arXiv:2303.12137v1 [math.CV] 21 Mar 2023

实双曲球上的调和 Bergman 空间：原子分解、插值与包含关系

A. ERS¸IN ¨UREYEN

Abstract. 对于 $\alpha > -1$ 和 $0 < p < \infty$，我们研究实双曲球上由调和函数构成的加权 Bergman 空间$\mathcal{B}^p_\alpha$，并以再生核为基底获得这些空间的原子分解。我们证明，若一个r-分离序列 $\{a_m\}$ 的 r 足够大，则它是$\mathcal{B}^p_\alpha$的插值序列。利用这些结果，我们精确确定一个 Bergman 空间 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 包含于另一个 Bergman 空间 $\mathcal{B}^q_\beta$ 的条件。

1. Introduction

对于 $x,\ y \in \mathbb{R}^n$，令 $\langle x,\ y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ 为欧几里得内积，$|x| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$ 为相应的范数。令 $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < 1\}$ 为单位球，$\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$ 为单位球面。双曲球为 $\mathbb{B}$，其上赋有双曲度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

拉普拉斯算子 Δ_h 和梯度 ∇^h 关于双曲度量的定义如下（有关 [12, 第 3] 章中 Δ_h 和 ∇^h的更多细节，请参阅

$$(\Delta_h f)(a) = \Delta(f\circ\varphi_a)(0) \qquad (f \in C^2(\mathbb{B})),$$

and

$$(\nabla^h f)(a) = \overline{\nabla}(f\circ\varphi_a)(0) \qquad (f \in C^1(\mathbb{B}))$$

其中 $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$ 和 $\overline{\nabla} = (\partial/\partial x_1,\ \ldots\ldots,\ \partial/\partial x_n)$ 是通常的欧几里得拉普拉斯算子和梯度。这里 φ_a 是规范的莫¨比乌斯变换，将 $\mathbb{B}$ 映射到 $\mathbb{B}$，并交换 a 与 0，见式（9）。容易证明

$$\Delta_h f(a) = (1-|a|^2)^2\Delta f(a) + 2(n-2)(1-|a|^2)\langle a, \nabla f(a)\rangle,$$

and

$$\nabla^h f(a) = (1-|a|^2)\nabla f(a). \tag{1}$$

称二阶连续可微函数 f: $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 为双曲调和函数或 $\mathcal{H}$-调和函数（定义在 $\mathbb{B}$ 上），若 $\Delta_h f \equiv 0$。我们用 $\mathcal{H}(\mathbb{B})$表示所有 $\mathcal{H}$-调和函数构成的空间。

Date：2023年3月23日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号31C05；次要分类号46E22。*Key words and phrases.* 实双曲球、双曲调和函数、Bergman 空间、原子分解、插值、包含关系。本研究由埃斯基谢希尔技术大学研究基金资助，项目编号为22ADP349。

设 ν 为 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度，并将其归一化，使得 $\nu(\mathbb{B}) = 1$。对于 $\alpha > -1$，定义加权测度 $d\nu_\alpha(x)$如下：

$$d\nu_\alpha(x) = (1 - |x|^2)^\alpha \, d\nu(x).$$

对于 $0 < p < \infty$ 和 $\alpha > -1$，我们将关于 $d\nu_\alpha$ 的勒贝格空间记为$L^p_\alpha = L^p(d\nu_\alpha)$。由 $\mathcal{H}$-调和函数组成的子空间 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 称为加权 $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间，

$$\mathcal{B}^p_\alpha = \Big\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}) : \|f\|^p_{L^p_\alpha} = \int_{\mathbb{B}} |f(x)|^p \, d\nu_\alpha(x) < \infty \Big\}.$$

当 $1 \le p < \infty$时，这些是巴拿赫空间；当 $0 < p < 1$时，它们关于度量 $d(f, g) = \|f - g\|^p_{L^p_\alpha}$ 构成完备度量空间。

点求值泛函在所有 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 上都是有界的，特别地，$\mathcal{B}^2_\alpha$ 是一个再生核希尔伯特空间。因此，对于每个 $x \in \mathbb{B}$，都存在 $\mathcal{R}_\alpha(x, \cdot) \in \mathcal{B}^2_\alpha$，使得

$$f(x) = \int_{\mathbb{B}} f(y)\overline{\mathcal{R}_\alpha(x, y)} \, d\nu_\alpha(y) \qquad (f \in \mathcal{B}^2_\alpha). \tag{2}$$

再生核 $\mathcal{R}_\alpha(\cdot, \cdot)$ 关于其变量对称，取实值（因此 (2) 中的共轭符号可以省略），并且 $\mathcal{H}$关于每个变量都是调和的。

对于 $a, b \in \mathbb{B}$，令 $\rho(a, b) = |\varphi_a(b)|$ 为伪双曲度量；对于$0 < r < 1$，令 $E_r(a) = \{x \in \mathbb{B} : \rho(x, a) < r\}$ 为伪双曲球。对于$0 < r < 1$，若点列 $\{a_m\}$ 属于 $\mathbb{B}$，且满足当$k \ne m$时，$\rho(a_k, a_m) \ge r$，则称其为 r-分离的。r-分离点列 $\{a_m\}$ 称为 r-格点，如果 $\bigcup_{m=1}^\infty E_r(a_m) = \mathbb{B}$，也就是说，如果 $\{a_m\}$ 是极大的。

在 [6, 定理 2], 中，Coifman 和 Rochberg 证明，若 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点，且 r 充分小，那么单位球上的每个全纯 Bergman 函数 $f \in A^p$（更一般地，在二型对称 Siegel 域上）都可以表示为 $f(z) = \sum_{m=1}^\infty \lambda_m \tilde{B}(z, a_m)$ 的形式，其中 $\{\lambda_m\} \in \ell^p$，而$\tilde{B}(z, a_m)$ 由点 a_m处的再生核 $B(\cdot, a_m)$ 确定。这种表示称为原子分解，其中 $B(\cdot, a_m)$ 是原子。他们还证明，类似的分解也适用于 $\mathbb{R}^n$单位球上的（欧氏）调和函数。[13] 和 [14] 将这一结果推广到 $\mathbb{R}^n$的有界对称域上的调和 Bergman 空间。

本工作的首要目标是证明：如果 $\{a_m\}$ 是一个具有足够小 r 的 r-格点，那么对于 $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间 $\mathcal{B}^p_\alpha$，也成立一个以再生核为项的类似级数表示。关于实双曲球上的 $\mathcal{H}$-调和 Hardy 空间的原子分解，参见 [7]。

定理 1.1. 设 $\alpha > -1$ 和 $0 < p < \infty$。取足够大的 s，使其满足

$$\begin{aligned} &\alpha + 1 < p(s + 1), \quad \text{if } p \ge 1 \\ &\alpha + n < p(s + n), \quad \text{if } 0 < p < 1. \end{aligned} \tag{3}$$

存在一个仅依赖于 n、α、p、s的 $r_0 < 1/8$，使得若 $\{a_m\}$是一个满足 $r < r_0$的 r-格点，则对任意 $f \in \mathcal{B}^p_\alpha$，存在 $\{\lambda_m\} \in \ell^p$ 使得

$$f(x) = \sum_{m=1}^\infty \lambda_m (1 - |a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p} \, \mathcal{R}_s(x, a_m) \qquad (x \in \mathbb{B}), \tag{4}$$

其中该级数在 $\mathbb{B}$ 的紧子集上一致绝对收敛，并且在$\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$ 中，范数 $\|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p}$ 与范数 $\|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$ 等价。

注 1.2. 上述分解还可以写成其他形式。定理 1.1在将 (4) 替换为以下形式后仍然成立:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\frac{\mathcal{R}_s(x,a_m)}{\|\mathcal{R}_s(\cdot,a_m)\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}}\qquad(x\in\mathbb{B}).\tag{5}$$

这是由以下事实得出的： $\|\mathcal{R}_s(\cdot,\ a_m)\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}\sim(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p-(s+n)}$ 由下文的（18）可得，稍微修改第3节中的证明即可验证。此外， $\mathcal{R}_s(a_m,\ a_m)\sim(1-|a_m|^2)^{-(s+n)}$ 由（17）可得，而（4）可以替换为

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}\frac{\mathcal{R}_s(x,a_m)}{\mathcal{R}_s(a_m,a_m)}\qquad(x\in\mathbb{B}).$$

接下来我们考虑插值问题。若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的，且 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$，则序列（见下文命题3.3 ）

$$\left\{f(a_m)(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\right\}$$

属于 ℓ^p。若反向命题成立，也就是说，对于每个 $\{\lambda_m\}\in\ell^p$，都能找到一个 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$使得 $f(a_m)(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}=\lambda_m$，那么 $\{a_m\}$ 称为 $\mathcal{B}^p_\alpha$的插值序列。我们证明，若分离常数 r 足够大，则$\{a_m\}$ 是一个插值序列。

定理 1.3。设 $\alpha>-1$ 和 $0<p<\infty$。存在一个 r_0，其 $1/2<r_0<1$仅依赖于 n、α、p，使得若 $\{a_m\}$是一个 r-分离序列且满足 $r>r_0$，那么对每个 $\{\lambda_m\}\in\ell^p$，都存在 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$ 使得

$$f(a_m)(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}=\lambda_m,$$

且范数 $\|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$ 与范数 $\|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p}$等价。

上述定理的全纯类似结果针对单位球和多圆盘在 [2] 中得到证明，而针对更一般的 [10] 域，则在 $\mathbb{C}^n$中得到证明。关于调和Bergman 空间在 $\mathbb{R}^n$的上半空间上的类似结果，在[5]中得到证明。

注记1.4。设 b^p_α 是定义在 $\mathbb{B}$上的加权（欧几里得）调和 Bergman 空间。我们在下文第4 节给出的插值定理证明同样适用于调和情形，并且当用 b^p_α替换 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 时，定理1.3 仍然成立。

最后，我们精确确定 Bergman 空间 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 包含于另一个 Bergman 空间 $\mathcal{B}^q_\beta$ 的条件。

定理 1.5. 设 α、$\beta>-1$ 以及 $0<p$、$q<\infty$。

(a) *If* $q\geq p$, *then*

$$\mathcal{B}^p_\alpha\subset\mathcal{B}^q_\beta\quad\textit{if and only if}\quad\frac{\alpha+n}{p}\leq\frac{\beta+n}{q}$$

(b) 若 $q<p$，则

$$\mathcal{B}^p_\alpha\subset\mathcal{B}^q_\beta\quad\textit{if and only if}\quad\frac{\alpha+1}{p}<\frac{\beta+1}{q}$$

在这两种情况下，包含映射 $i\colon\mathcal{B}^p_\alpha\to\mathcal{B}^q_\beta$ 都是连续的。

对于 $\mathbb{C}^n$上的单位球的全纯 Bergman 空间， [8, 引理 2.1] 中已证明了一个类似的定理。不过，该文献使用了由所谓的 Ryll-Wojtaszczyk 多项式构成的间隙级数（见 [11]）。我们不知道实双曲球上是否存在这类 $\mathcal{H}$-调和函数。我们的证明基于上述原子分解和插值定理。

2. Preliminaries

本节汇集了关于 M¨obius 变换和 $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间的一些事实，这些内容将在后文中使用。它们都是已知结果，我们在此尽量提供恰当的参考文献。如果证明较短，我们会将其列出，以方便读者。

2.1. 记号。我们用 C 表示确切取值无关紧要的正常数。 C 的值可能因出现位置不同而异。若 $X \le CY$，我们记作 $X \lesssim Y$；若 $X \le CY$ 和 $Y \le CX$ 均成立，则记作 $X \sim Y$。

对于 x、 $y \in \mathbb{R}^n$，我们定义

$$[x, y] := \sqrt{1 - 2\langle x, y\rangle + |x|^2|y|^2}.$$

它关于变量是对称的，并且满足以下等式

$$[x, y]^2 = |x - y|^2 + (1 - |x|^2)(1 - |y|^2). \tag{6}$$

如果两个变量中任一个为 0，那么 $[x, 0] = [0, y] = 1$；否则

$$[x, y] = \Big||y|x - \frac{y}{|y|}\Big| = \Big|\frac{x}{|x|} - |x|y\Big|, \tag{7}$$

因此

$$1 - |x||y| \le [x, y] \le 1 + |x||y| \qquad (x, y \in \mathbb{B}). \tag{8}$$

2.2. M¨obius 变换与伪双曲度量。关于本小节所列事实的详细内容，请参阅 [1] 或 [12]。

¨的一个 M¨obius 变换。 $\hat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 是球面或平面上的反射（反演）的有限复合。我们将所有把 $\mathbb{B}$ 映射到 $\mathbb{B}$ 的 M¨obius 变换构成的群记为 $\mathcal{M}(\mathbb{B})$。对于 $a \in \mathbb{B}$，映射

$$\varphi_a(x) = \frac{a|x - a|^2 + (1 - |a|^2)(a - x)}{[x, a]^2} \qquad (x \in \mathbb{B}) \tag{9}$$

属于 $\mathcal{M}(\mathbb{B})$，交换 a 与 0，并满足 $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{Id}$。群 $\mathcal{M}(\mathbb{B})$由 $\{\varphi_a : a \in \mathbb{B}\}$ 和正交变换生成。一个涉及 φ_a 的非常有用的恒等式是（[12, 式 2.1.7]）

$$1 - |\varphi_a(x)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |x|^2)}{[x, a]^2}, \tag{10}$$

且雅可比行列式 J_{φ_a} 满足（[12, 定理 3.3。1]）

$$|J_{\varphi_a}(x)| = \frac{(1 - |\varphi_a(x)|^2)^n}{(1 - |x|^2)^n}. \tag{11}$$

引理 2.1. 对于 a、 $x \in \mathbb{B}$，下列等式成立

$$[\varphi_a(x), a] = \frac{1 - |a|^2}{[x, a]}.$$

证明。 将 x 代入（10）中的 φ_a（x）并注意到 $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{Id}$ 可得

$$[\varphi_a(x), a]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|\varphi_a(x)|^2)}{1-|x|^2}.$$

再次使用（10）即可得到结果。 □

对于 $a, b \in \mathbb{B}$，伪双曲度量 $\rho(a,b) = |\varphi_a(b)|$ 满足

$$\rho(a,b) = \frac{|a-b|}{[a,b]}, \tag{12}$$

由（10）和（6）可知。它有界 $0 \le \rho(a,b) < 1$，并且具有莫比乌斯不变性，即 $\rho(\psi(a)\ \psi(b)) = \rho(a,b)$ 对每个 $\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{B})$ 都成立。它不仅满足三角不等式（[12, 定理 2.2。3]），还满足以下强三角不等式。

引理 2.2。对于 a、b、$x \in \mathbb{B}$，有以下不等式

$$\frac{\big|\rho(a,x)-\rho(b,x)\big|}{1-\rho(a,x)\rho(b,x)} \le \rho(a,b) \le \frac{\rho(a,x)+\rho(b,x)}{1+\rho(a,x)\rho(b,x)}.$$

证明。 由（10）和（8），可得

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1+|a||b|)^2} \le 1-|\varphi_a(b)|^2 \le \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a||b|)^2},$$

化简后可得

$$\frac{\big||a|-|b|\big|}{1-|a||b|} \le |\varphi_a(b)| \le \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}.$$

由于 $\rho(a,b) = |\varphi_a(b)|$ 且 $\rho(a,0) = |a|$, $\rho(b,0) = |b|$，当$x = 0$时，这就证明了该引理。为得到一般情形，令 a, b 分别替换为$\varphi_x(a)$ $\varphi_x(b)$，并在这一特殊情形下令 $0 = \varphi_x(x)$，再利用 ρ 的莫比乌斯不变性。 □

引理 2.3。对于 $x, y \in \mathbb{B}$,

$$1-\rho(x,y) \le \frac{1-|x|^2}{[x,y]} \le 1+\rho(x,y).$$

证明。当 $x = 0$ 时，该引理显然成立。否则，令 $x^* := x/|x|^2$ 为 x 关于单位球面 $\mathbb{S}$ 的反演。将三角不等式相乘

$$|x^*-y| - |y-x| \le |x^*-x| \le |x^*-y| + |y-x|$$

由 $|x|$。注意到 $|x||x^*-y| = [x,y]$ 由（7）以及 $|x||x^*-x| = 1-|x|^2$，我们推出

$$[x,y] - |x||y-x| \le 1-|x|^2 \le [x,y] + |x||y-x|.$$

该引理由以下事实得出： $|y-x| = \rho$（x， y）$[x,y]$ 由（12）以及 $|x| < 1$。 □

下面的引理是对 [3, 引理 2.1] 的略微修改，并可由引理 2.3立即推出。

引理 2.4。对于 $x, y \in \mathbb{B}$,

$$\frac{1-\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \le \frac{1-|x|^2}{1-|y|^2} \le \frac{1+\rho(x,y)}{1-\rho(x,y)}.$$

下一个引理的证明见 [3, 引理 2。2].

引理 2.5。对于 $a, x, y \in \mathbb{B}$,

$$\frac{1-\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \le \frac{[x,a]}{[y,a]} \le \frac{1+\rho(x,y)}{1-\rho(x,y)}.$$

设 $\mathbb{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$。伪双曲球 $E_r(a) = \{x \in \mathbb{B} : \rho(x, a) < r\} = \varphi_a(\mathbb{B}_r)$ 也是一个欧几里得球（参见[12, 定理 2.2。2]）

$$\text{center} = \frac{(1-r^2)a}{1-|a|^2r^2} \quad \text{and} \quad \text{radius} = \frac{(1-|a|^2)r}{1-|a|^2r^2}. \tag{13}$$

测度 $d\tau(x) = (1-|x|^2)^{-n}d\nu(x)$ 是 $\mathbb{B}$ 上的不变测度，而体积 $\tau(E_r(a)) = \tau(\mathbb{B}_r)$ 与 $a \in \mathbb{B}$ 无关。

2.3. 分离序列与格点。点列 $\{a_m\}$ 属于 $\mathbb{B}$，若满足对每个 $k \neq m$，都有 $\rho(a_k, a_m) \ge r$，则称其为 r- 分离序列。此外，若 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_r(a_m) = \mathbb{B}$，则称 $\{a_m\}$ 为 r-格点。正如 [6, 第 18], 页所述，对于每个 $0 < r < 1$，都存在一个 r-格点，并且每个 r-分离序列都可以扩充为一个r-格点。

引理 2.6. 设 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点。存在一个由 $\{E_m\}$ 组成的序列，使得 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \mathbb{B}$ 且

$$E_{r/2}(a_m) \subset E_m \subset E_r(a_m). \tag{14}$$

证明. 令 $E_1 = E_r(a_1) \setminus \bigcup_{m=2}^{\infty} E_{r/2}(a_m)$，给定 $E_1, \ldots, E_{m-1}$，设

$$E_m = E_r(a_m) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i \bigcup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} E_{r/2}(a_m) \right). \qquad \square$$

下一个引理可由标准不变体积论证得出。

引理 2.7. 设 $0 < r, \delta < 1$ 和 $\{a_m\}$ 是 r-分离的。存在一个仅依赖于 n, r, δ 的 N，使得每个 $x \in \mathbb{B}$ 至多属于 N 个球 $E_\delta(a_m)$。

证明. 假设 $x \in \mathbb{B}$ 属于 $E_\delta(a_m)$ 这些球中的 N_x 个。令

$$s := \frac{\delta + r/2}{1 + \delta r/2} < 1,$$

其中最后一个不等式由 $(1-\delta)(1-r/2) > 0$得出。如果 $\rho(x, a_m) < \delta$，那么由引理 2.2, $E_{r/2}(a_m) \subset E_x(s)$。由于球 $E_{r/2}(a_m)$ 两两不相交，且 τ 是一个不变测度，因此 $N_x \tau(\mathbb{B}_{r/2}) \le \tau(\mathbb{B}_s)$。$\square$

引理 2.8. 设 $\gamma \in \mathbb{R}$ 和 $0 < r < 1$。

(a) 若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的且 $\gamma > n-1$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}(1-|a_m|^2)^\gamma < \infty$。(b) 若 $\{a_m\}$是一个 r-格点，则 $\sum_{m=1}^{\infty}(1-|a_m|^2)^\gamma < \infty$ 当且仅当 $\gamma > n-1$。

证明. 为了证明 (a) 部分，我们注意到

$$\int_{E_{r/2}(a_m)} (1-|y|^2)^{\gamma-n}\, d\nu(y) \sim (1-|a_m|^2)^\gamma, \tag{15}$$

其中，隐含常数仅依赖于固定参数 n, γ, r，且与 a_m 无关。这是因为对于 $y \in E_{r/2}(a_m)$，我们有 $(1-|y|^2) \sim$

$(1-|a_m|^2)$ 根据引理 2.4 以及 $\nu(E_{r/2}(a_m)) \sim (1-|a_m|^2)^n$ 由 (13) 得出。由于球 $E_{r/2}(a_m)$ 两两不相交，我们得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}(1-|a_m|^2)^\gamma \lesssim \int_{\mathbb{B}}(1-|y|^2)^{\gamma-n}\,d\nu(y).$$

若 $\gamma > n-1$，则上述积分有限。

对于 (b)，设 E_m 如引理 2.6所述。由 (14)，同理可得

$$\int_{E_m}(1-|y|^2)^{\gamma-n}\,d\nu(y) \sim (1-|a_m|^2)^\gamma \tag{16}$$

因此

$$\sum_{m=1}^{\infty}(1-|a_m|^2)^\gamma \sim \sum_{m=1}^{\infty}\int_{E_m}(1-|y|^2)^{\gamma-n}\,d\nu(y) = \int_{\mathbb{B}}(1-|y|^2)^{\gamma-n}\,d\nu(y).$$

最后一个积分有限，当且仅当 $\gamma > n-1$。 □

2.4. 再生核与投影的估计。 以下给出了再生核 $\mathcal{R}_\alpha$ 的 $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间的上界估计，证明见 [15, 定理 1。2]。

引理 2.9. 对于 $\alpha > -1$，存在常数 $C = C(\alpha, n)$，使得对每个$x, y \in \mathbb{B}$,

(a) $|\mathcal{R}_\alpha(x,y)| \le \dfrac{C}{[x,y]^{\alpha+n}}$,

(b) $|\nabla_1 \mathcal{R}_\alpha(x,y)| \le \dfrac{C}{[x,y]^{\alpha+n+1}}$.

这里 ∇_1 表示梯度是相对于第一个变量取的。

在对角线 $y = x$上，以下双边估计成立（[15, 引理 6.1]）。

$$\mathcal{R}_\alpha(x,x) \sim \frac{1}{(1-|x|^2)^{\alpha+n}}. \tag{17}$$

以下关于再生核幂积分的估计是[15, 定理 1.3]的一部分。若 $\alpha, s > -1$, $0 < p < \infty$ 且 $p(s+n) - (\alpha+n) > 0$，则

$$\int_{\mathbb{B}}\left|\mathcal{R}_s(x,y)\right|^p d\nu_\alpha(y) \sim \frac{1}{(1-|x|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)}}. \tag{18}$$

对于 $s > -1$，我们将投影算子 P_s 定义为

$$P_s f(x) = \int_{\mathbb{B}} f(y)\mathcal{R}_s(x,y)\,d\nu_s(y),$$

˜及相关算子 P_s 和 Q_s 由

$$\tilde{P}_s f(x) = \int_{\mathbb{B}} f(y)\,|\mathcal{R}_s(x,y)|\,d\nu_s(y),$$

and

$$Q_s f(x) = \int_{\mathbb{B}} \frac{f(y)}{[x,y]^{s+n}}\,d\nu_s(y), \tag{19}$$

对适当的 f。

引理 2.10。设 $1 \le p < \infty$ 和 $\alpha, s > -1$。以下条件等价：(a) P_s 在 L^p_α上有界,

˜(b) P_s 在 L^p_α上有界,
(c) Q_s 在 L^p_α上有界，(d)
$\alpha+1<p(s+1)$。
若 (d) 成立，则对每个 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$ 都有 $P_sf=f$。

证明。(c) $\Rightarrow$ (b) 可由引理 2.9 的 (a) 部分推出，(b) $\Rightarrow$ (a) 显然，(a) $\Rightarrow$ (d) 在 [15, 定理 1。1], 中证明，而 (d) $\Rightarrow$ (c) 是众所周知的，且已包含在 [15, 定理 1。1] 的证明中。□

我们用 σ 表示 $\mathbb{S}$ 上的表面测度，并将其归一化，使得 $\sigma(\mathbb{S})=1$。关于下一个估计的证明，参见 [9, 命题 2.2]。

引理 2.11。设 $b>-1$ 和 $c\in\mathbb{R}$。对于 $x\in\mathbb{B}$，定义

$$I_c(x):=\int_{\mathbb{S}}\frac{d\sigma(\zeta)}{|x-\zeta|^{n-1+c}}\qquad and\qquad J_{b,c}(x):=\int_{\mathbb{B}}\frac{(1-|y|^2)^b}{[x,y]^{n+b+c}}\,d\nu(y).$$

$I_c(x)$ 和 $J_{b,\ c}(x)$ 对所有 $x\in\mathbb{B}$ 都有相同的上界和下界估计，

$$I_c(x)\sim J_{b,c}(x)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{(1-|x|^2)^c}, & if\ c>0;\\ 1+\log\dfrac{1}{1-|x|^2}, & if\ c=0;\\ 1, & if\ c<0.\end{cases}$$

隐含常数仅依赖于 n、b、c，且与 x 无关。

我们记录下列关于序列空间的基本事实，以供日后参考。

引理 2.12. (i) 对于 $0<p<q<\infty$、$\|\{\lambda_m\}\|_{\ell^q}\le\|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p}$。
(ii) 设 $1<p<\infty$ 和 p' 是 p、$1/p+1/p'=1$ 的共轭指数。若对每个 $\{\beta_m\}\in\ell^{p'}$ 都有 $\sum_{m=1}^\infty|\lambda_m\beta_m|<\infty$，则 $\{\lambda_m\}\in\ell^p$。

3. 原子分解

本节旨在证明定理1.1。主要问题是证明算子 U （在下文的（20）中定义）在定理的假设下是满射；我们将通过几个命题来证明这一点。

命题 3.1. 对于 $\alpha>-1$ 和 $0<p<\infty$，选取 s 使得 (3) 成立，并令 $0<r<1$。若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的，则算子 $U\colon\ \ell^p\to\mathcal{B}^p_\alpha$ 将$\lambda=\{\lambda_m\}$ 映射到

$$U\lambda(x)=\sum_{m=1}^\infty\lambda_m(1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\,\mathcal{R}_s(x,a_m)\qquad(x\in\mathbb{B})\tag{20}$$

是有界的。上述级数在 $\mathbb{B}$ 的紧子集上一致绝对收敛，并且在 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$ 中也收敛。

证明. 在整个证明过程中，我们省略依赖于固定参数 n、α、p、s 和 r 的常数。

我们先考虑 $0<p\le1$的情形。首先证明，对于 $\lambda\in\ell^p$，式（20）中的级数在 $\mathbb{B}$ 的紧子集上绝对且一致收敛，这将推出 $U\lambda$ 在 $\mathcal{H}$上是 $\mathbb{B}$-调和函数，因为每个 $\mathcal{R}_s(\cdot,\ a_m)$ 都是 $\mathcal{H}$-调和函数。由引理2.9

(a)，若 $|x| \le R < 1$，则 $|\mathcal{R}_s(x,\ a_m)\ | \lesssim 1$，因为 $[x, a_m] \ge 1 - |x|$ 由（8）以及引理2.12 (i)，我们可推出

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\,|\mathcal{R}_s(x,a_m)| \lesssim \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}$$
$$\le \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p (1-|a_m|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)}\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p\Big)^{1/p},$$

其中在最后一个不等式中，我们使用 $p(s+n)\ -(\alpha+n)\ > 0$ 根据 (3).

为了证明 $\|U\lambda\|_{B^p_\alpha} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^p}$，我们再次使用引理 2.12 (i)，得到

$$\|U\lambda\|^p_{\mathcal{B}^p_\alpha} = \int_{\mathbb{B}} \Big|\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\,\mathcal{R}_s(x,a_m)\Big|^p \, d\nu_\alpha(x)$$
$$\le \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p (1-|a_m|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)} \int_{\mathbb{B}} |\mathcal{R}_s(x,a_m)|^p \, d\nu_\alpha(x) \lesssim \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p,$$

其中，最后一个不等式由 (18) 和 (3) 得出。这也表明 (20) 中的级数在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$下收敛

现在考虑 $1 < p < \infty$的情形。令 p' 为p的共轭指数。(20) 中的级数在 $\mathbb{B}$的紧子集上绝对且一致收敛，因为我们再次有 $|\mathcal{R}_s(x,a_m)| \lesssim 1$，并由 Hölder¨不等式可得，

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p} \le \|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} (1-|a_m|^2)^{p'(s+n-(\alpha+n)/p)}\Big)^{1/p'}.$$

根据引理 2.8，最后一个求和是有限的，因为不等式 $p'(s+n-(\alpha+n)/p)\ > n-1$等价于 (3)。因此 $U\lambda$ 在 $\mathcal{H}$上是 -调和的 $\mathbb{B}$。

为证明 $\|U\lambda\|_{B^p_\alpha} \lesssim \|\lambda\|_{\ell^p}$，按照 [6]，[4] 和 [14]，，我们使用投影定理。令

$$g(x) := \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}\,\chi_{E_{r/2}(a_m)}(x) \qquad (x \in \mathbb{B}),$$

其中 $\chi_{E_{r/2}(a_m)}$ 是集合 $E_{r/2}(a_m)$ 的特征函数。由（$\|g\|_{L^p_\alpha} \sim \|\lambda\|_{\ell^p}$ 15），我们有：

$$\|g\|^p_{L^p_\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p (1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)} \nu_\alpha(E_{r/2}(a_m)) \sim \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^p.$$

接下来，令 Q_s 如（19）所示，

$$Q_s g(x) = \int_{\mathbb{B}} \frac{g(y)\,d\nu_s(y)}{[x,y]^{s+n}} = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)/p} \int_{E_{r/2}(a_m)} \frac{(1-|y|^2)^s}{[x,y]^{s+n}}\,d\nu(y)$$
$$\sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda_m|(1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}}{[x,a_m]^{s+n}},$$

其中最后一行用到了以下事实：$[x,y] \sim [x,a_m]$ 对于 $y \in E_{r/2}(a_m)$，由引理 2.5以及 (15) 可得。这表明 $|U\lambda(x)| \lesssim Q_s g(x)$，由引理 2.9 (a) 可得。由引理 Q_s 2.10 以及 (3) 可知其有界，因此我们得到

$$\|U\lambda\|_{\mathcal{B}^p_\alpha} \lesssim \|Q_s g\|_{L^p_\alpha} \lesssim \|g\|_{L^p_\alpha} \sim \|\lambda\|_{\ell^p}. \qquad \square$$

为验证在附加假设 $U\colon\ \ell^p \to \mathcal{B}^p_\alpha$ 是满射的，即 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点，且 r 足够小，我们需要考虑第二个算子。我们先回顾以下关于 $\mathcal{H}$-调和函数的次平均值不等式。证明见 [12, 第 4 节。7]。

引理 3.2. 设 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ 和 $0 < p < \infty$。则对于所有 $a \in \mathbb{B}$ 和所有 $0 < \delta < 1$,

$$|f(a)|^p \le \frac{C}{\delta^n} \int_{E_\delta(a)} |f(y)|^p \, d\tau(y),$$

其中，若 $p \ge 1$，则 $C = 1$；若 $0 < p < 1$，则 $C = 2^{n/p}$。

命题 3.3. 设 $\alpha > -1$、$0 < p < \infty$、$0 < r < 1$ 和 $\{a_m\}$ 是 r-分离的。算子 $T\colon \mathcal{B}^p_\alpha \to \ell^p$ 定义为

$$Tf = \left\{ f(a_m)(1 - |a_m|^2)^{(\alpha+n)/p} \right\} \tag{21}$$

是有界的。

证明。 应用引理 3.2 并结合 $\delta = r/2$，注意到 $(1 - |y|^2) \sim (1 - |a_m|^2)$ 对于 $y \in E_{r/2}(a_m)$，根据引理 (2.4)，可得

$$|f(a_m)|^p (1 - |a_m|^2)^{\alpha+n} \lesssim \int_{E_{r/2}(a_m)} |f(y)|^p \, d\nu_\alpha(y).$$

由于 $E_{r/2}(a_m)$ 两两不相交，我们推得

$$\|Tf\|^p_{\ell^p} = \sum_{m=1}^{\infty} |f(a_m)|^p (1 - |a_m|^2)^{\alpha+n} \lesssim \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_{r/2}(a_m)} |f(y)|^p \, d\nu_\alpha(y) \le \|f\|^p_{\mathcal{B}^p_\alpha}. \quad \square$$

我们需要对上述算子 T 稍作修改。

命题 3.4. 对于 $\alpha > -1$ 和 $0 < p < \infty$，选取 s 使得 (3) 成立，并令$0 < r < 1$。若 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点，且 $\{E_m\}$ 是引理ˆ2.6中给出的相应序列，则算子 $T\colon \mathcal{B}^p_\alpha \to \ell^p$ 定义为

$$\hat{T}f = \left\{ f(a_m)(1 - |a_m|^2)^{(\alpha+n)/p - (s+n)} \, \nu_s(E_m) \right\}. \tag{22}$$

是有界的。

证明。 这由命题3.3 推出，因为根据（16），$\nu_s(E_m) \sim (1-|a_m|^2)^{s+n}$。 $\square$

命题 3.5. 对于 $\alpha > -1$ 和 $0 < p < \infty$，选取 s 使得 (3) 成立。存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 n、α、p、s，使得若 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点ˆ且满足 $r < 1/8$，则 $\|I - UT\|_{\mathcal{B}^p_\alpha \to \mathcal{B}^p_\alpha} \le Cr$。

在前面几个命题的证明中，常数取决于分离常数 r。在命题3.5的证明中，我们将确保省略的常数与 r无关。不过，我们会经常用到这样一个事实：r 有上界 $1/8$。我们分别证明 $p \ge 1$ 和 $0 < p < 1$ 这两种情况。

命题 *3.5* 的证明，其中 $p \ge 1$。记 $\nu_s(E_m) = \int_{E_m} d\nu_s(y)$，由（20）和（22），

$$U\hat{T}f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} f(a_m) \mathcal{R}_s(x, a_m) \, d\nu_s(y).$$

由（3）和引理 2.10 可得 $P_s f = f$ 因此

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} f(y)\mathcal{R}_s(x,y)\, d\nu_s(y).$$

结合这些结果可得

$$\begin{aligned}(I - U\hat{T})f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} \big(\mathcal{R}_s(x,y) - \mathcal{R}_s(x,a_m)\big) f(y)\, d\nu_s(y) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} \mathcal{R}_s(x,a_m)\big(f(y) - f(a_m)\big)\, d\nu_s(y) =: h_1(x) + h_2(x).\end{aligned} \tag{23}$$

我们首先估计 h_1。令 $y \in E_m$。根据微积分中值定理，存在位于连接 a_m 与 y 的线段上的 $\tilde{y}$，使得

$$\mathcal{R}_s(x,y) - \mathcal{R}_s(x,a_m) = \big\langle\, y - a_m, \nabla_2 \mathcal{R}_s(x,\tilde{y})\,\big\rangle,$$

其中 ∇_2 表示对第二个变量求梯度。注意，由于 r 的上界为 $1/8$，存在与 r 无关的常数，使得对于 $y \in E_m \subset E_r(a_m)$，由引理 2.5，$[y,a_m] \sim [y,y] = 1 - |y|^2$。因此，由（12），

$$|y - a_m| = \rho(y,a_m)[y,a_m] < r[y,a_m] \lesssim r(1-|y|^2).$$

接下来，由于 a_m 和 y 都位于球 $E_r(a_m$内，$\tilde{y}$也在其中。因此 $\rho(y,\tilde{y}) < 1/4$，由引理 2.5，$[x,y] \sim [x,\tilde{y}]$ 对每个 $x \in \mathbb{B}$ 都成立，其中常数仍与 r无关。因此，由引理 2.9 (b) 以及 $\mathcal{R}_s(\cdot,\cdot)$ 的对称性，

$$\big|\nabla_2 \mathcal{R}_s(x,\tilde{y})\big| \lesssim \frac{1}{[x,\tilde{y}]^{s+n+1}} \sim \frac{1}{[x,y]^{s+n+1}}.$$

结合以上结果可知，对于 $y \in E_m$ 和 $x \in \mathbb{B}$，

$$|\mathcal{R}_s(x,y) - \mathcal{R}_s(x,a_m)| \lesssim \frac{r(1-|y|^2)}{[x,y]^{s+n+1}} \lesssim \frac{r}{[x,y]^{s+n}}, \tag{24}$$

其中在最后一个不等式中，我们利用了 $[x,y] \geq 1 - |y|$ 由式（8）可得。因此

$$|h_1(x)| \lesssim r \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} \frac{|f(y)|}{[x,y]^{s+n}}\, d\nu_s(y) = r \int_{\mathbb{B}} \frac{|f(y)|}{[x,y]^{s+n}}\, d\nu_s(y) = rQ_s(|f|)(x),$$

由引理 2.10 可知 $\|h_1\|_{L^p_\alpha} \lesssim r\|f\|_{B^p_\alpha}$。

现在我们来估计 h_2。令 $y \in E_m$。如上所述，我们有 $P_s f = f$，因此

$$f(y) - f(a_m) = \int_{\mathbb{B}} \big(\mathcal{R}_s(y,z) - \mathcal{R}_s(a_m,z)\big) f(z)\, d\nu_s(z).$$

由于 $\mathcal{R}_s(\cdot,\cdot)$ 是对称的，由式（24），

$$|\mathcal{R}_s(y,z) - \mathcal{R}_s(a_m,z)| \lesssim \frac{r}{[y,z]^{s+n}},$$

对于所有 $z \in \mathbb{B}$，常数均不依赖于 r。因此

$$|f(y) - f(a_m)| \lesssim r \int_{\mathbb{B}} \frac{|f(z)|}{[y,z]^{s+n}}\, d\nu_s(z) = rQ_s(|f|)(y),$$

因此

$$|h_2(x)| \lesssim r \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} |\mathcal{R}_s(x,a_m)|\, Q_s(|f|)(y)\, d\nu_s(y) \lesssim r \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_m} \frac{Q_s(|f|)(y)}{[x,a_m]^{s+n}}\, d\nu_s(y),$$

其中在最后一个不等式中，我们使用引理 2.9 (a)。再次应用引理 2.4 ，可得 $[x,a_m]\sim[x,y]$ 对于 $y\in E_m\subset E_r(a_m)$，因为 $r<1/8$。因此

$$|h_2(x)|\lesssim r\int_{\mathbb{B}}\frac{Q_s(|f|)(y)}{[x,y]^{s+n}}\,d\nu_s(y)=rQ_s\circ Q_s(|f|)(x),$$

并且由引理 2.10 可知 $\|h_2\|_{L^p_\alpha}\lesssim r\|f\|_{B^p_\alpha}$。

我们得出 $\|(I-U^{\hat{}}T)f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}\le Cr\|f\|_{B^p_\alpha}$，其中 C仅依赖于n,α,p,s。这就完成了 $p\ge1$时的证明。□

为了证明 $0<p<1$的情形，我们需要做一些准备。以下不等式由 [12, 定理 4.7.4(b)] 得出。

引理 3.6. 设 $0<p<\infty$ 和 $0<\delta<1/2$。存在一个常数 $C>0$，仅依赖于 n,p,δ，使得对所有 $a\in\mathbb{B}$和 $f\in\mathcal{H}(\mathbb{B})$,

$$|\nabla^h f(a)|^p\le\frac{C}{\delta^n}\int_{E_\delta(a)}|f(y)|^p\,d\tau(y).$$

下一个引理是定理 1.5 (a) 部分的一个特例。

引理 3.7。设 $0<p<1$ 和 $\alpha>-1$。则 $\mathcal{B}^p_\alpha\subset\mathcal{B}^1_{(\alpha+n)/p-n}$，且包含映射是连续的。

证明。 根据 [12, 公式 (10.1.5)], 存在一个常数 $C>0$ 仅依赖于n， α， p使得

$$|f(x)|\le\frac{C}{(1-|x|^2)^{(\alpha+n)/p}}\|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha},\tag{25}$$

对所有 $x\in\mathbb{B}$ 和 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$。在下方的积分中，记 $|f(x)|=|f(x)|^p|f(x)|^{1-p}$，并将（25）应用于因子 $|f(x)|^{1-p}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}|f(x)|(1-|x|^2)^{(\alpha+n)/p-n}\,d\nu(x)&\le C^{1-p}\|f\|^{1-p}_{\mathcal{B}^p_\alpha}\int_{\mathbb{B}}|f(x)|^p(1-|x|^2)^\alpha\,d\nu(x)\\&=C^{1-p}\|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}.\end{aligned}$$

□

命题 3.5 在 $0<p<1$时的证明。 在证明的这一部分，我们不能使用要求 $p\ge1$的投影定理。相反，我们将遵循 [6, 第 19] 页的方法，并对序列 $\{a_m\}$ 作适当的重排，如下所述。

取一个 1/2-格点 $\{b_m\}$，并在整个证明中固定它。将引理 2.6 中所述与格点 $\{b_m\}$ 相对应的集合序列记为 $\{D_m\}$。也就是说，集合 D_m 两两不相交， $\bigcup_{m=1}^\infty D_m=\mathbb{B}$ 并且

$$E_{1/4}(b_m)\subset D_m\subset E_{1/2}(b_m)\qquad(m=1,2,\dots).$$

给定一个 r-格点 $\{a_m\}$，其中 $r<1/8$，按以下方式重新编号。将 $\{a_m\}$ 中属于 $\{a_m\}$的元素称为 D_1， a_{11}， a_{12}，..... $a_{1\kappa_1}$；一般地，将 $\{a_m\}$中属于 D_m的点称为 a_{m1}， a_{m2}，..... $a_{m\kappa_m}$。将引理2.6 中与此重新编号相对应的集合记为 E_{mk}。也就是说， E_{mk} 两两不交，$\bigcup_{m=1}^\infty\bigcup_{k=1}^{\kappa_m}E_{mk}=\mathbb{B}$ 并且

$$E_{r/2}(a_{mk})\subset E_{mk}\subset E_r(a_{mk})\qquad(m=1,2,\dots,\ k=1,2,\dots,\kappa_m).$$

根据上述构造，由于 $a_{mk}\in D_m\subset E_{1/2}(b_m)$，我们有

$$\rho(a_{mk},b_m)<1/2\qquad(m=1,2,\dots,\ k=1,2,\dots,\kappa_m),\tag{26}$$

根据三角不等式以及 $r < 1/8$ 这一事实,

$$E_{mk} \subset E_{5/8}(b_m). \tag{27}$$

现在假设 $f \in \mathcal{B}^p_\alpha$。我们声称 $P_s f = f$。这是因为根据引理3.7, f 属于 $\mathcal{B}^1_{(\alpha+n)/p-n}$, 且对于该空间，引理 2.10 中的所需条件为$s > (\alpha+n)/p - n$, 由式（3）可知该条件成立。因此

$$f(x) = \int_{\mathbb{B}} f(y)\mathcal{R}_s(x,y)\,d\nu_s(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\kappa_m}\int_{E_{mk}} f(y)\mathcal{R}_s(x,y)\,d\nu_s(y).$$

接下来，利用上述重排，由式（20）和（22），

$$U\hat{T}f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\kappa_m} f(a_{mk})\nu_s(E_{mk})\mathcal{R}_s(x,a_{mk})$$

因此，类似于式（23），我们有

$$\begin{aligned}(I - U\hat{T})f(x) = &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\kappa_m}\int_{E_{mk}} \big(\mathcal{R}_s(x,y) - \mathcal{R}_s(x,a_{mk})\big) f(y)\,d\nu_s(y)\\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\kappa_m}\int_{E_{mk}} \mathcal{R}_s(x,a_{mk})\big(f(y) - f(a_{mk})\big)\,d\nu_s(y) =: h_1(x) + h_2(x).\end{aligned}$$

我们先估计 h_1。下文的估计中，我们仍会注意确保隐含常数与分离常数 r无关。令 $y \in E_{mk}$。首先，正如式（24）所示，对所有 $x \in \mathbb{B}$,

$$|\mathcal{R}_s(x,y) - \mathcal{R}_s(x,a_{mk})| \lesssim \frac{r}{[x,y]^{s+n}} \lesssim \frac{r}{[x,b_m]^{s+n}}, \tag{28}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用引理 2.5 以及 $\rho(y,b_m) < 5/8$ 由（27）得。接下来，应用引理 3.2 并取 $\delta = 1/8$, 注意到 $E_{1/8}(y) \subset E_{3/4}(b_m)$, 得到

$$\begin{aligned}|f(y)|^p &\lesssim \int_{E_{1/8}(y)} |f(z)|^p\,d\tau(z) \le \int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p\,d\tau(z)\\ &\lesssim (1-|b_m|^2)^{-(\alpha+n)}\int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p\,d\nu_\alpha(z),\end{aligned} \tag{29}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用 $(1-|z|^2) \sim (1-|b_m|^2)$, 对 $z \in E_{3/4}(b_m)$ 由引理 2.4 得出。结合（28）和（29），我们推得

$$|h_1(x)| \lesssim r\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-|b_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}}{[x,b_m]^{s+n}}\left(\int_{E_{3/4}(b_m)}|f(z)|^p d\nu_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{\kappa_m}\nu_s(E_{mk}). \tag{30}$$

由于集合 E_{mk}两两不相交，且对每个 $k=1$，由（27）有 $E_{mk} \subset E_{5/8}(b_m), \dots, \kappa_m$，因此 $\sum_{k=1}^{\kappa_m}\nu_s(E_{mk}) \le \nu_s(E_{5/8}(b_m))$。此外，由引理 2.4 和（13）可得 $\nu_s(E_{5/8}(b_m)) \sim (1-|b_m|^2)^{s+n}$。利用这一点以及引理 2.12 (i)，可得

$$|h_1(x)|^p \lesssim r^p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-|b_m|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)}}{[x,b_m]^{p(s+n)}}\int_{E_{3/4}(b_m)}|f(z)|^p\,d\nu_\alpha(z).$$

对 $\mathbb{B}$ 关于 $d\nu_\alpha$ 积分，应用 Fubini 定理，并注意到

$$(1-|b_m|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)}\int_{\mathbb{B}}\frac{d\nu_\alpha(x)}{[x,b_m]^{p(s+n)}} \lesssim 1,$$

根据引理 2.11 和（3），我们得到

$$\|h_1\|^p_{L^p_\alpha} \lesssim r^p \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p \, d\nu_\alpha(z). \tag{31}$$

最后，由引理 2.7，存在 N，使得每个 $z \in \mathbb{B}$ 至多属于球 $E_{3/4}(b_m)$ 中的 N 个，因此 $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p \, d\nu_\alpha(z) \le N \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^p \, d\nu_\alpha(z)$。我们得出

$$\|h_1\|^p_{L^p_\alpha} \lesssim r^p \|f\|^p_{L^p_\alpha}. \tag{32}$$

接下来估计 h_2。同样，令 $y \in E_{mk}$。由微积分中值定理，存在一点 $\tilde{y}$，它位于连接 a_{mk} 和 y 的线段上，使得

$$f(y) - f(a_{mk}) = \langle y - a_{mk}, \nabla f(\tilde{y}) \rangle.$$

由于 $y \in E_{mk} \subset E_r(a_{mk})$，点 $\tilde{y}$ 也在球 $E_r(a_{mk})$ 中，且由于 $r < 1/8$,

$$\rho(\tilde{y}, a_{mk}) < 1/8. \tag{33}$$

与之前一样，由（12），

$$|y - a_{mk}| = \rho(y, a_{mk})[y, a_{mk}] < r[y, a_{mk}],$$

并且由于 $\rho(y, a_{mk}) < r < 1/8$，由引理 $[y, a_{mk}] \sim [a_{mk}, a_{mk}] = (1 - |a_{mk}|^2)$ 得2.5。因此

$$|y - a_{mk}| \lesssim r(1 - |a_{mk}|^2) \sim r(1 - |\tilde{y}|^2),$$

其中在最后一部分，我们使用引理 2.4 和（33）。这表明

$$|f(y) - f(a_{mk})| \lesssim r(1 - |\tilde{y}|^2)|\nabla f(\tilde{y})| = r|\nabla^h f(\tilde{y})|,$$

由（1）。接下来，应用引理 3.6 并取 $\delta = 1/8$，然后利用 $E_{1/8}(\tilde{y}) \subset E_{3/4}(b_m)$，后者由（33）和（26）推出，我们得到

$$\begin{aligned} |\nabla^h f(\tilde{y})|^p &\lesssim \int_{E_{1/8}(\tilde{y})} |f(z)|^p \, d\tau(z) \le \int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p \, d\tau(z) \\ &\lesssim (1 - |b_m|^2)^{-(\alpha+n)} \int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p \, d\nu_\alpha(z), \end{aligned}$$

类似于（29）。此外，利用

$$|\mathcal{R}_s(x, a_{mk})| \lesssim \frac{1}{[x, a_{mk}]^{s+n}} \sim \frac{1}{[x, b_m]^{s+n}},$$

由引理 2.9 （a）和引理 2.5结合（26）可得，我们得到

$$|h_2(x)| \lesssim r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - |b_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}}{[x, b_m]^{s+n}} \left(\int_{E_{3/4}(b_m)} |f(z)|^p d\nu_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\kappa_m} \nu_s(E_{mk}).$$

该估计与（30）相同。因此，我们再次有 $\|h_2\|^p_{L^p_\alpha} \lesssim r^p \|f\|^p_{\mathcal{B}^p_\alpha}$，从而$\|(I - U\hat{}T)f\|^p_{\mathcal{B}^p_\alpha} \le \|h_1\|^p_{L^p_\alpha} + \|h_2\|^p_{L^p_\alpha} \lesssim r^p \|f\|^p_{\mathcal{B}^p_\alpha}$。我们得出 $\|(I - U\hat{}T)\| \le Cr$，其中 C 仅依赖于 n，p，α，s。□

命题 3.5 立即推出定理1.1。

定理 1.1的证明。 根据命题 3.5，若 r 足够小，则 $\|I-U\hat{}T\|<1$，因此 $U\hat{}T$具有有界逆。给定 $f\in\mathcal{B}_\alpha^p$，若令 $\lambda=\hat{}T(U\hat{}T)^{-1}f$，则 $\lambda\in\ell^p$， $U\lambda=f$，且 $\|\lambda\|_{\ell^p}\sim\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha^p}$。注意，在等价关系 $\|\lambda\|_{\ell^p}\sim\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha^p}$中，省略的常数也依赖于 r。 □

为了说明在定理 1.1 中可以用 (5) 替换 (4)，只需将 (20) 中的 $U\lambda$ 替换为 $U\lambda(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\mathcal{R}_s(x,a_m)/\|\mathcal{R}_s(\cdot,a_m)\|_{\mathcal{B}_\alpha^p}$，并将 (22) 中的 $\hat{}\,Tf$替换为 $\hat{}\,Tf=\hat{}\{f(a_m)\ \|\mathcal{R}_s(\cdot,a_m)\|_{\mathcal{B}_\alpha^p}\ \nu_s(E_m)\}$。这样， UT保持不变，命题 3.5 也一样。命题 3.1 和命题 3.4 的证明只需作出仅涉及 (18) 的修改。

4. 插值

$\hat{}$ 为证明定理 1.3 我们再次考虑两个算子。其中一个是 $U\colon\ \ell^p\to\mathcal{B}_\alpha^p$，这是对 U （20）中给出的形式稍作修改后的版本；另一个是 $T\colon\ \mathcal{B}_\alpha^p\to\ell^p$，

$$Tf=\big\{f(a_m)(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\big\},$$

由（21）给出。我们的主要目的是证明，当分离常数足够大时，复合 $T\hat{}U:\ \ell^p\to\ell^p$ 是可逆的。

命题 4.1。 对于 $\alpha>-1$ 和 $0<p<\infty$，取 s 使得 (3) 成立，并令 $0<r<1$。若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的，则算子 $\hat{}U\colon\ \ell^p\to\mathcal{B}_\alpha^p$ 将$\lambda=\{\lambda_m\}$ 映射到

$$\hat{U}\lambda(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}\frac{\mathcal{R}_s(x,a_m)}{\mathcal{R}_s(a_m,a_m)}\qquad(x\in\mathbb{B}) \tag{34}$$

是有界的。上述级数在 $\mathbb{B}$ 的紧子集上一致绝对收敛，并且在 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha^p}$ 中也收敛。

注意到 $\mathcal{R}_s(a_m,\ a_m)\ \sim(1-|a_m|^2)^{-(s+n)}$ 根据（17），该命题可用与命题 3.1相同的方法证明。略去所需的细微改动。

命题 4.2。 对于 $\alpha>-1$ 和 $0<p<\infty$，取 s 使得 (3) 成立。存在 $1/2<r_0<1$，仅依赖于 n、α、p、s，使得若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的$\hat{}$且 $r>r_0$，则 $\|TU-I\|_{\ell^p\to\ell^p}<1$。

该命题立即推出定理 1.3，类似于上文定理1.1 的证明。

为验证命题 4.2，令 $\lambda=\{\lambda_m\}\in\ell^p$。则 m 阶序列 $\hat{}\,(TU-I)\lambda$ 的分量为

$$\{(T\hat{U}-I)\lambda\}_m=(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty}\lambda_k(1-|a_k|^2)^{-(\alpha+n)/p}\frac{\mathcal{R}_s(a_m,a_k)}{\mathcal{R}_s(a_k,a_k)},$$

由引理 2.9（a）和（17），可得

$$\big|\{(T\hat{U}-I)\lambda\}_m\big|\le C(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty}|\lambda_k|\,\frac{(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}}{[a_m,a_k]^{s+n}}, \tag{35}$$

其中常数 C仅取决于 n、α、p 和 s。

为了估计范数 $\|\hat{U}\|$，我们需要估计（35）右侧的级数（不含 $|\lambda_k|$ 项），如下面的引理 4.4 所示。我们先证明该引理，并在本节末尾完成命题4.2 的证明。

注意，根据引理 2.11，对于 $b > -1$ 和 $c > 0$，存在 $C > 0$（仅依赖于 n，b，c），使得

$$(1-|a|^2)^c \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|y|^2)^b}{[a,y]^{n+b+c}}\, d\nu(y) \le C,$$

对所有 $a \in \mathbb{B}$都一致成立。下一个结果将在引理 4.4 的证明中用到。

引理 4.3. 设 $b > -1$ 和 $c > 0$。对于 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < r_\varepsilon < 1$，使得若 $r_\varepsilon < r < 1$，则对所有 $a \in \mathbb{B}$，

$$(1-|a|^2)^c \int_{\mathbb{B}\setminus E_r(a)} \frac{(1-|y|^2)^b}{[a,y]^{n+b+c}}\, d\nu(y) < \varepsilon.$$

证明。作变量替换 $y = \varphi_a(z$，结合以下事实 $\varphi_a(\mathbb{B}_r) = E_r(a)$，以及$|J_{\varphi_a}|$ 如式 (11) 所示，可得

$$K := (1-|a|^2)^c \int\limits_{\mathbb{B}\setminus E_r(a)} \frac{(1-|y|^2)^b d\nu(y)}{[a,y]^{n+b+c}} = (1-|a|^2)^c \int\limits_{\mathbb{B}\setminus \mathbb{B}_r} \frac{(1-|\varphi_a(z)|^2)^{b+n}\, d\nu(z)}{[a,\varphi_a(z)]^{n+b+c}(1-|z|^2)^n}.$$

应用 (10) 和引理 2.1并化简，得到

$$K = \int_{\mathbb{B}\setminus\mathbb{B}_r} \frac{(1-|z|^2)^b}{[a,z]^{n+b-c}}\, d\nu(z) = n\int_r^1 t^{n-1}(1-t^2)^b \int_{\mathbb{S}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|ta-\zeta|^{n+b-c}}\, dt,$$

其中，在第二个等式中，我们使用极坐标进行积分，并利用以下事实：
$[a,t\zeta] = |ta-\zeta|$ 根据式 (7)。由引理 2.11 和不等式 $1-|a|^2t^2 \ge 1-t^2$，可得

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|ta-\zeta|^{n+b-c}} \le Cg(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(1-t^2)^{1+b-c}}, & \text{if } 1+b-c > 0; \\ 1+\log\dfrac{1}{1-t^2}, & \text{if } 1+b-c = 0; \\ 1, & \text{if } 1+b-c < 0, \end{cases}$$

其中常数 C仅依赖于 n、b、c。因此 $K \le Cn\int_r^1 t^{n-1}(1-t^2)^b\, g(t)\, dt$；并且由于在这三种情况下，积分 $\int_0^1 t^{n-1}(1-t^2)^b\, g(t)\, dt$ 均有限，因为$b > -1$ 且 $c > 0$，所以通过令 r 充分接近 1，可以使 $K < \varepsilon$。□

下面的引理是 [10] 中引理 3.1 的一个类似结果。

引理 4.4. 设 $b > n-1$ 和 $c > 0$。对于 $1/2 < r < 1$，存在 $C(r) > 0$（也依赖于 n、b 和 c），使得若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的，则

$$(1-|a_m|^2)^c \sum_{\substack{k=1\\k\ne m}}^{\infty} \frac{(1-|a_k|^2)^b}{[a_m,a_k]^{b+c}} \le C(r),$$

对每个 $m = 1$，2，.....均成立。此外，通过令 r 充分接近 1，可以使 $C(r)$任意小。

证明。由引理 2.4、2.5 和（13），存在 $C > 0$仅依赖于n、b和c，使得

$$\frac{(1-|a|^2)^b}{[x,a]^{b+c}} \le C\int_{E_{1/4}(a)} \frac{(1-|y|^2)^{b-n}}{[x,y]^{b+c}}\, d\nu(y),$$

对所有 a、$x \in \mathbb{B}$，若 $\{a_m\}$ 是 r-分离的，且满足 $r > 1/2$，则球 $E_{1/4}(a_m)$ 两两不相交，因此

$$(1-|a_m|^2)^c \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} \frac{(1-|a_k|^2)^b}{[a_m,a_k]^{b+c}} \le C(1-|a_m|^2)^c \int_{\bigcup_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} E_{1/4}(a_k)} \frac{(1-|y|^2)^{b-n}}{[a_m,y]^{b+c}}\, d\nu(y).$$

Set

$$R := \frac{r-1/4}{1-r/4}.$$

显然，$0 < R < 1$。我们声称$\bigcup_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} E_{1/4}(a_k) \subset \mathbb{B}\backslash E_R(a_m)$。首先注意，对于 $0 \le t_0 < 1$，函数 $t \mapsto (t+t_0)/(1+tt_0)$ 在区间 $0 \le t < 1$上递增。因此，根据引理2.2中的强三角不等式，若$z \in E_{1/4}(a_k)$ 且 $k \neq m$，则

$$r \le \rho(a_k,a_m) \le \frac{\rho(a_k,z)+\rho(z,a_m)}{1+\rho(a_k,z)\rho(z,a_m)} \le \frac{1/4+\rho(z,a_m)}{1+\rho(z,a_m)/4},$$

这意味着 $\rho(z,a_m) \ge R$。因此

$$(1-|a_m|^2)^c \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} \frac{(1-|a_k|^2)^b}{[a_m,a_k]^{b+c}} \le C(1-|a_m|^2)^c \int_{\mathbb{B}\backslash E_R(a_m)} \frac{(1-|y|^2)^{b-n}}{[a_m,y]^{b+c}}\, d\nu(y),$$

并且由于 $R \to 1^-$ 当 $r \to 1^-$时，所需结论由引理4.3得证。 □

现在我们完成命题4.2的证明。我们分别考虑 $0 < p \le 1$和 $p > 1$ 两种情况。

命题 *4.2* 在 $0 < p \le 1$ 时的证明。对于 $\lambda = \{\lambda_m\} \in \ell^p$，由（35）、引理 2.12(i) 和 Fubini 定理可得，

$$\begin{aligned}
\|(T\hat{U}-I)\lambda\|_{\ell^p}^p &\le C^p \sum_{m=1}^{\infty} (1-|a_m|^2)^{\alpha+n} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} |\lambda_k| \frac{(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}}{[a_m,a_k]^{s+n}} \right)^p \\
&\le C^p \sum_{m=1}^{\infty} (1-|a_m|^2)^{\alpha+n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} |\lambda_k|^p \frac{(1-|a_k|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)}}{[a_m,a_k]^{p(s+n)}} \\
&= C^p \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^p (1-|a_k|^2)^{p(s+n)-(\alpha+n)} \sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty} \frac{(1-|a_m|^2)^{\alpha+n}}{[a_m,a_k]^{p(s+n)}}.
\end{aligned}$$

由引理 4.4，存在 $C(r)$，使得（注意 $\alpha+n > n-1$ 因为 $\alpha > -1$，且 $p(s+n)-(\alpha+n) > 0$ 由（3）可得）

$$\|(T\hat{U}-I)\lambda\|_{\ell^p}^p \le C^p\, C(r) \|\lambda\|_{\ell^p}^p.$$

由于通过使 r 足够接近 1，可以让 $C(r)$ 任意小，因此命题得证。□

接下来讨论 $1 < p < \infty$ 的情形。令 p' 为 p 的共轭指数。我们采用 Schur 检验；对于序列空间 ℓ^p，其形式如下（参见

[10, 引理 3.2]）：设 $A=(A_{mk})_{1\le m,k<\infty}$ 是一个元素非负的无限矩阵，且 L_A：$\ell^p \to \ell^p$ 是相应的算子，它将 $\lambda=\{\lambda_m\}$ 映射到

$$\{L_A\lambda\}_m=\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\lambda_k, \qquad m=1,2,\dots.$$

若存在常数 $C>0$ 和正序列 $\{\gamma_m\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_k^{p'} \le C\gamma_m^{p'}, \qquad m=1,2,\dots,$$

and

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_m^{p} \le C\gamma_k^{p}, \qquad k=1,2,\dots,$$

则算子 L_A 有界，且 $\|L_A\|_{\ell^p\to\ell^p}\le C$。

命题 *4.2* 的证明。 $1<p<\infty$。 不失一般性，假设 r-分离序列 $\{a_m\}$ 是极大的，即 $\{a_m\}$ 是一个 r-格点，因此是一个无限序列。

对于 $m,k=1,2,\dots$，若 $k=m$，则令 $A_{mk}=0$

$$A_{mk}=(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\,\frac{(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}}{[a_m,a_k]^{s+n}},$$

若 $k\ne m$。令 $A=(A_{mk})$ 和 L_A: $\ell^p\to\ell^p$ 为相应的算子。由（35），

$$\left|\{(T\hat{U}-I)\lambda\}_m\right| \le C\{L_A\lambda\}_m.$$

为了用 Schur 检验估计 $\|L_A\|$，我们取 $\gamma_m=(1-|a_m|^2)^{(n-1)/pp'}$。于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_k^{p'}=(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\sum_{\substack{k=1\\k\ne m}}^{\infty}\frac{(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+1)/p}}{[a_m,a_k]^{s+n}},$$

并且根据引理 4.4，存在 $C_1(r)$，使得（我们验证 $s+n-(\alpha+1)/p>n-1$ 由 (3) 可得，并且 $(\alpha+1)/p>0$）

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_k^{p'} \le (1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p}\frac{C_1(r)}{(1-|a_m|^2)^{(\alpha+1)/p}}=C_1(r)\gamma_m^{p'}.$$

接下来注意到

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_m^{p}=(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\sum_{\substack{m=1\\m\ne k}}^{\infty}\frac{(1-|a_m|^2)^{(\alpha+n)/p+(n-1)/p'}}{[a_m,a_k]^{s+n}}.$$

为了应用引理 4.4，我们验证 $(\alpha+n)/p+(n-1)/p'=(\alpha+1)/p+n-1>n-1$，并且 $s+n-\big((\alpha+n)/p+(n-1)/p'\big)=s+1-(\alpha+1)/p>0$ 由 (3) 可得。因此存在 $C_2(r)$，使得

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{mk}\gamma_m^{p} \le (1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\frac{C_2(r)}{(1-|a_k|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p-(n-1)/p'}}=C_2(r)\gamma_k^{p}.$$

我们推得 L_A 有界，且 $\|L_A\|\le \max\{C_1(r)\ C_2(r)\}$。因此$\|T\hat{U}-I\|\le C\max\{C_1(r)\ C_2(r)\}$，并且由于 $C_1(r)$ 和 $C_2(r)$ 都可以做到

任意小，只需令 r 足够接近 1，我们便得出 $\|T\hat{}U - I\|$ 可以变得很小。命题的证明至此完成4.2。□

注记 4.5。 设 $R_\alpha(x,y)$ 为（欧氏）调和 Bergman 空间的再生核 b^p_α。在上述插值定理的证明中，我们对 $\mathcal{H}$-调和再生核 $\mathcal{R}_\alpha$ 所用到的唯一事实，是引理 2.9、(17) 和 (18中给出的估计。然而，众所周知，完全相同的估计对核 R_α也成立。同样众所周知，调和函数也满足类似于引理 3.2 的次平均值不等式。因此，上述证明无需任何改动，也适用于调和情形；当 B^p_α 替换为 b^p_α时，插值定理仍然成立。

5. Inclusion Relations

本节我们证明定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。 我们先证明 (a) 部分。设 $\mathcal{B}^p_\alpha \subset \mathcal{B}^q_\beta$。由于点求值在 Bergman 空间上有界，根据闭图定理，包含映射 $i\colon \mathcal{B}^p_\alpha \to \mathcal{B}^q_\beta$ 是连续的。对于任意 $s > -1$ 和 $a \in \mathbb{B}$，函数$\mathcal{R}_s(a,\cdot)$ 在 $\mathbb{B}$ 上由引理 2.9 (a) 和 (8) 可知有界，因此属于每个 Bergman 空间。由 (18)，当 s 足够大时，有

$$\frac{\|\mathcal{R}_s(a,\cdot)\|_{\mathcal{B}^q_\beta}}{\|\mathcal{R}_s(a,\cdot)\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}} \sim (1-|a|^2)^{(\beta+n)/q-(\alpha+n)/p},$$

且右侧有界当且仅当 $|a| \to 1^-$ $(\beta+n)/q \geq (\alpha+n)/p$。现在假设

$$\frac{\alpha+n}{p} \leq \frac{\beta+n}{q}. \tag{36}$$

取 s充分大，使得（3）对 α、p以及 β、q均成立。令 $\{a_m\}$为一个 r-格点，且 $r < r_0$，其中 r_0 如原子分解定理所述。于是对每个 $f \in \mathcal{B}^p_\alpha$，都存在 $\{\lambda_m\} \in \ell^p$ 满足 $\|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p} \sim \|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$，使得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (1-|a_m|^2)^{s+n-(\alpha+n)/p}\, \mathcal{R}_s(x,a_m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (1-|a_m|^2)^{(\beta+n)/q-(\alpha+n)/p}\, (1-|a_m|^2)^{s+n-(\beta+n)/q}\, \mathcal{R}_s(x,a_m). \end{aligned}$$

序列 $\{\beta_m\} = \{\lambda_m\ (1-|a_m|^2)^{\ (\beta+n)/q-(\alpha+n)/p}\}$ 也属于 ℓ^p，由（36）可知，因此$\{\beta_m\} \in \ell^q$ 由引理 2.12 （i）可知。由命题3.1 可得 $f \in \mathcal{B}^q_\beta$ 且 $\|f\|_{\mathcal{B}^q_\beta} \lesssim \|\{\beta_m\}\|_{\ell^q} \leq \|\{\beta_m\}\|_{\ell^p} \leq \|\{\lambda_m\}\|_{\ell^p} \lesssim \|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$。

接下来证明（b）部分。首先注意，在这种情况下， $p/q > 1$ 和 p/q 的共轭指数为 $p/(p-q)$。

为证明充分性，设

$$\frac{\alpha+1}{p} < \frac{\beta+1}{q}. \tag{37}$$

由 H¨older 不等式，

$$\int_{\mathbb{B}} |f(x)|^q\, d\nu_\beta(x) \leq \left(\int_{\mathbb{B}} |f(x)|^p\, d\nu_\alpha(x)\right)^{q/p} \left(\int_{\mathbb{B}} (1-|x|^2)^{(\beta-\alpha\frac{q}{p})\frac{p}{p-q}}\, d\nu(x)\right)^{(p-q)/p},$$

且由于指数（$\beta-\alpha\frac{q}{p}$）$\frac{p}{p-q}>-1$由（37）可得，$\|f\|_{\mathcal{B}^q_\beta}\lesssim\|f\|_{\mathcal{B}^p_\alpha}$。

现在假设 $\mathcal{B}^p_\alpha\subset\mathcal{B}^q_\beta$。令 r_0 为插值定理中针对 $\mathcal{B}^p_\alpha$ 所断言的函数，并令 $\{a_m\}$ 为一个满足 $r>r_0$的 r-格点。于是，对每个 $\{\lambda_m\}\in\ell^p$，都存在一个函数 $f\in\mathcal{B}^p_\alpha$，使得

$$f(a_m)=\lambda_m(1-|a_m|^2)^{-(\alpha+n)/p}.$$

由于 f也属于 $\mathcal{B}^q_\beta$，序列 $\{f(a_m)(1-|a_m|^2)^{(\beta+n)/q}\}$属于 ℓ^q，由命题3.3可知，因此

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|^q(1-|a_m|^2)^{(\beta+n)-(\alpha+n)q/p}<\infty.$$

这表明级数 $\sum_{m=1}^{\infty}|\beta_m|(1-|a_m|^2)^{(\beta+n)-(\alpha+n)q/p}$对每个$\{\beta_m\}\in\ell^{p/q}$都收敛。由引理2.12(ii) 中的对偶性，我们得出序列$\{(1-|a_m|^2)^{(\beta+n)-(\alpha+n)q/p}\}$属于 $\ell^{p/(p-q)}$，并且由引理 2.8 (b)，这只有在以下条件成立时才成立：

$$\Big((\beta+n)-(\alpha+n)\frac{q}{p}\Big)\frac{p}{p-q}>n-1,$$

这等价于（37）。 □

References

[1] L. A. Ahlfors, 《多维 Möbius 变换》，明尼苏达大学，明尼阿波利斯，1981。[2] ́E. Amar, *Suites d'interpolation pour les classes de Bergman de la boule et du polydisque de* $\mathbb{C}^n$ **30** 1978 4, 711 737 ，《加拿大数学杂志》（）第 – 期。[3] B. R. Choe，H. Koo，Y. J. Lee, *Positive Schatten class Toeplitz operators on the ball*，《数学研究》189（2008）65–90。[4] B. R. Choe，Y. J. Lee， *Note on atomic decompositions of harmonic Bergman functions*，载于《复分析及其应用》，OCAMI 研究丛书，第2卷，大阪市立大学出版社，大阪，2007，11-24。[5] B. R. Choe，H. Yi, *Representations and interpolations of harmonic Bergman functions on half-spaces* **151** 1998 51 89 ，《名古屋数学杂志》（）–。[6] R. R. Coifman，R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in* L^p ́ **77** 1980 12 66 ，《Asterisque》（）–。[7] P. Jaming，《实双曲球上的调和函数 I：边界值与 Hardy 空间的原子分解》，《数学讨论》80（1999）63–82。[8] M. Jevti ́ *Interpolating sequences for weighted Bergman spaces* c，X. *of the ball* **43** 1996 495 517 Massaneda，P. J. Thomas，《密歇根数学杂志》（）–。[9] C. W. Liu，J. H. Shi, *Invariant mean-value property and M-harmonicity in the unit ball of* $\mathbb{R}^n$ **19** 2003 187 200 ，《数学学报》（）–。[10] R. Rochberg， *Interpolation by functions in Bergman spaces*，《密歇根数学杂志》29（1982）229–236。[11] J. Ryll，P. Wojtaszczyk， *On homogeneous polynomials on a complex ball*，《美国数学会会刊》276（1983）107–116。[12] M. Stoll，《双曲球上的调和与次调和函数理论》，伦敦数学会讲义丛书，第431卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016。[13] K. Tanaka, *Atomic decomposition of harmonic Bergman functions*，《广岛数学杂志》42（2012）143–160。[14] K. Tanaka， *Representation theorem for harmonic Bergman and Bloch functions*，《大阪数学杂志》50（2013）947–961。[15] A. E. ¨Ureyen, *$\mathcal{H}$-Harmonic Bergman projection on the real hyperbolic ball*，《数学分析及其应用杂志》519（2023）126802。

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ekişehir Technical University, 26470, Eskişehir, Turkey*Email address*: aeureyen@eskisehir.edu.tr