arXiv:2303.12047v1 [math.CV] 21 Mar 2023

复巴拿赫流形中的 Aron–Berner 型延拓*

L´aszl´o Lempert 普渡大学数学系，美国印第安纳州西拉斐特 47907-2067

摘要

设 S 是一个紧豪斯多夫空间， X 是一个复流形。我们考察连续映射 $S \to X$构成的空间 $C(S,X)$，并证明，该空间上的任意有界全纯函数都可以延拓为更大空间 $B(S,X)$ 上的全纯函数，但该函数可能是多值的；此空间由博雷尔映射构成。作为应用，我们证明了关于 $C(S,X)$ 上有界全纯函数的两个定理，其中一个令人联想到单值化定理，另一个则令人联想到刘维尔定理。

引言

Aron–Berner 延拓定理的一种形式考虑一个复巴拿赫空间$\mathfrak{X}$，并为其单位球上的每个有界全纯函数给出一个全纯延拓，将其延拓到双对偶（第二对偶） $\mathfrak{X}'' \supset \mathfrak{X}$的单位球上。在 Aron 和 Berner 最初得到一个稍弱的结果后，上述精确形式由 Davie 和 Gamelin 证明。Aron 和 Berner 还证明了一个类似定理：将 $\mathfrak{X}$中的球替换为 $\mathfrak{X}$中的一般开子集；随后 Zalduendo 对该定理作了加强[AB78、DG89、Z90]。在无限维复分析中，人们充分认识到，这一结果在许多方面都已达到极限。虽然 $\mathfrak{X}$ 上的线性形式可以延拓到任意上空间 $\mathfrak{Y}$，但全纯函数通常并非如此，甚至二次函数也不例外。Dineen 和 Josefson 的研究表明，若没有有界性假设，甚至延拓到$\mathfrak{X}''$ 也可能失败。例如，复数列空间 $\mathfrak{X} = c_0$ 上的全纯函数f （其中的复数列趋于 0）能够延拓为 $\mathfrak{X}'' \approx l^\infty$ 上的全纯函数，当且仅当 f 在 $\mathfrak{X}$ [的每个有界子集上都有界 D71、J78]。

一个自然的问题是，能否对复巴拿赫流形 $\mathfrak{X}$ 进行类似的延拓，而不是对巴拿赫空间的开子集进行延拓。当然，在讨论

*2020 数学学科分类号 32K05、46G20、58D10

全纯函数的延拓之前，首先应该构造一个流形 $\mathfrak{X}''$ 来发挥双对偶的作用，这显然是一个难题。Dineen 和 Venkova 针对 $\mathfrak{X}$ 为某类巴拿赫空间上的黎曼域的情形解决了这个问题，并将全纯函数延拓到了一个位于双对偶 [DV04]之上的黎曼域。但本文不试图一般性地构造相应的 $\mathfrak{X}''$ ，而是针对一个更专门的框架，对由映射空间构成的巴拿赫流形进行延拓。

我们先从一个有限维连通复流形 X 和一个紧豪斯多夫空间 S开始。连续映射 $\mathfrak{x}: S \to X$ 所构成的空间 $C(S,X)$ 具有自然的复巴拿赫流形结构，参见 [L04 、 LS07] 以及本文第 2 节。（在讨论 X时，我们将用 x、 y 等表示 X中的点，并用相应的哥特字体 $\mathfrak{x}$、$\mathfrak{y}$、.....表示取值于 X的映射。）无论 $C(S,X)$ 的双对偶应为何物，它都必定与连续函数 $S \to \mathbb{C}$ 所构成的巴拿赫空间 $C(S)$ 的双对偶有关。Kakutani 和 Gordon 先后以略有不同的方式，将这个双对偶描述为某个相关空间上的连续函数空间 T [G66、K41]；著作 [D$^+$16] 则给出了另一种构造T 以及同构 $C(S)'' \approx C(T)$。这表明，映射空间 $\mathfrak{X} = C(S,X)$ 的双对偶应当是 $\mathfrak{X}'' = C(T,X)$。事实证明，关联 $(S, X) \mapsto C(S,X) = \mathfrak{X}$ 和 $(S,X) \mapsto C(T,X) = \mathfrak{X}''$ 是（双）函子的一部分；这些函子之间存在一个自然变换，它将 $\mathfrak{X}$ 嵌入$\mathfrak{X}''$，使其成为一个复子流形。于是问题在于， $\mathfrak{X}$ 上的有界全纯函数能否延拓到 $\mathfrak{X}''$。

不过，这仍然不是本文要回答的问题。考虑到一个我们稍后将讨论的应用，我们更倾向于将其延拓到一个较小的流形上

$$B(S,X) = \{\mathfrak{x} : S \to X \text{ is Borel} \mid \mathfrak{x}(S) \subset X \text{ has compact closure}\}. \tag{0.1}$$

（映射 $\mathfrak{x}$: $S \to X$ 若其对博雷尔子集的原像均为博雷尔集，则称为博雷尔映射。）(0.1) 中的博雷尔映射空间也是一个复巴拿赫流形。定义在 $C(S,X)$ 上的全纯函数将延拓到 $\subset B(S,X)$ 上的这个空间。

结果表明，与 Aron–Berner 延拓定理不同，与其研究全纯函数，不如研究可能为多值的全纯函数，也就是能够沿路径进行解析延拓的全纯芽。我们将在第 7 节定义相关概念。首先，我们先说明，Aron–Berner 延拓会为 $C(S,X)$ 上某个 $\mathfrak{x}_1$ 处的任意全纯函数芽 f，在 $B(S,X)$ 上给出一个全纯芽 f^{ab}（见第 5 节）。我们将复流形 M 在某个 $p \in M$ 处的芽记为 (M,p)，相应地，将函数在 M 的 $p \in M$ 处的芽记为 $\mathsf{f}: (M,p) \to \mathbb{C}$。

定理 0.1. 设 $\mathfrak{x}_1 \in C(S,X)$。若全纯芽 $\mathsf{f}: \big(C(S,X)\ \mathfrak{x}_1\big) \to \mathbb{C}$ 可沿着 $C(S,X)$ 中任意一条以 $\mathfrak{x}_1$ 为起点的路径作解析延拓，且这些延拓一致有界，则 f^{ab} 可沿着 $B(S,X)$ 中任意一条以 $\mathfrak{x}_1$为起点的路径作解析延拓。

如果没有有界性假设，那么该定理就是错误的，即使 $X = \mathbb{C}$和 S 是 $[0,1]$, 或由一个收敛序列及其极限组成，也已经如此。有趣的是，

在该定理中，即使 f 的解析延拓在 $C(S,X)$ 上定义了一个单值函数，f^{ab} 的延拓也可能在 $B(S,X)$ 上定义一个多值函数。我们将在第 11 节讨论这一点及相关示例。

由于 $B(S,X)$ 是连通的，定理 0.1 得出了一个看似矛盾的结论：如果芽 f 沿着 $C(S,X)$ 中所有从 $\mathfrak{x}_1$ 出发的路径都具有一致有界的解析延拓，那么它就有典范延拓到整个可能不连通的 $C(S,X)$。

连续映射空间当然是拓扑学中的核心对象，而博雷尔映射则极少出现，甚至根本不会出现，原因也很充分： $B(S,X)$ 的拓扑与 X 的拓扑关系过于直接，见引理 10.2（以及 (7.1)、引理 9.4a）。但这恰恰是定理 0.1 所描述的两个映射空间之间的联系会对连续映射空间本身产生影响的原因：

定理 0.2（单值化定理）。设 X 是单连通的，且 $\mathfrak{x}_1 \in C(S,X)$。假设全纯芽 $\mathrm{f}:\ \big(C(S,X)_{\mathfrak{x}_1}\big) \to \mathbb{C}$ 沿着 $C(S,X)$ 中所有从 $\mathfrak{x}_1$ 出发的路径都有解析延拓。如果这些延拓一致有界，那么

(a) 它们在 $\mathfrak{x}_1$ 于 $C(S,X)$ 中的连通分支上定义一个单值全纯函数。(b) 此外，如果 X 是紧致的，那么这个单值函数实际上是常数。

我们强调，假设单连通的是 X，而不是传统单值化定理中所假设的源流形 $C(S,X)$。——这两个定理将在第 9 节和第 10 节中以更一般的形式证明。

Dineen 和 Mellon [DM98] 首先发现，某些映射空间上的全纯函数（无论是否有界）出于更深层的原因必须是常数。随后，我们与 Szab´o 将这一结果推广到“基点保持”映射空间，其中 X 有理连通，例如格拉斯曼流形；若 S 是流形，即使对于 C^k 映射空间，常数性也成立 [L04, LS07]。尽管如此，与定理 0.2b 的相似之处仅停留在形式上，其背后的机制并不相同。比较此处与该文所涵盖的内容，便可看出这一点。一方面，定理 0.2 中的流形 X 比 [LS07] 中的有理连通流形一般得多；另一方面，有界性的要求，以及我们研究的是连续映射空间而非 C^k 映射空间这一点，都极大地限制了定理 0.2b 的适用范围。但这是不可避免的。对于一般的紧致单连通 X 和紧致光滑流形 S，$C^k(S,X)$ 的 C^k 映射空间在 $k \geq 1$ 时可能存在非常数全纯函数。例如，圆 S^1 上的博雷尔测度 μ 以及 $(T^*X)^{\otimes m}$ 的一个全纯截面 α，若其在形如 $\xi \otimes \xi \otimes \cdots \in (TX)^{\otimes m}$ 的多向量上不恒为零，则会诱导出一个全纯函数 $a:\ C^1(S^1,X) \to \mathbb{C}$,

$$a(\mathfrak{x}) = \int_{S^1} \alpha(\dot{\mathfrak{x}} \otimes \dot{\mathfrak{x}} \otimes \cdots)\, d\mu,$$

通常甚至不是局部常值的。

Aron、Galindo、Pinasco 和 Zalduendo 已证明了相关结果。在[A+16] 中，他们考虑紧空间 S 上的全纯函数，这些函数定义在 $C(S)$ 上，并在由同胚$S \to S$诱导的线性映射群 $C(S) \to C(S)$ 作用下保持不变。他们还发现，当 S 是圆或闭圆盘时，这类

函数必为常数。尽管他们的假设与我们的截然不同：这里要求有界性，他们那里要求不变性，但两种证明都依赖于 Aron–Berner 延拓这一思想。

目录。第 1 节讨论博雷尔向量丛的概念。要赋予空间 $B(S,X)$ 复巴拿赫流形的结构，就需要这些向量丛。第 2 节和第 3 节回顾并讨论映射空间以及巴拿赫空间中 Aron–Berner 延拓的基本性质。第 4 节讨论映射空间局部模型中的延拓：从某些拓扑向量丛的连续截面空间延拓到博雷尔截面空间。特别地，我们证明了这种延拓的一条自然性性质，即推论 4.6。接着，第 5 节利用这一自然性，将 $C(S,X)$ 上的全纯芽 f 延拓为 $B(S,X)$ 上的全纯芽 f^{ab}。这一切都相当直接。第 6 节和第 7 节讨论全纯巴拿赫丛、平坦范数和解析延拓的概念。定理 7.5 将定理 0.1 推广到某些巴拿赫丛的截面。第 8 节给出了一个关键结果：构造一族映入有限维向量空间中球的全纯映射 X。在第 9 节中，我们将利用这些映射，把 $B(S,X)$ 中的解析延拓化归为巴拿赫空间中的解析延拓。定理 0.1、0.2 的推广版本的证明见第 9 节和第 10 节。第 11 节包含一些例子，说明主要定理在某些方面是最优的。

在准备本文期间，我受益于与 Pablo Galindo 的讨论。

关于巴拿赫空间中的复分析，我们主要参考 Mujica 的著作 [M86],；关于无限维复流形，则参考 [L98，第 2]节。我们将遇到的无限维复流形，都是 [L98]所称的可整流的复流形，并以复 Banach 空间为模型；这意味着它们局部双全纯等价于巴拿赫空间的开子集。我们将复流形 M与 N之间的全纯映射集合记为 $\mathcal{O}(M,N)$，而当 $N=\mathbb{C}$ 时，记为 $\mathcal{O}(M)$。

1 博雷尔向量丛

虽然连续映射空间 $C(S,X)$是以拓扑向量丛的连续截面空间为模型的巴拿赫流形，但博雷尔映射空间 $B(S,X)$的局部模型，则是我们称为博雷尔向量丛的截面空间。本节将以我们所需的一般性来阐述这一概念。此前已有一些相关但不同的概念，例如可测场以及巴拿赫空间（尤其是希尔伯特空间）的向量丛。

设 S 是一个拓扑空间， $B(S)$ 是有界 Borel 函数的代数$S\to\mathbb{C}$。考虑集合映射 $\pi\colon V\to S$，其中每个 $V_s=\pi^{-1}s$, $s\in S$ 都赋予有限维复向量空间的结构。 π 的所有截面所构成的空间，配备逐点加法以及有界 Borel 函数乘法后，构成一个 $B(S)$–模。所谓（有限维）向量空间的博雷尔场，是指这样一个 $\pi\colon V\to S$，再加上全体截面模的一个 $B(S)$–子模 Ξ。按照惯例，我们通常不写 $(\pi\colon V\to S,\Xi)$，而只写 $\pi\colon V\to S$，甚至只写 V，表示向量空间的博雷尔场； Ξ 则仅为隐含条件。如果 $\dim V_s$ 对所有 $s\in S$ 都相同，我们称这个数为 V 的秩。

假设 $T\subset S$ 是博雷尔的。我们首先将 $V|T$ 记作 $\pi^{-1}T$，但也用它表示博雷尔域（$\pi^{-1}T\to T,\Xi|T$），其中 $\Xi|T=\{\xi|T\colon \xi\in\Xi\}$。这是 V 在 T 上的限制。

博雷尔向量空间场（$V \to S, \Xi$）与（$W \to S, H$）之间的同态是一个映射 $F\colon V \to W$，它在 V_s 与 W_s 之间是线性的，$s \in S$，且满足：对所有 $\xi \in \Xi$，$F \circ \xi \in H$。如果一个同态存在逆映射，且该逆映射也是同态，则称其为同构。

任意有限维复向量空间 A 定义了一个平凡博雷尔向量空间场 $S \times A \to S$，其截面 Ξ 对应于有界 Borel 函数 $S \to A$。用 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 表示向量空间 A 与 B 之间的线性映射空间。任意有界博雷尔映射 $f\colon S \to \mathrm{Hom}(A, B)$ 都会诱导一个同态

$$F : S \times A \ni (s, a) \mapsto \big(s, f(s)a\big) \in S \times B$$

平凡博雷尔向量空间场之间的同态，且任意同态都以此方式产生。

定义 1.1. 博雷尔向量丛是指与某个平凡博雷尔向量空间场同构的博雷尔向量空间场。

诚然，这与“向量丛”的通常含义不同，后者只需“局部”平凡。尽管如此，若 S 是博雷尔集 S_j 的有限并，且对于博雷尔向量空间场 $V \to S$，其限制 $V|S_j$ 均与秩相同的平凡场同构，那么 V 本身就与一个平凡博雷尔向量空间场同构。

任意紧基空间上的等维纤维拓扑向量丛 $\pi\colon V \to S$ 都会确定一个博雷尔向量场（$\pi\colon V \to S, \Xi$）：若截面 ξ 属于 Ξ，则对于某个紧致 $K \subset S$上的任意拓扑平凡化，它都对应于一个有界博雷尔函数 $K \to A$。——通过拉回可以得到更多博雷尔向量丛的例子。设（$\pi : V \to S, \Xi$）是一个博雷尔向量丛，且$g : T \to S$ 是拓扑空间之间的一个博雷尔映射。那么，$g^*V = \coprod_{t\in T} V_{g(t)}$配备显然的投影 $\rho\colon g^*V \to T$，以及由形如 $\eta(t) = \xi\big(g(t)\big)$、$\xi \in \Xi$的截面生成的 $B(T)$–子模 H，定义了拉回博雷尔向量丛（$g^*V \to T, H$），也记作 g^*V。（这里我们将向量丛 V 的拉回的纤维与其自身的纤维 V 等同；本文其他地方也会采用这种做法。）等价地，H 由 ρ 的那些截面 η 组成，使得映射 $T \ni t \mapsto \eta(t) \in V_{g(t)} \subset V$ 有界且为博雷尔函数；这些性质均相对于任意平凡化 $V \approx S \times A$来衡量。

平凡博雷尔向量丛 $S \times A \to S$ 上的范数是一个博雷尔函数 $|\,|\colon S \times A \to [0, \infty)$，其在纤维 $\{s\} \times A$ 上的限制定义了 A上的范数 $|\,|_s$，并且存在一个$c \in \mathbb{R}$，使得对于所有 s，都有 $|\,|_s \le c|\,|_t$ $t \in S$。任意同构 $F\colon S \times B \to S \times A$ 都会将范数 $|\,|$拉回为 $S \times B \to S$ 上的范数 $|\,| \circ F$。因此，我们可以将一般博雷尔向量丛 $V \to S$ 上的范数定义为函数 $V \to [0, \infty)$：在某个（或任意一个）同构 $V \approx S \times A$下，它对应于 $S \times A \to S$上的一个范数。此类范数相对于 V的博雷尔 σ–代数可测；该代数定义为任意同构 $V \approx S \times A$对 $S \times A$ 的博雷尔 σ–代数的拉回。

给定一个博雷尔向量丛 $(V \to S, \Xi)$，为方便起见，记 Ξ by[1]$B(V)$，并称其为 V 的有界博雷尔截面空间。V 上的范数 $|\,|$ 使 $B(V)$ 成为一个巴拿赫空间，其范数为 $||\xi|| = \sup_S |\xi|$。$B(V)$ 上的拓扑与 $|\,|$的选取无关。

[1]我们对截然不同的对象使用相似的记号 $B(S)$、$B(V)$——后文还会使用 $C(S)$、$C(V)$——这一点不应令读者困惑。前一组记号中，S 是一个拓扑空间，$B(S)$表示其上的有界博雷尔函数空间；V是 S上的博雷尔向量丛。类似地，当 S 是一个紧豪斯多夫空间，且 $V \to S$ 是一个拓扑向量丛时，$C(S)$表示 S上的连续函数空间，而 $C(V)$表示连续截面空间。

我们以阐述博雷尔向量丛 $\pi : V \to S$ 上的分析与巴拿赫（可赋范）空间 $B(V)$ 上的分析之间的联系，来结束本节。给定 $U \subset V$、V 上的范数 $|\ | = p$ 以及 $\varepsilon > 0$，令

$$U_{p,\varepsilon} = \{u \in U : p(u) < 1/\varepsilon \text{ and } U \text{ contains all } v \in V_{\pi u} \text{ with } p(u - v) < \varepsilon\}.$$

若 q 是 V上的另一种范数，则 $U_{p,\ \varepsilon} \subset U_{q,\ c\varepsilon}$，其中 $c > 0$ 与 ε无关。定义

$$\hat{U} = \operatorname{int}\{\xi \in B(V) : \xi(S) \subset U\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{\xi \in B(V) : \xi(S) \subset U_{p,\varepsilon}\}. \tag{1.1}$$

考虑另一个博雷尔向量丛 $W \to S$ 以及一个逐纤维映射 $H :\ U \to W$，即 $H(U_s) \subset W_s$，其中 $U_s = U \cap V_s$。在 V、W上分别取范数 p、q。

定义 1.2。若 q 在 $H(U_{p,\ \varepsilon})$上有界，对所有 $\varepsilon > 0$均成立，则称 H 为有界型。

显然，有界型这一性质与所选的 p、q无关

引理 1.3。假设纤维 $U_s \subset V_s$ 是开集。若 $H :\ U \to W$ 是博雷尔映射，且为有界型，并且对 $s \in S$而言 $H|U_s$ 是全纯的，则

$$H^\circ : \hat{U} \ni \xi \mapsto H \circ \xi \in B(W)$$

是全纯的。

证明。根据定义，显然有 H° 映入 $B(W)$。为证明全纯性，可以假设 $V = S \times A$、$W = S \times B$ 是平凡的。我们用 $d_A H$ 表示 H 沿 A的微分。在 $\{s\} \times A$中沿一维切片应用柯西公式可知，H沿 A的偏导数在 $U_{p,\ \varepsilon}$上是博雷尔可测且有界的。由此可知，一阶导数使 H° 连续；对于二阶导数，方向导数

$$dH^\circ(\xi;\eta) = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \big(H^\circ(\xi + t\eta) - H^\circ(\xi)\big)/t,$$

对任意 $\xi \in \hat{U}$和 $\eta \in B(V)$都存在，并且 $dH^\circ(\xi;\ \eta)(s)$可以计算为 $d_A H\big(\xi(s); \eta(s)\big)$。现在，$S \times TA \to S$和 $S \times TB \to S$具有自然的博雷尔向量丛结构。由于逐纤维切丛 $T_A U = \coprod_{s \in S} T\big(U \cap (\{s\} \times A)\big)$ 是$S \times TA$的一个博雷尔子集，$dH_A\colon\ T_A U \to S \times TW$ 是博雷尔可测的、有界型的，并且沿纤维全纯，因此 $dH^\circ(\xi;\eta)$是 ξ、η的连续函数。它对 η也是复线性的，这证明了 H° 是全纯的。

2 映射空间

从此，我们固定一个有限维连通复流形X 和一个紧豪斯多夫空间 S。记 $TX \to X$ 为实切丛，其上的复结构由 X 的复结构诱导，从而使其成为全纯向量丛。如引言中所述，我们令

$$B(S, X) = \{\mathfrak{x} : S \to X \text{ is Borel} \mid \mathfrak{x}(S) \subset X \text{ has compact closure}\},$$

并赋予其一致拓扑。 $\mathfrak{x} \in B(S,X)$的基本邻域由对角线 $\{(x,x)$的开邻域 $D \subset X \times X$ 确定： $x \in X\}$，相应的 $\mathfrak{x}$ 的开邻域为

$$D(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} \in B(S,X) : (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})(S) \text{ has compact closure in } D\}. \tag{2.1}$$

这里 $(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})(s) = \big(\mathfrak{x}(s)\ \mathfrak{y}(s)\big)$。

这个拓扑可度量化。取 X 上任意一个诱导其拓扑的度量 d；则该度量

$$d_S(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \sup\{d\big(\mathfrak{x}(s),\mathfrak{y}(s)\big) : s \in S\} \tag{2.2}$$

诱导了 $B(S,X)$ 的一致拓扑。（式 (2.2) 中的上确界是有限的，因为 $\mathfrak{x}(S)$ $\mathfrak{y}(S)$ 包含在某个紧致 $K \subset X$ 中，且 d 在 $K \times K$ 上连续。）该拓扑在连续映射子空间 $C(S,X)$ 上限制为紧开拓扑。

$B(S,X)$ 上流形结构的定义涉及诱导的博雷尔向量丛

$$\mathfrak{x}^*TX = \coprod_{s\in S} T_{\mathfrak{x}(s)}X \to S, \qquad \mathfrak{x} \in B(S,X),$$

见第 1 节，以及它们的有界博雷尔截面空间 $B(\mathfrak{x}^*TX)$。第 1 节的内容使我们能够仅将紧基底上的拓扑向量丛视为博雷尔向量丛，然后通过博雷尔映射将其拉回。一般而言，这里必须取一个包含 $\mathfrak{x}(S)$ 的任意紧致 $K \subset X$；于是 $TX|K$ 确定一个博雷尔向量丛，并可通过 $\mathfrak{x}$ 将其拉回，从而得到一个博雷尔向量丛，我们将其记为 $\mathfrak{x}^*TX$。

若 $D \subset X \times X$, F 是定义在 D 上的函数，且 $x \in X$，我们令

$$D^x = \{y \in X : (x,y) \in D\} \quad \text{and} \quad F^x = F(x,\cdot). \tag{2.3}$$

引理 2.1. 存在对角线的一个邻域 $D \subset X \times X$，以及一个 C^∞ 微分同胚 F，其定义在 D 与 TX 中零截面的一个邻域之间，并具有以下性质：

(a) F^x 将 D^x 双全纯地映到 T_xX 的一个凸开子集上；(b) $F^x(x) \in T_xX$ 是零向量；(c) 将向量空间 T_xX 的切空间与其自身 T_xX 认同后，微分 $F^x_*|_x$：$T_xD^x = T_xX \to T_xX$ 是恒等映射。

此外，若 X 是另一个复流形 M 中的相对紧开集，则 F 可取为实解析的。

因此， F 的逆映射可谓是全纯指数映射 $TX \to X \times X$ 的最佳替代。记 $\mathrm{pr}_2 : X \times X \to X$ 为到第二因子的投影，相应地，我们定义

$$\exp = \mathrm{pr}_2 \circ F^{-1} : TX \to X, \tag{2.4}$$

其在 T_xX 上的限制是一个双全纯映射 F^x（D^x）$\to D^x$，是 F^x 的逆映射。

证明。第一部分见 [LS07，引理 1.1]。第二部分是 [L04，引理 2.1]，的一个特例；该引理（当 $k=\omega$ 时）取一个可能带边界的紧致实解析流形 V、一个实解析映射 $\mathfrak{x}: V\to M$，并将 $\mathfrak{x}$ 在 $V\times M$ 中的图的邻域与诱导丛 $\mathfrak{x}^*TM$ 中零截面的邻域联系起来。——不过请注意，此处和彼处对 X 的用法不同。——为应用该结论，按照 Grauert [G58]，将我们的 M 嵌入某个 $\mathbb{R}^N$，使其成为闭实解析子流形；选取 $V\subset M$ 欧几里得范数函数的一个适当子水平集，并 $\mathfrak{x}$ 将 V 嵌入 M。

事实上，对 [L04] 中的证明稍作修改即可得出，对于任意 X，无论是否存在上述 M，都可以将 F 选为实解析的。

现在我们可以定义全纯坐标图，使 $B(S,X)$成为复流形。给定引理中的 D，如引理所述的 F，坐标邻域将是式（2.1）的$D(\mathfrak{x})$。映射

$$\varphi_{\mathfrak{x}}: D(\mathfrak{x})\ni\mathfrak{z}\mapsto F\circ(\mathfrak{x}\times\mathfrak{z})\in B(\mathfrak{x}^*TX) \tag{2.5}$$

是巴拿赫空间$B(\mathfrak{x}^*TX)$中零截面某个邻域上的同胚。由于 $\varphi_{\mathfrak{x}}$的逆映射由 $\xi\mapsto\exp\circ\xi$ 给出，要证明局部坐标（2.5）全纯相关，我们需要验证对于 $\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}\in B(S,X)$，映射

$$\varphi_{\mathfrak{y}}\circ\varphi_{\mathfrak{x}}^{-1}:\xi\mapsto F\circ\big(\mathfrak{y}\times(\exp\circ\xi)\big) \tag{2.6}$$

在 $B(\mathfrak{x}^*TX)$上有定义的地方都是全纯的。这是以下结果的一个特例，稍后我们还会用到该结果。

引理 2.2。设 Y是另一个有限维复流形，$u\subset S\times X$ 和$U\subset S\times TX$ 为开集，

$$\psi: u\to Y\quad and\quad \Psi: U\to TY$$

连续。假设 Ψ 将纤维 $U\cap(\{s\}\times T_xX)$ 全纯地映射到 $T_{\psi(s,x)}Y$。固定满足 $(\mathrm{id}_S\times\mathfrak{x})(S)$ 的闭包包含于 u 的 $\mathfrak{x}\in B(S,X)$，并令 $\mathfrak{U}\subset B(\mathfrak{x}^*TX)$ 由满足 $(\mathrm{id}_S\times\xi)(S)$ 的闭包包含于 U 的截面 ξ 组成。则$\mathfrak{y}=\psi\circ(\mathrm{id}_S\times\mathfrak{x})\in B(S,Y)$；对于 $\xi\in\mathfrak{U}$

$$\eta=\Psi\circ(id_S\times\xi) \tag{2.7}$$

是 $\mathfrak{y}^*TY$ 的有界博雷尔截面；且映射

$$\Psi^\circ:\mathfrak{U}\ni\xi\mapsto\Psi\circ(id_S\times\xi)\in B(\mathfrak{y}^*TY)$$

是全纯的。

当然，$\mathfrak{U}$ 也可能为空，此时最后一个陈述自然是空洞的。若令 $Y=X$、$\psi:S\times X\to X$为投影，且 $\Psi(s,v)=F\big(\pi v,\exp(v)\big)$，并且与 s 无关，则由引理 2.2 可知映射 (2.6) 是全纯的。

引理 2.2 的证明。该引理可归结为引理 1.3，但直接写出证明更为简便，而且与引理 1.3 的证明十分相似。 $\mathfrak{y}$、η 是博雷尔函数，这是因为博雷尔函数的复合仍是博雷尔函数；它们也有界，因为 ψ、Ψ 分别在相对紧集 $(\mathrm{id}_S\times\mathfrak{x})(S)$、$(\mathrm{id}_S\times\xi)(S)$ 上有界。接下来，映射 Ψ° 在任意 $\xi_0\in\mathfrak{U}$ 处连续。这是因为 Ψ 在 $(\mathrm{id}_S\times\xi_0)(S)$ 的闭包的某个紧邻域 $K\subset U$ 上一致连续。

为了证明 Ψ° 在 ξ_0 处复可微，我们使用相同的 K 以及 $L\subset$ 中的另一个紧邻域 K。柯西估计表明，Ψ 沿着 TX 的纤维的偏导数在 L 上有界。由泰勒公式可知，记 $d_2\Psi$ 为 Ψ 沿流形 $\{s\}\times T_xX$ 的微分，则 Ψ° 在 ξ_0 处沿方向 $\xi\in B(\mathfrak{x}^*TX)$ 的导数

$$d\Psi^\circ(\xi_0;\xi)=\lim_{\mathbb{C}\ni t\to 0}\big(\Psi^\circ(\xi_0+t\xi)-\Psi^\circ(\xi_0)\big)/t$$

存在，且可计算为

$$d\Psi^\circ(\xi_0;\xi)(s)=d_2\Psi\big(s,\xi_0(s);\xi(s)\big),$$

参见（2.7）。现在仿照 Ψ° 本身的论证，可知 $d\Psi^\circ(\xi_0;\ \cdot)\colon\ B(\mathfrak{x}^*TX)\to\to B(\mathfrak{y}^*TY)$ 是连续的。因此，Ψ° 在 ξ_0 处复可微，进而在 $\mathfrak{U}$ 上全纯。

正如我们所见，引理 2.2 的一个推论是，局部坐标 $\varphi_\mathfrak{x}$、$\mathfrak{x}\in B(S,\ X)$ 全纯相关，并赋予 $B(S,\ X)$ 一个复流形结构，其模型空间为形如 $B(\mathfrak{x}^*TX)$ 的巴拿赫空间。

例如，如果 $S=\{s_1,\dots,s_m\}$ 是有限的，那么

$$B(S,X)\ni\mathfrak{x}\mapsto\big(\mathfrak{x}(s_1),\dots,\mathfrak{x}(s_m)\big)\in X^m$$

是一个双全纯映射。一般而言，对应关系 $(S,X)\mapsto B(S,X)$ 是自然的：连续映射 $a\colon T\to S$ 和全纯映射 $X\to Y$ 通过复合诱导出全纯映射 $B(S,X)\to B(T,Y)$。更一般地，我们可以用一族全纯映射 $\Phi\colon S\times X\to Y$ 代替一个全纯映射。我们只在 $a\colon T=S\to S$ 是恒等映射时表述这一结果。

引理 2.3. 设 $\Phi\colon S\times X\to Y$ 是连续的。若对每个 $s\in S$，映射 $\Phi(s,\cdot)$ 都是全纯的，那么

$$\Phi^\circ:B(S,X)\ni\mathfrak{x}\mapsto\Phi\circ(id_S\times\mathfrak{x})\in B(S,Y)$$

是全纯的。

证明. 设 $D'\subset Y\times Y$ 和 $F'\colon D'\to TY$ 如引理 2.1 中所述，但用 Y 而不是 X。若 $\varphi_\mathfrak{x}$ 是 $B(S,X)$ 上如 (2.5) 所示的局部坐标，$\mathfrak{y}=\Phi^\circ(\mathfrak{x})$，且 $\varphi'_\mathfrak{y}$ 是 $B(S,Y)$ 在 $\mathfrak{y}$ 处的局部坐标，我们需要检查映射

$$\varphi'_\mathfrak{y}\circ\Phi^\circ\circ\varphi_\mathfrak{x}^{-1}:\xi\mapsto F'\circ\big(\mathfrak{y}\times\Phi\circ(\mathrm{id}_S\times\exp\circ\xi)\big)\in B(\mathfrak{y}^*TY)$$

在 $B(\mathfrak{x}^*TX)$ 上有定义的部分是全纯的。但只要我们选取 $\Psi(s,v)=F'\big(\pi v,\Phi(s,\exp v)\big)$，这便可由引理 2.2 得出。

$B(S,X)$ 上的复结构是根据 $D \subset X \times X$ 和 $F{:}D \to TX$定义的。由于引理 2.3 对 D, F（以及 D', F'）的任意选取都适用，因此取 $Y = X$ 和 $\Phi(s,x) = x$，最终可知，不同的 D, F选取会在 $B(S,X)$ 上导出相同的复结构。

连续映射 $S \to X$ 构成复子流形 $C(S,X) \subset B(S,X)$，其模型为巴拿赫空间 $C(\mathfrak{x}^*TX)$ 中的连续截面，$\mathfrak{x} \in C(S,X)$。它是 $B(S,X)$ 的闭子集，但不是直子流形：尽管局部而言，成对的空间 $C(S,X) \subset B(S,X)$ 与成对的空间 $C(\mathfrak{x}^*TX) \subset B(\mathfrak{x}^*TX)$ 双全纯，空间 $C(\mathfrak{x}^*TX)$ 通常在 $B(\mathfrak{x}^*TX)$ 中没有闭补空间。正是这一情况使得从 $C(S,X)$ 到 $B(S,X)$ 的局部全纯延拓问题也变得困难（但 Aron–Berner 延拓定理已解决此问题）。

一个 $\mathfrak{x}_0 \in C(S,X)$ 和一个闭集 $A \subset S$ 确定基点映射空间

$$\mathfrak{B} = B(S,X,A,\mathfrak{x}_0) \subset B(S,X) \quad \text{and} \quad \mathfrak{C} = C(S,X,A,\mathfrak{x}_0) \subset C(S,X) \cap \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{B} = \{\mathfrak{x} \in B(S,X)\colon \ \mathfrak{x}|A = \mathfrak{x}_0|A\}$，而 $\mathfrak{C}$ 表示 $\mathfrak{x}_0$ 在$\{\mathfrak{x} \in C(S,X)$ 中的连通分支：$\mathfrak{x}|A = \mathfrak{x}_0|A\}$。这些是 $B(S,X)$，分别是 $C(S,X)$ 的闭复子流形，其模型为子空间

$$B_A(\mathfrak{x}^*TX) \subset B(\mathfrak{x}^*TX), \quad \text{respectively} \quad C_A(\mathfrak{x}^*TX) \subset C(\mathfrak{x}^*TX),$$

在 A 上消失的截面。我们的研究对象正是流形 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$。

3 Aron–Berner 延拓

设 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{Y}$ 为巴拿赫空间，$x_0 \in \mathfrak{X}$、$r > 0$，并且

$$B = \{x \in \mathfrak{X} : ||x - x_0|| < r\}, \qquad B'' = \{\xi \in \mathfrak{X}'' : ||\xi - x_0|| < r\}.$$

本节回顾如何将有界的 $f \in \mathcal{O}(B,\mathfrak{Y})$ 延拓为有界函数$f^{\mathrm{AB}} \in \mathcal{O}(B'',\mathfrak{Y}'')$，且保持相同的界。

该过程从一个（始终连续的）k–线性形式 $T\colon \ \mathfrak{X}^{\oplus k} \to \mathbb{C}$,$k = 0, 1, \ldots$ 开始，并构造其 k–线性 Aron–Berner 延拓 $\bar{T}\colon \ \mathfrak{X}''^{\oplus k} \to \mathbb{C}$；这种¯对应关系 $T \mapsto T$ 是线性的。当 $k = 0$, T 为常数时，延拓也是相同的¯常数；当 $k = 1$, $T\colon \ \mathfrak{X}'' \to \mathbb{C}$ 是 T 的二次转置时，一般而言，通过递归定义_ _T，假设对于 k–线性算子 T，T存在；然后取一个 $(k+1)$–线性T。对于任意选取的 $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{X}$，$T(x_1, \ldots, x_k, \cdot)\colon \ \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ 的二次转置是一个线性形式 $T''(x_1, \ldots, x_k, \cdot)\colon \ \mathfrak{X}'' \to \mathbb{C}$。对于每个 $\xi \in \mathfrak{X}''$

$$T_\xi = T''(\cdot, \ldots, \cdot, \xi) : \mathfrak{X}^{\oplus k} \to \mathbb{C}$$

是 k–线性的，并且关于 ξ 线性依赖。延拓 $\bar{T}_\xi\colon \ \mathfrak{X}''^{\oplus k} \to \mathbb{C}$ 随后定义

$$\bar{T}(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) = \bar{T}_{\xi_{k+1}}(\xi_1, \ldots, \xi_k), \qquad \xi_j \in \mathfrak{X}''. \tag{3.1}$$

更一般地，如果 $T\colon \mathfrak{X}^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}$ 是一个 k–线性算子，对于每个 $l \in \mathfrak{Y}'$，我们考虑 k–线性形式 $T_l = lT$。对于每个 $\xi_j \in \mathfrak{X}''$，上述构造的延拓给出

¯ ¯在 $\mathfrak{Y}'$ 上的一个线性形式 $l \mapsto T_l(\xi_1, \ldots, \xi_k)$，即一个元素 $T(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{Y}''$。这定义了 T 的 k–线性延拓 $\bar{T}\colon \mathfrak{X}''^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}''$ 。这里的标准警示性说明是¯：如果对 T 的自变量进行置换，从而得到一个 k–线性算子 T_1，那么 T_1 通常¯不等同于对自变量作相应置换后的 T。

¯线性算子 T 的延拓 $T\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{Y}''$ 在 $\mathfrak{X}''$、$\mathfrak{Y}''$都赋予弱*拓扑时是连续的。多重线性算子的延拓只在较弱的意义下连续。我们称函数 $F\colon \mathfrak{X}''^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}''$ 稍连续，是指对于任意的 $j = 1, \ldots, k$，若 $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1} \in \mathfrak{X}$ 和 $\xi_{j+1}, \ldots, \xi_k \in \mathfrak{X}''$固定，则 $F(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{Y}''$ 关于 $\xi_j \in \mathfrak{X}''$ 在 $\mathfrak{X}'', \mathfrak{Y}''$ 的弱 * 拓扑下连续。以下结果并非新知:

引理 3.1. k–线性 $T\colon \mathfrak{X}^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}$ 的延拓 $\bar{T}\colon \mathfrak{X}''^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}''$ 稍连续。

证明。只需证明当 $\mathfrak{Y} = \mathbb{C}$ 时成立，这可以通过归纳法完成。当 $k = 0$、¯ ¯T 为常数。当 $k = 1$ 时， T 是 T 的二次转置，所述连续性可直接由定义得出。假设该引理对某个 $k \geq 1$ 成立，且¯令 T 为 $(k+1)$–线性的。为证明 T 稍连续，我们必须检查对于所有 $j = 1$、.....、 $k+1$，某个连续性性质是否成立。当 $j \leq k$ 时，由于 $T_{\xi_{k+1}}$ 3 1 $j = k+1$ $\xi_i =$ 稍连续，根据¯归纳假设，该性质成立，参见（ ）。若 ，且 $x_i \in \mathfrak{X}$、 $i \leq k$，则 $T(x_1, ..., x_k, \xi_{k+1}) = T_{\xi_{k+1}}(x_1, ..., x_k) = T''(x_1, ..., x_k, \xi_{k+1})$ 再次连续依赖于 $\xi_{k+1} \in \mathfrak{X}''$。

由于 $\mathfrak{X}$ 在 $\mathfrak{X}''$ 中弱*稠密（Goldstine 定理， [DS88，第 424]页），因此在 $\mathfrak{X}''$、$\mathfrak{Y}''$的弱*拓扑中

$$\bar{T}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \lim_{x_1 \to \xi_1} \lim_{x_2 \to \xi_2} \ldots \lim_{x_k \to \xi_k} T(x_1, \ldots, x_k), \qquad \xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathfrak{X}'', \tag{3.2}$$

¯，这通常被视为 T的定义，例如在 [AB78]中。

我们回到 f的 Aron–Berner 延拓的构造。该构造与平移相容；因此我们假设球 B、B'' 的中心是 $x_0 = 0$。任意齐次多项式 $P\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ 都可表示为$P(x) = T(x, \ldots, x)$，其中对称多重线性映射 $T\colon \mathfrak{X}^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}$ 是唯一的；我们定义 $P_{\mathrm{AB}}(\xi) = \bar{T}(\xi, \ldots, \xi) \in \mathfrak{Y}''$，它是 $\mathfrak{X}''$ 上的齐次多项式。对应关系 $P \mapsto P^{\mathrm{AB}}$ 可通过线性延拓到所有多项式组成的空间 $P\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$。我们需要以下事实：在 $\mathfrak{Y}$ 及其迭代对偶空间上均以 $\|\ \|$ 表示范数时，

$$\sup_{B''} ||P^{\mathrm{AB}}|| = \sup_{B} ||P||. \tag{3.3}$$

这一结论由 Davie 和 Gamelin [DG89] when $\mathfrak{Y} = \mathbb{C}$证明。Carando 在 [C99]中指出，式（3.3）对齐次多项式成立；它对一般情形成立这一点可直接由 [DG89]推出。事实上，假设 $\sup_B ||P|| = 1$。若 $l \in \mathfrak{Y}'$ 的范数为 ≤ 1，则 $P_l = lP\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ 是一个多项式，$\sup_B |P_l| \leq 1$，且 $P_l^{\mathrm{AB}} = lP_{\mathrm{AB}}$。在后一个公式中 l 通过转置作用于 $\mathfrak{Y}''$。由 [DG89], , 可得

$$\sup_{B''} |lP^{\mathrm{AB}}| \leq 1 \quad \text{for} \quad l \in \mathfrak{Y}',\ ||l|| \leq 1. \tag{3.4}$$

但根据 Goldstine 定理 [DS88, p. 424]， $\mathfrak{Y}'$ 的单位球在弱*拓扑下稠密于 $\mathfrak{Y}'''$的单位球，因此式（3.4）对 $l \in \mathfrak{Y}'''$成立。于是 $\sup_{B''} ||P^{\mathrm{AB}}|| \le 1$。反向不等式显然成立，故式（3.3）成立。

The 以下结果是对 [AB78, DG89], 的轻微改进，在该领域已有所知：

定理 3.2. 设 $f \in \mathcal{O}(B, \mathfrak{Y})$ 有界， $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$ 其齐次多项式展开为，$\deg P_k = k$。那么级数

$$f^{AB} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{AB}$$

在半径为 $\rho < r$ 的同心球 $B''_\rho \subset B''$ 上一致收敛；它表示 f 的 Aron–Berner 延拓 $f^{AB} \in \mathcal{O}(B'', \mathfrak{Y}'')$。此外，

$$\sup_{B''} ||f^{AB}|| = \sup_{B} ||f||. \tag{3.5}$$

证明. P_k 由下式给出

$$P_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}x) e^{-ikt}\, dt.$$

由此及 (3.3) 可得

$$\sup_{B''} ||P_k^{\mathrm{AB}}|| = \sup_{B} ||P_k|| \le \sup_{B} ||f||.$$

鉴于 P_k^{AB} 的齐次性，这又意味着 $\sum_k P_k^{\mathrm{AB}}$ 在 $B''_\rho \subset B''$, $\rho < r$ 上一致收敛，因此表示一个全纯函数 $f^{\mathrm{AB}} \colon B'' \to \mathfrak{Y}''$。在 (3.3) 中取 P 为部分和，可得

$$\sup_{B''_\rho} \Big\| \sum_{k=0}^{m} P_k^{\mathrm{AB}} \Big\| \le \sup_{B} \Big\| \sum_{k=0}^{m} P_k \Big\|.$$

先令 $m \to \infty$，再令 $\rho \to r$，即可得出 (3.5)。

当然， f^{AB} 并不是 f 到 B''的唯一全纯延拓。但从某种意义上说，它是自然的。为了表述一个定理，我们需要引入（Arens）正则性的概念：

定义 3.3. 若对任意巴拿赫空间 $\mathfrak{Z}$ （或者等价地，只需对 $\mathfrak{Z} = \mathbb{C}$），任意双线性算子 T: $\mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ 及其 $T_1(x, y) = T(y, x)$ 的延拓都满足 $T_1(\xi, \eta) = T(\eta, \xi)$（对所有 ξ, $\eta \in \mathfrak{Y}$均成立），则称巴拿赫空间 $\mathfrak{Y}$ 是正则的。

由归纳法可知，对于任意 k–线性 $T \colon \mathfrak{Y}^{\oplus k} \to \mathfrak{Z}$ 及 $\{1, \dots, k\}$的任意置换 σ，算子 $T_1(x_1 \dots x_k, x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)} \dots) = T(\dots)$ 满足 $T_1(\xi_1, \dots, \xi_k) T(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)})$。由于 $T(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_k)$ 关于弱* 拓扑总是连续的，因此在正则空间中，关于其所有变量分别连续。

Ulger 在 [U87] 中证明了任意 C* 代数都是正则的；之后我们还需要对此作一个小的推广。

定理 3.4. 除上述假设和记号外，设 $y_0 \in \mathfrak{Y}$、 $s > 0$ 和 $B_{\mathfrak{Y}} = \{y \in \mathfrak{Y} \colon ||y - y_0|| < s\}$. 。假设 $\mathfrak{Z}$ 是第三个巴拿赫空间， $f \colon B \to B_{\mathfrak{Y}}$ 是全纯的， $f(x_0) = y_0$, 且 $g \colon B_{\mathfrak{Y}} \to \mathfrak{Z}$ 有界且全纯。那么 $(g \circ f)^{AB} = g^{AB} \circ f^{AB}$，前提是 g 是一次多项式，或者 $\mathfrak{Y}$ 是正则的。

证明。我们将在假设 $\mathfrak{Y}$ 正则的条件下给出证明。另一种情形可通过类似但大为简化的计算得出。通过平移，我们可以使 $x_0 = 0$ 和 $f(x_0) = y_0 = 0$。首先假设 f 和 g 是次数为 k 的齐次多项式，g。这意味着存在对称多重线性算子 $T\colon \mathfrak{Y}^{\oplus k} \to \mathfrak{Z}$ 和 $U_i\colon \mathfrak{X}^{\oplus i} \to \mathfrak{Y}$，$i = 0, 1, \dots, h$，使得

$$g(y) = T(y, \dots, y), \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{h} U_i(x, \dots, x), \qquad \text{and therefore}$$

$$(g \circ f)(x) = T\big(f(x), \dots, f(x)\big) = \sum T\big(U_{j_1}(x, \dots, x), U_{j_2}(x, \dots, x), \dots\big), \tag{3.6}$$

对 j_1、.....、$j_k \le h$ 求和。函数 (3.6) 是关于 x 的多项式。其 j 次分量由对 j–线性算子的对称化得到

$$S_j(x_1, \dots, x_j) = \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} T\big(U_{j_1}(x_1, \dots, x_{j_1}), U_{j_2}(x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+j_2}), \dots\big)$$

令 $x = x_1 = \dots = x_j$。对称化 $S_{j,\ \mathrm{sym}}(x_1, \dots, x_j)$ 为

$$\frac{1}{j!} \sum_{\sigma} \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} T\big(U_{j_1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j_1)}), U_{j_2}(x_{\sigma(j_1+1)}, \dots, x_{\sigma(j_1+j_2)}), \dots\big), \tag{3.7}$$

对 $\{1, \dots, j\}$ 的所有排列 σ 求和。现在

$$g^{\mathrm{AB}}(\eta) = \bar{T}(\eta, \dots, \eta), \qquad f^{\mathrm{AB}}(\xi) = \sum_i \bar{U}_i(\xi, \dots, \xi), \qquad \text{and by (3.2)}$$

$$(g \circ f)^{\mathrm{AB}}(\xi) = \sum_j \lim_{x_1 \to \xi} \lim_{x_2 \to \xi} \dots \lim_{x_j \to \xi} S_{j,\mathrm{sym}}(x_1, \dots, x_j). \tag{3.8}$$

我们计算 (3.7) 中一般项的这个迭代极限。由于每个 U_i 都是对称的，我们可以只考虑满足以下条件的 σ：$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(j_1)$，$\sigma(j_1 + 1) < \dots < \sigma(j_1 + j_2)$，依此类推（洗牌置换）。于是，这个一般项中 T 的自变量趋于 $\bar{U}_{j_1}(\xi, \dots, \xi)$，$\bar{U}_{j_2}(\xi, \dots, \xi)$ 等；又由于 T 分别连续，一般项的极限为 $\bar{T}\big(\bar{U}_{j_1}(\xi, \dots, \xi)\ \bar{U}_{j_2}(\xi, \dots \xi)\ \dots\big)$。因此，根据 (3.8) 和 (3.7)，(3.8) 中的极限确实为 $\bar{T}\big(\sum_0^h \bar{U}_i(\xi, \dots, \xi) \dots, \sum_0^h \bar{U}(\xi, \dots, \xi)\big)$。

接下来令 f 任意，但保持 g k–齐次。将 f 展开为齐次级数。该级数的部分和 f_j（即多项式）在半径为 $< r$ 的同心球 $\subset B$ 上一致收敛于 f，当 $j \to \infty$ 时。由 (3.5) 以及我们已证明的结果，

$$(g \circ f)^{\mathrm{AB}} = \lim_{j \to \infty} (g \circ f_j)^{\mathrm{AB}} = \lim_{j \to \infty} g^{\mathrm{AB}} \circ f_j^{\mathrm{AB}} = g^{\mathrm{AB}} \circ f^{\mathrm{AB}}.$$

最后，一般的有界全纯 $g\colon B_{\mathfrak{Y}} \to \mathfrak{Z}$ 可以展开为齐次级数 $g = \sum_k g_k$，该级数在半径为 $< s$ 的同心球 $\subset B_{\mathfrak{Y}}$ 上一致收敛。再次利用 (3.5)，在 $0 \in B''$ 的某个邻域上

$$(g \circ f)^{\mathrm{AB}} = \lim_{k \to \infty} \big(\sum_{j=0}^{k} g_j \circ f\big)^{\mathrm{AB}} = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} g_j^{\mathrm{AB}} \circ f^{\mathrm{AB}} = g^{\mathrm{AB}} \circ f^{\mathrm{AB}},$$

并且，$(g \circ f)^{\mathrm{AB}} = g^{\mathrm{AB}} \circ f^{\mathrm{AB}}$ 由解析延拓得到。

4 来自某些 $C(S)$–模的延拓

本节将研究范围限定于某些巴拿赫空间 $\mathfrak{X}$，它们是 $C(S)$ 上的模。这些模源自紧空间 S 上一个秩有限的拓扑复向量丛 $V \to S$；它们是 $C(V)$ 的连续截面空间V 及其某些子空间。我们将有界博雷尔截面空间 $B(V)$ 嵌入 $C(V)$ 的双对偶中，并研究 Aron–Berner 延拓 f_{AB}从 $C(V)$（及其子空间）到 $B(V)$（及其子空间）的限制 f^{ab}。该延拓 $f \mapsto f^{\mathrm{ab}}$具有某种自然性。由于映射空间 $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ 以本节研究的模为模型，本节的结果可直接应用于在这些映射空间中构造局部 Aron–Berner 型延拓。

在 V上，范数是指连续函数 $|\,|: V \to [0,\infty)$，它在每个纤维 V_s, $s \in S$上限制为向量空间范数。给定一个闭的 $A \subset S$ 以及 V上的范数，我们考虑巴拿赫空间

$$B_A(V) = \{\text{bounded Borel sections } \xi \text{ of } V : \xi|A = 0\}, \qquad ||\xi|| = \sup_S |\xi|,$$

以及 $C_A(V) \subset B_A(V)$，即连续截面的子空间。函数乘法使这些空间成为巴拿赫代数 $C(S)$ 上的模。因此 $C_\emptyset(V) = C(V)$,$B_\emptyset(V) = B(V)$。

本文的重点是构造典范嵌入 $B_A(V) \to C_A(V)''$。我们首先用测度来描述对偶 $C_A(V)'$。令 $M(S \setminus A)$ 表示 $S \setminus A$ 上复值正则博雷尔测度所构成的空间。它也是一个$C(S)$–模：$f \in C(S)$ 与测度 m 的乘积 fm 定义为

$$(fm)(T) = \int_T f\, dm, \qquad T \subset S \setminus A \text{ Borel};$$

因此 $d(fm)/dm = f$。令 $C_0(S \setminus A)$ 为局部紧空间 $S \setminus A$ 上在无穷远处消失的连续复函数空间，并令 $C_A(S) \subset C(S)$ 为在 A 上消失的函数所构成的理想。映射

$$C_A(S) \ni f \mapsto f|(S \setminus A) \in C_0(S \setminus A)$$

是一个等距同构。此外，令 $V^* \to S$ 为 V 的丛对偶，并赋予对偶范数 $|\,|^*$，且令 $\langle , \rangle$ 为 V^* 与 V 之间的对偶配对。张量积

$$C(V^*) \otimes_{C(S)} M(S \setminus A)$$

是由 $C(V^*) \times M(S \setminus A)$ 自由生成的 $C(S)$–模，再对由下列元素生成的子模取商所得：

$$(fg_1 + g_2, m) - f(g_1, m) - (g_2, m), \quad (g, fm_1 + m_2) - f(g, m_1) - (g, m_2), \tag{4.1}$$

$f \in C(S)$, $g_1, g_2, g \in C(V^*)$, $m_1, m_2, m \in M(S \setminus A)$。记 (g, m) 的等价类为 $g \otimes m$。

引理 4.1. 将 $t = \sum_1^k g_j \otimes m_j \in C(V^*) \otimes_{C(S)} M(S \setminus A)$ 与线性形式相对应

$$C_A(V) \ni \eta \mapsto \int_{S \setminus A} \sum_{j=1}^{k} \langle g_j, \eta \rangle\, dm_j \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

定义了一个同构

$$C(V^*) \otimes_{C(S)} M(S \setminus A) \xrightarrow{\approx} C_A(V)' \tag{4.3}$$

$C(S)$ 模的

证明。为说明 t 的不同表示会给出相同的线性形式 (4.2)，我们需要验证当这些表示对应于 (4.1) 中的向量时，(4.2) 的值为零；这一点显然成立。因此，(4.2) 确实定义了一个同态 (4.3)。

接下来验证 (4.3) 是满射。设 $l \in C_A(V)'$。假设 $U \subset S$ 是开集，且 $_V$ 在 U 的某个邻域上是平凡的。固定构成 V, V^* 在 U 上的对偶标架的 $\xi_1, \dots, \xi_r \in C(V)$ 和 $g_1, \dots, g_r \in C(V^*)$。若 $\chi \in C(S)$ 的支集包含于 U，则由广义化的 [实数域87], 上的里斯表示定理可知，线性形式

$$C_0(S \setminus A) \approx C_A(S) \ni f \mapsto l\big(\chi f \xi_i\big) \in \mathbb{C}$$

可表示为 $l(\chi f \xi_i) = \int_{S\setminus A} f \, dm_i$，其中 $m_i \in M(S \setminus A)$。因此

$$l(\chi\eta) = \sum_{i=1}^{r} l\big(\chi \langle g_i, \eta\rangle \xi_i\big) = \sum_{i=1}^{r} \int_{S\setminus A} \langle g_i, \eta\rangle \, dm_i, \qquad \eta \in C_A(V).$$

若 $\mathfrak{U}$ 是由上述 U 构成的 S 的有限覆盖，$\chi = \chi_U$ 构成一个从属单位分解，并据此选择 $r = r^U$、$\xi_i = \xi_i^U$、$g_i = g_i^U$、$m_i = m_i^U$，则

$$l(\eta) = \sum_{U\in\mathfrak{U}} l(\chi_U \eta) = \int_{S\setminus A} \sum_{U\in\mathfrak{U}} \sum_{i=1}^{r^U} \langle g_i^U, \eta\rangle \, dm_i^U, \qquad \eta \in C_A(V).$$

因此，(4.3) 将 $\sum_U \sum_i g_i^U \otimes m_i^U$ 映射到 l，故为满射。

最后，设 $t = \sum h_j \otimes m_j$ 属于 (4.3) 的核。首先假设每个 h_j 都支撑在某个开集 U 中，并且存在 ξ_1、……、$\xi_r \in C$（V）、g_1、……、$g_r \in C$（V^*），它们在 U 上构成对偶标架。于是每个 h_j 都属于由 g_i 生成的子模，且 t 可写成 $\sum_i g_i \otimes n_i$，其中 $n_i \in M$（$S \setminus A$）支撑在 U 中。因此，对于任意 f_1、……、$f_r \in C_A$（S）和 $\eta = \sum_i f_i \xi_i \in C_A$（$V$）

$$\sum_i \int_{S\setminus A} f_i \, dn_i = \int_{S\setminus A} \sum_i \langle g_i, \eta\rangle \, dn_i = 0.$$

因此，每个 $n_i = 0$ 和 $t = 0$。现在，对于 (4.3) 的核中的一般 $t = \sum_j h_j \otimes m_j$，以及足够精细的单位分解 $\chi_U, U \in \mathfrak{U}$，由我们已经证明的结果可得 $t = \sum_U \chi_U t = 0$，因为 $\chi_U t$ 也在该核中。

接下来，我们定义一个双线性配对 $P\colon\ B_A(V) \times C_A(V)' \to \mathbb{C}$。若 $\eta \in B_A(V)$ 和 $l \in C_A(V)'$ 在 (4.3) 下对应于 $t = \sum_j g_j \otimes m_j \in C(V^*) \otimes_{C(S)} M(S \setminus A)$，则令

$$P(\eta, l) = \int_{S\setminus A} \sum_j \langle g_j, \eta\rangle \, dm_j. \tag{4.4}$$

同样，t 的不同表示在 (4.4) 中给出相同的积分。

引理 4.2. $B_A(V) \ni \eta \mapsto P(\eta,\cdot) \in C_A(V)''$ 是一个等距嵌入，是典范嵌入 $C_A(V) \to C_A(V)''$ 的延拓。

证明。关于延拓的陈述可由典范嵌入的定义直接得到；该嵌入是等距的。接下来，固定 $\eta \in B_A(V)$ 和 $\sum_j g_j \otimes m_j \in C(V^*) \otimes_{C(S)} M(S \setminus A)$。给定 $\varepsilon > 0$，由卢津定理可知存在一个 $\xi \in C_A(V)$，使得

$$\sum_j \sup_S |g_j|^* \int_{S\setminus A} |\xi - \eta|\, d|m_j| < \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \sup_S |\xi| \le \sup |\eta|.$$

因此 $|P(\xi,l) - P(\eta,l)| = \left| \int_{S\setminus A} \sum_j \langle g_j, \xi - \eta\rangle \, dm_j \right| < \varepsilon$。由于 $||P(\xi,\cdot)|| = \sup_S |\xi|$，我们得到 $||P(\eta,\cdot)|| \le \sup_S |\eta|$。

为证明反向不等式，设 $s \in S \setminus A$ 和 δ_s 是 s 处的狄拉克测度。选取一个线性 $\lambda : V_s \to \mathbb{C}$，使得

$$|\lambda(v)| \le |v| \quad \text{for all } v \in V_s, \qquad \text{with equality if } v = \eta(s),$$

并定义 $l(\xi) = \lambda(\xi(s))$, $\xi \in C_A(V)$。于是，$l \in C(V)'$ 在 (4.3) 下对应于 $g \otimes \delta_s$，其中 $g \in C_A(V^*)$ 可任意选取，只要满足 $g(s) = \lambda$。因此 $|P(\eta,l)| = |\eta(s)|$。由于 $||l|| \le 1$，我们有 $||P(\eta,\cdot)|| \ge |\eta(s)|$；而这对任意 $s \in S \setminus A$ 都成立，因此实际上 $||P(\eta,\cdot)|| \ge \sup_S |\eta|$。证明完毕。

将 $B_A(V)$ 与其在 $C_A(V)''$ 中的像等同后，我们便可定义一个从 $C_A(V)$ 到 $B_A(V)$ 的 Aron–Berner 延拓版本。若 $\Gamma \subset B_A(V)$ 是一个球，其中心位于 $C_A(V)$，且 $f \in \mathcal{O}\big(\Gamma \cap C_A(V)\ \mathfrak{Y}\big)$ 有界，则可将第 3 节中讨论的延拓 f^{AB} 限制到 Γ，从而得到一个全纯

$$f^{\mathrm{ab}} : \Gamma \to \mathfrak{Y}'', \tag{4.5}$$

且具有相同的上确界范数。类似地，若 $T\colon C_A(V)^{\oplus k} \to \mathfrak{Y}$ 是 k–线性的，则将其 Aron–Berner 延拓 $\bar{T}$ 限制到 $B_A(V)^{\oplus k}$ 后，记作 T^{ab}。

定理 4.3。除 $V \to S$ 外，再考虑另一个拓扑复向量丛 $W \to S$, $\xi_0 \in C_A(V)$、 $\xi_0(S)$ 的一个开邻域 $U \subset V$，以及一个球 $\Gamma \subset B_A(V)$，它以 ξ_0 为中心，并满足：若 $\xi \in \Gamma$，则 $\xi(S) \subset U$。设有一个连续映射 $H\colon U \to W$，它将纤维 $U \cap V_s$ 全纯地映入相应的纤维 W_s。那么映射

$$H^\circ : \Gamma \ni \xi \mapsto H \circ \xi \in B(W)$$

是全纯的。

此外，如果 H° 在 $\Gamma \cap C_A(V)$ 上有界，那么

$$\big(H^\circ | \Gamma \cap C_A(V)\big)^{ab} = H^\circ. \tag{4.6}$$

为了证明定理 4.3，我们需要一个引理。

引理 4.4. 假设 $J : V^{\oplus k} \to W$ 是一个连续纤维映射，且在每个纤维上为 k–线性。定义一个 k–线性算子 $J^\circ\colon B_A(V)^{\oplus k} \ni (\eta_1,\dots,\eta_k) \mapsto J \circ (\eta_1 \times \cdots \times \eta_k) \in B_A(W)$. 那么

$$(J^\circ | C_A(V)^{\oplus k})^{ab} = J^\circ.$$

证明. 在本证明中，我们将使用 $B_A(V)$ $B_A(W)$ 上从 $C_A(V)'', C_A(W)''$ 上的弱* 拓扑继承而来的拓扑。根据构造，这些拓扑分别由 (4.4) 中的配对 P 以及相应的 Q： $B_A($ $W)$ $\times C_A(W)' \to \mathbb{C}$ 诱导。首先，我们证明 $J^\circ(\eta_1, \dots, \eta_k)$ $\in$ $B_A(W)$ 关于每个 η_j $\in$ $B_A(V)$ 都连续。先证明关于 $j = 1$ 的情形；固定 $\eta_2, \dots, \eta_k$。我们需要证明，对于任意 $l \in C_A(W)'$， $Q\big(J^\circ(\eta_1, \dots \eta_k)$ $l\big)$ 关于 η_1 连续。映射

$$K : V \ni v \mapsto J\big(v, \eta_2(s), \dots, \eta_k(s)\big) \in W, \qquad v \in V_s, \quad s \in S,$$

是一个有界博雷尔同态 $V \to W$，其伴随算子 K^*： $W^* \to V^*$。若 l对应于 $\sum_i h_i \otimes m_i \in C(W^*)$ $\otimes_{C(S)} M(S \setminus A)$，参见 (4.3)，则

$$Q\big(J^\circ(\eta_1, \dots, \eta_k), l\big) = \int_{S\setminus A} \sum_i \langle h_i, K \circ \eta_1 \rangle \, dm_i = \int_{S\setminus A} \sum_i \langle K^* \circ h_i, \eta_1 \rangle \, dm_i.$$

最后一个表达式是 $l_1(\eta_1)$，具有某个 $l_1 \in C_A(V)'$，由此可得连续性。

特别地， J°是稍连续的；根据引理 3.1，$(J^\circ|C_A(V)^{\oplus k})^{\mathrm{ab}}$也是如此。由于二者在 $C_A($ $V)^{\oplus k}$ 上一致，且 $C_A(V)$ 在 $B_A(V)$ 中稠密，因此二者处处一致。

定理 4.3 的证明。将范围限制在 S 的连通分支上后，可假设 V 和 W 具有等维纤维。于是，由引理 1.3 可知， H° 甚至可以全纯延拓到 $B(V)$ 中 Γ 的某个邻域。

接下来我们转向（4.6）。通过平移，我们可以令 $\xi_0 = 0$ 和 $H^\circ(\xi_0) = 0$。在 V 的零截面邻域内，将 H 展开为一致收敛级数$H = \sum_{k=0}^{\infty} H_k$，其中各项在纤维上是 k–齐次的 H_k： $V \to W$。每个 H_k 都由一个对称的 J 诱导： $V^{\oplus k} \to W$，如引理 4.4 中所示，$H_k(v)$ $= J(v, \dots, v)$，其中 $v \in V$。由该引理及（3.5），在 $0 \in \Gamma$ 的邻域内

$$\big(H^\circ|\Gamma \cap C_A(V)\big)^{\mathrm{ab}} = \sum_k \big(H_k^\circ|\Gamma \cap C_A(V)\big)^{\mathrm{ab}} = \sum_k H_k^\circ = H^\circ.$$

因此，由解析延拓可知， $\big(H^\circ|\Gamma \cap C_A(V)\big)^{\mathrm{ab}} = H^\circ$ 在整个 Γ 上成立。

我们回到正则性的概念，即定义 3.3。

引理 4.5。空间 $C_A(V)$ 是正则的。

证明。作为 C* 代数， $C_A(S)$ 由 [U87，定理 2.8] 可知是正则的。（该定理讨论的是当 X 为 C* 代数时，任意双线性算子 $X \times X \to X$ 的正则性。然而，其中给出的论证适用于从 X 到任意巴拿赫空间的任意双线性算子。）因此，对任意 $q \in \mathbb{N}$， $C_A(S)^{\oplus q}$ 也正则，因为如果S_q 是 q 个 S 的不交并，而 $A_q \subset S_q$ 是 q 个A的不交并，那么 $C_A(S)$ $^{\oplus q} \approx C_{A_q}(S_q)$。现在， $C_A(V)$ 是 $C_A(S)^{\oplus q}$ 的一个商空间，其中 q。事实上，若 ξ_1、... ...、 $\xi_q \in C(V)$ 张成每个纤维 V_s，那么

$$C_A(S)^{\oplus q} \ni (f_1, \dots, f_q) \mapsto \sum_{i=1}^{q} f_i \xi_i \in C_A(V)$$

¨是满射。由于根据 Ulger，正则性会传递到商空间 [U87，推论 2.4]， $C_A(V)$ 确实是正则的。

结合这些结果、定理 3.4 和定理 4.3，我们得到：

推论 4.6。假设在定理 4.3 H°中，(Γ) 包含于一个以 $H^\circ(\xi_0)$ 为中心的球 $\Delta \subset B_A(W)$ 内。如果 $g \in \mathcal{O}(\Delta \cap C_A(W)\ \mathfrak{Y})$ 有界，那么

$$(g \circ H^\circ)^{ab} = g^{ab} \circ H^\circ. \tag{4.7}$$

5 映射空间中的芽的延拓

推论 4.6 中的自然性使得我们可以将 Aron– Berner 延拓从巴拿赫空间推广到作为映射空间的巴拿赫流形。给定 $\mathfrak{x}_0 \in C(S, X)$ 和一个闭的 $A \subset X$，如第 2 节所述，$\mathfrak{B} = \{\mathfrak{x} \in B(S, X) : \mathfrak{x}|A = \mathfrak{x}_0|A\}$，且 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{x}_0$ 在 $\{\mathfrak{x} \in C(S, X) : \mathfrak{x}|A = \mathfrak{x}_0|A\}$ 中的连通分支。

此时我们仅延拓全纯函数的芽。设 $\mathfrak{x}_1 \in \mathfrak{C}$,$\mathfrak{Y}$ 是一个巴拿赫空间，且 $\mathrm{f} : (\mathfrak{C}, \mathfrak{x}_1) \to \mathfrak{Y}$ 是一个全纯芽。令 $D \subset X \times X$ 和 $F\colon D \to TX$ 如引理 2.1 所述。设 $\mathfrak{x} \in \mathfrak{C}$ 满足 $\mathfrak{x}_1$ 包含于

$$D_A(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{z} \in \mathfrak{B} : (\mathfrak{x} \times \mathfrak{z})(S) \text{ has compact closure in } D\} \subset D(\mathfrak{x}), \tag{5.1}$$

参见 (2.1)。因此，$D_A(\mathfrak{x})$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的一个坐标邻域，其局部坐标为 (2.5) 中 $\varphi_{\mathfrak{x}}$ 的限制，

$$\psi_{\mathfrak{x}} : D_A(\mathfrak{x}) \ni \mathfrak{z} \mapsto F \circ (\mathfrak{x} \times \mathfrak{z}) \subset B_A(\mathfrak{x}^* TX). \tag{5.2}$$

设 f 是有界全纯函数 $f\colon V \to \mathfrak{Y}$ 的芽。拉回 $f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1}$ 在 $\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1) \in C_A(\mathfrak{x}^* TX)$ 的某个邻域内全纯；我们可以选取形如 $\Gamma \cap C_A(\mathfrak{x}^* TX)$ 的邻域，其中 $\Gamma \subset B_A(\mathfrak{x}^* TX)$ 是以 $\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1)$ 为中心的一个球。正如我们在第 4 节所见，$f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1}$ 随后有一个 Aron–Berner 型延拓，成为一个全纯 $(f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{\mathrm{ab}} : \Gamma \to \mathfrak{Y}''$。$(f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{\mathrm{ab}}$ 在 $\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1)$ 处的芽与所选球 Γ 无关。

L引理 5.1。$(f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{ab} \circ \psi_{\mathfrak{x}}$ 在 $\mathfrak{x}_1$ 处的芽与 $\mathfrak{x}$ 的选择无关 .

证明。设 $\mathfrak{x}_1 \in D_A(\mathfrak{y})$ 满足某个 $\mathfrak{y} \in \mathfrak{C}$，且 $g = f \circ \psi_{\mathfrak{y}}^{-1}$ 在 $\Delta \cap C_A(\mathfrak{y}^* TX)$ 上有界且全纯，其中 $\Delta \subset B_A(\mathfrak{y}^* TX)$ 是以 $\psi_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{x}_1)$ 为中心的一个球。复合 $h = \psi_{\mathfrak{y}} \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1}$ 在 $\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1) \in B_A(\mathfrak{x}^* TX)$ 的某个邻域内全纯；我们可以选取上述 Γ，使其包含于此邻域中，并且使得 $h(\Gamma) \subset \Delta$。(5.2) 推出

$$h(\xi) = F \circ \big(\mathfrak{y} \times (\exp \circ \xi)\big), \qquad \xi \in \Gamma,$$

参见 (2.4)。将丛投影 $\mathfrak{x}^* TX \to S$ 记为 p，并对 $v \in \mathfrak{x}^* TX$，在 $\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1)(S)$ 的某个邻域 U 中，令

$$H(v) = F\big(\mathfrak{y}(pv), \exp(v)\big) \in \mathfrak{y}^* TX.$$

这个 H 是连续且纤维全纯的，如定理 4.3 所述；该定理中的 H° 与 h 一致（在足够小的 Γ 上）。根据推论 4.6，在 Γ

$$(f \circ \psi_{\mathfrak{y}}^{-1})^{\mathrm{ab}} \circ \psi_{\mathfrak{y}} \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1} = g^{\mathrm{ab}} \circ H^\circ = (g \circ h)^{\mathrm{ab}} = (f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{\mathrm{ab}},$$

并且在 $\mathfrak{x}_1$ 的一个邻域内，确实有 $(f \circ \psi_{\mathfrak{y}}^{-1})^{\mathrm{ab}} \circ \psi_{\mathfrak{y}} = (f \circ \psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{\mathrm{ab}} \circ \psi_{\mathfrak{x}}$。

因此，我们可以作如下定义：

定义 5.2. 若 $\mathfrak{f}:(\mathfrak{C},\mathfrak{x}_1)\to\mathfrak{Y}$ 是一个全纯芽，则 $\mathfrak{f}^{ab}:(\mathfrak{B},\mathfrak{x}_1)\to\mathfrak{Y}''$ 表示其延拓 $(\mathfrak{f}\circ\psi_{\mathfrak{x}}^{-1})^{ab}\circ\psi_{\mathfrak{x}}$。这里 $\mathfrak{x}\in\mathfrak{C}$ 可以任意取值，只要 $\mathfrak{x}_1\in D_A(\mathfrak{x})$，且 $\psi_{\mathfrak{x}}$ 是局部坐标 (5.2)。

6 Banach 丛与平坦范数

本节介绍并回顾标题中的概念。主要结果定理 6.3 表明，在单连通巴拿赫流形上，带有平坦范数的全纯巴拿赫丛是平凡的。向量丛上的范数也称为芬斯勒度量；我们已经讨论过有限秩丛上的此类度量。本节不需要一般范数的概念，因此只定义平坦范数。

定义 6.1。（a）全纯巴拿赫丛是一个全纯映射 $\pi:E\to M$，其中 $E\to M$ 是复巴拿赫流形，且每个纤维 $E_x=\pi^{-1}x$, $x\in M$ 都具有复向量空间的结构。要求对于每个 $x\in M$，都存在一个邻域 $U\subset M$、一个复 Banach 空间 $(W,\|\ \|)$，以及一个双全纯映射g：$\pi^{-1}U\to U\times W$（局部平凡化），使得对于所有 $y\in U$，映射 E_y 都是线性的映射到 $\{y\}\times W$。

(b) $E\to M$ 上的平坦范数是一个函数 $p:E\to[0,\infty)$，使得可以选择上述局部平凡化 g，满足

$$p(e)=||w||\qquad if\quad e\in\pi^{-1}U,\quad g(e)=(y,w).$$

为了描述平坦赋范全纯巴拿赫丛的结构，我们需要以下结果。若 W 是一个巴拿赫空间，End W 是连续线性算子 $W\to W$的空间，赋予算子范数，而 GL(W) $\subset$ End W是可逆元的集合。

引理 6.2. 设 U 是复 Banach 空间 Z的一个连通开子集，$(W,||\ ||)$是另一个复 Banach 空间，且 F: $U\to$GL(W) 是全纯的。若对所有 $\zeta\in U$ 和 $w\in W$，均有 $||F(\zeta)w||=||w||$，则 F 为常数。

证明. 只需证明 $\dim Z=1$ 时的情形，一般情形可通过限制到一维切片得出。因此，设 $Z=\mathbb{C}$。用点表示导数，我们将证明对于任意 $\zeta\in U$，均有 $F(\zeta)=0$。为简化记号，假设 $\zeta=0$，并记$F(0)=P$，$F(0)=2Q$。于是，当 $\zeta\in\mathbb{C}$ 足够小时，$F(\zeta)=P+2Q\zeta+\dots$。令

$$K(\tau)=1+\cos 2\pi\tau=1+(e^{2\pi i\tau}+e^{-2\pi i\tau})/2\geq 0,\qquad \tau\in\mathbb{R},$$

是第一个 Fej´er 核。对于 $w\in W$ 和较小的 ζ

$$||(P+\zeta Q)w||=\Big\|\int_0^1 K(\tau)F(e^{2\pi i\tau}\zeta)w\,d\tau\Big\|\leq\int_0^1 K(\tau)||F(e^{2\pi i\tau}\zeta)w||\,d\tau=||w||=||Pw||.$$

由于左侧是关于 ζ 的次调和函数，最大值原理推出$||(P+\zeta Q)w||=||w||$，其中 $|\zeta|<r$ 满足某个 $r>0$。

对偶空间 W' 上的范数也记为 $||\ ||$，并将 P,Q 的转置记为$P',Q' \in \mathrm{End}\ W'$；因此 P' 是等距映射。此外

$$||(P'+\zeta Q')u|| = ||u||, \qquad |\zeta| < r,\ u \in W', \tag{6.1}$$

同样成立。事实上，取 $\langle , \rangle$ 为 W' 与 W之间的配对，

$$||(P'+\zeta Q')u|| = \sup_{||w||=1} \big|\langle (P'+\zeta Q')u, w\rangle\big| = \sup_{||w||=1} \big|\langle u, (P+\zeta Q)w\rangle\big| \le ||u|| = ||P'u||.$$

同样，左侧是关于 ζ的次调和函数，因此（6.1）成立。

假设 u是闭单位球 $\Delta \subset W'$的一个极点。那么 $P'u \in \Delta$也是一个极点。将此与（6.1）比较，可得 $Q'u = 0$。由于在弱*拓扑下， Δ 是紧致的，并且根据克莱因–米尔曼定理，它是其极点的闭凸包，因此 $Q'v = 0$ 对所有 $v \in \Delta$均成立。于是 $F(0) = 2Q = 0$。

定理 6.3。设 $\pi : E \to M$ 是定义在连通单连通底空间上的全纯巴拿赫丛，且 p 是 E 上的平坦范数。那么（E, p）是全局平凡的：存在一个巴拿赫空间（$W, ||\ ||$）以及一个双全纯映射 $g\colon E \to M \times W$，它将每个 E_x线性地映到 $\{x\} \times W$，并满足

$$p(e) = ||w|| \qquad if \quad e \in E,\ g(e) = (x, w).$$

这是引理 6.2 的一个标准推论。证明依赖于以下概念：

定义 6.4. 假设 $U \subset M$ 是连通开集，且 $E|U$ 容许一个平凡化$g\colon\ E|U \to U \times W$，如定义 6.1b 中所述。称 $E|U$ 的截面 h 为水平的，若$g \circ h\colon\ U \to U \times W$ 是常值截面。（引理 6.2 表明， h的水平性与局部平凡化 g的选择无关。）称 M 的任意开子集上的截面 h 为水平的，若它局部具有这种性质。

定理 6.3 的证明。通过规定 $e \in E$ 的邻域基由形如 $h(U)$ 的集合组成，在 E 上定义豪斯多夫拓扑，其中 $U \subset M$ 是$\pi(e)$的一个邻域，而 h 是 $E|U$的一个水平截面。在此拓扑下， $\pi\colon\ E \to M$ 是一个覆盖；由于 M 连通且单连通，该覆盖必为平凡的。这意味着每个 $e \in E$ 都恰好经过一个全局水平截面 h_e。固定一个 $a \in M$，并令 $(W, ||\ ||) = (E_a, p|E_a)$。这是一个巴拿赫空间，并且

$$g : E \ni e \mapsto \big(\pi(e), h_e(a)\big) \in M \times W$$

即为所寻求的全局平凡化。

若 $E \to M$ 是一个定义在连通底空间上的全纯巴拿赫丛，且带有平坦范数 p，则其纤维 E_x 的双对偶构成一个全纯巴拿赫丛 $E'' \to M$，其上的范数 $p|E_x$ 的双对偶定义了一个平坦范数 p''。根据定义 6.1b，(E, p) 的局部平凡化 g 可导出相应的 (E'', p'') 的局部平凡化 $g''\colon\ g''(y)$ 正是 $g(y)$ 的二次转置， $y \in U$。

这些考虑引出了全纯巴拿赫丛的全纯截面芽的 Aron–Berner 延拓。设 $\mathfrak{X}$ 是一个巴拿赫空间， $B \subset$

$\mathfrak{X}$ 是以 $x \in \mathfrak{X}$为中心的球，$B'' \subset \mathfrak{X}''$ 是二重对偶球，且 $(E,p) \to B''$ 是一个带平坦范数的全纯巴拿赫丛。在定理 6.3 的平凡化 g 下，$E|B$ 的有界全纯截面 f 诱导出 $B \times W \to B$ 的有界全纯截面 $g \circ f$，即一个有界 $\phi \in \mathcal{O}(B,W)$。相应的 (E'',p'') 平凡化g'' 以及 Aron–Berner 延拓 $\phi^{\mathrm{AB}} \in \mathcal{O}(B'',W'')$，进而诱导出 (E'',p'')的有界全纯截面 f^{AB}。引理 6.2 表明，任何其他保范平凡化 $E \to B'' \times W$ 都具有 $g_1 = (\mathrm{id}_{B''} \times T) \circ g$ 的形式，其中 $T \in \mathrm{End}\ W$。这意味着，E'' 的相应平凡化为 $g_1'' = (\mathrm{id}_{B''} \times T'') \circ g''$。由于相应的 $\phi_1 = T \circ \phi$，根据定理 3.4 $\phi_1^{\mathrm{AB}} = T'' \circ \phi^{\mathrm{AB}}$；因此，$f^{\mathrm{AB}}$与 g的选取无关。

更一般地，给定定义在 $\mathfrak{X}''$ 的某个开集上的平坦全纯巴拿赫丛 (E,p)，以及 $E|\mathfrak{X}$ 在某个 $x \in \mathfrak{X}$ 处的局部全纯截面的一个芽 f，同样的规定定义了延拓 f^{AB}，它是 E'' 的截面的一个芽。甚至可以考虑定义在更一般流形上的向量丛。结合上述构造与第 5 节关于映射空间 $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ 的讨论，给定一个平坦全纯巴拿赫丛 $(E,p) \to \mathfrak{B}$，以及取值于 $E|\mathfrak{C}$ 的任意全纯芽 f（位于某个 $\mathfrak{x} \in \mathfrak{C}$ 处），我们可以将其与 Aron–Berner 型延拓 f^{ab} 关联起来；这是一个在 $\mathfrak{x}$ 处、取值于 E'' 的全纯芽。

7 解析延拓与扩张

考虑一个以连通底空间为基底的全纯巴拿赫丛 $E \to M$，并令 $\mathcal{E} \to M$ 表示取值于 E 的全纯芽层。设 $a < b$ 为实数，并且 $r\colon\ [a,b] \to M$ 是一条路径（即连续映射）。

定义 7.1. 给定在 $r(a)$ 处的一个芽 $\mathsf{f} \in \mathcal{E}$，它沿路径$r$ 的解析延拓是一个连续提升 $[a,b] \ni t \mapsto \mathsf{f}_t \in \mathcal{E}_{r(t)}$，满足 $\mathsf{f}_a = \mathsf{f}$。

回顾一下，在 $t \in [a,b]$ 处连续意味着：对于所有充分接近 t 的 $\tau \in [a,b]$，f_τ 都是 E 在 $r(t)$ 附近同一个局部截面的芽。基于这一点，可以通过划分 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$、$r[t_{j-1},t_j]$、$j = 1$、……、$k$ 的开邻域 $U_j \subset M$，以及 $E|U_j$ 的全纯截面 g_j 来定义解析延拓，使得在 $r(t_j)$ 的某个邻域上有 $g_j = g_{j+1}$，且 f 是 $r(a)$ 处的 g_1 的芽。

这表明沿 r 的解析延拓是唯一的；并且如果稍微扰动路径，同时固定其端点，那么 f 在 $r(b)$ 处的延拓不会改变。由此可知，如果一个芽 $\mathsf{f} \in \mathcal{E}_x$ 可以沿 M 中所有以 x 为起点的路径作解析延拓，那么在 $y \in M$ 处的解析延拓只取决于连接 x 和 y 的路径的同伦类。特别地，如果 M 也是单连通的，那么这些解析延拓就定义了 E 的一个全纯截面 f：从 x 延拓到 y 后在 y 处的值就是 $f(y) \in E_y$。

后面我们将需要以下内容。

引理 7.2. 设 $P\colon\ M \to N$ 是复巴拿赫流形之间的全纯开映射，$F \to N$ 是全纯巴拿赫丛，$[a,b] \ni t \mapsto x_t \in M$ 是一条路径，且 g_t 是 F 值全纯芽，定义在 $P(x_t) \in N$ 处。令 k_t 为 g_t 沿 P 到 x_t 的拉回，即取全纯 P^*F 值芽。若 k_t 关于 t 连续依赖，则 g_t 也如此。

证明. 为证明在某个 $t \in [a,b]$ 处的连续性，取 $V \subset N$ 为 $P(x_t)$ 的一个邻域，并取 g 为 $F|V$ 的一个全纯截面，其在 $P(x_t)$ 处的芽为 $\mathfrak{g}_{t_0}$。因此， $g \circ P$ 是 $P^*F|P^{-1}V$ 的一个全纯截面，其在 x_t 处的芽为 $\mathfrak{k}_{t_0}$。当 $\tau \in [a,b]$ 充分接近 t 时，$\mathfrak{k}_\tau$ 是 $g \circ P$ 在 x_τ 处的芽。由于 P 是开集，这意味着 g 在 $P(x_\tau)$ 处的芽为 $\mathfrak{g}_\tau$；这表明 $t \mapsto g_t$ 确实连续。

下文中，当我们谈到芽 $\mathfrak{f} \in \mathcal{E}_x$ 沿任意路径的解析延拓时，当然是指以 x为起点的路径。设 p 是 E上的一个平坦范数。

定义 7.3. 若芽 $\mathfrak{f} \in \mathcal{E}_x$ 沿每条路径都存在有界解析延拓，则称其沿每条路径都允许有界解析延拓：首先，它沿每条路径 r 都存在解析延拓 $t \mapsto \mathfrak{f}_t \in \mathcal{E}_{r(t)}$；其次，存在一个界 C，使得对所有此类延拓 $p\big(\mathfrak{f}_t(r(t))\big) \le C$。

若 M 是单连通的，则沿每条路径都有有界解析延拓，简单来说就是 $\mathfrak{f}$ 延拓为 E 的一个全纯截面 f，且 $p(f)$ 有界。

我们回到有限维连通复流形X的映射空间。与前文一样，给定一个紧豪斯多夫空间 S、一个闭集 $A \subset S$以及一个连续映射$\mathfrak{x}_0 : S \to X$，我们考虑以下空间

$$\mathfrak{B} = B(S, X, A, \mathfrak{x}_0) \supset \mathfrak{C} = C(S, X, A, \mathfrak{x}_0); \tag{7.1}$$

$\mathfrak{B} = \{\mathfrak{x} \in B(S,X) : \mathfrak{x}|A = \mathfrak{x}_0|A\}$，而 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{B} \cap C(S,X)$ 中 $\mathfrak{x}_0$ 的连通分支。进一步设 $E \to \mathfrak{B}$ 是一个全纯巴拿赫丛。在第 6 节中，我们将一个以某个 $\mathfrak{y} \in \mathfrak{C}$ 为点、取值于 $E|\mathfrak{C}$ 的全纯芽 $\mathfrak{f}$ 与其 Aron–Berner 型延拓 $\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$联系起来；后者是以 $\mathfrak{y}$为点、取值于 E'' 的芽。

引理 7.4. 如果 $t \mapsto \mathfrak{f}_t$ 是 $\mathfrak{f}$ 沿 $\mathfrak{C}$ 中一条路径的解析延拓，那么 $t \mapsto \mathfrak{f}_t^{ab}$ 就是 $\mathfrak{f}^{ab}$ 沿同一条路径的延拓。

证明. 只需证明路径包含在一个坐标邻域中的情形。不妨设 $\mathfrak{C}$ 是巴拿赫空间 $\mathfrak{X}$ 中的一个球， $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{X}''$ 是某个子空间中的一个球， $E \to \mathfrak{B}$ 是平凡的，因此 E 和 E'' 取值于芽的 $\mathfrak{f}$ 对应于取值在固定巴拿赫空间 $\mathfrak{Y}$、$\mathfrak{Y}''$ 中的芽 $\mathfrak{g}$。现在，Zalduendo 关于从巴拿赫空间到其双对偶的 Aron–Berner 延拓的一个结果的特殊情形—— [Z90, 第 2 节，定义 3，定理 1], ——表明，对于取值于 $\mathfrak{Y}$ 的芽 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^{\mathrm{ab}}$ 的解析延拓由 $\mathfrak{g}_t^{\mathrm{ab}}$ 给出，由此便证明了该引理。

下面的定理推广了定理 0.1：

定理 7.5. 假设全纯巴拿赫丛 $E \to \mathfrak{B}$ 配备了平坦范数 p（定义 6.1）。设某处$\mathfrak{x} \in \mathfrak{C}$ 的取值于 $E|\mathfrak{C}$ 的全纯芽 $\mathfrak{f}$ 沿 $\mathfrak{C}$ 中任意路径都存在有界解析延拓。那么，取值于 E'' 的芽 $\mathfrak{f}^{ab}$ 沿 $\mathfrak{B}$ 中任意路径都存在解析延拓，且其界与 $\mathfrak{C}$ 内延拓的界相同。

证明将在第 9 节给出，此前先在第 8 节进行预备工作。

8 关键构造

定理 7.5 的证明关键在于构造一族从球到 X 的全纯映射，借助这些映射，我们可以将沿 $\mathfrak{B}$ 中某些路径的解析延拓拉回为在巴拿赫空间中的延拓。给 X 配备度量 d，然后，如第 2 节所述，用度量对空间 $B(S,X)$ 赋予度量

$$d_S(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \sup\{d\big(\mathfrak{x}(s),\mathfrak{y}(s)\big) : s \in S\}.$$

引理 8.1. 给定 $\mathfrak{x} \in C(S,X)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，具有以下性质。设 $S = \coprod_0^J S_j$ 是一个博雷尔分割，$S_0 = A$ 是闭的，$a < b$ 是实数，且 $[a,b] \ni t \mapsto \mathfrak{y}_t \in B(S,X)$ 是一条连续路径。此外，设 $\mathfrak{y}_t = \mathfrak{x}$ 在 S_0 上，且 $\mathfrak{y}_t$ 在 S_j, $j = 1,\dots,J$, $t \in T$ 上为常数。如果 $d_S(\mathfrak{x},\mathfrak{y}_a) < \delta$，则存在一个（有限秩）赋范拓扑复向量丛 $\pi : (V,|\ |) \to S$（参见第 4 节），其单位球丛为 $U = \{v \in V\colon |v| < 1\} \to S$，一个 $\mathfrak{v} \in B_A(V)$，$\sup_S |\mathfrak{v}| < 1$，以及一个连续的 $\Psi\colon [a,b] \times U \to X \times \mathbb{C}$，使得对于每个 $t \in [a,b]$ 和 $s \in S$

(a) Ψ 将纤维 $\{t\} \times U_s$ 双全纯地映射到 $X \times \mathbb{C}$ 的开子集上；(b) 零向量 $0_s \in V_s$ 满足 $\Psi(t,0_s) = \big(\mathfrak{x}(s)\ 0\big)$；(c) 其中 $\mathrm{pr}_X\colon X \times \mathbb{C} \to X$ 是投影，$\mathrm{pr}_X \circ \Psi(t,\mathfrak{v}) = \mathfrak{y}_t$；(d) $d\big(\mathfrak{x}(s),\ \mathrm{pr}_X(\Psi(a,v))\big) < \varepsilon$ 对于 $v \in U_s$。

证明需要做一些准备。整个构造主要围绕实解析性展开。设 Y 为一个连通实解析流形。下文中，我们将省略“实解析”中的“实”字。根据 Grauert 的一个定理，Y 可以适当地解析嵌入某个欧几里得空间 [G58]中；因此，我们假设 $Y \subset \mathbb{R}^N$ 是一个闭解析子流形。对于 Y 某个邻域 R 中的任意 $x \in \mathbb{R}^N$，在 Y 中存在唯一的最近点 $r(x)$；映射 $r\colon R \to Y$ 是一个解析回缩。

固定一个拓扑空间 T 和一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}$。如果映射 $g\colon T \times I \to Y$ 满足以下条件，我们称其为部分解析的：$g \in C^{0\omega}(T \times I, Y)$，即 $T \times I \subset T \times \mathbb{C}$ 有一个邻域 O，使得 g 可延拓为连续函数 $\tilde{g}\colon O \to \mathbb{C}^N$，且其限制 $\tilde{g}(t,\cdot)$ 全纯，$t \in T$。可以验证，部分解析性与所选的嵌入 $Y \subset \mathbb{R}^N$ 无关；此外，即使 Y 并非闭于 $\mathbb{R}^N$ 中，而只是闭于 $\mathbb{R}^N$ 的某个开子集中，也不影响这一性质。显然，部分解析映射 g 与解析映射 $Y \to Y_1$ 复合后，仍得到一个部分解析映射。

引理 8.2. 设 M, P 为有限维复流形，且 $g \in C^{0\omega}\big((T \times M) \times I, P\big)$ 满足：对于每个 $t \in T$, $q \in I$，$g(t,\cdot,q)\colon M \to P$ 都是全纯的。那么，$T \times M \times I \subset T \times M \times \mathbb{C}$ 有一个邻域 O，使得 g 可延拓为连续函数 $f\colon O \to P$，且对于每个 $t \in T$，其限制 $f(t,\cdot,\cdot)$ 都是全纯的。如果 $O_{t,\ z} = \{q \in \mathbb{C}\colon (t,z,q) \in O\}$ 是凸的（这总可以通过缩小 O 来实现），那么此类延拓 f 是唯一的。

证明。先假设 M、P 是某个 $\mathbb{C}^m$、$\mathbb{C}^p$ 的开子集。设 w_j、ζ_h 分别是 $\mathbb{C}^p$ 和 $\mathbb{C}^{2p}$ 上的复坐标，考虑将 $\mathbb{C}^p$（因而也将 P）嵌入 $\mathbb{R}^{2p} \subset \mathbb{C}^{2p}$ 的嵌入 α，以及它的左逆 β，

$$\alpha(w) = (\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Im} w_1, \dots, \operatorname{Re} w_p, \operatorname{Im} w_p), \qquad \beta(\zeta) = (\zeta_1 + i\zeta_2, \dots, \zeta_{2p-1} + i\zeta_{2p}).$$

根据定义， $\alpha \circ g$ 可延拓为连续的 $\tilde{g}\colon\ O \to \mathbb{C}^N$，其限制 $\tilde{g}(t,z,\cdot)$ 是全纯的。因此，或许在缩小 O、 $f = \beta \circ \tilde{g}$ 之后， $O \to P$ 可延拓为 g，且其限制 $f(t,z,\cdot)$ 是全纯的；我们还可以使 O_t、z 成为凸集。要证明限制 $f(t,\cdot,\cdot)$ 也是全纯的，只需证明以下结论，随后便可应用莫雷拉定理和奥斯古德定理：记 $\mathbb{C}^m$ 上的坐标为 z_1、……、 z_m，则每个 $(t,z,q) \in O$ 都有一个邻域 $G \subset U$，使得只要 $\Gamma \subset M$ 是包含在复直线中的光滑闭路，且 $\{t\} \times \Gamma \times \{q\} \subset G$、$k = 1$、……、 m，就有 $\int_\Gamma f(t,z,q)\, dz_k = 0$。但这显然成立，因为该积分是 q 的全纯函数，并在 $q \in I$ 时为零。

根据全纯函数唯一性定理，延拓 f 是唯一的 .

对于一般的 P，用子集 $T_i \times M_i \times I_i$ 覆盖 $T \times M \times I$，使得 g 将其映射到 P 上的坐标邻域，其中 T_i 为开集， $M_i \subset M$ 为坐标邻域， $I_i \subset I$ 为紧区间。我们刚刚构造了延拓 f_i ：从 $O_i \to P$ 到 O_i 的邻域 $T_i \times M_i \times I_i$。根据唯一性，这些 f_i 彼此相容，并产生所述的延拓 f。

引理 8.3. 若 T 是紧致的且 $L \subset I$ 是有限的，则任意 $f \in C(T \times I, Y)$ 都可以在一致拓扑下任意精确地近似为 $g \in C^{0\omega}(T \times I, Y)$，使得 $f = g$ 在 $T \times L$ 上成立。

证明。我们将运用以下工具。存在一个插值线性算子 Λ，它将空间 $C(L, \mathbb{R}^N)$（由所有 $L \to \mathbb{R}^N$ 函数构成）映射到多项式空间 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$，满足对于 $\phi \in C(L, \mathbb{R}^N)$，有 $(\Lambda\phi)|L = \phi$。由 Λ 我们构造出

$$\bar{\Lambda} : C(T \times L, \mathbb{R}^N) \to C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N), \qquad (\bar{\Lambda}\varphi)(t,\cdot) = \Lambda\big(\varphi(t,\cdot)\big),$$

在 $C(T \times L, \mathbb{R}^N)$ 与 $C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N)$ 的一致拓扑之间连续。

此外，任意 $\varphi \in C(T \times I, \mathbb{R}^N)$ 都可以由 $C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N)$ 中的函数一致逼近。（对于后者，将 φ 延拓为一个紧支撑连续 $\tilde{\varphi}\colon\ T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$。逼近 φ 的函数可以通过卷积得到，例如与泊松核卷积：

$$\varphi_\varepsilon(t,x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\varphi}(t,y)\, dy}{|x-y|^2 + \varepsilon^2}, \qquad (t,x) \in T \times I, \quad \varepsilon > 0.$$

于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\varphi_\varepsilon \in C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N)$ 一致趋于 φ。）

为了构造引理中的 g，先用 $\phi \in C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N)$ 一致逼近 f。接下来令 $\psi = \phi + \bar{\Lambda}\big((f - \phi)|T \times L\big) \in C^{0\omega}(T \times I, \mathbb{R}^N)$，使得 $\psi|T \times L = f|T \times L$。如果用 ϕ 进行的逼近足够好，那么 ϕ 和 ψ 将 $T \times I$ 映入缩回邻域 R，而 $g = r \circ \psi$ 就是所需的 $f = r \circ f$ 的逼近。

我们回到引理 8.1 的设定。设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个紧区间，q_0、……、$q_J \in I$ 为互不相同的点。

引理 8.4。给定 $\mathfrak{x} \in C(S, X)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ ，具有以下性质。设 $S = \coprod_0^J S_j$ 是一个博雷尔分割， S_0 是闭集， $a < b$ 是实数，且 $[a,b] \ni t \mapsto \mathfrak{y}_t \in B(S, X)$ 是一条连续路径。此外，设 $\mathfrak{y}_t = \mathfrak{x}$ 在 S_0 上成立，并且每个 $\mathfrak{y}_t$ 在 S_j, $j = 1, \ldots, J$ 上都是常数。若 $d_S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_a) < \delta$，则存在一个 $\psi \in C^{0\omega}\big(([a,b] \times S) \times I, X\big)$，使得

(a) 若 $t \in [a,b]$, $s \in S$, 则 $\psi(t,s,q_0) = \mathfrak{x}(s)$; (b) 若 $t \in [a,b]$, $s \in S_j$, $j = 1,\dots,J$, 则 $\psi(t,s,q_j) = \mathfrak{y}_t(s)$; (c) 若 $s \in S$, $q \in I$, 则 $d\big(\mathfrak{x}(s)\ \psi(a,s,q)\big) < \varepsilon$。

证明。将 X 嵌入为某个 $\mathbb{R}^N$ 的闭实解析子流形，其中 $r\colon\ R \to X$是某个邻域 $R \subset \mathbb{R}^N$ 的解析回缩。我们可以假设 X 上的度量 d 是欧几里得度量的限制；并且 $a = 0$ 和 $\varepsilon < 1$。选取 $\delta < \varepsilon/2$，使得 δ–邻域

$$\{x \in X : |x| \le 1 + \sup_S |\mathfrak{x}|\} \subset \mathbb{R}^N$$

包含在缩回邻域 R 中；并且在这个 δ–邻域上，回缩满足 $|r - \mathrm{id}| < \varepsilon/2$。给定 $\mathfrak{y}_t$，我们将分几个步骤构造 ψ。考虑

$$C = \big(S \times \{q_0\}\big) \cup \bigcup_{j=1}^{J} \big(\bar{S}_j \times \{q_j\}\big), \qquad C_1 = [0,b] \times C, \qquad C_2 = \{0\} \times S \times I;$$

C_1、C_2 是 $[0,b] \times S \times I$ 的闭子集。定义 $\psi_1\colon\ C_1 \to X$ 如下:

$$\psi_1(t,s,q_j) = \begin{cases} \mathfrak{x}(s) & \text{if } j = 0, \quad s \in S \\ \mathfrak{y}_t(S_j) & \text{if } j \ge 1, \quad s \in \bar{S}_j. \end{cases}$$

特别地

$$d\big(\mathfrak{x}(s), \psi_1(0,s,q)\big) \le d_S(\mathfrak{x},\mathfrak{y}_0) < \delta \qquad \text{if} \quad (0,s,q) \in C_1 \cap C_2. \tag{8.1}$$

令 $B_s \subset R$ 表示以 $\mathfrak{x}$ 为中心、半径为 δ 的闭球（s）。将 $\psi_1|C_1 \cap C_2$ 延拓为连续函数 $\psi_2\colon\ C_2 \to \mathbb{R}^N$，则对 $(s,q) \in S \times I$，定义 $\psi_3(0,s,q) \in B_s$ 为离 $\psi_2(0,s,q)$ 最近的点。因此，$\psi_3\colon\ C_2 \to R$ 是连续的，并且根据 (8.1)，$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = r \circ \psi_3$ 在 $C_1 \cap C_2$ 上成立。于是

$$\psi_4 = \begin{cases} \psi_1 & \text{on } C_1 \\ r \circ \psi_3 & \text{on } C_2 \end{cases}$$

定义一个连续函数 $C_1 \cup C_2 \to X$，它可延拓为连续的 $\psi_5\colon\ G \to X$，其定义域包含 $C_1 \cup C_2$ 的某个邻域 G。选取 C 的一个邻域 $G_1 \subset S \times I$，使得 $[0,b] \times G_1 \subset G$，并令连续的 $\chi\colon\ S \times I \to [0,1]$ 的支集包含于 G_1，且在 $C_1 \cup C_2$ 上等于 1。于是 $\psi_6(t,s,q) = \psi_5\big(t\chi(s,q)\ s,$ 定义了一个连续函数$[0,b] \times S \times I \to X$，它在 C_1 上与 ψ_1 一致，在 C_2 上与 $r \circ \psi_3$ 一致。根据 ψ_1 的定义，引理的条件 (a,b) 对 ψ_6 成立；而 (c) 成立，是因为当 $s \in S$, $q \in I$ 时，$(0,s,q) \in C_2$，因此

$$\begin{aligned} d\big(\mathfrak{x}(s), \psi_6(0,s,q)\big) &= d\big(\mathfrak{x}(s), r(\psi_3(0,s,q))\big) \\ &\le d\big(\mathfrak{x}(s), \psi_3(0,s,q)\big) + d\big(\psi_3(0,s,q), r(\psi_3(0,s,q))\big) < \delta + \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

由引理 8.3 保证，取足够好的对 $\psi \in C^{0\omega}\big($（$[a,b] \times S$）$\times I$、$X\big)$ 对 ψ_6 的一致逼近，使得对所有 t、s、j，ψ（t，s，q_j）$= \psi_6$（t，s，q_j），即可。

引理 8.1 的证明。首先，取一个对角线的邻域 $D \subset X \times X$，并取$F:\ D \to TX$，如引理 2.1 中所述；再取如式（2.4）中的 exp。必要时缩小 X，即可使 F 解析，从而 exp 也是解析的。

考虑全纯向量丛 Hom $\to X \times X$，其纤维为 Hom$_{x,\ y}$ =Hom (T_xX, T_yX)，以及由同构构成的开子集 Iso $\subset$ Hom。纤维丛 p : Iso $\to X \times X$ 在 D上有一个典范解析截面 A: 这是因为对于固定的 x， T_xX 的切空间典范同构，而 $F(x,\cdot)$ 的微分在一方面建立了 T_xX（分别为 T_yX）与另一方面 T_xX 在 $F(x,x)$ $F(x,y)$ 处的切空间之间的同构。 $A(x,y) \in$ Hom $_{x,\ y}$于是就是这些同构或其逆的复合。

设 $I=[-1,1]$ 和 $q_0=0, q_1, \dots, q_J \in I$ 是互不相同的点。我们将证明，引理 8.4 所给出的 δ 同样适用于引理 8.1。给定引理 8.1 中的 $a, b, \mathfrak{y}_t$，令 $\psi \in C^{0\omega}\big(([a,b]\times S)\times I, X\big)$ 为引理 8.4 构造的映射。令$\psi_0 = \psi(a,\cdot,0)$: $S \to X$，考虑 $\psi_0^*TX \to S$ 与平凡线丛的和，

$$\pi : V = (\psi_0^*TX) \times \mathbb{C} \to S,$$

嵌入其中的 $(\psi_0^*TX) \times I$。

此外，令 $\tilde{\psi}(t,s,q) = \psi_0(\tilde{s}) = \psi(a,s,0)$。向量丛 ψ^*TX 与 ψ^*TX 同构，因为 ψ, ψ: $[a,b]\times S\times I \to X$ 同伦。我们利用这个同构来构造一个 $C^{0\omega}$ 映射

$$\theta : ([a,b]\times S)\times I \to \mathrm{Iso}, \qquad p\big(\theta(t,s,q)\big) = \big(\psi_0(s), \psi(t,s,q)\big), \tag{8.2}$$

如下。向量丛的一个同构对应于一个连续映射 θ_0，如 (8.2) 所示；根据引理 8.3，该映射可由 $\theta_1 \in C^{0\omega}\big(([a,b]\times S)\times I, \mathrm{Iso}\big)$ 逼近。令$p\circ\theta_1 = \alpha\times\beta$，其中 α, β: $[a,b]\times S\times I \to X$ 分别与 ψ、 ψ 接近。那么

$$\theta = \big(A\circ(\beta\times\psi)\big)\,\theta_1\,\big(A\circ(\tilde{\psi}\times\alpha)\big) \in C^{0\omega}\big(([a,b]\times S)\times I, \mathrm{Iso}\big)$$

满足 (8.2)。（上述 θ 的取值是三个线性变换的乘积。）

其中 ϖ: $\psi_0^*TX \to S$为丛投影， $\Xi \subset \psi_0^*TX$为零截面的一个合适邻域，

$$\phi : ([a,b]\times\Xi)\times I \ni (t,\xi,q) \mapsto \big(\exp(\theta(t,\varpi\xi,q)\xi), q\big) \in X\times\mathbb{C} \tag{8.3}$$

定义了一个 $C^{0\omega}$ 映射，该映射沿着 ϖ 的纤维全纯。我们有

$$\phi(t,\xi_0,q) = \big(\psi(t,s,q), q\big) \qquad \text{when } \xi_0 \in (\psi_0^*TX)_s \text{ is the zero vector}, \tag{8.4}$$

因为此时 $\theta(t,\varpi\xi_0,q)\xi_0 \in T_{\psi(t,s,q)}X$是零向量。

在底空间的局部范围内，向量丛 ψ_0^*TX 是直积，而 Ξ 包含一个零截面的邻域，该邻域是 S 的一部分与一个复流形的直积。因此，引理 8.2 给出 ϕ 到 $[a,b]\times\Xi\times I$ 的一个邻域 $O \subset [a,b]\times\Xi\times\mathbb{C} \subset [a,b]\times V$上的延拓；必要时可缩小 Ξ。该延拓

$$\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 : O \to X\times\mathbb{C}$$

是连续的，并且沿纤维 $O_{t,\ s} = O \cap (\{t\} \times V_s)$ 全纯。由 (8.3)$\Phi_2(t,\xi,q) = q$。我们将 S 嵌入 $\psi_0^* TX$，使其成为零截面，并声称——必要时将 O 缩小为 $[a,b]\times S\times I \subset [a,b]\times V$的一个更小邻域后——限制$\Phi|O_{t,\ s}$ 在 $X \times \mathbb{C}$的开子集上双全纯映射。

确实，固定一个零向量 $\xi_0 \in T_{\psi_0(s)}X$ 以及 $q \in I$。根据分解$V = (\psi_0^* TX) \times \mathbb{C}$, 切空间 $T_{(t,\xi_0,q)}O_{t,s}$ 也有分解

$$T_{(t,\xi_0,q)}O_{t,s} \approx T_s\psi_0^* TX \oplus T_q\mathbb{C}. \tag{8.5}$$

在分解 (8.5) 中，$\Phi_1|O_{t,s}$ 在 (t,ξ_0,q) 处的微分为 $\exp_*\theta(t,s,q)\oplus 0$，参见 (8.3)、(8.4)；而 $\Phi_2|O_{t,s}$ 的微分为 $0\oplus \mathrm{id}^{T_q\mathbb{C}}$。由于 exp 在任意 T_xX上都是双全纯的，因此 $(\Phi|O_{t,s})_*$ 在 $[a,b]\times S\times I$ 的所有点处可逆，故在 $[a,b]\times V$ 中的某个邻域内也可逆。由于 Φ 在 $\{(t,s)\}\times I$上是单射，简单的反证法表明，如果

$$O \subset [a,b]\times V = [a,b]\times(\psi_0^* TX)\times\mathbb{C}$$

充分缩小后，所有 $\Phi|O_{t,s}$ 都将是双全纯的。

我们可以取形如 $O\ [a,b]\times O'\times\Omega$ 的形式，其中 $O' \subset \psi_0^* TX$ 是零截面的一个邻域，而 Ω 是 $\subset\mathbb{C}\ I$ 的一个凸邻域。令 $\Delta\subset\mathbb{C}$ 为单位圆盘，并令 $f\colon \Delta\to\Omega$ 为双全纯映射，将 0 映到 0。选取 $\psi_0^* TX$ 上的一个范数 $|\ |_1$，使其单位球丛包含于 O' 中，并在 V 上定义范数 $|\ |$，如下:

$$|(\xi,\lambda)| = \max\big(|\xi|_1, |\lambda|\big), \qquad \xi\in\psi_0^* TX, \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

其单位球丛 U 包含于 $O'\times\Delta$ 中。公式

$$\Psi(t,\xi,\lambda) = \Phi\big(t,\xi,f(\lambda)\big), \qquad t\in[a,b], \quad (\xi,\lambda)\in U, \tag{8.6}$$

于是定义了一个连续映射 $\Psi\colon [a,b]\times U\to X\times\mathbb{C}$，其在 $\{t\}\times U_s$ 上的限制是到 $X\times\mathbb{C}$ 的开子集的双全纯映射，正如 (a) 所述。

在 $[a,b]\times S\times I$ 上，由 (8.4)，$\mathrm{pr}_X\circ\phi$ 和 $\mathrm{pr}_X\circ\Phi$ 与 ψ 一致。因此，引理 8.4c 表明，若将上文的 O 取为 $[a,b]\times S\times I$ 的充分小邻域，则对于纤维 $V_s\cap O$ 中的 v，有 $d\big(\mathfrak{x}(s),\ \mathrm{pr}_X(\Phi(a,v))\big) < \varepsilon$。因此，当 $v\in U_s$: 时，$d\big(\mathfrak{x}(s),\ \mathrm{pr}_X(\Psi(a,v))\big) < \varepsilon$；(d) 也成立。

最后，由 (8.4) 和引理 8.4a,b（请记住，$S\subset\psi_0^* TX$ 和 $S\times\{0\}\subset V$是零截面）

$$\Phi(t,s,q_j) = \phi(t,s,q_j) = \big(\psi(t,s,q_j),q_j\big) = \begin{cases} \big(\mathfrak{x}(s),0\big) & \text{if } s\in S,\ j=0 \\ \big(\mathfrak{y}_t(s),q_j\big) & \text{if } s\in S_j,\ j=1,\dots,J. \end{cases}$$

因此，如果我们定义 $\mathfrak{v}(s) = f^{-1}(q_j)$，当 $s\in S_j$时，$j=0,\dots J$，Ψ 也将满足其余要求 (b,c)。

9 映射空间上的延拓定理

本节中我们证明定理 7.5。由于空间 $C(S,X,A,\mathfrak{x}_0)\subset B(S,X,A,\mathfrak{x}_0)$ 在将 $\mathfrak{x}_0$ 替换为任意其他 $\mathfrak{x}\in C(S,X,A,\mathfrak{x}_0)$ 时保持不变，因此我们取 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_0$。回顾

基本邻域 $D_A(\mathfrak{y}) \subset \mathfrak{B}$ 的概念，它由对角线的一个邻域 $D \subset X \times X$ 定义，见 (5.1)。若 D 如引理 2.1 中所述，则 $D_A(\mathfrak{y})$ 是可缩的。

给定定理 7.5 中取值于 $E|\mathfrak{C}$ 的芽 f，设 $C \in \mathbb{R}$ 满足：对于任意路径 $\mathfrak{x}_t$ 上的 f 的任意解析延拓 h_t，都有 $p\big(\mathsf{h}_t(\mathfrak{x}_t)\big) \leq C$。下面的引理 9.1、9.3 将沿 $\mathfrak{B}$ 中的特殊路径 $\mathfrak{y}_t$ 延拓 f^{ab}。固定上述 D，使得 f 是 $E|\mathfrak{C} \cap D_A(\mathfrak{x})$ 的全纯截面 f 的芽，且 f 存在一个 Aron–Berner 型延拓 f^{ab}，将其延拓为 $E''|D_A(\mathfrak{x})$ 的截面。于是 f^{ab} 是 f_{ab} 的芽。

引理 9.1. 考虑一条从 $\mathfrak{x}$ 出发的路径 $[0,1] \ni t \mapsto \mathfrak{y}_t \in \mathfrak{B}$。假设 $a \in (0,1)$ 满足：当 $t \leq a$ 时，$\mathfrak{y}_t \in D_A(\mathfrak{x})$。另假设存在一个赋范拓扑向量丛 $\pi : (V, |\ |) \to S$，其单位球丛为 $U \to S$；存在一个 $\mathfrak{v} \in B_A(V)$、$\sup_S |\mathfrak{v}| < 1$，以及一个连续的 $\Psi\colon [a,1] \times U \to X$，使得对于每个 $t \in [a,1]$ 和 $s \in S$

(a) Ψ 将纤维 $\{t\} \times U_s$ 双全纯地映射到 X的开子集上；(b) 零向量 $0_s \in V_s$ 满足 $\Psi(t, 0_s) = \mathfrak{x}(s)$；(c) $\Psi(t, \mathfrak{v}) = \mathfrak{y}_t$；(d) $\Psi(a, v) \in D^{\mathfrak{x}(s)}$ 对于 $v \in U_s$，参见 (2.3)。

于是 f^{ab} 沿着 $\mathfrak{y}_t$有一个解析延拓 g_t，使得 $p\big(\mathsf{g}_t(\mathfrak{y}_t)\big) \leq C$。

令 $\Gamma \subset B_A(V)$ 为单位球。

引理 9.2。对于 $t \in [a,1]$，映射

$$\Psi_t^\circ : \Gamma \ni \mathfrak{u} \mapsto \Psi(t, \mathfrak{u}) \in D_A(\mathfrak{x}), \qquad \textit{cf. (d) above,} \tag{9.1}$$

在其像上是双全纯的，且其像是 $D_A(\mathfrak{x})$ 的一个开子集。

证明。固定 $t \in [a,1]$。首先我们断言映射

$$G : U \ni v \mapsto \big(\pi v, \Psi(t,v)\big) \in S \times X$$

是单射且为开映射。根据引理 9.1 的 (a)，单射性成立，因为 G maps $U_s$to $\{s\} \times X$ 是单射。G 为开集是一个局部性质。因此，我们可以假设 $V \to S$ 是平凡的，$V = S \times \mathbb{C}^r$。设 $\Psi(t, s_0, u_0) = z_0 \in X$，其中某个 $(s_0, u_0) \in U$，并取 $B \subset \mathbb{C}^r$ 为 u_0 的一个小紧邻域。拓扑次数 $\deg\big(\Psi(t, s_0, \cdot)\ B, z_0\big) = 1$。因此，对于靠近 s_0, z_0 的 s, z，$\deg\big(\Psi(t, s, \cdot)\ B, z\big) = 1$；$\Psi(t, s, \cdot)$ 在 B 中取到值 z，由此可知 G 确实是开集。这说明 Ψ_t° 是开集。它也是单射。

Φ 的逆映射是 G 在开集 $O \subset S \times X$ 与 U 之间的同胚，在 $O \cap \big(\{s\} \times X\big)$ 上全纯，并满足 $\Psi\big(t, \Phi(s,z)\big) = z$, $s \in S$, $z \in D^{\mathfrak{x}(s)}$。映射

$$\Phi^\circ : \Psi_t^\circ(\Gamma) \ni \mathfrak{z} \mapsto \Phi \circ (\mathrm{id}_S \times \mathfrak{z}) \in \Gamma \tag{9.2}$$

是 Ψ_t° 的逆映射，且 Φ°、Ψ_t° 都是全纯的。为验证 Ψ_t 的全纯性，例如，取 $\mathfrak{B}$ 上的局部坐标 $\psi_{\mathfrak{z}}$，如 (5.2) 中所示，其中 F：引理 2.1 的 $D \to TX$，

$$\psi_{\mathfrak{z}} : D_A(\mathfrak{z}) \ni \mathfrak{w} \mapsto F \circ (\mathfrak{z} \times \mathfrak{w}) \in B_A\big(\mathfrak{z}^* TX\big).$$

公式 $H(v) = F\big(\mathfrak{z}(\pi v)\ \Psi(t,v)\big) \in T_{\mathfrak{z}(\pi v)}X$ 定义了一个从V的博雷尔子集到 $\mathfrak{z}^*TX$ 的映射，该映射满足引理 1.3 的假设。因此，$\psi_{\mathfrak{z}} \circ \Psi_t^\circ = F \circ (\mathfrak{z} \times \Psi_t^\circ)$,

该引理中 H° 的限制在 Γ 上其定义所在的开子集上是全纯的。这意味着 Ψ_t° 确实是全纯的。类似的论证也可证明 Φ°；因此二者是双全纯的。

引理 9.1 的证明。对于取值 $t \le a$， f^{ab} 在 $\mathfrak{y}_t$ 处的芽给出了延拓 $\mathsf{g}_{t\circ}$ 为了将 g_a 延拓到取值 $t \ge a$，我们将证明，利用 (9.1) 的 Ψ_t°：

(1) f^{ab} 是全纯截面 g_t 的芽，其中 $E''|\Psi_t^\circ(\Gamma)$，$\sup\, p''(g_t) \le C$；(2) g_a 在 $\mathfrak{y}_a$ 处的芽是 g_a；(3) g_t 在 $\mathfrak{y}_t, t \in [a,1]$ 处的芽 g_t，构成 g_a 的解析延拓。

¯(1) 固定 $t \in [a,1]$。拉回 $\Psi_t^{\circ *}(E,p) = (E,\bar{p}) \to \Gamma$ 是带有平坦范数 $\bar{p}$ 的全纯巴拿赫丛。由定理 6.3 可知它是平凡的，因此其（有界）全纯截面可视为取值于固定巴拿赫空间 $(\mathfrak{Y}, \|\ \|)$ 的（有界）全纯函数。由于芽 $\mathsf{k} = \mathsf{f} \circ \Psi_t^\circ$ 沿 $\Gamma \cap \mathfrak{C}$ 中任意路径都有有界解析延拓（由相应的 f 的延拓沿 Ψ_t° 的拉回所诱导），它是有界全纯 k 的芽：$\Gamma \cap \mathfrak{C} \to \mathfrak{Y}$。这个 k 有一个 Aron–Berner 型延拓 k^{ab} 到 Γ，满足 $\sup p''(k^{\mathrm{ab}}) \le C$，其构造见第 4 节。推论 4.6 表明，$k^{\mathrm{ab}}$ 在 0 处的芽是 $\mathsf{f}^{\mathrm{ab}} \circ \Psi_t^\circ$，这意味着 $g_t = k^{\mathrm{ab}} \circ \Phi^\circ$ 可行，参见 (9.2)。

(2) 由于 $\Psi_a^\circ(\Gamma) \subset D_A(\mathfrak{x})$ 是连通的，且 f^{ab}, g_a 在 $\Psi_a^\circ(\Gamma)$ 上于 $\mathfrak{x}$ 处具有相同的芽，即 f^{ab}，因此我们有 $f_{\mathrm{ab}} = g_{a\circ}$ 特别是，它们在 $\mathfrak{y}_a = \Psi_a^\circ(\mathfrak{v})$ 处的芽相同。

(3) 给定 $t \in [a,1]$，用 $\Psi_t^\circ(\Gamma)$ 中的一条路径连接 $\mathfrak{x}$ 与 $\mathfrak{y}_t$。由 Ψ 的连续性可知，当 $\tau \in [a,1]$ 足够接近 t 时，这条路径包含在 $\Psi_\tau^\circ(\Gamma)$ 中。由于 g_t, g_τ 在 $\mathfrak{x}$ 处的芽相同，g_t, g_τ 在该路径的某个邻域内相同，因此在 $\mathfrak{y}_t$ 的某个邻域内也相同。但这意味着芽 g_t 关于 t 连续依赖，并且它们解析延拓 g_a。证明完毕。

同样，我们用度量 d 对 X 赋予度量结构，则 (2.2) 的 d_S 给 $\mathfrak{B}$ 赋予度量结构。

引理 9.3. 存在一个 $\delta > 0$，具有以下性质。设 $S = \coprod_{j=0}^J S_j$ 是由博雷尔集构成的划分，$S_0 = A_\circ$ 假设 $[0,1] \ni t \mapsto \mathfrak{y}_t \in \mathfrak{B}$ 是一条以 $\mathfrak{x}$ 为起点的路径，并且 $a \in (0,1)$ 满足

(a) 当 $t \in [0,a]$ 时，$d_S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_t) < \delta$；
(b) $\mathfrak{y}_t|S_j$ 当 $t \in [a,1]$, $j = 1, 2, \dots, J$ 时为常数。
那么 f^{ab} 沿着 $\mathfrak{y}_t$ 有解析延拓 g_t，使得 $p\big(\mathsf{g}_t(\mathfrak{y}_t)\big) \le C$。

证明。设 $X^+ = X \times \mathbb{C}$，并记 $\mathrm{pr}_X\colon\ X^+ = X \times \mathbb{C} \to X$ 为投影。令 $D^+ = (\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_X)^{-1} D \subset X^+ \times X^+$ 为对角线的一个邻域，$\mathfrak{x}^+ = \mathfrak{x} \times 0 \in C(S, X^+)$，

$$\mathfrak{B}^+ = \{\mathfrak{z} \in B(S, X^+) : \mathfrak{z}|A = \mathfrak{x}^+|A\},$$

以及 $\mathfrak{C}^+$ $\mathfrak{x}^+$ 在 $\mathfrak{B}^+ \cap C(S, X^+)$ 中的连通分支。选择 $\varepsilon > 0$，使得 $D(\mathfrak{x})$ 包含以 $\mathfrak{x}$ 为中心、半径为 ε 的 d_S 度量球。给定 $\mathfrak{x}$ 和 ε，引理 8.1 提供的 $\delta > 0$ 即可。

事实上，若本引理中的 (a)、(b) 成立，则取一个赋范向量丛 $(V, |\ |) \to S$，其单位球丛为 $U \subset V$, $\mathfrak{v}$，且位于单位球 $\Gamma \subset B_A(V)$ 中，并取由引理 8.1 保证存在的映射 $\Psi\colon\ [a,1] \times U \to X^+$。考虑由 $P(\mathfrak{z}) = \mathrm{pr}_X \circ \mathfrak{z}$ 给出的投影 $P\colon \mathfrak{B}^+ \to \mathfrak{B}$；它是全纯的，并将 $\mathfrak{C}^+$ 映至 $\mathfrak{C}$。拉回 $f \circ P$ 是一个

$P^*E|\big(\mathfrak{C}^+ \cap D^+(\mathfrak{x}^+)\big)$ 的全纯截面，其在 $\mathfrak{x}^+$ 处的芽记作 $\mathfrak{h}$。现在，$\mathfrak{h}$ 可沿 $\mathfrak{C}^+$ 中的任意路径 r 作解析延拓；这些延拓由沿 $P\circ r$ 的延拓的提升给出，并且有界，其界与 $\mathfrak{f}$ 的界相同，即 C。令 $\mathfrak{z}_t = \Psi(t,\mathfrak{v}) \in \mathfrak{B}^+$, $t\in[0,1]$。此时我们处于引理 9.1 的情形，其中 X 替换为 X^+，$\mathfrak{B}$ 替换为 $\mathfrak{B}^+$，$\mathfrak{y}_t$ 替换为 $\mathfrak{z}_t$。由该引理，$\mathfrak{h}^{\mathrm{ab}}$ 沿 $\mathfrak{z}_t$ 有解析延拓 $\mathfrak{k}_t$。还需证明，取值于 P^*E'' 的芽 $\mathfrak{k}_t$ 是芽 $\mathfrak{g}_t$ 的拉回，而这些芽构成 $\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$ 沿 $\mathfrak{y}_t$ 的解析延拓。

如果全纯向量场 ξ 在 $\mathfrak{B}^+$ 上与纤维 $P^{-1}(\mathfrak{y})$ 相切，我们就称其为竖直向量场 $\mathfrak{y}\in\mathfrak{B}$。考虑一个巴拿赫空间 $\mathfrak{Y}$，以及在某个 $\mathfrak{z}\in\mathfrak{B}^+$处的、取值于 $\mathfrak{Y}$ 的全纯芽 $\mathfrak{k}$。如果且仅如果对所有竖直向量场 ξ，导数 $\xi\mathfrak{k}=0$，$\mathfrak{k}$ 才能写成 $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\circ P$，其中 $\mathfrak{g}$ 是在$P(\mathfrak{z})$处的、取值于 $\mathfrak{Y}$ 的全纯芽。类似地，若 $\mathfrak{k}$ 是在 $\mathfrak{z}\in\mathfrak{B}^+$处的、取值于 P^*E'' 的芽，我们可以计算其竖直导数 $\xi\mathfrak{k}$，因为 $\mathfrak{k}$ 的（一个代表元的）限制在纤维 $P^{-1}(\mathfrak{u})$上时，取值于固定的巴拿赫空间 $E''_{P(\mathfrak{u})}$；并且，$\mathfrak{k}$ 是拉回当且仅当对所有竖直 ξ，$\xi\mathfrak{k}=0$。

对于上述构造的 $\mathfrak{h}^{\mathrm{ab}}=\mathfrak{k}_0$ 的解析延拓 $\mathfrak{k}_t$，有 $\xi\mathfrak{k}_0=0$，因为根据推论 4.6，$\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$沿 P的拉回。因此，其解析延拓 $\xi\mathfrak{k}_t$也为零，而 $\mathfrak{k}_t$ 是某个在 $\mathfrak{y}_t$处的芽 $\mathfrak{g}_t$ 的拉回。根据引理 7.2，$\mathfrak{g}_t$ 连续依赖于 t，因此给出了 $\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$的解析延拓。

我们将以下列方式把沿任意路径的延拓归结为沿引理 9.3 中所述路径的延拓。我们所说的划分，是指将$S=\coprod_{j=0}^{J}S_j$分解为博雷尔集，使得 $S_0=A$, $S_j\neq\emptyset$, $j=1,\dots,J$。给定这样一个划分，记为 Π，令

$$\mathfrak{B}_\Pi=\{\mathfrak{y}\in\mathfrak{B}:\mathfrak{y}|S_j=\mathrm{const},\ \text{for } j=1,\dots,J\}. \tag{9.3}$$

如果 Π' 是 Π 的细化（记作：$\Pi'\succ\Pi$），那么 $\mathfrak{B}_{\Pi'}\supset\mathfrak{B}_\Pi$。

引理 9.4. (a) $\mathfrak{B}_\Pi\subset\mathfrak{B}$ 是一个闭子流形，且与 X^J双全纯；
(b) 若 Π_0 是一个划分，则 $\bigcup_{\Pi\succ\Pi_0}\mathfrak{B}_\Pi$ 在 $\mathfrak{B}$中稠密；

(c) 设 $c\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{B}$ 为开集，$K\to\mathfrak{U}$ 为带有平坦范数p的全纯巴拿赫丛，且 Π_0 为一个划分。假设对每个 $\Pi\succ\Pi_0$，给定 $K|\mathfrak{B}_\Pi\cap\mathfrak{U}$的一个全纯截面$h_\Pi$，使得 $p(h_\Pi)\le c$，并且 $\Pi'\succ\Pi$ 蕴含在 $\mathfrak{B}_\Pi\cap\mathfrak{U}$上 $h_{\Pi'}=h_\Pi$。那么存在唯一的全纯截面 h，属于 $K|\mathfrak{U}$，使得 $h|\mathfrak{B}_\Pi\cap\mathfrak{U}=h_\Pi$。

(d) 设 $K\to\mathfrak{B}$ 是一个带有平坦范数的全纯巴拿赫丛。如果某个 $\mathfrak{z}\in\mathfrak{B}_{\Pi_0}$ 处的 K 值全纯芽 $\mathfrak{h}$ 对于 $\Pi\succ\Pi_0$ 在 $\mathfrak{B}_\Pi$中的任意路径上都可以解析延拓，且这些延拓具有相同的界 c，那么 $\mathfrak{h}$ 就可以沿 $\mathfrak{B}$中的任意路径解析延拓，并且有界于 c。

证明。(a) $\mathfrak{B}_\Pi$ 显然是闭子集。若 $\mathfrak{y}\in\mathfrak{B}_\Pi$，如 (5.2) 中的局部坐标 $\psi_{\mathfrak{y}}$ 将邻域 $D_A(\mathfrak{y})$映到一个开集 $\mathfrak{V}\subset B_A(\mathfrak{y}^*TX)$。对于所有 $j\ge1$，$\mathfrak{y}^*TX$ 在 S_j 上方的纤维都是到 X 的相同切空间，因此可以说 $\mathfrak{y}^*TX$ 的截面在 S_j 上为常值。那些在 S_0 上取零且在每个 S_j 上为常值的 $\mathfrak{y}^*TX$ 的有界博雷尔截面 $j\ge1$，构成一个有限维子空间

$$B_\Pi(\mathfrak{y}^*TX)\subset B_A(\mathfrak{y}^*TX),$$

局部坐标 $\psi_\mathfrak{y}$ 将 $\mathfrak{B}_\Pi \cap D_A(\mathfrak{y})$ 映到 $B_\Pi(\mathfrak{y}^* TX) \cap \mathfrak{V}$。因此， $\mathfrak{B}_\Pi$ 确实是 $\mathfrak{B}$ 的子流形。接着可以验证，将 $(x_1, \dots, x_J) \in X^J$ 映到由 $\mathfrak{z}(s) = x_j$ （若 $s \in S_j$、 $j = 1$、 …、 J）定义的 $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_\Pi$ 的映射是双全纯的。

(b) 设 $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$ 和 $\varepsilon > 0$。为了在 $\mathfrak{y}$ 的 ε 邻域中找到一个划分 $\Pi \succ \Pi_0$ 和 $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_\Pi$，用有限个半径为 ε 的球覆盖 $\mathfrak{y}(S) \subset X$ 的闭包，选取 $\Pi \succ \Pi_0$, $S = \coprod_{j=0}^{J} S_j$，使得每个 $\mathfrak{y}(S_j)$ 都包含在其中一个球内，设这些球的中心分别为 $y_j \in X$, $j \geq 1$。那么由下式给出的 $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_\Pi$

$$\mathfrak{z}(s) = \begin{cases} \mathfrak{x}(s) & \text{when } s \in S_0 = A \\ y_j & \text{when } s \in S_j, \quad i = 1, \dots, J \end{cases}$$

即可。

(c) 我们可以假设 $\mathfrak{U}$ 包含在某个 $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$ 附近的坐标邻域中，并且 (K, p) 在其上是平凡的。这样，我们可以用巴拿赫空间值函数代替截面。局部坐标 $\psi_\mathfrak{y}$ 将 $\mathfrak{U}$ 映到零截面的一个邻域 $\mathfrak{W} \subset B_A(\mathfrak{y}^* TX)$，并将 $\mathfrak{B}_\Pi \cap \mathfrak{U}$ 映到 $B_\Pi(\mathfrak{y}^* TX)$，如 (a) 部分的证明所示。 X 上的厄米度量在 $B_A(\mathfrak{y}^* TX)$ 上诱导出一个范数，并且我们可以假设 $\mathfrak{W}$ 是单位球。

因此，只需证明以下结论即可。设 $\mathfrak{X}$、$(\mathfrak{Y}, \|\ \|)$ 为巴拿赫空间， $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{X}$ 为单位球，且 $c \in \mathbb{R}$。假设对每个划分 $\Pi \succ \Pi_0$，都有一个闭子空间 $\mathfrak{X}_\Pi \subset \mathfrak{X}$ 以及 $h_\Pi \in \mathcal{O}(\mathfrak{X}_\Pi \cap \mathfrak{W}, \mathfrak{Y})$，满足以下性质。首先， $\|h_\Pi\| \leq c$；其次， $\mathfrak{X}_{\Pi'} \supset \mathfrak{X}_\Pi$，并且当 $\Pi' \succ \Pi$ 时 $h_{\Pi'} | \mathfrak{X}_\Pi \cap \mathfrak{W} = h_\Pi$ ；最后， $\mathfrak{Z} = \bigcup_{\Pi \succ \Pi_0} \mathfrak{X}_\Pi$ 在 $\mathfrak{X}$ 中稠密。那么存在唯一的 $h \in \mathcal{O}(\mathfrak{W}, \mathfrak{Y})$，使得 $h | \mathfrak{X}_\Pi \cap \mathfrak{W} = h_\Pi$ 且 $\|h\| \leq c$。（当然，这里的划分无关紧要， Π 也可以表示任意有向集的元素。）

$\mathfrak{Z}$ 的稠密性意味着 h 是唯一的。为构造 h，定义 $g\colon \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{W} \to \mathfrak{Y}$，使得 $g(x) = h_\Pi(x)$，若 $x \in \mathfrak{X}_\Pi \cap \mathfrak{W}$。对 h_Π 的导数应用柯西估计可知，在半径为 r 的同心球 $\mathfrak{W}_r \subset \mathfrak{W}$ 上，h_Π 的利普希茨常数为 $\leq c/(1-r)$，因此 g 也满足同样的结论。特别地，若 $x \in \mathfrak{W}$，且序列 $x_i \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{W}$ 收敛到 x，那么 $g(x_i)$ 构成柯西序列。定义 $h(x) = \lim_i g(x_i)$；该极限与序列 $x_i \to x$ 的选取无关。所构造的函数 h 连续，且其范数不超过 c。为了完成证明，我们需要验证：对于任意 x、 $y \in \mathfrak{X}$ 和 $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : x + \lambda y \in \mathfrak{W}\}$，函数 $f\colon \Lambda \ni \lambda \mapsto h(x + \lambda y)$ 是全纯的。设 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 为开集且相对紧。取收敛到 x、 y 的序列 $\Pi_i \succ \Pi_0$ 和 $x_i, y_i \in \mathfrak{X}_{\Pi_i}$。那么，当 i 充分大时， $f_i(\lambda) = h(x_i + \lambda y_i) = h_{\Pi_i}(x_i + \lambda y_i)$ 在 Λ_0 上全纯。由于在 Λ_0 上 $\|f_i\| \leq c$ 且 $f_i \to f$，可知 f 全纯，因此 h 也全纯。

(d) 设 $r : [a, b] \to \mathfrak{B}$ 是一条路径， $\mathfrak{h}$ 是 $r(a) = \mathfrak{z}$ 处的一个芽。设 $\mathfrak{W}_t \subset D_A\big(r(t)\big)$ 是 $r(t)$ 的邻域，其在局部坐标 $\psi_{r(t)}$ 下的像是凸集， $r(a) \in \mathfrak{W}_t$ 对于邻域 a 中的 t 成立，并且 $\mathfrak{h}$ 是 $K|\mathfrak{W}_a$ 的一个全纯截面 h^0 的芽。于是，对于每个 Π， $\mathfrak{B}_\Pi \cap \mathfrak{W}_t$ 都是可缩的或空的。选取 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$，使得当 $1 \leq j \leq k$ 时， $r[t_{j-1}, t_j] \subset \mathfrak{W}_{t_j}$。通过递推，我们构造出 $K|\mathfrak{W}_{t_j}$ 的全纯截面 h^j，它们定义了 $\mathfrak{h}$ 沿 r 的解析延拓。若已构造出 $i < j$ 的 $j \geq 1$ 和 h^i，则选取一个划分 $\Pi_1 \succ \Pi_0$，并令 $\mathfrak{w}$ 属于 $\mathfrak{B}_{\Pi_1} \cap \mathfrak{W}_{t_{j-1}} \cap \mathfrak{W}_{t_j}$ 中 $r(t_{j-1})$ 的连通分支。 h^{j-1} 在 $\mathfrak{w}$ 处的芽沿 $\mathfrak{B}_\Pi \cap \mathfrak{W}_{t_j}$ 中的路径的解析延拓 $\Pi \succ \Pi_1$，定义了 h_Π 的全纯截面

$K|\mathfrak{B}_\Pi \cap \mathfrak{W}_{t_j}$。由于这些截面满足 (c) 中的条件，它们是 $K|\mathfrak{W}_{t_j}$ 的一个全纯截面 h^j 的限制。根据 (c) 中的唯一性部分，h^{j-1} 和 h^j 的芽在 $\mathfrak{w}$ 处相同，因此在 $\mathfrak{W}_{t_{j-1}} \cap \mathfrak{W}_{t_j}$ 中 $\mathfrak{w}$ 的连通分支内也相同。特别地，h^{j-1} 和 h^j 在 $r(t_{j-1})$ 附近相同。因此，集合 h^j 确实给出了 h 沿 r 的解析延拓。

定理 7.5 的证明。只需沿路径 $[0,1] \ni t \mapsto \mathfrak{x}_t \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}$ 构造延拓。设 $\delta > 0$ 如引理 9.3 中所述，并取 $a \in (0, 1/2)$，使得 δ–邻域 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ of $\mathfrak{x}$ 包含于 $D_A(\mathfrak{x})$ 中，且当 $t \in [0, 2a]$ 时包含 $\mathfrak{x}_t$。选取一个划分 $S = \coprod_{i=0}^{I} T_i$，记为 Π_0，使得 $\mathfrak{B}_{\Pi_0}$ 与 $\mathfrak{U}$ 相交（引理 9.4b），例如 $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}_{\Pi_0} \cap \mathfrak{U}$。由于 $\mathfrak{U}$ 在局部坐标 $\psi_{\mathfrak{x}}$ 下的像是凸集，因此存在一条从 $\mathfrak{x}$ 到 $\mathfrak{x}_{2a}$ 的路径 $[0, 2a] \ni t \mapsto \mathfrak{y}_t \in \mathfrak{U}$，使得 $\mathfrak{y}_a = \mathfrak{y}$；再通过 $\mathfrak{y}_t = \mathfrak{x}_t$ 将它延拓为 $2a \le t \le 1$。$f\mathsf{ab}$ 的芽沿着 $\mathfrak{x}_t, \mathfrak{y}_t$, $t \in [0, 2a]$ 为 f^{ab} 提供延拓。这些延拓在 $\mathfrak{x}_{2a}$ 处得到相同的结果，记为 g。令 h 为 $f\mathsf{ab}$ 在 $\mathfrak{y}_a$ 处的芽。要得到 f^{ab} 沿 $\mathfrak{x}_t$, $t \in [0,1]$ 的解析延拓，只需证明 g 沿 $\mathfrak{x}_t$, $t \in [2a, 1]$ 的延拓存在，或者 h 沿 $\mathfrak{y}_t$, $t \in [a, 1]$ 的延拓存在。然而，引理 9.3 保证，对于满足当 $t \in [a, 1]$ 时 $\mathfrak{y}'_t \in \mathfrak{B}_\Pi$ 的路径 $\mathfrak{y}'_t$，后一种延拓存在；这里 $\Pi \succ \Pi_0$ 是任意的。因此，根据引理 9.4d，该延拓沿 $\mathfrak{y}_t$ 也存在。证明完毕。

10 单值定理

本节证明定理 0.2 的以下推广。考虑由紧豪斯多夫空间 S、复流形 X、连续的 $\mathfrak{x} \in C(S, X)$ 和闭的 $A \subset S$ 确定的映射空间 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$，与前文相同。

定理 10.1. 假设 X 是单连通的，$E \to \mathfrak{B}$ 是带有平坦范数 p 的全纯巴拿赫丛，并且一个取值于 $E|\mathfrak{C}$ 的全纯芽 f 沿 $\mathfrak{C}$ 中任意路径都存在有界解析延拓。那么，f 是 $E|\mathfrak{C}$ 的一个全纯截面 f 的芽。此外，如果 X 是紧致的，那么 f 是一个水平截面（定义 6.4）。

固定一个如第 9 节所述的划分 $S = \coprod_{j=0}^{J} S_j$，记作 Π_0，并令 $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{B}_{\Pi_0}$，见 (9.3)。给定 $\nu = 0,\ 1,\ \ldots$，包含映射诱导出一个同伦群/集合及同态的有向系统

$$\pi_\nu(\mathfrak{B}_\Pi, \bar{\mathfrak{x}}) \to \pi_\nu(\mathfrak{B}_P, \bar{\mathfrak{x}}), \qquad P \succ \Pi \succ \Pi_0. \tag{10.1}$$

引理 10.2. $\pi_\nu(\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}})$ 同构于系统 (10.1) 的直极限。因此，若 X 连通（这是我们的基本假设），或单连通，则 $\mathfrak{B}$ 也如此。

证明。我们需要证明，任意连续映射 $(S^\nu, *) \to (\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}})$，以及任意两个此类映射之间的同伦，都可以分别变形为取值于 $\mathfrak{B}_\Pi$with some 划分 $\Pi \succ \Pi_0$ 的映射和同伦；并且，对于 $(\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}})$ 中连接连续映射$f_1, f_2 \colon (S^\nu, *) \to (\mathfrak{B}_\Pi, \bar{\mathfrak{x}})$ 的任意同伦，都可以在固定 f_1, f_2 的情况下，将其变形为某个 $(\mathfrak{B}_P, \bar{\mathfrak{x}})$,$P \succ \Pi$ 中的同伦。完成后，我们便可定义同态 $\pi_\nu(\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}}) \to \varinjlim{}^{\pi_\nu}(\mathfrak{B}_\Pi, \bar{\mathfrak{x}})$：首先将 $\pi_\nu(\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}})$ 中一个 $f \colon (S^\nu, *) \to (\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{x}})$ 的等价类映射为一个与 $f_1 \colon (S^\nu, *) \to (\mathfrak{B}_\Pi, \bar{\mathfrak{x}})$ 同伦的映射

to f，然后映射为 $\lim\!\longrightarrow^{\pi_\nu}(\mathfrak{B}_P,\mathfrak{x})$ 中由等价类 $[f_1]\in\pi_\nu(\mathfrak{B}_\Pi,\mathfrak{x})$ 诱导的元素。这个同态自动是双射。

以下变形陈述是下述命题的特例：设 T 为紧豪斯多夫空间，$C\subset T$ 为闭集。对于任意连续 $\phi:(T,C)\to(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_\Pi)$，存在连续变形 $\phi_\tau:(T,C)\to(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_\Pi)$，$0\le\tau\le 1$，使得对所有 τ，$\phi_0=\phi$,$\phi_\tau|C=\phi|C$，且 $\phi_1(T)\subset\mathfrak{B}_P$，其中某个 $P\succ\Pi$。为验证这一点，我们将使用 $D\subset X\times X$，D^x，F：引理 2.1 的 $D\to TX$，以及 (2.4) 中的 exp：$TX\to X$。由于 $\phi(t)\in\mathfrak{B}$ 是 $t\in T$ 的连续函数，且每个 $\phi(t)(S)\subset X$ 都有紧致闭包，因此存在一个紧致的 $L\subset X$，包含所有 $\phi(t)(S)$。用有限个坐标邻域 D^{x_i} 覆盖 L，并选择一个由 $S=\coprod_{i=0}^{I}R_i$ 给出的划分 $P\succ\Pi$，使得对于每个 $t\in T$ 和 $i=1,\dots,I$，$\phi(t)(R_i)\subset D^{x_i}$。如果 $s_i\in R_i$, $i\ge 1$，那么

$$\phi_\tau(t)(s)=\begin{cases}\phi(t)(s)=\mathfrak{x}(s) & \text{if } s\in R_0=A\\ \exp\big\{(1-\tau)F\big(x_i,\phi(t)(s)\big)+\tau F\big(x_i,\phi(t)(s_i)\big)\big\} & \text{if } s\in R_i,\quad i=1,\dots,I\end{cases}$$

就是所寻求的变形。

引理的第二个结论由以下事实得出：根据引理9.4a，空间 $\mathfrak{B}_\Pi$ 与 X 的笛卡尔幂同胚，因此对于（单）连通的 X，它们本身也是（单）连通的。

定理 10.1 的证明。由于 $\mathfrak{B}$ 根据引理 10.2 是连通且单连通的，因此 (E,p) 是平凡的。同样，我们可以不讨论 (E,p) 的截面，而改为讨论取值于某个固定巴拿赫空间 $(\mathfrak{Y},||\ ||)$ 的函数。因此，我们取 f 为一个取 $\mathfrak{Y}$ 值的芽。根据定理 7.5，$\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$ 沿着 $\mathfrak{B}$ 中任意路径都存在有界解析延拓；同样，由于 $\mathfrak{B}$ 是单连通的，这意味着 $\mathfrak{f}^{\mathrm{ab}}$ 是全纯 $g:\mathfrak{B}\to\mathfrak{Y}''$ 的芽。因此，f 是全纯函数 $f=g|\mathfrak{C}$ 的芽。由于其芽 f 取值于 $\mathfrak{Y}\subset\mathfrak{Y}''$，因此 f 取到的所有值都在 $\mathfrak{Y}$ 中。

此外，若 X 是紧致的，则子流形 $\mathfrak{B}_\Pi\approx X^J$ 也紧致（且连通），因此限制 $g|\mathfrak{B}_\Pi$ 是常数。由于 $\bigcup_\Pi\mathfrak{B}_\Pi$ 在 $\mathfrak{B}$ 中稠密，根据引理 9.4b，这意味着 g 本身是常数，因此 f 是常数。

11 个例子

本节汇集了一些例子，说明定理 7.5、10.1 中的某些假设不可省略，或者其结论不能进一步加强。我们沿用第 7、10 节中的记号。

例 11.1。存在映射空间 $\mathfrak{C}$、$\mathfrak{B}$ 以及一个有界全纯函数 $f:\mathfrak{C}\to\mathbb{C}$，它在某个 $\mathfrak{x}_0$ 处的芽为 f，且 $\mathfrak{f}^{ab}$ 不是单值全纯函数 $g:\mathfrak{B}\to\mathbb{C}$ 的芽。

令 $r\in(1,\infty)$，$X=\{x\in\mathbb{C}:\ 1/r<|x|<r\}$ 一个环域，$S=[0,1]$, $A=\emptyset$，且 $\mathfrak{x}_0\equiv 1$。因此，$\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ 是巴拿赫空间 $B(S)$、$C(S)$ 中的开集。若 $\mathfrak{x}\in\mathfrak{C}$，定义 $f(\mathfrak{x})=\sqrt{\mathfrak{x}(1)/\mathfrak{x}(0)}$，其中使用沿路径 $[0,1]\ni t\mapsto\mathfrak{x}(t)/\mathfrak{x}(0)$ 从 $\sqrt{1}=1$ 延拓得到的平方根分支。令 f 为 f 在 $\mathfrak{x}_0$ 处的芽。在 $\mathfrak{x}_0$ 的某个邻域内，我们可以写成 $f(\mathfrak{x})=\sqrt{\phi(\mathfrak{x})/\psi(\mathfrak{x})}$，其中各函数均为全纯函数

$$\phi(\mathfrak{x})=\mathfrak{x}(1),\quad \psi(\mathfrak{x})=\mathfrak{x}(0) \tag{11.1}$$

在 $C(S)$ 上，并取平方根的主值分支。这里 ϕ,ψ 是线性函数，其延拓 $\phi^{\mathrm{ab}},\psi^{\mathrm{ab}}$ 到 $B(S)$由相同的公式 (11.1) 给出。由于 Aron–Berner 延拓与乘法相容，因此 f^{ab} 是下列函数的芽

$$g(\mathfrak{x})=\sqrt{\mathfrak{x}(1)/\mathfrak{x}(0)},\qquad \mathfrak{x}\in\mathfrak{B}\text{ in a neighborhood of }\mathfrak{x}_0.$$

但 f^{ab} 没有单值延拓，例如沿路径 $[0,1]\ni t\to\mathfrak{x}_t\in\mathfrak{B}$。

$$\mathfrak{x}_t(s)=\begin{cases}e^{2\pi it} & \text{if } s=1\\ 1 & \text{if } s\neq 1.\end{cases}$$

例 11.2. 存在映射空间 $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ 和（无界的） $f\in\mathcal{O}(\mathfrak{C})$，以及某个 $\mathfrak{x}_0\in\mathfrak{C}$ 上的芽 f，使得 f^{ab} 无法沿 $\mathfrak{B}$中的某条路径延拓。

这是对 Dineen 一个结果的轻微改述。令 $X=\mathbb{C}$、$S=\{0,1/n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$，赋予从 $\mathbb{R}$继承的拓扑，$A=\emptyset$以及 $\mathfrak{x}_0\equiv 0$。因此，$\mathfrak{C}$ 与 c双全纯，后者是复数收敛序列构成的空间，而 $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$与 $c''=l^\infty\supset c$双全纯。特别地，$\mathfrak{B}$ 是单连通的，因此，如果其上的芽 g 沿任意路径都有解析延拓，那么 g 就是 $\mathfrak{B}$上某个全纯函数的芽。由于根据 Dineen 和 Josefson 的结果 [D71、J78]，在 c 上存在不能延拓到 l^∞的全纯函数 f，我们的结论便得证。事实上，不仅 f^{ab} 不能沿某条路径作解析延拓，而且 f 的任何延拓 g（作为 $\mathfrak{B}$上的芽）都无法沿 $\mathfrak{B}$中的所有路径作解析延拓。

例11.3. (a) 除非 X 可缩，否则它有一个映射空间 $\mathfrak{C}$，其上有一个平坦赋范全纯巴拿赫丛$(E,p)\to\mathfrak{C}$；并且在某个 $\mathfrak{x}_0\in\mathfrak{C}$ 处存在一个取值于 E 的全纯芽，它沿着 $\mathfrak{C}$中的任意路径都有有界解析延拓，但不能延拓为 E的全纯截面。若 X 单连通，则 E 可以取为线丛。

(b) 若斯坦流形 X 不可缩，则它有一个相应的映射空间$\mathfrak{C}$，并且在某个 $\mathfrak{x}_0\in\mathfrak{C}$ 处存在一个取值于 $\mathbb{C}$的全纯芽f，它沿着 $\mathfrak{C}$中的任意路径都能解析延拓，但f不能延拓为全纯函数 $\mathfrak{C}\to\mathbb{C}$。

(a)和(b)中，X 都可以是单连通的。因此，(b)表明，在定理 10.1 中，不能简单地去掉解析延拓有界这一假设；而(a)表明，除非已知(E,p)可延拓为 $\mathfrak{B}$上的平坦丛，否则仅有有界性也不足够。——若 X 可缩，则其映射空间也可缩，例11.3中描述的现象便不会发生。

如果 X 不是可缩的，那么根据 Whitehead，它有一个非平凡的同伦群$\pi_\nu(X,x_0)$，$\nu\geq 1$ [W49，定理 1]。令 $S=S^{\nu-1}$, $A\subset S$ 为单点集，$\mathfrak{x}_0\equiv x_0$，且$\mathfrak{C}=C(S,X,A,\mathfrak{x}_0)$。由于 $\pi_1(\mathfrak{C},\mathfrak{x}_0)\approx\pi_\nu(X,x_0)\neq 0$，因此存在一个非平凡覆盖$\pi:C\to\mathfrak{C}$，其覆盖空间为一个连通的复巴拿赫流形 C。对于 $\mathfrak{x}\in\mathfrak{C}$，令 $C_{\mathfrak{x}}=\pi^{-1}(\mathfrak{x})$，并令 $E_{\mathfrak{x}}$ 表示函数 $e:C_{\mathfrak{x}}\to\mathbb{C}$ 所构成的希尔伯特空间，其范数 $p(e)$ 为 $=\big(\sum_{v\in C_{\mathfrak{x}}}|e(v)|^2\big)^{1/2}<\infty$。在 $E=\coprod_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{C}}E_{\mathfrak{x}}$上，$C\to\mathfrak{C}$ 的局部平凡化诱导出一个以 $\mathfrak{C}$为底空间、具有平坦范数 p的全纯巴拿赫丛结构。

拉回 $\pi^*(E,p)\to C$ 是平凡的，并且有一个水平截面 g (定义 6.4)，其在 $y\in C_{\mathfrak{x}}$ 处的取值是狄拉克函数 $e\in E_{\mathfrak{x}}$，由 $e(y)=1, e(v)=0$ if $v\neq y$给出。

在 $C_{\mathfrak{x}_0}$ 中任意一点处的 g 的芽 g 推前为 $\mathfrak{x}_0$处的全纯 E 值芽 f； g 的其他芽的推前沿着 $\mathfrak{C}$中的任意路径为 f 提供有界解析延拓；但 f 不是 E的截面 f 的芽。若是如此，g 将是 f的拉回，而函数 $f(\mathfrak{x}): C_{\mathfrak{x}} \to \mathbb{C}$的单点支集将给出覆盖 $C \to \mathfrak{C}$的一个全局截面，这不可能。

若 X 是单连通的，则可以修改上述构造，从而得到一个线丛 $E \to \mathfrak{C}$。具体而言， $\nu \geq 2$于是，故 $G = \pi_1(\mathfrak{C}, \mathfrak{x}_0) \approx \pi_\nu(X, x_0)$ 是阿贝尔群。根据庞特里亚金对偶，它有一个非平凡表示 $\rho : G \to \mathrm{U}(1)$,[P66, 第 37] 节。这诱导出一个平坦线丛 (E, p) $\to \mathfrak{C}$: 它由 $\mathfrak{C}$ 的万能覆盖上的平凡˜ ˜线丛 $\mathfrak{C} \times \mathbb{C} \to \mathfrak{C}$ 得到，该线丛赋有平凡范数 =厄米度量，并通过除去以下作用得到:

$$\tilde{\mathfrak{C}} \times \mathbb{C} \ni (\mathfrak{y}, \zeta) \mapsto \big(\gamma\mathfrak{y}, \rho(\gamma)\zeta\big) \in \tilde{\mathfrak{C}} \times \mathbb{C}, \qquad \gamma \in G,$$

˜(G 通过覆盖变换作用于 $\mathfrak{C}$)。由于 ρ 非平凡，作为平坦线丛的 (E, p) 也是非平凡的，尽管作为全纯线丛， E 也完全可能是平凡的。˜ ˜截面 $\mathfrak{C} \ni y \mapsto (y, 1)$ $\in \mathfrak{C} \times \mathbb{C}$ 诱导出 (E, p) 的一个多值水平截面；它在 $\mathfrak{x}_0$ 处的任意一个芽都是所求的 f。

当 X 是斯坦流形时，还可以作进一步的修改。在这种情况下，万能覆盖$\mathfrak{C}$ 可以嵌入巴拿赫空间。为此，我们先将 X 全纯且真地嵌入某个欧几里得空间 $\mathbb{C}^N$，并使其在嵌入中将 x_0映到 0。这表明 $\mathfrak{C}$ 是巴拿赫空间 $C_A(S)^{\oplus N}$中的闭复直子流形[2] 。后一个空间同构于$C(S)^{\oplus N} \approx C[0,1]^{\oplus N}$的一个有限余维子空间，因此根据米柳京和绍德[M66, S27]，它具有绍德基。由此可知， $\mathfrak{C}$ 可以作为闭直流形嵌入巴拿赫空间。这一点在 [L10, 定理 3.7], 中得到了证明，不同之处在于，该处假设 $\mathfrak{C}$ 应嵌入具有无条件基的巴拿赫空间。然而，该处使用基的无条件性，只是为了引用帕蒂和本文作者此前的一些关于上同调的结果。所有这些结果都可由 [LP07, 定理 9.1], 中的上同调消失推出；该定理的一个假设（“多重次调和控制”）当时只有在存在无条件基的情况下才能证明。不过，后来帕蒂将多重次调和控制推广到了具有绍德基的空间 [P11, P15]。这意味着，关于万能覆盖（或任意覆盖）的可嵌入性， [L10, 定理 3.7], 在假设具有绍德˜基而非无条件基的情况下仍然成立。由此便解决了我们的 $\mathfrak{C}$的嵌入问题。

˜一旦嵌入成立，对于任意两个不同的点 $a, b \in \mathfrak{C}$ ，就存在一个˜$g \in \mathcal{O}(\mathfrak{C})$，它在 a, b 处取值不同。若我们选取 a, b ，使它们都位于 $\mathfrak{x}_0$ 之上，那么芽 g 在 a 处的推前 f 到 $\mathfrak{C}$ ，可沿着$\mathfrak{C}$中的任意路径解析延拓，但这些延拓并不能定义 $\mathfrak{C}$上的单值函数。

[2]复巴拿赫流形 N 的子集 M 称为直子流形，若对每个 $q \in N$ ，都存在 q的一个邻域 $U \subset N$、巴拿赫空间 B中的一个有补子空间 $A \subset B$ ，以及一个开集 $V \subset B$ ，使得点对 $(U, U \cap M)$ 与 $(V, V \cap A)$ 双全纯。

参考文献

[AB78] Richard Aron、Paul Berner，《解析映射的 Hahn–Banach 延拓定理》。《法国数学会通报》106 (1978) 3–24。[A+16] Richard Aron、Pablo Galindo、Dami´an Pinasco、Ignacio Zalduendo，《巴拿赫空间上的群对称全纯函数》。《伦敦数学会会刊》48 (2016) 779–796。[C99] Daniel Carando，《巴拿赫空间上的可延拓多项式》。《数学分析与应用杂志》233 (1999) 359–372。[C+08] Yun Sung Choi、Domingo Garcia、Sung Guen Kim、Manuel Maestre，《复合、数值域与 Aron–Berner 延拓》。《斯堪的纳维亚数学杂志》103 (2008) 97–110。[D+16] Garth Dales、Frederick Dashiell、Anthony Lau、Dona Strauss，《作为对偶空间的连续函数巴拿赫空间》。《CMS数学丛书》。施普林格，Cham，2016。[DG89] Alexander Davie、Theodor Gamelin，《关于多项式星逼近的一个定理》。《美国数学会会刊》106 (1989) 351–356。[D71] Se´an Dineen，《巴拿赫空间的有界子集》。《数学年刊》192 (1971) 61–70。[D99] Se´an Dineen，《无限维空间上的复分析》。《施普林格数学专著》。施普林格出版社伦敦有限公司，伦敦，1999。[DM98] Se´an Dineen、Pauline Mellon，《紧型对称巴拿赫流形上的全纯函数为常数》。《数学杂志》229 (1998) 753–765。[DV04] Se´an Dineen、Milena Venkova，《巴拿赫空间上有界型全纯映射的延拓》。献给 John Horv´ath 的专辑。《数学分析与应用杂志》297 (2004) 645–658。[DS88] Nelson Dunford、Jacob Schwartz，《线性算子》第一部分：一般理论。William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写。1958 年原版重印。《Wiley经典文库》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1988。[G66] Hugh Gordon，《可测函数环的极大理想空间》。《美国数学杂志》88 (1966) 827–843。[G58] Hans Grauert，《关于 Levi问题与实解析流形的嵌入》。《数学年刊》第二辑 68 (1958) 460–472。[J78] Bengt Josefson，《实数域 $l^{\infty}(A)$的有界子集》。《纯粹与应用数学杂志》九辑 57 (1978) 397–421。

[K41] 角谷静夫，抽象（M）空间的具体表示。（连续函数空间的一种刻画。）《数学年刊》（第2辑）42（1941）994–1024。[L98] L´aszl´o Lempert，无限维中的 Dolbeault 复形。I。《美国数学会杂志》11（1998）485–520。[L04] L´aszl´o Lempert，（广义）环空间上的全纯函数。《爱尔兰皇家科学院数学学报》104A（2004）35–46。[L10] L´aszl´o Lempert，映射空间中的解析延拓。《纯粹与应用数学季刊》6（2010）1051–1080。[LP07] L´aszl´o Lempert、Imre Patyi，巴拿赫空间中的解析层。《高等师范学校科学年刊》（第4辑）40（2007）453–486。[LS07] L´aszl´o Lempert、Endre Szab´o，有理连通簇与环空间。《亚洲数学杂志》11（2007）485–496。[M66] Alexei Miljutin，连续统基数紧集上的连续函数空间的同构。（俄文）《函数论、泛函分析及其应用》2（1966）150–156。[M86] Jorge Mujica，巴拿赫空间中的复分析：有限维与无限维中的全纯函数和全纯域。北荷兰数学研究丛书，第120卷。数学札记。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1986。[P11] Imre Patyi，巴拿赫空间中的多重次调和控制。《数学进展》227（2011）245–252。[P15] Imre Patyi，关于全纯控制，II。《巴黎科学院数学报告》353（2015）501–503。[P66] 列夫·庞特里亚金，《拓扑群》。由 Arlen Brown 根据俄文第二版译出。Gordon and Breach Science Publishers, Inc.，纽约—伦敦—巴黎，1966[R87] Walter Rudin，《实分析与复分析》。第三版。麦格劳-希尔图书公司，纽约，1987。[S27] Julius Schauder，关于函数空间中连续映射的理论。《数学杂志》26（1927）47–65。.[U87] Ali Ulger，A. 弱紧双线性形式与 Arens 正则性。《美国数学会会刊》101（1987）697–704。[W49] J.C.H. Whitehead，组合同伦 I。《美国数学会通报》55（1949）213–245。[Z90] Ignacio Zalduendo，巴拿赫空间上解析函数的典范延拓。《美国数学会汇刊》320（1990）747–763。