1)} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right).$$

若 $\mathrm{lk}_K(v)$ 不连通，则由命题 3.4，$\mathrm{lk}_K(v) = \mathrm{st}_K(u) \sqcup \langle\{u'\}\rangle$，其中某些 $u, u' \in V(K)$。由于 $\mathrm{st}_K(u)$ 连通，且 $\#(V(\mathrm{st}_K(u))) < \#(V(\mathrm{lk}_K(v))) < n$，由命题 4.2 可得

$$\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) \simeq \left(\bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right)\right) \sqcup X_{u'}$$

对于一个族 $\{(r_\alpha,\ k_{1,\ \alpha},\ \ldots,\ k_{m,\ \alpha})\}_{\alpha\in A}$。然后，由命题 2.3，我们得到

$$\Sigma\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) \simeq \left(\bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha+1} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right)\right) \vee \Sigma X_{u'} \vee S^1,$$

$$\mathcal{Z}^*_{\mathrm{lk}_K(v)}(\underline{X}) * X_v \simeq \left(\bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha} X_1^{*k_{1,\alpha}} * \cdots * X_v^{*(k_{v,\alpha}+1)} * \cdots * X_m^{*k_{m,\alpha}}\right)\right)$$
$$\vee (X_v * X_{u'}) \vee \Sigma X_v.$$

这里要指出的是，一个球面 S^r 可以写成

$$S^r = \Sigma^{r-1} X_1^{*0} * \cdots * X_m^{*0}.$$

在这两种情况下，$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X})$记作

$$\mathcal{Z}^*_K(\underline{X}) \simeq \bigvee_{\gamma\in\Gamma}\left(\Sigma^{t_\gamma} X_1^{*j_{1,\gamma}} * \cdots * X_m^{*j_{m,\gamma}}\right).$$

对于某个由非负整数元组组成的族 $\{(t_\gamma, j_{1,\ \gamma}, \ldots, j_{m,\ \gamma})\}_{\gamma\in\Gamma}$，如所需。□

注 4.7. 上述证明表明，$r_\alpha + k_{1,\ \alpha} + \cdots + k_{m,\ \alpha} \geq 2$ 对于任意$\alpha \in A$ 若 $m \geq 2$。因此，定理 1.1 中的楔和在同伦意义下是良定义的，因为每个楔和项都是连通的。

定理 *1.3* 的证明。我们有

$$I(L_1) = \langle\{1\}\rangle, \qquad I(L_2) = \langle\{1\},\{2\}\rangle, \qquad I(L_3) = \langle\{1,3\},\{2\}\rangle.$$

因此，我们得到

$$\mathcal{Z}^*_{I(L_1)}(\underline{X}) = X_1, \quad \mathcal{Z}^*_{I(L_2)}(\underline{X}) = X_1 \sqcup X_2, \quad \mathcal{Z}^*_{I(L_3)}(\underline{X}) = (X_1 * X_3) \sqcup X_2.$$

令 $X_1 = X_2 = X_3 = X$，我们便得到所需的等式，其中 $n = 1$ 取 2、3。

设 $n \geq 1$。定理 3.2的证明表明， $n+2$ 是 I（L_{n+3}）的一个 s-剥离顶点。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{lk}_{I(L_{n+3})}(n+2) &= I(L_{n+3} \setminus \overline{N}_{L_{n+3}}(n+2)) = I(L_n) \neq \emptyset, \\
\mathrm{dl}_{I(L_{n+3})}(n+2) &= I(L_{n+3} \setminus \{n+2\}) \\
&= I(L_{n+1} \sqcup \{n+3\}) = I(L_{n+1}) * \langle \{n+3\} \rangle.
\end{aligned}$$

因此，由定理4.5，可得

$$\mathcal{Z}^*_{I(L_{n+3})}(X) \simeq \Sigma \mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) \vee (\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) * X) \vee (\mathcal{Z}^*_{I(L_{n+1})}(X) * X). \tag{4-1}$$

对于 $n \geq 1$，定义 Y_n 为

$$Y_n = \bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee\nolimits_{N_n(k,r)} \Sigma^r X^{*k} \right),$$

其中

$$N_n(k,r) = \binom{k+1}{n-2k-3r+1} \binom{k+r}{r}.$$

注意，对于非负整数 k, r， $N_n(k,r) > 0$ 当且仅当 $0 \leq n-2k-3r+1 \leq k+1$ 且 $0 \leq r \leq k+r$。该不等式意味着

$$\begin{aligned}
\max\left\{\frac{n-3r}{3}, 0\right\} \leq & k \leq \frac{n-3r+1}{2}, \\
& 0 \leq r \leq \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

因此可得

$$Y_n = \bigvee_{0 \leq r \leq \frac{n+1}{3}} \left(\bigvee_{\max\left\{\frac{n-3r}{3}, 0\right\} \leq k \leq \frac{n-3r+1}{2}} \left(\bigvee\nolimits_{N_n(k,r)} \Sigma^r X^{*k} \right) \right).$$

为了完成证明，只需证明对于任意 $n \geq 4$， $\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) \simeq Y_n$。首先， Y_1、 Y_2 和 Y_3 的显式描述如下。

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \bigvee_{0 \leq r \leq \frac{1+1}{3}} \left(\bigvee_{\max\left\{\frac{1-3r}{3}, 0\right\} \leq k \leq \frac{2-3r}{2}} \left(\bigvee\nolimits_{N_1(k,r)} \Sigma^r X^{*k} \right) \right) \\
&= \bigvee_{\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{2}} \left(\bigvee\nolimits_{N_1(k,0)} X^{*k} \right) \\
&= \bigvee\nolimits_{N_1(1,0)} X \\
&= \bigvee\nolimits_{\binom{2}{0}\binom{1}{0}} X \\
&= X,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= \bigvee_{0\le r\le \frac{2+1}{3}} \left(\bigvee_{\max\left\{\frac{2-3r}{3},0\right\}\le k\le \frac{3-3r}{2}} \left(\bigvee_{N_2(k,r)} \Sigma^r X^{*k} \right) \right) \\
&= \left(\bigvee_{\frac{2}{3}\le k\le \frac{3}{2}} \left(\bigvee_{N_2(k,0)} X^{*k} \right) \right) \vee \left(\bigvee_{0\le k\le \frac{0}{2}} \left(\bigvee_{N_3(k,1)} \Sigma X^{*k} \right) \right) \\
&= \left(\bigvee_{N_2(1,0)} X \right) \vee \left(\bigvee_{N_2(0,1)} S^0 \right) \\
&= \left(\bigvee_{\binom{2}{1}\binom{1}{0}} X \right) \vee \left(\bigvee_{\binom{1}{0}\binom{1}{1}} S^0 \right) \\
&= X \vee X \vee S^0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_3 &= \bigvee_{0\le r\le \frac{3+1}{3}} \left(\bigvee_{\max\left\{\frac{3-3r}{3},0\right\}\le k\le \frac{4-3r}{2}} \left(\bigvee_{N_3(k,r)} \Sigma^r X^{*k} \right) \right) \\
&= \left(\bigvee_{\frac{3}{3}\le k\le \frac{4}{2}} \left(\bigvee_{N_3(k,0)} X^{*k} \right) \right) \vee \left(\bigvee_{0\le k\le \frac{1}{2}} \left(\bigvee_{N_3(k,1)} \Sigma X^{*k} \right) \right) \\
&= \left(\bigvee_{N_3(1,0)} X \right) \vee \left(\bigvee_{N_3(2,0)} X^{*2} \right) \vee \left(\bigvee_{N_3(0,1)} S^0 \right) \\
&= \left(\bigvee_{\binom{2}{2}\binom{1}{0}} X \right) \vee \left(\bigvee_{\binom{3}{0}\binom{2}{0}} X^{*2} \right) \vee \left(\bigvee_{\binom{1}{1}\binom{1}{1}} S^0 \right) \\
&= X \vee X^{*2} \vee S^0.
\end{aligned}
$$

尽管 $Y_2 \neq \mathcal{Z}^*_{I(L_2)}(X)$ 且 $Y_3 \neq \mathcal{Z}^*_{I(L_3)}(X)$，但由命题 2.3、2.4 可得

$$
\begin{aligned}
\Sigma\mathcal{Z}^*_{I(L_2)}(X) &= \Sigma(X \sqcup X) \simeq \Sigma X \vee \Sigma X \vee S^1 = \Sigma Y_2, \\
\mathcal{Z}^*_{I(L_2)}(X) * X &= (X \sqcup X) * X \simeq (X * X) \vee (X * X) \vee \Sigma X = Y_2 * X, \\
\Sigma\mathcal{Z}^*_{I(L_3)}(X) &= \Sigma(X^{*2} \sqcup X) \simeq \Sigma X^{*2} \vee \Sigma X \vee S^1 = \Sigma Y_3, \\
\mathcal{Z}^*_{I(L_3)}(X) * X &= (X^{*2} \sqcup X) * X \simeq (X^{*2} * X) \vee (X * X) \vee \Sigma X = Y_3 * X.
\end{aligned}
$$

现在假设我们有

$$
\Sigma\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) \simeq \Sigma Y_n \simeq \bigvee_{k,r\in\mathbb{N}_{\ge 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r+1} X^{*k} \right),
$$

$$
\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) * X \simeq Y_n * X \simeq \bigvee_{k,r\in\mathbb{N}_{\ge 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right),
$$

$$
\mathcal{Z}^*_{I(L_{n+1})}(X) * X \simeq Y_{n+1} * X \simeq \bigvee_{k,r\in\mathbb{N}_{\ge 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+2}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right)
$$

对于某个 $n \geq 1$。然后，根据（4-1），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^*_{I(L_{n+3})}(X) \\
\simeq &\Sigma \mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) \vee (\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) * X) \vee (\mathcal{Z}^*_{I(L_{n+1})}(X) * X) \\
\simeq &\left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r+1} X^{*k} \right) \right) \\
&\vee \left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right) \right) \\
&\vee \left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+2}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right) \right) \\
\simeq &\left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r+1} X^{*k} \right) \right) \\
&\vee \left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}+\binom{k+1}{n-2k-3r+2}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right) \right) \\
= &\left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r+1} X^{*k} \right) \right) \\
&\vee \left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+2}{n-2k-3r+2}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*(k+1)} \right) \right) \\
= &\left(\bigvee_{k \in \mathbb{N}_{\geq 0}, s=r+1 \in \mathbb{N}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3(s-1)+1}\binom{k+(s-1)}{s-1}} \Sigma^{s} X^{*k} \right) \right) \\
&\vee \left(\bigvee_{l=k+1 \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{(l-1)+2}{n-2(l-1)-3r+2}\binom{(l-1)+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*l} \right) \right) \\
\simeq &\left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{n-2k-3r+4}\binom{k+r-1}{r-1}+\binom{k+1}{n-2k-3r+4}\binom{k+r-1}{r}} \Sigma^{r} X^{*k} \right) \right) \\
= &\left(\bigvee_{k,r \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{k+1}{(n+3)-2k-3r+1}\binom{k+r}{r}} \Sigma^{r} X^{*k} \right) \right) \\
= &Y_{n+3}.
\end{aligned}
$$

因此，通过对 n 进行归纳法，我们得出结论：对于任意 $n \geq 4$，都有$\mathcal{Z}^*_{I(L_n)}(X) \simeq Y_n$，如所需。 □

5. The Independence Complex of the Lexicographic Product over aForest

字典序积 $G[H]$ 关于 H 在 G，Harary 将其称为复合。 [10], 其定义如下。

定义 5.1. 设 G, H 为图。 $G[H]$ 关于 H 在 G上的字典序积是一个图，定义如下:

$$V(G[H]) = V(G) \times V(H),$$
$$E(G[H]) = \left\{ (u_1, v_1)(u_2, v_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1u_2 \in E(G) \\ \text{or} \\ u_1 = u_2, v_1v_2 \in E(H) \end{array} \right\}.$$

$G[H]$ 的独立复形与多面体连接之间存在如下关系。

命题 5.2. 设 G, H 为图。则有

$$I(G[H]) = \mathcal{Z}^*_{I(G)}(I(H), \emptyset).$$

证明. 由[15, 例 25 和命题 27]可得。 □

命题 5.3. 设 M 是定义在 $[m]$ 上的单纯复形，且 $(\underline{K}, \underline{L}) = \{(K_i, L_i)\}_{i\in[m]}$ 是由单纯复形及其子复形构成的一族配对。对于一族$\underline{X} = \{X_v\}_{v\in\bigsqcup_{i\in[m]} V(K_i)}$ 有限 CW 复形，我们有

$$\mathcal{Z}^*_{\mathcal{Z}^*_M(\underline{K},\underline{L})}(\underline{X}) \cong \mathcal{Z}^*_M(\mathcal{Z}^*_{\underline{K}}(\underline{X}), \mathcal{Z}^*_{\underline{L}}(\underline{X})),$$

where $(\mathcal{Z}^*_{\underline{K}}(\underline{X}), \mathcal{Z}^*_{\underline{L}}(\underline{X})) = \{(\mathcal{Z}^*_{K_i}(\underline{X}), \mathcal{Z}^*_{L_i}(\underline{X}))\}_{i\in[m]}$.

证明。 利用命题4.4，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^*_{\mathcal{Z}^*_M(\underline{K},\underline{L})}(\underline{X}) \\
=&\bigcup_{\sigma\in\mathcal{Z}^*_M(\underline{K},\underline{L})} (\underline{X}, \emptyset)^{*\sigma} \\
=&\bigcup_{S\in M}\left(\bigcup_{\sigma\in(\underline{K},\underline{L})^{*S}} (\underline{X}, \emptyset)^{*\sigma}\right) \\
=&\bigcup_{S\in M} \mathcal{Z}^*_{(\underline{K},\underline{L})^{*S}}(\underline{X}) \\
=&\bigcup_{S\in M} \mathcal{Z}^*_{J_1*\cdots*J_m}(\underline{X}) \qquad \left(J_i = \begin{cases} K_i & (i\in S) \\ L_i & (i\notin S) \end{cases}\right) \\
\cong&\bigcup_{S\in M} \left(\mathcal{Z}^*_{J_1}(\underline{X}) * \cdots * \mathcal{Z}^*_{J_m}(\underline{X})\right) \\
=&\bigcup_{S\in M} (\mathcal{Z}^*_{\underline{K}}(\underline{X}), \mathcal{Z}^*_{\underline{L}}(\underline{X}))^{*S} \\
=&\mathcal{Z}^*_M(\mathcal{Z}^*_{\underline{K}}(\underline{X}), \mathcal{Z}^*_{\underline{L}}(\underline{X})).
\end{aligned}$$

□

定理 5.4。设 M 是定义在 $[m]$ 上的单纯复形，并且 $(\underline{K},\underline{L}) = \{(K_i,L_i)\}_{i\in[m]}$是一族由单纯复形及其子复形组成的配对。那么我们有

$$|\mathcal{Z}_M^*(\underline{K},\underline{L})| \cong \mathcal{Z}_M^*(|\underline{K}|,|\underline{L}|),$$

其中$|\underline{K}| = \{|K_i|\}_{i\in[m]}$、 $|\underline{L}| = \{|L_i|\}_{i\in[m]}$。

证明。注意，对于单纯复形 K，我们有

$$|K| = \mathcal{Z}_K^*(\underline{\mathrm{pt}}),$$

其中 $\underline{\mathrm{pt}} = \{X_v\}_{v\in V(K)}$， $X_v = \mathrm{pt}$ 对任意 $v \in V(K)$。因此，该定理由命题5.3 得出

$$|\mathcal{Z}_M^*(\underline{K},\underline{L})| = \mathcal{Z}^*_{\mathcal{Z}_M^*(\underline{K},\underline{L})}(\underline{\mathrm{pt}}) \cong \mathcal{Z}_M^*\left(\mathcal{Z}_{\underline{K}}^*(\underline{\mathrm{pt}}),\mathcal{Z}_{\underline{L}}^*(\underline{\mathrm{pt}})\right) = \mathcal{Z}_M^*(|\underline{K}|,|\underline{L}|).$$

□

第1-1节中的同胚（1 ）由命题5.2 和定理5.4 得到

$$|I(G[H])| = |\mathcal{Z}^*_{I(G)}(I(H),\emptyset)| \cong \mathcal{Z}^*_{I(G)}(|I(H)|).$$

利用这个同胚，我们分别由定理1.2 和定理 1.4 得到定理1.1 和定理 1.3。

定理 *1.2*的证明。注意，对任意 $uv \in E(G)$，若 $v \in V(G)\setminus\{u\}$，则表示 u 在 $I(G$中是孤立的。因此，由定理 3.2 和命题3.4可知，关于 G 的假设意味着 $I(G)$ 是一个连通的 s-顶点可分解单纯复形。因此，由定理 1.1 和同胚（1-1），我们有

$$\begin{aligned}|I(G[H])| &\cong \mathcal{Z}^*_{I(G)}(|I(H)|)\\ &\simeq \bigvee_{\alpha\in A}\left(\Sigma^{r_\alpha}|I(H)|^{*k_\alpha}\right)\end{aligned}$$

对于某个由非负整数对组成的族 $\{(r_\alpha,k_\alpha)\}_{\alpha\in A}$。如果 $|I(H)|$ 与球面的楔和同伦等价，那么 $\Sigma^{r_\alpha}|I(H)|^{*k_\alpha}$ 也如此。这就是所需的结论。□

定理的证明 *1.4*。 由定理 1.3 以及同胚映射 (1-1)，可得

$$|I(L_m[H])| \cong \mathcal{Z}^*_{I(L_m)}(|I(H)|)$$

$$\simeq \begin{cases} |I(H)| & (m=1),\\ |I(H)|\sqcup|I(H)| & (m=2),\\ |I(H)|^{*2}\sqcup|I(H)| & (m=3),\\ \bigvee\limits_{p,r\in\mathbb{N}_{\geq 0}}\left(\bigvee_{\binom{p+1}{m-2p-3r+1}\binom{p+r}{r}}\Sigma^r|I(H)|^{*p}\right) & (m\geq 4).\end{cases}$$

这里，我们有

$$\begin{aligned}
|I(H)| &\simeq \bigvee_n S^k,\\
|I(H)| \sqcup |I(H)| &\simeq \left(\bigvee_n S^k\right) \sqcup \left(\bigvee_n S^k\right),\\
|I(H)|^{*2} \sqcup |I(H)| &\simeq \left(\left(\bigvee_n S^k\right) * \left(\bigvee_n S^k\right)\right) \sqcup \left(\bigvee_n S^k\right)\\
&\simeq \left(\bigvee_{n^2} S^{2k+1}\right) \sqcup \left(\bigvee_n S^k\right),\\
\Sigma^r |I(H)|^{*p} &\simeq \Sigma^r \left(\bigvee_n S^k\right)^{*p}\\
&\simeq \bigvee_{n^p} S^{p(k+1)-1+r}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到了 $m = 1$、2、3 所需的公式。对于 $m \geq 4$，我们得到

$$\begin{aligned}
&|I(L_m[H])|\\
&\simeq \bigvee_{p,r\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{p+1}{m-2p-3r+1}\binom{p+r}{r}} \Sigma^r |I(H)|^{*p}\right)\\
&\simeq \bigvee_{p,r\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{\binom{p+1}{m-2p-3r+1}\binom{p+r}{r}} \left(\bigvee_{n^p} S^{p(k+1)-1+r}\right)\right)\\
&\simeq \bigvee_{p,r\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{n^p\binom{p+1}{m-2p-3r+1}\binom{p+r}{r}} S^{p(k+1)-1+r}\right)\\
&\simeq \bigvee_{p\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \left(\bigvee_{d=p(k+1)-1+r\geq 0} \left(\bigvee_{n^p\binom{p+1}{m-2p-3(d-p(k+1)+1)+1}\binom{p+(d-p(k+1)+1)}{p}} S^d\right)\right)\\
&\simeq \bigvee_{d\geq 0} \left(\bigvee_{\sum_{p\geq 0} n^p\binom{p+1}{3(d-pk+1)-m}\binom{d-pk+1}{p}} S^d\right)
\end{aligned}$$

正如所需。 □

例 5.5. Kozlov [14, 命题 5.2] 证明了

$$|I(C_n)| \simeq \begin{cases} S^{k-1} \vee S^{k-1} & (n = 3k),\\ S^{k-1} & (n = 3k+1),\\ S^k & (n = 3k+2). \end{cases}$$

因此，根据定理 $|I(L_m[C_n])|$，我们可以确定任意 $m \geq 1$ 以及 $n \geq 3$的同伦类型1.4。

References

[1] Micha l Adamaszek, 《独立复形的分解与圈图的幂》, *Journal of Combinatorial Theory Series A* 119 1031 1047, 2012 , , : – .

[2] A. A. Ayzenberg, 《多面体与单纯复形的替换及多重分次贝蒂数》, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 74:175–202, 2013.[3] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, 《多面体积函子：分解矩-角复形、配置及相关空间的一种方法》, *Advances in Mathematics*, 225:1634–1668, 2010.[4] Jonathan Ariel Barmak, 《图的独立复形中的星簇》, *Advances in Mathematics* 241 33 57, 2013 , , : – .

[5] Anders Bj
¨
Trans- orner
actions of the American Mathematical Society 349 10 3945 3975, 1997
and Michelle L. Wachs, 《可剖非纯复形与偏序集。II》, , ( ): – .[6] Mireille Bousquet-M´elou, Svante Linusson, and Eran Nevo, 《方格网格的独立复形》, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 27:423–450, 2008.[7] Manoj K. Chari, 《离散莫尔斯函数与组合分解》, *Discrete*
Mathematics 217 101 , : –113,
2000.[8] Alexander Engstr
¨
Discrete om, 《有
Mathematics 309 3299
向树复形与独立复形》, , : –3309, 2009.[9] Robin Forman, 《胞腔复形的莫尔斯理论》,
Advances in Mathematics, 134:90–145, 1998. [10] Frank Harary, 《图论》, Addison-Wesley出版公司, 1969. [11] Allen Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 2001.[12] Kouyemon Iriye, 《具有圆柱识别的网格图的独立复形的同伦类型》, *Kyoto Journal of Mathematics*, 52(3):479–501, 2012.[13] Kazuhiro Kawamura, 《弦图的独立复形》, *Discrete Mathematics*, 310 2204: –2211, 2010.[14] Dmitry N. Kozlov, 《有向树复形》, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 88 112: –122, 1999.[15] Kengo Okura, 《单纯复形的多面体连接的可剖性及其在图论中的应用》,
The Electronic Journal of Combinatorics, 29(3):#P3.53, 2022.[16] Johan Thapper, 《由方格网格图和六边形网格图构造的圆柱的独立复形》, *arXiv e-prints*, arXiv:0812.1165, 2008.[17] Adam Van Tuyl and Rafael H. Villarreal, 《可剖图与序列科恩-麦考利二部图》, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 115:799–814, 2008. [18] Kevin N. Vander Meulen and Adam Van Tuyl, 《图的可剖性、顶点可分解性与字典积》, *Contributions to Discrete Mathematics*, 12(2):63–68, 2017.[19] Russ Woodroofe, 《顶点可分解图与可剖性障碍》,
Proceedings
of the American Mathematical Society 137 10 3235 3246, 2009 , ( ): – .

Osaka Metropolitan University, 1-1 Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai, Osaka 599-8531, Japan*Email address*: okura.kengo.k35@kyoto-u.jp