arXiv:2303.12271v1 [math.AT] 22 Mar 2023

KU_G局部等变球谱的同伦

TANNER N. CARAWAN、REBECCA FIELD、BERTRAND J. GUILLOU、DAVID MEHRLE 和 NATHANIEL J. STAPLETON

Abstract. 当 G 是奇素数 q下的有限 q群时，我们计算 KU_G局部等变球谱的同伦 Mackey 函子；这是在 BGS给出的零次情形 [基础上完成的。

1. Introduction引言

Adams–Baird（未发表） [Ad] 与 Ravenel [Ra，定理 8.10、8.15]，（参见 [Bo, 推论 4.5、4.6]）计算了在复 K理论处局部化的球谱的同伦群。

球谱 $\mathbb{S}$ 和复 K-理论谱 KU 都存在等变精化。自然会有人问，Adams–Baird 和 Ravenel 的计算能否以等变方式完成。当 q 是奇素数且 G 是有限 q-群时，Bonventre 与第三、第五作者计算了相对于等变复 K-理论 KU_G[局部化的等变球谱 $\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子 $\underline{\pi}_0 L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ （BGS，定理 1.1]）。本文计算该局部化其余的同伦 Mackey 函子：对于 $n \neq 0$，有 $\underline{\pi}_n L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 。

定理 1.1. 设 G 是奇素数 q下的一个 q群，并设 ℓ 是任意一个模 $|G|$本原的整数。 KU_G局部等变球谱 $L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子如以下表格所示。

n	$\underline{\pi}_n L_{KU_G}\mathbb{S}_G$
0	$\underline{R\mathbb{Q}} \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2)^\dagger$
-2	$(\underline{RU} \xrightarrow{\psi^\ell - 1} \underline{RU}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$的余核
$8k \neq 0$ 或 $8k+2$	$\underline{R\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Z}/2$
$2k-1 \neq -1$	$\underline{R\mathbb{Q}} \otimes \pi_{2k-1} L_{KU}\mathbb{S}[\frac{1}{q}] \oplus (\underline{RU}_q^\wedge\{\beta^k\} \xrightarrow{\psi^\ell - 1} \underline{RU}_q^\wedge\{\beta^k\})$的余核
否则	0

†[BGS，定理 1.1]

$\psi^\ell - 1$ 的余核结构见命题 3.7。

注 1.2. 只要 ℓ 是模 $|G|$ 意义下的本原元，这些同伦群就与 ℓ 的选择无关。

Date: 2023 年 3 月 23 日。Guillou 获得了美国国家科学基金会 DMS-2003204 项目的资助。Stapleton 获得了美国国家科学基金会 DMS-1906236 项目和斯隆研究奖的资助。本次合作得益于美国国家科学基金会研究生培训项目 DMS-1839968 的资助。

为进行这项计算，我们利用了一个涉及亚当斯运算的等变谱纤维序列。对于任意奇 q-群，若 ℓ 模 $|G|$ 本原，则存在一个纤维序列

$$L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \longrightarrow (KU_G)^\wedge_q \xrightarrow{\psi^\ell-1} (KU_G)^\wedge_q. \tag{1.3}$$

要借此理解 $L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子，必须处理 $\psi^\ell-1$ 对 KU_G 的同伦 Mackey 函子的作用。回想 $\underline{\pi}_*KU_G \cong \underline{RU}[\beta,\beta^{-1}]$，其中 $|\beta|=2$，且 ψ^ℓ 是一个环映射，满足 $\psi^\ell(\beta)=\ell\beta$。不难看出，对于 $k\neq 0$，$\psi^\ell-1\colon \underline{\pi}_{2k}KU_G \to \underline{\pi}_{2k}KU_G$ 的核是平凡的。因此，问题实际上在于理解 $\psi^\ell-1$ 的余核。我们在第 3 节完成这一工作，给出了 Mackey 函子 $\operatorname{coker}(\psi^\ell-1)$ 各个取值的明确描述。掌握这些结果后，我们再利用算术断裂方块，在第 4 节得到整体计算。

1.1. 约定。本文中，我们固定一个奇素数 q 和一个有限 q-群 G。整数 ℓ 始终假定与 G 的阶互素；有时还进一步假定 ℓ 是模 $|G|=q^j$意义下的本原元。对于 $j>2$，这等价于要求 j 是模 q^2 意义下的本原元（例如参见 [N，引理 1.10]）。

1.2. 致谢。本文始于 2022 年 8 月在弗吉尼亚州列克星敦举行的一场由美国国家科学基金会研究生培训项目资助的研讨会。我们谨向 Julie Bergner、Nick Kuhn 以及本次研讨会的其他组织者致谢。我们也要感谢 William Balderamma 提供了许多有益的讨论。

2. 预备知识

2.1. 表示环与格林函子。回顾与 G相关的以下交换环：

- 复表示环（分别为有理表示环） $RU(G)$（分别为 $R\mathbb{Q}(G)$）是有限维复（分别为有理）G-表示的同构类在直和运算下构成的格罗滕迪克群。乘法由 G-表示的张量积诱导。
- 复值类函数环 $\mathrm{Cl}(G,\mathbb{C})$ 是由函数 $G\to\mathbb{C}$构成的环，这些函数在 G 中元素的共轭类上取值恒定。

这些环由以下一对环同态联系起来：

$$R\mathbb{Q}(G) \longrightarrow RU(G) \xhookrightarrow{\chi} \mathrm{Cl}(G,\mathbb{C})$$

第一个同态是从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{C}$ 的基变换，第二个是特征标映射。特别地，请注意，特征标映射 $\chi\colon RU(G)\to\mathrm{Cl}(G,\mathbb{C})$ 是单射，并将复表示环嵌入类函数环中，作为其子环。有时，直接在特征标映射的像中进行计算会比使用复表示本身更方便。

这四个交换环都可以提升为格林函子。我们用下划线标记这些环对应的格林函子版本；例如，$\underline{R\mathbb{Q}}$ 是满足 $\underline{R\mathbb{Q}}(G/H)=R\mathbb{Q}(H)$ 的格林函子。这些格林函子之间的关系与交换环之间的关系相同：存在一列格林函子同态

$$\underline{R\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{RU} \xhookrightarrow{\chi} \underline{Cl}$$

令 $A(G)$ 为 G 的伯恩赛德环，并令 $\underline{A}$ 为伯恩赛德环 G-函子。存在一个格林函子同态 $\underline{A}\to\underline{R\mathbb{Q}}$，它在每一级上都将有限 G-集映射为其

相应的置换表示。当 G 是一个 p-群时，Ritter–Segal 定理 [Ri,Seg2] 表明 $\underline{A} \to \underline{R\mathbb{Q}}$ 是满射；我们将其核记为 $\underline{J}$，并由此推出一个同构 $\underline{A}/\underline{J} \cong \underline{R\mathbb{Q}}$。理想 $J(G)$ 可简洁地描述为 $A(G)$ 中由所有满足对任意 $g \in G$ 均有 $|X^g| = 0$ 的虚 G-集 X 生成的理想。文章 [BGS] 始终使用记号 $\underline{A}/\underline{J}$，但此处我们采用更简单的记号 $\underline{R\mathbb{Q}}$。

2.2. 等变同伦论。令 Sp^G 表示真正的等变G谱范畴。其例子包括 G 等变球谱 $\mathbb{S}_G$，以及 G 等变复拓扑 K理论的 G谱 KU_G。

真正的 G谱的同伦自然地取值于 Mackey 函子。对于本文所讨论的基本谱，我们有

$$\underline{\pi}_0\mathbb{S}_G = \underline{A} \quad \text{and} \quad \underline{\pi}_* KU_G = \underline{RU}[\beta, \beta^{-1}] \text{ with } |\beta| = 2.$$

若 E 和 X 是 G谱，令 $L_E X$ 表示 X 在 E处的 Bousfield 局部化。特别地，当 $E = \mathbb{S}_G/p$ 且 X 是任意谱时，此局部化就是X的 p完备化，记为 $X^\wedge_p := L_{\mathbb{S}_G/p}X$。若 X 已经是一个局部化 $X = L_E Y$，则X 在 $\mathbb{S}_G/p$ 处的局部化可写为

$$L_{E/p}Y = L_{\mathbb{S}_G/p}L_E Y.$$

当 $E = \mathbb{S}_G \wedge H\mathbb{Q}$ 是有理等变球时，我们得到 X的有理化，记为 $X \otimes \mathbb{Q} := L_{H_G\mathbb{Q}\otimes\underline{A}}X$。

p完备化与有理化通过一个同伦拉回方块联系起来，该方块由G-谱构成，称为算术断裂方块。当 $X = L_{KU_G}\mathbb{S}_G$时，此方块为：

$$\begin{array}{ccc} L_{KU_G}\mathbb{S}_G & \longrightarrow & \prod_p L_{KU_{G/p}}\mathbb{S}_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} \otimes L_{KU_G}\mathbb{S}_G & \longrightarrow & \mathbb{Q} \otimes \prod_p L_{KU_{G/p}}\mathbb{S}_G. \end{array} \tag{2.1}$$

一般形式的算术方块见 [DFHH，第 6] 章命题 2.2，由此可推出 (2.1)。这是计算 G-谱同伦的一个有用工具。

3. The cokernel of $\psi^\ell - 1$ acting on $\underline{\pi}_* KU_G$

回忆一下，对于 $\ell \in \mathbb{Z}$，亚当斯运算 ψ^ℓ: $KU_G(X) \to KU_G(X)$是关于 G-空间 X自然的环同态。本节将分析 $\psi^\ell - 1$ 在 G 的复表示环及相关对象上的作用。回忆第 1.1 节：整数 ℓ总是假设与 G的阶互素，有时还会进一步假设 ℓ 是模 $|G| = q^j$意义下的本原元。以下是 [Ser]中的习题 9.4。

引理 3.1. 若 ℓ与 $|G|$互素，则亚当斯运算 ψ^ℓ: $RU(G) \to RU(G)$ 会置换不可约表示的基。

证明. 回忆一下，类函数 χ 是不可约表示的特征标，当且仅当 $\chi(e) \geq 0$ 且 $\langle \chi, \chi \rangle = 1$。对于类函数 f，亚当斯运算 ψ^ℓ的作用为$\psi^\ell(f)(g) = f(g^\ell)$。由于 ℓ 与 $|G|$互素，每个元素都有一个 ℓ次根，因此 ℓ次幂在 G上确定一个双射。由此可知，亚当斯运算保持内积。□

引理 3.2. 假设 ℓ 与 $|G|$互素。 $\underline{RU}$ 上的亚当斯运算 ψ^ℓ 是格林函子的同态。

证明. 亚当斯运算 ψ^ℓ 逐层都是环同态，并且显然 ψ^ℓ 与限制相交换。关键在于证明 ψ^ℓ 与表示诱导相交换。为此，我们可以利用特征标映射将$\underline{RU}$ 嵌入类函数格林函子中。由于这是逐层单射，只需证明ψ^ℓ 与类函数的诱导相交换。这里，公式（参见 [Ser，第 7.2]节）为

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(f)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{\gamma\in G,\\ \gamma^{-1}g\gamma\in H}} f(\gamma^{-1}g\gamma).$$

如 $\psi^\ell(f)(g) = f(g^\ell)$，比较 g处的 $\psi^\ell\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(f)$ 公式与 g处的 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\psi^\ell f)$ 公式，可知二者仅在求和范围上有所不同：前者对 H 中的 $\gamma^{-1}g^\ell\gamma$ 求和，而后者对 H 中的 $\gamma^{-1}g\gamma$ 求和。由于 ℓ 次幂映射在 H 上是双射，正如引理 3.1 的证明中所示，这两个和相同。□

接下来考虑 $\underline{RU}$ 上的自同态 $\psi^\ell - 1$。此自同态稍后将作为 KU_G 上非负同伦 Mackey 函子的自同态 $\psi^\ell - 1$ 出现； KU_G 的 $\mathbb{Z}$ 分次同伦 Mackey 函子为 $\underline{RU}[\beta^{\pm 1}]$，且 β 位于次数 2。回忆一下， ψ^ℓ 在 β^d 上的作用是乘以 ℓ^d [A，命题 3.2。2]。

命题 3.3. 假设 ℓ 与 $|G|$互素。麦基函子同态$\psi^\ell - 1$：$\underline{RU}\{\beta^d\} \to \underline{RU}\{\beta^d\}$对 $d > 0$是单射。

证明. 证明过程与 [BGS 的命题 6.8]相同。只需证明该同态逐层都是单射。由引理 3.1， ψ^ℓ 通过置换 $RU(G)$中不可约表示的基来作用。若 S 是相应的置换矩阵，则 $\psi^\ell - 1$ 通过 $\ell^d S - I$作用，其中 I 是单位矩阵。要证明这个矩阵作为线性变换是单射，只需证明它的行列式非零。

若 $d > 0$，这是一个元素为整数的矩阵，并且 $\det(\ell^d S - I) \equiv (-1)^m$ (模 ℓ)，其中m 是 S的行数。因此，对于某个 $a \in \mathbb{Z}$，$\det(\ell^d S - I) = a\ell + (-1)^m$ （注意 $\ell \geq 2$）。特别地，它非零。□

注记 3.4. 当 $d = 0$ 时，命题 3.3 的陈述不成立。事实上，[BGS，命题 6.7] 将 $\psi^\ell - 1$ 在 $RU(G)$ 上的核识别为 $R\mathbb{Q}(G)$。

该结果对负的 d也成立，但此时 ℓ 必须可逆，才能在$\underline{RU}\{\beta^d\}$上定义$\psi^\ell$。因此我们转而考虑 q-完备化，因为之后讨论该同态时正是这种情形。

推论 3.5. 假设 ℓ 与 $|G|$互素。麦基函子同态$\psi^\ell - 1$：$\underline{RU}_q^\wedge\{\beta^d\} \to \underline{RU}_q^\wedge\{\beta^d\}$对 $d \neq 0$是单射。

证明. 当 d 为正时，由命题 3.3 经沿 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_q^\wedge$的平坦基变换即可得到此结论。对于 $d < 0$，我们按照命题 3.3 中的方法论证。首先，$\det(\ell^d S - I) = (\ell^d)^r \det(S - \ell^{-d} I)$，其中 r 是矩阵的行数。现在， $S - \ell^{-d} I$ 是一个整数矩阵，且 $\det(S - \ell^{-d} I) \equiv \det(S) \pmod{\ell}$。置换矩阵 S 的行列式非零，因此$\ell^d S - I$ 也如此。□

考察完核之后，我们现在转向余核。为了得到闭式答案，我们再次进行完备化：先在命题 3.7 中对 q 完备化，然后在命题 3.11 中对 q 以外的部分完备化。

记号 3.6。我们用 $\mathsf{cok}\{d\}$ 表示 $\underline{\psi^\ell - 1}$ 的余核：$\underline{RU}\{\beta^d\} \to \underline{RU}\{\beta^d\}$.我们还用 $\mathsf{cok}^\wedge_p\{d\} = \mathsf{cok}\{d\}\otimes\mathbb{Z}^\wedge_p$ 表示 $\underline{\psi^\ell - 1}$ 的余核：$\underline{RU}^\wedge_p\{\beta^d\} \to \underline{RU}^\wedge_p\{\beta^d\}$，对 q-完备版本也类似。当 $d = 0$ 时，我们有时会省略记号中的次数，直接写作 cok 或 $\mathsf{cok}^\wedge_p$。

命题 3.7. 设 ℓ 是模 $|G| = q^j$ 的本原元。麦基函子余核 $\underline{\mathrm{cok}}^\wedge_q\{d\}$ 在层级 G/H 上由下式给出：

(a) 对于 $d \neq 0$,

$$\underline{\mathrm{cok}}^\wedge_q\{d\} \cong \bigoplus_{\text{cyclic } [C]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{q^{\nu_q(\ell^{d\phi(|C|)}-1)}},$$

其中，直和遍历 H 中循环子群 C 的共轭类，φ 是欧拉函数，而 ν_q 是 q-进赋值。当 $|C| = q^k$ 且 $k \neq 0$ 时，则

$$\nu_q(\ell^{d\varphi(|C|)} - 1) = k + \nu_q(d).$$

(b) 对于 $d = 0$,

$$\underline{\mathrm{cok}}^\wedge_q \cong \bigoplus_{\text{cyclic } [C]} \mathbb{Z}^\wedge_q,$$

其中，直和再次遍历 H 中循环子群 C 的共轭类。余核中的限制和转移继承自 $\underline{RU}^\wedge_q$ 中的限制和转移。

证明。余核逐层计算；在层级 G/H 处，我们有

$$\psi^\ell - 1 \colon RU(H)^\wedge_q\{\beta^d\} \to RU(H)^\wedge_q\{\beta^d\}.$$

根据引理 3.1，亚当斯运算 ψ^ℓ 会置换 $RU(H)$ 的不可约表示基，并且沿 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^\wedge_q$ 进行平坦基变换后仍然如此。如命题 3.3 的证明中所示，$\psi^\ell - 1$ 由矩阵 $\ell^d S - I$ 作用，其中 S 是置换矩阵，而 I 是单位矩阵。如有必要，重新排列不可约表示基后，可将其化为分块对角矩阵，其分块为

$$\begin{bmatrix} -1 & \ell^d & & & \\ & -1 & \ell^d & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \ell^d \\ \ell^d & & & & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ell^{dt} - 1 \end{bmatrix}$$

通过行列变换，这些分块等价于上文所示的对角矩阵，其中 t 是该分块的行数。当 $d \neq 0$ 时，每个分块都会为余核贡献一个因子 $\mathbb{Z}^\wedge_q/(\ell^{dt} - 1)$。当 $d = 0$ 时，每个分块都会贡献一个因子 $\mathbb{Z}^\wedge_q$。

还需计算块的数量及其大小。每个块对应于 $RU(H)$ 中不可约表示的一个 ψ^ℓ-轨道。由于 $RU(H)$ 是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模，我们可以将基变换至 $\mathbb{C}$，并将所得的环视为一个 $\mathbb{C}[\psi^\ell]$-模。由于特征标映射 $\mathbb{C} \otimes RU(H) \to \mathsf{Cl}(H, \mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}[\psi^\ell]$-模映射，且 $\mathbb{C}[\psi^\ell]$ 是主理想整环，只需了解 ψ^ℓ 作用在类函数基上的轨道。亚当斯运算在类函数上的作用为 $\psi^\ell(f)(g) = f(g^\ell)$。考虑由示性函数 $1_{[g]}$ 给出的 $\mathsf{Cl}(H, \mathbb{C})$ 的基。由于 ℓ 模 $|H|$ 是本原的，两个示性函数 $1_{[g]}$ 和 $1_{[h]}$ 属于同一个 ψ^ℓ-轨道，当且仅当 g 和 h 生成 H 中共轭的循环子群。因此，ψ^ℓ-轨道的数量等于循环子群的共轭类数量

G。一个轨道的大小等于一个循环子群的生成元数量；若 C 是 G 的非平凡循环子群，且 $|C| = q^k$，则该数量为 $\varphi(q^k) = q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q-1)$。

最后，我们必须理解

$$\mathbb{Z}_q^\wedge \big/ \left(\ell^{d(q-1)q^{k-1}} - 1\right) \cong \mathbb{Z} \big/ q^{\nu_q(\ell^{d(q-1)q^{k-1}}-1)}.$$

为此，我们需要知道满足 $\ell^{d(q-1)q^{k-1}} \equiv 1 \pmod{q^r}$ 的最大值 r。用加法来处理会更方便。存在阿贝尔群的一个同构 $(\mathbb{Z}/q^r)^\times \cong \mathbb{Z}/((q-1)q^{r-1})$。由于 ℓ 是 $(\mathbb{Z}/q^r)^\times$ 的生成元，它映射到右侧的一个生成元。由于当 $r \le k + v_q(d)$ 时，$dq^{k-1}(q-1) \equiv 0 \pmod{(q-1)q^{r-1}}$，我们有

$$\nu_q(\ell^{d(q-1)q^{k-1}} - 1) = k + \nu_q(d).$$

因此，若 C 是一个阶为 q^k 的非平凡循环子群，则与 C 的共轭类相对应的 ψ^ℓ-轨道贡献一个因子

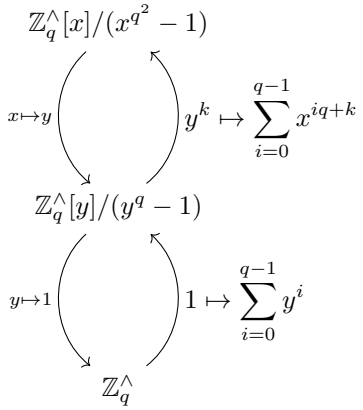
$$\mathbb{Z}_q^\wedge \big/ \left(\ell^{d(q-1)q^{k-1}}) - 1\right) \cong \mathbb{Z} \big/ q^{k+\nu_q(d)}.$$

平凡循环子群贡献 $\mathbb{Z}_q^\wedge/(\ell^d - 1) \cong \mathbb{Z}/q^{\nu_q(\ell^d-1)}$。 □

注 3.8. 在 $d = 0$ 的情形下，$\psi^\ell - 1$ 的余核公式在取 q-完备化之前，作为整数上的公式仍然成立，这可由证明看出。

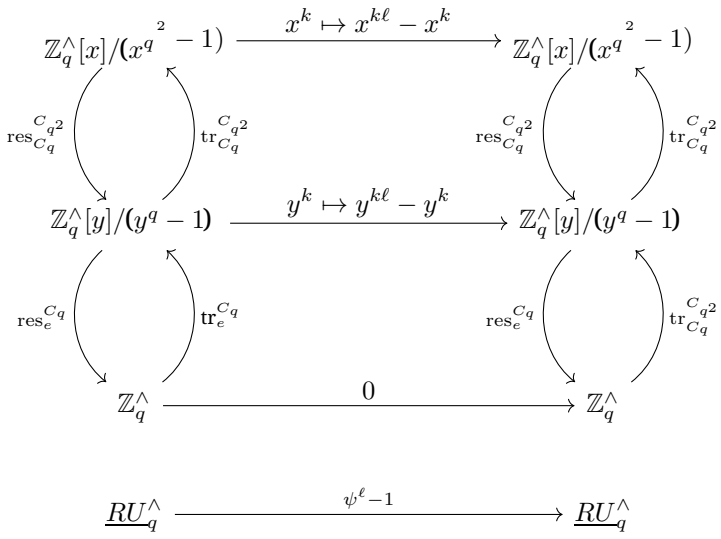
逐层来看，$\mathrm{cok}_q^\wedge$ 的公式表明它是 $(\underline{R\mathbb{Q}})_q^\wedge$ 的一个商。我们将在例 3.9 中证明，这个麦基函子不是一个循环 $\underline{A}_q^\wedge$-模。

例 3.9. 我们计算 $G = C_{q^2}$ 的 $\underline{\mathrm{cok}}_q^\wedge$。回忆表示环 Green 函子 $\underline{RU}_q^\wedge$：

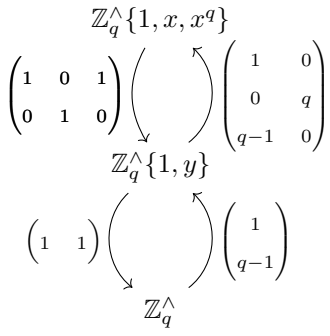


这里，y 是 C_q表示的类，其生成元通过 q次单位根作用于复平面；x 是C_{q^2}表示的类，其生成元通过本原的 q^2 次单位根作用。由于它们是一维复表示，亚当斯运算将 y 映射为 y^ℓ，将 x 映射为 x^ℓ。因此，麦基函子同态

$\psi^\ell - 1$ 的形式为

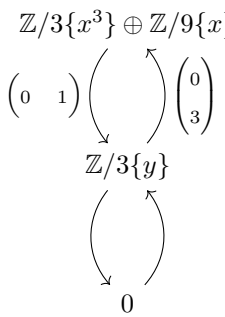


在 C_q 层，模去 $\psi^\ell - 1$ 的像后，所有非平凡表示都被等同起来，因为 ℓ 模 q 是本原的。在顶层，商将非平凡表示分为两类： x 类和 x^q 类。因此，余核为：

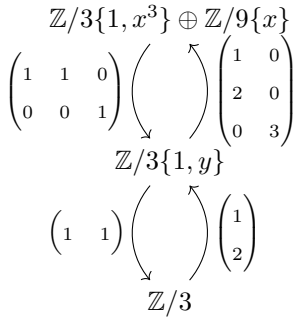


这个麦基函子不是自由的；它包含一个由顶层元素 1 生成的 Burnside 麦基函子的副本，而对该子函子取商后含有 q-挠元。

例 3.10。令 $G = C_9$。下面我们介绍 Mackey 函子 $\mathrm{cok}_3^\wedge\{1\}$ 和 $\mathrm{cok}_3^\wedge\{2\}$，它们分别是 $\underline{RU}_3^\wedge\{\beta\}$ 上 $\psi^\ell - 1$ 和 $\underline{RU}_3^\wedge\{\beta^2\}$ 的余核。



$\underline{\mathrm{cok}}_3^\wedge\{1\}$



$\underline{\mathrm{cok}}_3^\wedge\{2\}$

在对不同于 q 的 p 进行完备化的情形下，结果表明 $\psi^\ell - 1$ 的余核具有熟悉的形式。

命题 3.11。设 ℓ 模 $|G| = q^j$ 本原，且 p 是一个不同于 q 的素数。存在一个 G-麦基函子同构

$$\underline{\mathrm{cok}}_p^\wedge \cong (\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge.$$

为证明此命题，我们使用范畴等价 [BGS，命题 7.6] 的显式公式（该结果最初归功于 [GM，定理 A.9 和命题 A.12]）：

$$\mathrm{Mack}(G)_{(p)} \xrightarrow[\simeq]{(V_H)} \bigoplus_{(H)} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{(p)}[W_G(H)]}. \tag{3.12}$$

这里，$\mathrm{Mack}(G)_{(p)}$ 是 G-麦基函子范畴在 p 处的局部化，即取值于 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模而非阿贝尔群的麦基函子。此等价右侧的直和遍历 G 的所有子群共轭类。函子 V_H 将 $\underline{M} \in \mathrm{Mack}(G)_{(p)}$ 映至 $\underline{M}(G/H)$ 对由 H [BGS，命题 7.10] 中所有真子群的转移生成的子群取商所得的商。

命题 3.11 的证明。在范畴等价 (3.12) 下，$(\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge$ 映射 to

$$V_H\left((\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p^\wedge & H \text{ cyclic}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

根据 [BGS，命题 7.11]。只需证明 $\mathrm{cok}_p^\wedge$ 在此等价下的像同构。

若 $H = C_{q^k}$ 是 G 的循环子群，则 $RU(C_{q^k})_p^\wedge \cong \mathbb{Z}_p^\wedge[x]/(x^{q^k} - 1)$。来自真子群的转移所生成的理想，由来自 $C_{q^{k-1}}$ 的转移生成；每个这样的转移都是分圆多项式 $\phi_{q^k}(x) = \mathrm{tr}_{C_{q^{k-1}}}^{C_{q^k}}(1)$ 的倍数。因此，

$$V_{C_{p^k}}(\underline{RU}_p^\wedge) \cong \mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x).$$

另请参见 [TW，例 6.7]。

若 H 不是循环群，则存在一个满射 $\theta\colon H \to C_q \times C_q$。在引理 3.14 中，我们将证明 $q \in RU(C_q \times C_q)$ 属于来自真子群的转移的像。由双陪集公式可得以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{C \subsetneq C_q \times C_q} RU(C) & \xrightarrow{\theta^*} & \bigoplus_{C \subsetneq C_q \times C_q} RU(\theta^{-1}C) \\ \downarrow \mathrm{tr} & & \downarrow \mathrm{tr} \\ RU(C_q \times C_q) & \xrightarrow{\theta^*} & RU(H). \end{array}$$

由于 θ^* 是一个环同态，$\theta^*(q) = q$。这表明 $q \in RU(H)$属于来自真子群的转移的像。由于 q 在 p完备化后变为单位，$V_H(\underline{RU}_p^\wedge)$是 $\underline{RU}_p^\wedge(H)$对单位理想取商所得的商，因此为零。该结论的有理版本例如见 [T，第 9]节。

我们已经看到

$$V_H(\underline{RU}_p^\wedge) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x) & H \text{ cyclic and } |H| = q^k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\phi_{q^k}(x)$是 q^k次分圆多项式。因此，剩下的任务是确定以下映射的余核

$$\mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x) \xrightarrow{\psi^\ell - 1} \mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x) \tag{3.13}$$

我们可以写成 $\mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x) \cong \mathbb{Z}_p^\wedge\{x, x^2, x^3, \ldots, x^{(q-1)q^{k-1}}\}$。亚当斯运算 ψ^ℓ在这个基下循环置换 $x^{q^{k-1}}$ 的 $q-1$ 次幂。因此，我们可以作如下分解

$$\mathbb{Z}_p^\wedge[x]/\phi_{q^k}(x) \cong A \oplus B$$

作为一个 $\mathbb{Z}_p^\wedge[\psi^\ell]$-模，其中

$$A = \mathbb{Z}_p^\wedge\{x^{iq^{k-1}} \mid 1 \le i \le q-1\}$$

and

$$B = \mathbb{Z}_p^\wedge\{x^n \mid q^{k-1} \text{ does not divide } n, 1 \le n < (q-1)q^{k-1}\}.$$

由此可得，$\psi^\ell - 1$ 在 A 上的余核给出 $\mathbb{Z}_p^\wedge$。我们断言，在 B 上余核为零。

ℓ的本原性确保，在 $RU(C_{q^k}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{q^k} - 1)$ 中，两个单项式 x^{n_1}和 x^{n_2}属于同一个 ψ^ℓ-轨道，当且仅当 n_1 和 n_2 具有相同的 q-进赋值，其中假设 n_1和 n_2 均小于 q^k。由此可得，在 $\psi^\ell - 1$于 $RU(C_{q^k})$ 上的余核中，只要 n不能被 q^{k-1}整除，多项式 $\phi_{q^k}(x) \cdot x^n$就等价于 $q \cdot x^n$。因此，在 $\psi^\ell - 1$于商环 $\mathbb{Z}[x]/\phi_{q^k}(x)$ 上的余核中，当 n 不能被 q^{k-1}整除时，有关系式$q \cdot x^n = 0$。特别地，在 p处完备化后（其中 p与 q不同），可得 x^n在 $\psi^\ell - 1$ 于 $\mathbb{Z}[x]/\phi_{q^k}(x)$ 上的余核中为零。

因此，$\underline{\mathrm{cok}}_p^\wedge$ 对应于由循环子群支撑的 $\mathbb{Z}_p^\wedge$，而在范畴等价下，这与$(\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge$相同。由于等价 (3.12) 保持并生成余核，证毕。□

引理 3.14. 由真子群的转移生成的 $RU(C_q \times C_q)$ 的理想包含 q。

证明. 令 $H = C_q \times C_q$。 H 的表示环作为交换环同构于 $\mathbb{Z}[x,y]/(x^q-1, y^q-1)$，其中 x 和 y 分别是左因子和右因子的旋转表示的类。若 K 是由一个满足 $i \neq 0$ 的元素 (γ^i, γ^j) 生成的 H 的子群，则

$$\mathrm{tr}_K^H(1) = \sum_{k=0}^{q-1} (x^i y^j)^k.$$

我们断言

$$q = \sum_{K \leq H} \mathrm{tr}_K^H(1) - \mathrm{tr}_L^H(1) \cdot \mathrm{tr}_R^H(1),$$

其中， L 是由（γ, e）生成的子群，而 R 是由（e, γ）生成的子群。这是一个计算。回想一下， H 有 $q+1$ 个不同的 q阶子群：由（e, γ）生成的子群 R，以及由元素（γ, γ^j）生成的子群，其中 $j = 0$、1、.....、$q-1$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \leq H} \mathrm{tr}_K^H(1) - \mathrm{tr}_L^H(1) \cdot \mathrm{tr}_R^H(1) \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{tr}^H_{\langle(\gamma,\gamma^j)\rangle}(1) + \mathrm{tr}_R^H(1) - \mathrm{tr}_L^H(1) \cdot \mathrm{tr}_R^H(1) \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{tr}^H_{\langle(\gamma,\gamma^j)\rangle}(1) + \mathrm{tr}_R^H(1) \cdot (1 - \mathrm{tr}_L^H(1)) \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{q-1} \left(1 + xy^j + x^2y^{2j} + \ldots + x^{q-1}y^{j(q-1)}\right) + \\
&\qquad\qquad \left(1 + y + y^2 + \ldots + y^{q-1}\right)\left(-x - x^2 - \ldots - x^{q-1}\right) \\
&\qquad = q + \sum_{j=0}^{q-1} \left(xy^j + x^2y^{2j} + \ldots + x^{q-1}y^{j(q-1)}\right) \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=0}^{q-1} \left(xy^k + x^2y^k + \ldots + x^{q-1}y^k\right) \\
&\qquad = q.
\end{aligned}$$

最后一个等式由重新编号得出，注意这些方程属于环$\mathbb{Z}[x,y]/$（x^q-1, y^q-1）。□

例 3.15. 设 $H = C_3 \times C_3$，并设 $L = \langle(\gamma, e)\rangle$、 $C = \langle(\gamma, \gamma)\rangle$、 $D = \langle(\gamma, \gamma^2)\rangle$ 和$R = \langle(e, \gamma)\rangle$ 是它的四个 3 阶子群。考虑 $C_3 \times C_3$ 的表示环 Green 函子。在这个 Green 函子中，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_L^H(1) &= 1 + x + x^2 \\
\mathrm{tr}_C^H(1) &= 1 + xy + x^2y^2 \\
\mathrm{tr}_D^H(1) &= 1 + x^2y + xy^2 \\
\mathrm{tr}_R^H(1) &= 1 + y + y^2
\end{aligned}$$

我们可以直接看出，3 属于 $RU(H)$ 中由来自 H 的真子群的转移像生成的理想：

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\le H} \mathrm{tr}_K^H(1) - \mathrm{tr}_L^H(1)\cdot \mathrm{tr}_R^H(1)\\
&\quad= \big(\mathrm{tr}_L^H(1)+\mathrm{tr}_R^H(1)+\mathrm{tr}_C^H(1)+\mathrm{tr}_D^H(1)\big) - \mathrm{tr}_L^H(1)\cdot\mathrm{tr}_R^H(1)\\
&\quad= \big(1+x+x^2\big)+\big(1+y+y^2\big)+\big(1+xy+x^2y^2\big)+\big(1+x^2y+y^2x\big)\\
&\qquad\quad -\big(1+x+x^2\big)\big(1+y+y^2\big)\\
&\quad= \big(4+x+y+x^2+xy+y^2+x^2y+y^2x+x^2y^2\big)\\
&\qquad -\big(1+x+x^2+y+xyx^2y+y^2+y^2x+y^2x^2\big)\\
&\quad= 3.
\end{aligned}$$

4. The homotopy Mackey functors of $L_{KU_G}\mathbb{S}_G$

我们采用断裂方块 (2.1) 来理解 $L_{KU_G}\mathbb{S}_G$。首先，利用第 3 节的工作，我们描述局部因子 $L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子，分别讨论 $p=q$ 和 $p\neq q$ 两种情形。得到局部计算结果后，我们再利用长正合列

$$\cdots\to \mathbb{Q}\otimes\prod_p \underline{\pi}_{n+1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G \to \underline{\pi}_n L_{KU_G}\mathbb{S}_G \to \underline{\pi}_n\mathbb{Q}\otimes L_{KU_G}\mathbb{S}_G \times \prod_p \underline{\pi}_n L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\to\cdots \tag{4.1}$$

由断裂方块 (2.1) 导出，从而得到 $\underline{\pi}_n L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子。我们将用到这样一个事实：有理化 $\mathbb{Q}\otimes L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 是有理 Mackey 函子 $\mathbb{Q}\otimes\underline{R\mathbb{Q}}$ [的 Eilenberg–Mac Lane 谱 BGS 引理 9.1]。

4.1. $p=q$ 的局部计算。本节中，我们计算 $L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子。关键工具如下。

命题 4.2（[BGS，命题 5.3、6.3]）。若 ℓ 模 $|G|$ 为本原元，则亚当斯运算 ψ^ℓ: $(KU_G)^\wedge_q \to (KU_G)^\wedge_q$ 是一个定义良好的 G-谱映射，并且参与如下纤维序列

$$L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \longrightarrow (KU_G)^\wedge_q \xrightarrow{\psi^\ell-1} (KU_G)^\wedge_q. \tag{4.3}$$

注意，上述纤维序列中的纤维与 ℓ 无关。

注 4.4。 [BGS] 中的原命题 5.3 假设 ℓ 模 $|G|$ 为本原元，但根据 [HiKo，推论 2.5], ，要证明 ψ^ℓ 可延拓为一个 G-谱映射，只需假设 ℓ 与 $|G|=q^k$互素。另一方面，要将纤维识别为 KU_G/q-局部等变球谱，则还需要额外的本原性假设。

由于 $\underline{\pi}_* KU_G \cong \underline{RU}[\beta,\beta^{-1}]$ 在次数 2 上有 β，与纤维序列 (4.3) 关联的同伦 Mackey 函子的长正合列分解为四项正合列：

$$0\longrightarrow \underline{\pi}_{2d}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \longrightarrow \underline{RU}^\wedge_q\{\beta^d\} \xrightarrow{\psi^\ell-1} \underline{RU}^\wedge_q\{\beta^d\} \longrightarrow \underline{\pi}_{2d-1}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \longrightarrow 0$$

因此， $L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子可由第 3.

命题 3.3 立即推出以下结论。

推论 4.5。对于 $d\neq 0$, $\underline{\pi}_{2d}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G = 0$。

$d = 0$ 情形此前已计算过：

命题 4.6. [BGS，命题 6.8] $\underline{\pi}_0 L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \cong (\underline{R\mathbb{Q}})^\wedge_q$。

推论 4.7. 麦基函子$\underline{\pi}_{2d-1}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 为

$$\underline{\pi}_{2d-1}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G \cong \underline{\mathrm{cok}}^\wedge_q\{d\} = \mathrm{coker}\left(\underline{RU}^\wedge_q\{\beta^d\} \xrightarrow{\psi^\ell - 1} \underline{RU}^\wedge_q\{\beta^d\}\right).$$

这个余核已在命题 3.7 中计算。

例 4.8. 麦基函子 $\underline{\mathrm{cok}}^\wedge_3\{1\}$ 和 $\underline{\mathrm{cok}}^\wedge_3\{2\}$ 在例 3.10 中针对 $G = C_9$ 进行了计算。根据推论 4.7，它们与同伦 Mackey 函子$\underline{\pi}_1 L_{KU_{C_9}/3}\mathbb{S}_{C_9}$ 和 $\underline{\pi}_3 L_{KU_{C_9}/3}\mathbb{S}_{C_9}$一致。

4.2. $p \neq q$的局部计算。设 p 是一个不整除 $|G| = q^k$的素数。 $L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 的非零 p-局部同伦群的计算见 [BGS]。对于奇素数 p，回顾一下 $L_{KU/p}\mathbb{S}$ 的同伦群，它们最初由 Adams–Baird[Ad] 和 Ravenel [Ra] 计算，并在近期的 [Z，公式 2.3.8]中加以描述：

$$\pi_n L_{KU/p}\mathbb{S} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^\wedge_p & \text{if } n \in \{0, -1\}, \\ \mathbb{Z}/p^{\nu_p(k)+1} & \text{if } n = 2k-1 \text{ and } (p-1) \mid k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $p = 2$， $L_{KU/2}\mathbb{S}$ 的同伦群属于 [Z，等式 2.3.13]：

$$\pi_n L_{KU/2}\mathbb{S} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^\wedge_2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{if } n = 0, \\ \mathbb{Z}^\wedge_2 & \text{if } n = -1, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 8, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{if } n \equiv 0, 2 \pmod 8, \text{ and } n \neq 0, \\ \mathbb{Z}/2^{\nu_2(k)+3} & \text{if } n = 4k-1 \text{ and } n \neq -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 4.9（[BGS，命题 8.5]）。设 $p \neq q$。存在一个分次 Green 函子的同构

$$\underline{\pi}_* L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G \cong \underline{R\mathbb{Q}} \otimes \pi_* L_{KU/p}\mathbb{S}.$$

以上完整描述了 p-完备的$L_{KU_G}\mathbb{S}_G$同伦 Mackey 函子，但命题 3.11 随即给出了在 $n = -1$ 情形下的如下描述：

推论 4.10。对于 $p \neq q$，我们有 $\underline{\pi}_{-1} L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G \cong \underline{R\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Z}^\wedge_p \cong \underline{\mathrm{cok}}^\wedge_p$.

4.3. 局部到整体重组。这里我们结合第 4.1 节和第 4.2 节的工作以及长正合列 (4.1)，以推导$\underline{\pi}_n L_{KU_G}\mathbb{S}_G$的同伦 Mackey 函子。 $n = 0$ 的情形是 [BGS]关注的重点。 $n = -1$ 和 $n = -2$ 的情形与其他情形大不相同，因此我们首先考虑 n 不等于 0、−1或 −2的情形。

命题 4.11. 设 $n = 2k$ 不等于 0 且不等于 -2。那么

$$\underline{\pi}_{2k} L_{KU_G}\mathbb{S}_G \cong \underline{R\mathbb{Q}} \otimes \pi_{2k} L_{KU}\mathbb{S} \cong \underline{R\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Z}/2$$

当 $2k \equiv 0 \equiv 2$（模 8）时成立。否则，该麦基函子为零。

证明。固定一个非零的 $2k$ 和 -2。由推论 4.5 和命题 4.9 可知，对于任意奇素数 p （包括 $p=q$），$\underline{\pi}_{2k}\left(L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\right)$ 均为零。在 $p=2$ 的情形下，我们有

$$\underline{\pi}_{2k}\left(L_{KU_G/2}\mathbb{S}_G\right)\cong\begin{cases}\underline{R\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{Z}/2 & 2k\equiv 0,2 \pmod 8,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

同样，我们发现，$\underline{\pi}_{2k+1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 仅对有限多个素数 p非零（且逐层有限）。因此，$\mathbb{Q}\otimes\prod_p\underline{\pi}_{2k+1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 消失。由此可得结论 (4.1)。□

当 n 为奇数且不同于 -1时，答案用 $\psi^\ell-1$的余核来表述，其中照例 ℓ 是模 G的阶的本原元。

命题 4.12. 设 $2k-1\neq -1$。则

$$\underline{\pi}_{2k-1}L_{KU_G}\mathbb{S}_G\cong\underline{R\mathbb{Q}}\otimes\pi_{2k-1}L_{KU}\mathbb{S}\left[\tfrac{1}{q}\right]\oplus\underline{\mathrm{cok}}_q^\wedge\{k\}.$$

证明. 根据第 4.2 节，$L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 的同伦 Mackey 函子在次数 $2k$ 和 $2k-1$上逐层有限。推论 4.5 给出 $\underline{\pi}_{2k}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 消失，而推论 4.7 将 $\underline{\pi}_{2k-1}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 识别为 $\underline{\mathrm{cok}}_q^\wedge\{d\}$。根据命题 3.7，它逐层有限。□

现在我们转而关注 $n=-1$ 的情形。

命题 4.13. $\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G}\mathbb{S}_G=0$。

证明。由命题 3.7(b) 和推论 4.7，麦基函子 $\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/q}\mathbb{S}_G$ 是无挠的。根据第 4.2 节，$\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 对于 $p\neq q$ 也同样如此。因此，映射

$$\prod_p\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes\left(\prod_p\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\right)$$

is i是单射。于是，长正合列 (4.1) 表明 $\underline{\pi}_{-1}L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 是下列映射的余核:

$$\mathbb{Q}\otimes\underline{R\mathbb{Q}}\times\prod_p\underline{\pi}_0L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes\left(\prod_p\underline{\pi}_0L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\right),$$

这可以改写为

$$\mathbb{Q}\otimes\underline{R\mathbb{Q}}\oplus\mathbb{Z}/2\otimes\underline{R\mathbb{Q}}\oplus\prod_p(\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes\left(\prod_p(\underline{R\mathbb{Q}})_p^\wedge\right).$$

只需证明这是逐层满射。由于麦基函子 $\underline{R\mathbb{Q}}$ 的取值全都是有限秩自由阿贝尔群，由引理 4.14 可得结论。□

引理 4.14. 设 B 是一个有限秩自由阿贝尔群。那么映射

$$f\colon(\mathbb{Q}\otimes B)\oplus\prod_p B_p^\wedge\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes\left(\prod_p B_p^\wedge\right)$$

定义为

$$f\left(\frac{b_0}{n},(b_p)\right)=\frac{1}{n}(b_0-nb_p)$$

是满射。

证明。留给读者完成。□

最后，我们处理 $n=-2$ 的情形。

命题 4.15. $\underline{\pi}_{-2}L_{KU_G}\mathbb{S}_G \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes \mathrm{cok}$.

证明。由推论 4.5 和第 4.2 节可知，对于所有素数 p，麦基函子 $\underline{\pi}_{-2}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G$ 均为零。由长正合列 (4.1) 可得， $\underline{\pi}_{-2}L_{KU_G}\mathbb{S}_G$ 是有理化映射的余核

$$\prod_p \underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes\left(\prod_p \underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\right).$$

换言之，我们有

$$\underline{\pi}_{-2}L_{KU_G}\mathbb{S}_G \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes\left(\prod_p \underline{\pi}_{-1}L_{KU_G/p}\mathbb{S}_G\right).$$

由推论 4.7 和推论 4.10，可将其改写为

$$\underline{\pi}_{-2}L_{KU_G}\mathbb{S}_G \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes\left(\prod_p \underline{\mathrm{cok}}_p^\wedge\right).$$

每个麦基函子 $\mathrm{cok}_p^\wedge$ 都是（逐层） p-局部的，因此根据引理 4.16，我们有一个同构

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes\left(\prod_p \underline{\mathrm{cok}}_p^\wedge\right) &\cong \bigoplus_p \left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes \underline{\mathrm{cok}}_p^\wedge\right) \cong \bigoplus_p \left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes \underline{\mathrm{cok}}\right)\\ &\cong \left(\bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right)\otimes \underline{\mathrm{cok}} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes \underline{\mathrm{cok}}.\end{aligned}$$

□

引理 4.16. 假设对于每个素数 p， A_p 都是一个阿贝尔群，且所有不同于 p 的素数都在 A_p 上可逆。那么

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes\left(\prod_p A_p\right) \cong \bigoplus_p \left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes A_p\right).$$

证明. 这可由以下事实推出：当 r 遍历所有素数时， $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 可分解为 $\bigoplus_r \mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r$ ； $\mathbb{Q}_r/\mathbb{Z}_r$ 可表示为 $\mathrm{colim}_k\, \mathbb{Z}/r^k$；并且张量积与余极限可交换。□

References

[Ad] J. F. Adams, *Operations of the n-th kind in K-theory, and what we don't know about* $\mathbb{RP}^\infty$, 《拓扑学新进展》，1974年，第1–10页，DOI 10.1017/CBO9780511662607.002。[A] M. F. Atiyah, *K-theory*，第2版，高级图书经典丛书，Addison-Wesley 出版公司，高级图书项目，雷德伍德城，加利福尼亚州，1989年。D. W. Anderson 笔记。MR1043170[BGS] Peter J. Bonventre, Bertrand J. Guillou 和 Nathaniel J. Stapleton, *sphere* https://arxiv.org/abs/2204.03797 *On the* KU_G *local equivariant*，可在线获取。[Bo] A. K. Bousfield, *The localization of spectra with respect to homology* **18** 1979 4, , Topology（），第–期 257 281, 10 1016 0040 9383 79 90018 1 551009 DOI 。/ - ( ) - 。MR DFHH Christopher L. Douglas、John Francis、Andre G. Henriques 和 Michael A. Hill（编）， *Topological modular forms* 201, ，数学调查与专著，第卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年。MR3223024

[GM] J. P. C. Greenlees 和 J. P. May, *Generalized Tate cohomology*, Mem. Amer. Math. Soc. 113（1995 543, +178 10 1090 0543 1230773），第 viii 期，DOI 。/memo/ 。MR HiKo Koichi [ ] *On the Bott cannibalistic classes* Hirata 和 Akira Kono，，《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》18（1982），第3期，1187–1191，DOI 10.2977/prims/1195183304。MR688953[N] W ladys law Narkiewicz, *The development of prime number theory*，数学 Springer 专著丛书，Springer 出版社，柏林，2000年。From Euclid to Hardy and Littlewood。MR1756780[Ra] Douglas C. Ravenel, *Localization with respect to certain periodic homology theories*, Amer. J. Math. **106** 1984 2, 351 414, 10 2307 2374308 737778（），第–期 DOI 。/ 。MR Ri Jurgen Ritter, [ ] *Ein Induktionssatz für rationale Charaktere von nilpotenten Gruppen*, J. Reine Angew. Math. **254** 1972 133 151, 10 1515 1972 254 133 470058（），– DOI 。/crll. . .（德 [2] *Permutation representations of finite p-groups* 文）。MR Seg Graeme Segal，，《Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)》23（1972 375 381, 10 1093 23 4 375 322041），– DOI 。/qmath/ . . . MR Ser Jean-Pierre Serre，，《数 [ ] *Linear representations of finite groups* 学研究生教材丛书》第42卷，Springer 出版社，纽约—海德堡，1977年。由 Leonard L. Scott 根据法文第二版翻译。MR0450380[TW] Jacques Th´evenaz 和 Peter Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** 1995 6, 1865 1961, 10 2307 2154915 1261590（），第–期 DOI 。/ 。MR T Jacques [ ] *Some remarks on G-functors and the Brauer morphism* Thevenaz，，《J. Reine Angew. Math.》 **384** 1988 24 56, 10 1515 1988 384 24 929977（），– DOI 。/ [ ] crll. . . . MR Z Ningchuan Zhang, *Analogs of Dirichlet L-functions in chromatic homotopy theory*, Adv. Math. 399（2022），论文编号108267，84页，DOI 10.1016/j.aim.2022.108267。

Tanner N. Carawan*Email address*:
tc2bb@virginia.edu

Rebecca Field*Email address*:
fieldre@jmu.edu

Bertrand J. Guillou*Email address*:
bertguillou@uky.edu

David Mehrle*Email address*:
davidm@uky.edu

Nathaniel J. Stapleton*Email address*:
nat.j.stapleton@uky.edu