arXiv:2303.12283v1 [math.CA] 22 Mar 2023

三点能量的优化者与近乎正交集

Dmitriy Bilyk、Damir Ferizovi´c、Alexey Glazyrin、Ryan W. Matzke、Josiah Park 和 Oleksandr Vlasiuk

Abstract. 本文致力于研究使三点能量达到最优的球面测度与点配置。我们的主要目标是将基于点对之间距离的经典优化问题，推广到三点势的背景下。具体而言，我们研究球面堆积问题的三点类比，以及基于三个点的 p-框架能量优化问题。结果表明，这两个问题都与 Erd˝os 提出的近乎正交集问题有着内在联系。由此，我们从三点堆积的角度，为 Erd˝os 问题给出了一个新解。我们还证明，在所有维度中，正交基都是 p-框架三点能量的唯一极小化者，其中 $0 < p < 1$ 。论证中用到了半定规划所采用的多元多项式，这些多项式基于经典的 Gegenbauer 多项式。对于 $p = 1$，我们完全解决了圆上的对应问题。至于更高维情形，我们证明，对于 $\mathbb{S}^{d-1}$上的测度，极小化子的豪斯多夫维数不超过 $d-2$ 。证明的主要组成部分是证明：唯一不含钝角的各向同性测度，是在某个正交归一基上均匀分布的测度。

Contents

1. 引言1.1. 近乎正交集 1.2. 球面装填问题 1.3. 论文概要 2. 符号与预备知识 2.1. 三点能量 2.2. 各向同性能量与框架势 2.3. 半定规划与三点界 3. 三点打包问题与近乎正交集 4. 多变量 p-框架势的最小能量 5. 无钝角各向同性测度 6. 1-框架能量极小化者的支撑集维数不大于 $d-2$7. 致谢 8. 附录 参考文献 1 2 2 2 3 3 3 4 5 6 9 11 12 12 12

1. Introduction

度量空间中的各种有趣点配置，都可以实现为由二点势能定义的能量的优化构形。对于单位球面上的一个 N 点构形 ω_N ， $\mathbb{S}^{d-1}$，其能量定义为

$$E_K(\omega_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{x,y \in \omega_N} K(x,y), \tag{1.1}$$

Date：2023年3月23日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：52C17，90C22；次要分类号：52A40，05D05。*Key words and phrases.* 势能最小化，最优测度，正定核，球面码，紧框架，各向同性测度，近乎正交集。

其中 K 是定义二点势能的函数。通常， K 取决于点 x 与 y 之间的欧几里得距离。一个非常有趣的例子与单位范数紧框架和球面设计密切相关，即 2-框架势能 $K(x,y) = |\langle x,y\rangle|^2$，简称框架势能，由 Benedetto 和 Fickus [BF]，提出，随后 Ehler 和 Okoudjou [EO]，将其推广为 p-框架势能$|\langle x,y\rangle|^p$，其中 $p \in (0,\infty)$。例如， [BE, BCGKO, BGMPV1, BGMPV2, CGGKO, Gl, GP, H1, H2, WO, XX] 等文献对其作了进一步研究。关于两点势的能量优化的详尽介绍，见 [BHS] 。

本文研究三点势，即依赖于三点之间相互作用、而非成对相互作用的类似能量。也就是说，我们将关注三点离散能量和能量积分的极小化：

$$E_K(\omega_N) = \frac{1}{N^3}\sum_{x,y,z\in\omega_N} K(x,y,z) \quad \text{and} \quad I_K(\mu) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} K(x,y,z)d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z),$$

参见第 2 节，了解精确定义。这类能量在各种应用中都会出现，此前作者们也对其进行过研究 [BFGMPV、BFGMPV1]。

p-框架势的概念可自然地推广到三点情形，将三点 p-框架势定义为 $K(x,\ y,\ z) = |uvt|^p = |\langle y,z\rangle\langle x,z\rangle\langle x,y\rangle|^p$。本文主要关注情形 $p = 1$，以及 $0 < p < 1$。我们将看到，即使在这种情形下，描述极小化子的这一问题也极具挑战性，并且与 Erd˝os 关于近乎正交集和装填问题的研究有着内在联系；我们将在下文对此进行介绍。

1.1. **近乎正交集**。 中的非零向量（多重）集 $\mathbb{R}^d$ 称为近乎正交集，若该集合中任意三个不同向量里，至少有两个彼此正交。Erd˝os 曾提出近乎正交集的最大规模问题。1991年，Rosenfeld 证明此类集合的最大规模为 $2d$ [Ros]。关于这一结果的其他证明见 [Pud]和 [Dea],，我们则在定理 3.1 中给出另一种证明。空间 $2d$ 中的规模为 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的近乎正交集称为*Rosenfeld* 集。人们或许会认为，空间 $\mathbb{R}^d$ 中的 Rosenfeld 集必定是两个正交基的并，但事实上，对于 $d \geq 5$，这并不成立（例子见 [Dea] ），而 Rosenfeld 集的完整刻画仍是一个公开问题。

我们还想指出，Rosenfeld [Ros] 使用了“几乎正交集”这一术语，但在后来的文献中，“近乎正交”似乎在此语境下更为常见，不过两种说法仍都在使用（例如参见 [AlSz、Pol]）。

1.2. **球面装填问题**。 经典的球面装填问题，或确定最优球面码的问题，是寻找构形中点的最大数量 $\omega_N \in \mathbb{S}^{d-1}$，使得任意不同的点 $x, y \in \omega_N$, $\langle x,y\rangle \leq \alpha$. 此条件确保 ω_N 中的不同点之间的球面距离至少为 $\arccos\alpha$。当 $\alpha = 1/2$ 时，该问题称为 接吻数 问题。尽管这一问题历史悠久，但仅在少数几个低维情形中得到解决 [SvdW, Lev,OS, Mus]。

我们研究装填问题的三点类比。我们尤其关注寻找构形 $\omega_N \in \mathbb{S}^{d-1}$ 中点的最大数量，使得任意不同的点 $x,y,z \in \omega_N$,$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle \leq \alpha$。在第 3 节中，我们将证明， $\alpha = 0$ 的三点打包问题与 $\alpha = 0$ 的经典两点装填问题惊人地相似，而且最优构形恰好是 Rosenfeld 集。

1.3. **本文结构**。 第 2 节介绍一些相关背景信息，特别是关于各向同性测度、框架、框架能量和半定规划界的内容。第 3 节探讨近乎正交集与三点装填界之间的联系，给出另一种证明，并推广 Rosenfeld 的结果（定理 3.1）。第 4 节专门讨论三点p-框架能量：特别地，我们证明，在所有维数下，对于 $0 < p < 1$，任何 p-框架能量的极小化者都是某个正交归一基上的均匀分布（相差对称变换），见定理 4.4；而在 $\mathbb{S}^1$ 上，1-框架能量的极小化子是两个正交归一基上的均匀分布的凸组合（定理 4.5）。第 5 节利用球面版本的荣格不等式 [D] 证明，任何支撑集中不含钝角的各向同性测度都是某个正交归一基上的均匀分布。

最后，在第6 节，我们证明，使三点 1-框架能量达到最小值的测度，其支撑集的余维至少为一（定理 6.2）。

2. Notation and preliminaries

本文的记号遵循 [BFGMPV, BFGMPV1]。所有势函数均定义在单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$上的点三元组 (x, y, z) 上。为简洁起见，本文始终使用记号 $u = \langle y, z\rangle$,$v = \langle x, z\rangle$, $t = \langle x, y\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示标准欧几里得内积。我们用 $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$上的博雷尔概率测度集合。 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的归一化均匀分布记为 σ。若测度 μ 的质心位于原点，即 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} x d\mu(x) = 0$，则称其为平衡的。

2.1. 三点能量。 设 $\omega_N = \{z_1, z_2, ..., z_N\}$ 是 $\mathbb{S}^{d-1}$中的一个 N点配置（多重集），其中 $N \geq 3$。给定一个连续三点核 $K : \left(\mathbb{S}^{d-1}\right)^3 \to \mathbb{R}$， ω_N 的离散 K能量定义为

$$E_K(\omega_N) := \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} K(z_i, z_j, z_k). \tag{2.1}$$

类似地，我们定义测度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$的能量：

$$I_K(\mu) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} K(x, y, z) d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z). \tag{2.2}$$

在（2.1）中的归一化下， $E_K(\omega_N) = I_K(\mu)$ 对于离散测度 $\mu = \frac{1}{N} \sum_{x\in\omega_N} \delta_x$。一般而言，我们关注的是寻找使给定势函数$K$的能量达到最优的点配置和测度。

2.2. **各向同性能量与框架势。**若测度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$满足以下条件，则称其为各向同性：

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} xx^T \, d\mu(x) = \frac{1}{d} I_d, \tag{2.3}$$

where I_d 是单位 $d \times d$ 矩阵。这等价于以下陈述：对于任意 $y \in \mathbb{S}^{d-1}$，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, y\rangle^2 \, d\mu(x) = \frac{1}{d}. \tag{2.4}$$

容易证明，各向同性测度恰好是 2-框架能量的极小化者，参见例如[BGMPV1]。

引理 2.1。对于任意 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, y\rangle^2 d\mu(x) d\mu(y) \geq \frac{1}{d}. \tag{2.5}$$

等号成立当且仅当 μ 是各向同性的。

将此引理应用于离散构型 $\omega_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$,$N \geq d$上的均匀分布，我们便得到 Benedetto 和 Fickus 在离散情形下的结果 [BF，定理 7。1]:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle x_i, x_j\rangle^2 \geq \frac{N^2}{d}, \tag{2.6}$$

等号成立当且仅当对每个 $y \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle x_i, y\rangle^2 = \frac{N}{d} \|y\|^2,$$

即 ω_N 是一个 单位范数紧框架。界（2.6）本质上是 Welch[W] 和 Sidelnikov [Sid，推论 1]的结果的一个特例。

2.3. **半定规划与三点界。** 对于各种两点能量优化问题，线性规划方法是主要工具（例如参见 [Del, KL, Y, CK, BGMPV1]）。自然，三点能量优化问题应采用这种方法的三点推广。这一推广由 Bachoc 和 Vallentin 针对球面情形提出 [BV]，并用其获得了接吻数问题的新界。他们构造了一类无限矩阵以及相应的多项式，其形式为

$$(Y_m^d)_{i+1,j+1}(x,y,z) := Y_{m,i,j}^d(x,y,z) := P_i^{d+2m}(u)P_j^{d+2m}(v)Q_m^d(u,v,t), \tag{2.7}$$

其中，m，i，$j \in \mathbb{N}_0$ 和 P_m^h 是定义在 $\mathbb{S}^{h-1}$ 上的 m 次归一化 Gegenbauer 多项式，并且

$$Q_m^d(u,v,t) = ((1-u^2)(1-v^2))^{\frac{m}{2}} P_m^{d-1}\left(\frac{t-uv}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}}\right). \tag{2.8}$$

为方便起见，我们在此列出无限矩阵 Y_0^d、Y_1^d 和 Y_2^d的左上角 3×3、2×2 和 1×1 子矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & v & \frac{dv^2-1}{d-1} \\ u & uv & u\frac{dv^2-1}{d-1} \\ \frac{dv^2-1}{d-1} & \frac{du^2-1}{d-1}v & \frac{du^2-1}{d-1}\frac{dv^2-1}{d-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t-uv & u(t-uv) \\ v(t-uv) & uv(t-uv) \end{pmatrix}, \left(\frac{(d-1)(t-uv)^2-(1-u^2)(1-v^2)}{d-2}\right).$$

对变量 x、y 和 z上的所有置换 π 进行对称化后，Bachoc 和 Vallentin 定义了以下对称矩阵及其对应的多项式

$$(S_m^d)_{i+1,j+1}(x,y,z) := S_{m,i,j}^d(x,y,z) := \frac{1}{6}\sum_{\pi} Y_{m,i,j}^d(\pi(x),\pi(y),\pi(z)).$$

这些矩阵的以下性质使其可用于优化。对于任意$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$和 $e \in \mathbb{S}^{d-1}$，无限矩阵

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_m^d(x,y,e)d\mu(x)d\mu(y)$$

and

$$S_m^d(\mu) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} S_m^d(x,y,z)d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)$$

均为半正定矩阵，也就是说，所有主子式（由有限子矩阵构成）均为非负数。这一性质导出了以下能量最小化定理（更多细节和论证见 [BFGMPV1]）。

定理 2.2。 设 $n \in \mathbb{N}_0$。对于每个 $m \le n$，设 A_m 为一个无限、对称、半正定且仅有有限个非零项的矩阵，并额外要求 A_0 的第一行和第一列均只有零。设

$$K(x,y,z) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{Tr}(S_m^d(x,y,z)\, A_m).$$

T那么 σ 是球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上概率测度中 I_K 的极小化者，且 $I_K(\sigma) = 0$.

注意，当矩阵 A_m 为对角矩阵时，核 K 只是矩阵 S_m^d对角元素的非负线性组合。鉴于定理2.2 所得界的性质及其最常见的用途，本文将始终称之为半定规划界。

3. Three-point packing problem and nearly orthogonal sets

我们利用半定规划界证明一个三点装填界，将 Rosenfeld [Ros]上述结果推广。注意，这也为 Rosenfeld 的结果提供了另一种证明。

定理 3.1. 假设对于集合 $\omega_N \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 中任意三个互不相同的点 x、y、z，

$$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle \le 0.$$

那么 $N \le 2d$。只有当 ω_N 是近乎正交集，即 *Rosenfeld* 集时，等号才成立 .

证明。 沿用第 2.3 节中的记号，我们使用

$$6\frac{(d-1)^2}{d^2}S^d_{0,2,2} = 2(u^2v^2+u^2t^2+v^2t^2) - \frac{4}{d}(u^2+v^2+t^2) + \frac{6}{d^2}$$

and

$$6\,S^d_{1,1,1} = 6uvt - 2(u^2v^2+u^2t^2+v^2t^2).$$

将上述核的值对 $\omega_N = \{x_1,\dots,x_N\}$中的所有点求和，根据定理 2.2，结果必定是非负数，因此

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{i,j,k=1}^{N} 6\left(\frac{(d-1)^2}{d^2}S^d_{0,2,2} + S^d_{1,1,1}\right)(x_i,x_j,x_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{N}\left(6\langle x_i,x_j\rangle\langle x_i,x_k\rangle\langle x_j,x_k\rangle - \frac{4}{d}(\langle x_i,x_j\rangle^2+\langle x_i,x_k\rangle^2+\langle x_j,x_k\rangle^2) + \frac{6}{d^2}\right). \end{aligned}$$

对于互不相同的 i、j、k，所有三重乘积项均非正，因此可以将它们消去，而不影响不等式的有效性（当且仅当 ω_N 近乎正交时，这一步取等号）。其余项分为四种情况： $i=j=k$、 $i=j\neq k$、 $i=k\neq j$和 $j=k\neq i$。第一组的N三重乘积项之和为 N，其余三组则为 $\sum\langle x_i,x_j\rangle^2 - N$。二重乘积项也出现相同的$i,\ j=1$和。总的来说，我们有

$$\begin{aligned} 0 &\le 6\left(N+3\left(\sum_{i,j=1}^{N}\langle x_i,x_j\rangle^2 - N\right)\right) - \frac{4}{d}3N\sum_{i,j=1}^{N}\langle x_i,x_j\rangle^2 + \frac{6}{d^2}N^3 \\ &= \left(18-\frac{12N}{d}\right)\sum_{i,j=1}^{N}\langle x_i,x_j\rangle^2 - 12N + \frac{6N^3}{d^2}. \end{aligned}$$

若 $18-\frac{12N}{d}$ 非负，则 $N \le \frac{3}{2}d$，因此定理的结论成立。若其为负，我们注意到 $\sum_{i,j=1}^{N}\langle x_i,x_j\rangle^2$ 是该集合的框架能量，根据 $\frac{N^2}{d}$ 的离散版本$i,\ j=1$引理 2.1，它必定不小于 $\frac{N^2}{d}$。将此值代入不等式，得到

$$\left(18-\frac{12N}{d}\right)\frac{N^2}{d} - 12N + \frac{6N^3}{d^2} \ge 0.$$

除以 $6N$ 并因式分解后，我们得到不等式

$$(2-N/d)(N/d-1) \ge 0$$

这立即推出定理的结论。

最后，我们注意到，只有当 ω_N 近乎正交（即为一个 Rosenfeld 集）时，其大小才恰好为 $2d$ （反过来显然成立）。□

进一步分析上述定理证明中的等号成立情形，我们观察到，集合 ω_N 的框架能量必定为 N^2/d，根据（2.6），这意味着 ω_N 必定是一个紧框架。

推论 3.2. $\mathbb{S}^{d-1}$ 上每个大小为 $2d$ 的近乎正交集（*Rosenfeld* 集）都是紧框架。

定理 3.1 与经典的装填界相呼应：在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 中，若任意两个不同的点满足 $\langle x,y\rangle \le 0$，则构形的大小不超过 $2d$，而 d维交叉多胞体的顶点集是达到此界的唯一集合（在正交变换意义下）[A、Sz、Ran]。这一装填界补充了 Davenport 和 Haj´os 的初步结果；他们证明，在$\mathbb{S}^{d-1}$ 中，若任意两个不同的点满足 $\langle x,y\rangle < 0$，则构形的大小不超过 $d+1$ [DH]。Davenport 和 Haj´os 的结果很容易推广到三点情形。

定理 3.3. 假设对于集合 $\omega_N \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 中任意三个互不相同的点 x, y, z，

$$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle < 0.$$

那么 $N \le d+1$。

证明。固定一个点 $x \in \omega_N$。由于将任意点 $y \in \omega_N$ 替换为其对立点 $-y$ 不会影响定理的条件，因此不失一般性，我们可以假设 $\langle x,y\rangle < 0$ 对每个 $y \in \omega_N \setminus \{x\}$ 都成立。条件 $\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle < 0$ 于是推出 $\langle y,z\rangle < 0$ 对于任意不同的 $y,\ z \in \omega_N \setminus \{x\}$。因此，$\omega_N$ 中的所有内积均为负数。根据前文提到的 Davenport 和 Haj´os [DH]的结果，该集合的大小不超过 $d+1$。□

最后，这是一个简单的事实：如果对于每个不同的 $x, y \in \omega_N$，$\langle x,y\rangle < -\varepsilon$，那么 $N \le 1+\frac{1}{\varepsilon}$，且它与维数 d 无关。由不等式 $\|\sum x_i\|^2 \ge 0$ 可以很快推出这一点。这个事实也很容易推广到多变量情形。

引理 3.4. 设 $\varepsilon > 0$。假设对于集合 $\omega_N \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 中任意三个不同的点 x, y, z，

$$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle \le -\varepsilon.$$

那么 $N \le 1+\frac{1}{\varepsilon}$。

证明。由于 $\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle$ 的值在将任一向量替换为其相反向量时保持不变，因此仿照定理 3.3的证明，我们可以假设 ω_N中任意两个不同元素的内积均为负。但 $|\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle| \le |\langle x,y\rangle|$，因此 $\langle x,y\rangle < -\varepsilon$ 对于每个不同的 $x, y \in \omega_N$。于是，前述事实即推出定理结论。□

关于近乎正交集的 Erd˝os 问题引发了对图的正交表示的活跃研究，参见例如 [Dea]。由于定理 3.1 的证明表明，半正定界的方法对 Erd˝os 问题有效，因此值得探究，是否还有其他关于图的正交表示的问题也能以类似方式解决。这种方法面临的一个明显障碍，是 2.8 中涉及的函数的复杂性；它们出现在 k 点半正定界中。

4. Minimal energy for multivariate p-frame potentials

现在我们将注意力转向多变量 p-框架能量，即势函数为$K(x,\ y,\ z) = |\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|^p = |uvt|^p$ 的能量，其中 $p > 0$。虽然本节主要关注 $p \le 1$ 的情形，我们先简要讨论 p-框架势函数为多项式的情形。BFGMPV [中的推论 5.2]表明

命题 4.1。如果 $p \in 2\mathbb{N}$，那么 σ 是三点 p-框架能量的极小化者。

为了首先理解 $p = 1$ 的极小化子集合，我们给出势函数 uvt 的极小化测度的描述。

引理 4.2。对于任意 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$I_{uvt}(\mu) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x,y\rangle\langle y,z\rangle\,\langle z,x\rangle d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z) \ge \frac{1}{d^2}$$

且当且仅当 μ 是各向同性时，等号成立。

证明。我们将给出这一事实的两种不同证明，因为两者都颇具启发性：一种基于线性代数，另一种基于定理 2.2 的半定规划界。

*证明 1（线性代数）。*若记为 $x=(x^{(1)},\ \dots\dots,\ x^{(d)})$，则 $uvt=\sum_{k,l,m=1}^{d} x^{(k)}x^{(l)}y^{(l)}y^{(m)}z^{(m)}z^{(k)}$。因此，令 $a_{k,\,l}=\int_{\mathbb{S}^{d-1}} x^{(k)}x^{(l)}d\mu(x)$，我们得到

$$I_{uvt}(\mu)=\sum_{k,l,m=1}^{d} a_{k,l}a_{l,m}a_{m,k}=\mathrm{Tr}(A^3),$$

其中 $A=(a_{k,\,l})=\int_{\mathbb{S}^{d-1}} xx^T d\mu(x)$ 显然是半正定的。

对于任意半正定矩阵 $d\times d$，其特征值为 A，利用 H $\lambda_i\geq 0$older 不等式，可得

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\leq\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot d^{\frac{2}{3}}=\Big(\mathrm{Tr}(A^3)\Big)^{\frac{1}{3}}\cdot d^{\frac{2}{3}},\quad \text{i.e.}\quad \mathrm{Tr}(A^3)\geq\frac{(\mathrm{Tr}(A))^3}{d^2},$$

当且仅当 A 是单位矩阵的倍数时，d 等号成立。

在我们的情形中，$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\left(x^{(i)}\right)^2 d\mu(x)=1$，因此 $I_{uvt}(\mu)=\mathrm{Tr}(A^3)\geq\frac{1}{d^2}$，且当且仅当 $A=\frac{1}{d}I_d$ 时等号成立，即 μ 是各向同性的。

*证明 2（半定规划）。*由定理3.1的证明可知

$$uvt=\frac{(d-1)^2}{d^2}S^d_{0,2,2}+S^d_{1,1,1}+\frac{2}{3d}(u^2+v^2+t^2)-\frac{1}{d^2}.$$

对右侧积分时，根据定理$S^d_{0,\,2,\,2}$ 以及 $S^d_{1,\,1,\,1}$ 对应的值均非负。根据引理2.2，$u^2+v^2+t^2$ 的积分至少为 $\frac{3}{d}$。总之，我们得到

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle\,d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)\geq\frac{2}{3d}\cdot\frac{3}{d}-\frac{1}{d^2}=\frac{1}{d^2}.$$

根据引理 2.1，只有当 μ 是各向同性的时等号才成立。另一方面，对于各向同性测度，$S^d_{0,\,2,\,2}$ 和 $S^d_{1,\,1,\,1}$ 的积分均为零，因此所有各向同性测度的能量恰为 $\frac{1}{d^2}$。□

我们指出，这一结果（尽管没有对极小化子的完整刻画）也已通过不同的方法在 [BFGMPV] 的推论 5.2 中得到证明。

作为引理 4.2的直接推论，我们可以如下描述 1-框架势能的极小化子。

推论 4.3. 对于任意 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|\,d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)\geq\frac{1}{d^2}$$

且等号成立当且仅当 μ 是各向同性的，并且对于 μ支撑集中的任意点 x、y、z，$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle\geq 0$。

利用这一推论，我们可以解决 $0<p<1$ 的问题，并证明正交归一基是唯一的极小化者（在中心对称和旋转意义下）。

定理 4.4. 对于 $0<p<1$，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|^p\,d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)\geq\frac{1}{d^2}$$

且当且仅当 μ 是正交归一基上的均匀分布（相差一个中心对称变换）时，等号成立。

证明。 对于 $0 < p < 1$ 和任意的 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$，

$$|\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|^p \geq |\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|,$$

因此，下界由推论 4.3 得出。当且仅当 μ 使三点 1-框架能量达到最小值，且对于所有 x、y、z，若它们属于 supp(μ)，则 $\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle = 0$ 或为 1 时，该界是紧的。如果存在两点 x、y 使得 $\langle x,y\rangle \notin \{0,-1,1\}$，则三元组（$x$、$x$、$y$）不满足这一条件。因此，supp($\mu$) 中任意两个不同的点都正交或对跖。各向同性 μ 的支撑集必须张成 $\mathbb{R}^d$，因此，由于 (2.4)，对于某个正交归一基 e_1、...、e_d，有 $\mu(\{e_j,-e_j\}) = \frac{1}{d}$，其中 $j = 1$、...、d。□

求解 $p = 1$ 的问题，主要困难在于刻画所有满足以下条件的各向同性测度：$\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle \geq 0$ 对于其支撑集中的任意点 x,y,z。注意，Rosenfeld 集是 1-框架能量的离散极小化者，因为它们是紧框架（推论 3.2），并且满足这一条件。描述所有极小化子的普遍问题极具挑战性，因为如上所述，即使是刻画所有 Rosenfeld 集这一问题，对于 $d \geq 5$而言也仍悬而未决。不过，我们可以完整描述 $d = 2$的极小化子。

定理 4.5. 对于任意 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$,

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} |\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle|\, d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z) \geq \frac{1}{4}$$

且当且仅当 μ 是两个（不一定互异的）标准正交基上均匀分布的凸组合（模中心对称意义下）时，等号成立。

证明。令 μ 为一个极小化者，并假设存在 $x \in$ supp(μ)，使得 $x^\perp \cap$supp(μ) $= \emptyset$。注意，对任意一个自变量，势函数在中心对称下保持不变。这意味着我们可以通过将点替换为其对径点来重新排列测度，使得 supp(μ) 完全包含在以 x为中心的开半圆内。假设现在支撑集的左端点为 x_1，右端点为 x_2。由于 $\langle x,x_1\rangle$ 和 $\langle x,x_2\rangle$ 均为正数，$\langle x_1,x_2\rangle \geq 0$，由推论 4.3 得出。取 y 为 x_1 与 x_2之间圆弧的中点。x_1 与 x_2 之间的夹角不大于 $\frac{\pi}{2}$，因此对于任意$z \in$ supp(μ)，$\langle z,y\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$。根据 (2.4)，

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\langle z,y\rangle|^2\, d\mu(z) = \frac{1}{2}.$$

这只有在对任意 $z \in$ supp(μ) 和 $\langle x_1,x_2\rangle = \cancel{0}$，$\langle z,y\rangle$ 恰好是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时才会发生。然而，x 不可能与 x_1 或 x_2 重合，因为它在支撑集中没有正交对应点，因此$\langle x,y\rangle$ 肯定不是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，这与我们的假设矛盾。

由此可知，任何 $x \in$supp(μ) 都有一个正交对应点。现在假设在 μ 的支撑集中，至少有三个两两不正交且两两非对径的点 x、y、z。它们各自都有一个正交对应点 $x^\perp$、$y^\perp$、$z^\perp \in$supp(μ)。我们断言，在这六个点中，有三个点的两两标量积之积为负。不失一般性，必要时将点替换为其对径点后，可以假设这三点（例如 x、y、z）的两两夹角均为锐角，且 y 在圆上位于 x 和 z 之间。于是 $\langle x,y^\perp\rangle\langle x,z\rangle\langle y^\perp,z\rangle < 0$，矛盾。因此，两两不正交且两两非对径的点至多只能有两个。

再次在必要时改用对径点，我们假设 μ 的支撑集仅由四个点组成（两个点的情形稍后处理）：x，y，以及它们的正交对应点 $x^\perp$ 和 $y^\perp$。假设 $\mu(x) = \alpha_1$，$\mu(x^\perp) = \alpha_2$，$\mu(y) = \beta_1$，$\mu(y^\perp) = \beta_2$。对任意 2.4，利用（$w \in \mathbb{S}^{d-1}$），得到

$$\frac{1}{2} = \int_{\mathbb{S}^1} |\langle z,w\rangle|^2\, d\mu(z) = \alpha_1\langle w,x\rangle^2 + \alpha_2(1-\langle w,x\rangle^2) + \beta_1\langle w,y\rangle^2 + \beta_2(1-\langle w,y\rangle^2).$$

因此，1、$\langle w,x\rangle^2$和 $\langle w,y\rangle^2$之间存在线性相关。这只可能发生在 y 与 x 正交或互为对径点的情况下，否则这种相关是平凡的。在后一种情况下，$\alpha_1 = \alpha_2$ 和 $\beta_1 = \beta_2$，因此 μ 恰好是两个标准正交基上的均匀分布的凸组合。

剩下的情形是，μ 的支撑集仅由 x 和 $x^\perp$ 组成；根据相同的条件，它们的权重必须相等。□

在双输入和三输入情形下， p-框架势的行为存在一些差异：具体而言，在双输入情形下，正交归一基上的均匀分布是（在对称变换意义下） p-框架能量在范围 $0 < p < 2$内的唯一极小化者；而本节的讨论表明，对于三输入能量，这一点仅在 $0 < p < 1$时成立，正如定理 4.5 所示，当 $p = 1$时，极小化者并不唯一；类似于定理 4.4 的论证将进一步表明，正交归一基不是 $p > 1$的极小化者。这种差异或许部分可以用以下事实解释：在三输入情形下， p-框架势中每个变量的次数是原来的两倍。

在双输入情形下， [BGMPV2] 中的一般猜想断言，当 p-框架能量满足 $p \notin 2\mathbb{N}$ 时，其所有极小化者都是离散的。因此很自然地可以猜想，三点p-框架能量的所有极小化者也都是离散的，至少在 $p \notin \mathbb{N}$ 时如此。

5. Isotropic measures without obtuse angles

支撑集中任意两点之间都没有钝角的各向同性测度显然会使三点 1-框架能量达到最小（由推论 4.3 可知）。本节将证明，只有标准正交基满足这一条件。

定理 5.1。 若 $\langle x, y\rangle \geq 0$ 对各向同性测度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$支撑集中的任意 x, y，均有 μ，则该测度是标准正交基上的均匀分布。

证明这个定理需要三个要素：球面荣格不等式、将平衡各向同性测度提升到更高维度的过程，以及关于平衡各向同性测度直径的线性规划界。

荣格不等式 [荣格]表明，对于给定直径的欧几里得点集，单纯形具有最大的外接半径。作为证明的第一个要素，我们采用 Dekster 证明的这一不等式的球面版本 [D]。

定理 5.2 (Dekster)。 若紧集 $C \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 中任意两点之间的球面距离（即 $\arccos(\langle x, y\rangle)$）不大于 D, $0 \leq D \leq 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{d}{2d-2}}$，则 C 可被一个球冠覆盖，该球冠的半径是 $\mathbb{S}^{d-1}$ 中球面边长为 D的正则单纯形的外接半径。

注意，边长为 $\frac{\pi}{2}$ 的正则单纯形由正交归一基的端点构成$e_1, \ldots\ldots, e_d$ 在 $\mathbb{S}^{d-1}$中。记 $z = \frac{1}{\sqrt{d}}(e_1 + \ldots + e_d)$。单纯形外接球面上的点定义为 $\langle x, z\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}$。于是，定理 5.2 意味着，对于任意球面点集，若 $\langle x, y\rangle \geq 0$ 对任意一对点 x 和 y，则存在 $z \in \mathbb{S}^{d-1}$ 使得 $\langle x, z\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$ 对于集合中的任意 x 均成立。

作为定理 5.1 证明的下一项内容，我们描述如何将各向同性测度提升到更高维度。设 $z \in \mathbb{S}^d$，并取 $\mathbb{S}^{d-1}$ 为 $\mathbb{S}^d$ 与经过原点且正交于 z 的超平面的交集。定义 $f\colon \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^d$ 如下:

$$f(x) = \sqrt{\frac{d}{d+1}}x + \frac{1}{\sqrt{d+1}}z.$$

对于 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$，将提升测度 $\mu_l \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^d)$ 定义为 μ 在 f下的推前。

引理 5.3. 概率测度 μ 是平衡各向同性测度 $\mathbb{S}^{d-1}$，当且仅当 μ_l 是 $\mathbb{S}^d$中的各向同性测度。

证明。 任意 $y \in \mathbb{S}^d$ 均可表示为 $\alpha_y y' + \beta_y z$，其中 $y' \in \mathbb{S}^{d-1}$ 且 $\alpha_y^2 + \beta_y^2 = 1$。对于任意$x' \in \mathrm{supp}(\mu)$，令 $x = f(x')$，则 $\alpha_x = \sqrt{\frac{d}{d+1}}$且 $\beta_x = \frac{1}{\sqrt{d+1}}$。于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} \langle x, y\rangle^2 \, d\mu_l(x) &= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sqrt{\frac{d}{d+1}}\alpha_y \langle x', y'\rangle + \frac{1}{\sqrt{d+1}}\beta_y\right)^2 d\mu_l(x)\\ &= \frac{1}{d+1}\int_{\mathbb{S}^d} \left(d\alpha_y^2\langle x', y'\rangle^2 + 2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y\langle x', y'\rangle + \beta_y^2\right) d\mu_l(x)\\ &= \frac{1}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(d\alpha_y^2\langle x', y'\rangle^2 + 2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y\langle x', y'\rangle + \beta_y^2\right) d\mu(x')\\ &= \frac{d\alpha_y^2}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle^2 \, d\mu(x') + \frac{2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle \, d\mu(x') + \frac{\beta_y^2}{d+1}.\end{aligned}$$

如果 μ 是平衡的且各向同性的，那么根据 (2.4)，对于任意 $y' \in \mathbb{S}^{d-1}$，

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_y^2}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle^2 \, d\mu(x') + \frac{2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle \, d\mu(x') + \frac{\beta_y^2}{d+1} &= \frac{d\alpha_y^2}{d+1}\cdot\frac{1}{d} + 0 + \frac{\beta_y^2}{d+1}\\ &= \frac{\alpha_y^2+\beta_y^2}{d+1} = \frac{1}{d+1},\end{aligned}$$

因此 (2.4) 成立，且 μ_l 在 $\mathbb{S}^d$中是各向同性的。F

or the 反过来，假设 μ_l 是各向同性的。取 $y \in \mathbb{S}^{d-1}$，即 $\alpha_y = 1$ 和 $\beta_y = 0$，我们得 et

$$\frac{1}{d+1} = \frac{d}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle^2 \, d\mu(x'),$$

因此，再由 (2.4)， μ 在 $\mathbb{S}^{d-1}$中是各向同性的。现在利用 μ_l 和 μ 都是各向同性的，并任取$\alpha_y \neq 0$，1，得到

$$\frac{1}{d+1} = \frac{d\alpha_y^2}{d+1}\cdot\frac{1}{d} + \frac{2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle \, d\mu(x') + \frac{\beta_y^2}{d+1}$$

so

$$\frac{2\sqrt{d}\alpha_y\beta_y}{d+1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x', y'\rangle \, d\mu(x') = 0,$$

这意味着 μ 是平衡的。 □

注 1. 本质上相同的离散集提升构造也曾用于，例如， [BGOY] 中用来构造两距离紧框架，以及 [Ball1] 中用来应用几何布拉施坎普-利布不等式。

下一个结果给出了受限于球面的平衡各向同性测度支撑集直径的界。该证明的思路与线性规划方法相似，其中精心构造的多项式通常能导出所需的界。关于各向同性测度的类似优化结果也见于 [Gl]。

定理 5.4. 设 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ 是一个平衡各向同性测度。若 $\langle x, y\rangle \geq -\frac{1}{d}$对任意 $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$均成立，则 μ 是正则单纯形上的均匀分布。

证明. 定义 $P(t) = (t-1)(t+\frac{1}{d})$，并注意到，对任意 $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$，均有 $P(\langle x, y\rangle) \leq 0$。于是

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} P(\langle x, y\rangle)\, d\mu(x) d\mu(y) \leq 0 \tag{5.1}$$

并且，如果对于某个 $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$， $P(\langle x, y\rangle) < 0$，则其严格小于 0。

另一方面， $P(\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle^2 - \frac{d-1}{d}\langle x, \overline{y}\rangle - \frac{1}{d}$。由于 μ 是平衡且各向同性的 c,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, y\rangle \, d\mu(x) d\mu(y) = 0 \text{ and } \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, y\rangle^2 \, d\mu(x) d\mu(y) = \frac{1}{d}.$$

这意味着（5.1）对 μ和 P（$\langle x, y\rangle$ $= 0$而言是尖锐的， x， $y \in$supp（μ）。特别地， $\langle x, y\rangle$必须满足$-\frac{1}{d}$对于任意不同的x 和 y，只要它们属于 μ的支撑集，便有。因此，supp（μ）是以下集合的子集： $d+1$一个正则单纯形的顶点

在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 中的正则单纯形。在这些顶点的线性组合中，只有系数相等的组合才等于 0。鉴于 μ 是平衡的，它必定是正则单纯形顶点集合上的均匀分布。□

注 2。 定理 5.4 说明，单位球面上平衡各向同性测度的支撑集的球面直径至少为 $\arccos\left(-\frac{1}{d}\right)$。此外，若直径恰为 $\arccos\left(-\frac{1}{d}\right)$，则该测度必定是正则单纯形上的均匀分布。

现在，我们已经具备了证明定理 5.1 所需的全部要素。

定理 5.1 的证明。 首先，我们使用定理 5.2，并按照上文所述，找到 $z \in \mathbb{S}^{d-1}$，使得 $\langle x, z\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$ 对所有 $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ 都成立。根据等式（2.4），

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, z\rangle^2 \, d\mu(x) = \frac{1}{d},$$

因此，对所有 $x \in \operatorname{supp}(\mu)$，都有 $\langle x, z\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}$。

这意味着 μ 是 $\mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-2})$ 的提升测度。根据引理 5.3，μ' 是平衡的且各向同性。若 $x, y \in$ 属于 $\operatorname{supp}(\mu)$，则 $x = \sqrt{\frac{d-1}{d}}x' + \frac{1}{\sqrt{d}}z$ 和 $y = \sqrt{\frac{d-1}{d}}y' + \frac{1}{\sqrt{d}}z$，其中 $x', y' \in$ 属于 $\operatorname{supp}(\mu')$。条件 $\langle x, y\rangle \geq 0$ 等价于 $\langle x', y'\rangle \geq -\frac{1}{d-1}$。于是 μ' 满足定理 5.4，必定是 $\mathbb{S}^{d-2}$ 中某个正则单纯形上的均匀分布。将该单纯形提升到 $\mathbb{S}^{d-1}$，可知 μ 必定是某个正交归一基上的均匀分布。□

注 3。 与注 2 类似，定理 5.1 表明，单位球面上各向同性测度的支撑集的球面直径至少为 $\frac{\pi}{2}$；并且，若直径恰为 $\frac{\pi}{2}$，则该测度必为正交归一基上的均匀分布。

6. Support of a minimizer for 1-frame energy has dimension not greater than $d-2$

[BGMPV2] 的一个主要结果指出，当 p-框架能量中的 p 不是偶整数时，极小化者的支撑集没有内点。本文将证明三点 1-框架能量也有类似结果。

引理 6.1。 若 μ 是所有属于 $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ 的测度中三点1-框架能量的极小化者，则对任意 $x \in \operatorname{supp}(\mu)$，存在 $y \in \operatorname{supp}(\mu)$，使得 $\langle x, y\rangle = 0$。

证明。 假设存在 x 属于 μ 的支撑集，且 $\operatorname{supp}(\mu)$ 中其他点均不与 x 正交。必要时将点替换为其相反点，从而重新安排测度，使其支撑集中的所有点与 x 形成锐角。现在若 y，$z \in \operatorname{supp}(\mu)$，则 $\langle x, y\rangle$ 和 $\langle x, z\rangle$ 均为正。推论 4.3 中已证明，$\langle x, y\rangle\langle x, z\rangle\langle y, z\rangle \geq 0$ 对于 μ 支撑集中的任意三点，因此同样有 $\langle y, z\rangle \geq 0$。重新安排后的测度满足定理 5.1，故必为正交归一基上的均匀分布。因此，最初的假设不成立。□

定理 6.2. 若 μ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ 中所有测度里的三点1-框架能量的极小化者，则 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的豪斯多夫维数不大于 $d-2$。

证明. 固定 $0 < \vartheta < \pi/4$。考虑半径为 ϑ 的任意球冠 C。只需证明 $C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 的 $(d-2)$ 维豪斯多夫内容有限。事实上，由于球面可由有限个半径为 ϑ 的球冠覆盖，$\operatorname{supp}(\mu)$ 的总 $(d-2)$ 维豪斯多夫内容有限，因此 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的维数不大于 $d-2$。

任取 $C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 中的一个 x。由引理 6.1，存在 $y \in \operatorname{supp}(\mu)$ 使得 $\langle x, y\rangle = 0$。假设 $C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 中有两个点 x_1、x_2，满足 $\langle x_1, y\rangle > 0$ 且 $\langle x_2, y\rangle < 0$。$x_1$ 与 x_2 之间的球面距离不大于 $2\vartheta < \pi/2$，因此 $\langle x_1, x_2\rangle > 0$。于是，我们找到了 $\operatorname{supp}(\mu)$ 中的三个点 x_1、x_2、y，满足 $\langle x_1, y\rangle\langle x_2, y\rangle\langle x_1, x_2\rangle < 0$。这与推论 4.3 矛盾。

这意味着所有点 $z \in C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 同时满足 $\langle z, y\rangle \geq 0$ 或 $\langle z, y\rangle \leq 0$。我们将由 $\langle z, y\rangle \geq 0$ 或 $\langle z, y\rangle \leq 0$ 定义的半空间记为 H_x，使得 $C \cap \operatorname{supp}(\mu) \subset H_x$。于是，$C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 是凸集 H 的子集，而该凸集定义为对所有 $x \in C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 取 H_x 的交集。此外，每个点 $x \in C \cap \operatorname{supp}(\mu)$ 都是 H 的边界点，因为它属于定义 H 的超平面 $\langle x, y\rangle = 0$

H_x。由于 $C \cap H$ 是凸的，推论 8.2 告诉我们，其边界的有限（$d-2$维豪斯多夫内容，因此 $C \cap \mathrm{supp}(\mu)$ 的内容也有限。□

7. Acknowledgments

我们谨此感谢 David de Laat 和 Alexandr Polyanskii 提供宝贵的讨论。全体作者感谢 ICERM 在 2021年 Collaborate@ICERM 项目期间提供的款待与支撑集。D. Bilyk 得到了美国国家科学基金会项目 DMS-2054606 和西蒙斯合作基金 712810 的资助。D. Ferizovi´c 谨向佛兰德政府的 Methusalem 基金致谢。A. Glazyrin 得到了美国国家科学基金会项目 DMS-2054536 的资助。R.W. Matzke 得到了明尼苏达大学博士论文奖学金、奥地利科学基金 FWF 特别研究计划（SFB）项目 F5503（该项目隶属于“准蒙特卡罗方法：理论与应用”特别研究计划（SFB））以及美国国家科学基金会博士后奖学金 2202877 的资助。O. Vlasiuk 得到了 AMS-西蒙斯旅行基金的资助。

8. Appendix

对于 $s>0$，我们用 $\mathcal{H}_s$表示 s维豪斯多夫测度。凸 d维集合的边界的豪斯多夫维数不会大于 $d-1$ 这一事实似乎广为人知。然而，我们未能在文献中找到这一说法的具体出处，因此在此给出一个简短的证明。

Pro命题 8.1. 若 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空紧凸集，则 $\mathcal{H}_{d-1}(\partial K)$ 是有限的 $te.$

证明。若 K 中存在一组 $d+1$ 点不包含在某个仿射超平面内，则 K 包含以这些点为顶点的单纯形，因此 K 有一个内点。若不存在这样的子集，则 K 包含在一个维数为 $d-1$的超平面 H 中，因此，由于 K 是紧的，$\mathcal{H}_{d-1}(\partial K) \le \mathcal{H}_{d-1}(K) < \infty$。

现在，不失一般性，假设 $0 \in K^\circ$，令 $p : \mathbb{S}^{d-1} \to \partial K$ 为从单位球面到 K边界的中心投影，即 $p(x) \in x\mathbb{R}_+ \cap \partial K$。注意，该函数是双射。

对于任意 x，$y \in \mathbb{S}^{d-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\|p(x)-p(y)\|}{\|x-y\|} &= \frac{\Big\|\|p(x)\|x-\|p(y)\|x+\|p(y)\|x-\|p(y)\|y\Big\|}{\|x-y\|}\\ &\le \frac{\Big|\|p(x)\|-\|p(y)\|\Big|\ \|x\|+\|p(y)\|\ \|x-y\|}{\|x-y\|}\\ &= \frac{\Big|\|p(x)\|-\|p(y)\|\Big|}{\|x-y\|}+\|p(y)\|.\end{aligned}$$

K, $r : \mathbb{S}^{d-1} \to [0,\infty)$ 的径向函数，其中 $r(x) = \|p(x)\|$，是利普希茨函数（例如，参见 [T，定理 1]）；且 $\|p(y)\|$ 有界，因此可知投影 p 确实是利普希茨的（事实上，可以证明它是双利普希茨的），因而 $\mathcal{H}_{d-1}(\partial K) < \infty$（例如，参见 [Ma，定理 7.5]）。

□

若 C 是以 x 为中心、半径为 $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的球冠，且 T 是球面在 x 处的切超平面，则从 C 到 T 的中心投影是单射，保持测地线（因而保持凸性），并且连续可微，且其在像上的逆映射也连续可微（因而是双利普希茨的）。于是得到以下推论：

推论 8.2。如果 $K \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 是测地凸的，且包含在半径为 $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$的球冠内，那么 $\mathcal{H}_{d-2}(\partial K)$是有限的。

References

[ ] ´ *Solution to Problem 35 I* **3**, 94 95 1952 3 AJ. Aczel.，(匈牙利语). Matematikai Lapok, – ( ). AlSzN. Alon, M. Szegedy. . Graphs
[ ] *Large sets of nearly orthogonal vectors*
and Combinatorics, **15**, 1 4 1999 1 1 –(). 。BEC. Bachoc, M. Ehler. . Applied
[ ] *Tight p-fusion Frames*
and Computational Harmonic Analysis, –(). 1 **35**, 1 15 2013

[BV] C. Bachoc, F. Vallentin. *New Upper Bounds for Kissing Numbers from Semidefinite Programming*. 美国数学会杂志, **21** 3 909 924 2008 2 3 ( ), – ( ). . Ball K. Ball. *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*. 伦敦数学会杂志, 2(2), [1] 351 359 1991 1 – ( ). BGOY A. Barg, A. Glazyrin, K.A. Okoudjou, W.-H. Yu. *Finite two-distance tight frames*. 线性代数及其应用, [ ] **475**, 163 175 2015 1 – ( ). BCGKO R. Ben-Av, X. Chen, A. Goldberger, S. Kang, K. A. Okoudjou. [ ] *Phase Transitions for the Minimizers of the p^{th} Frame Potentials in $\mathbb{R}^2$* 2212 04444 . 预印本: https://arxiv.org/pdf/ . . 1 [ ] ´ BFGMPV D. Bilyk, D. Ferizovic, A. Glazyrin, R. Matzke, J. Park, O. Vlasiuk. *Potential Theory with Multivariate Kernels*. **301**, 2907 2935 2022 《数学杂志》, – ( ). 1, 2, 4, 4 [1] ´ BFGMPV D. Bilyk, D. Ferizovic, A. Glazyrin, R. Matzke, J. Park, O. Vlasiuk. *Optimal Measures for Multivariate Geometric Potentials*. 3 预印本. 1, 2, 2.[BGMPV1] D. Bilyk, A. Glazyrin, R. Matzke, J. Park, O. Vlasiuk. *Optimal measures for p-frame energies on spheres*. Revista Matem ´ **38** 4 1129 1160 2022 1, 2 2, 2 3 atica Iberoamericana, ( ), – ( ). . . BGMPV D. Bilyk, A. Glazyrin, R. Matzke, [2] J. Park, O. Vlasiuk. *Energy on spheres and discreteness of minimizing measures* **280** 11 108995 2021 . 《泛函分析杂志》, 1, 4, 6 ( ), ( ). [ ] *Finite normalized tight frames*. BF J. Benedetto, M. Fickus. 《计算数学进展》, 18(2-4), 357–385 (2003 1, 2 2). . BHS S.V. Borodachov, D.P. Hardin, E.B. Saff. *Discrete Energy on Rectifiable Sets*. 施普林格数学专著 (2019 1). CGGKO X. [ ] [ ] Chen, V. Gonzalez, E. Goodman, S. Kang, K. A. Okoudjou. *Universal optimal configurations for the p-frame potentials* **46**, 4 2020 . 《计算数学进展》, no. ( ). 1 [ ] *Universally optimal distribution of points on spheres* CK H. Cohn, A. Kumar. . 美国数学会杂志, 20(1), 99–148 (2006 2 3). . DH H. Davenport, Gy. Haj ´ *Problem 35* **2**, 68 1951 3, 3 os. (匈牙利 [ ] [ ] *The minimum semidefinite rank of a triangle-free graph*. 语). Matematikai Lapok, ( ). Dea L. Deaett. 线性代数及其应用, 434(8), 1945 1955 2011 1 1, 3 – ( ). . D B. V. Dekster. [ ] *The Jung theorem for spherical and hyperbolic spaces*. 《匈牙利数学学报》, 67(4), 315–331 (1995 1 3, 5). . Del P. Delsarte. [ ] *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*. 《飞利浦研究报告增刊》, **10**, +97 1973 2 3 vi , ( ). . EO M. Ehler, K. A. [ ] Okoudjou. *Minimization of the probabilistic p-frame potential*. 《统计规划与推断杂志》, **142**, 645 659 2012 1 – ( ). Gl A. Glazyrin. [ ] *Moments of isotropic measures and optimal projective codes*. 预印本: https://arxiv.org/pdf/1904.11159. 1, 5[GP] A. Glazyrin, J. Park. *Repeated Minimizers of p-frame Energies*. 《工业与应用数学学会离散数学杂志》, 34(4), 2411 2423 2020 1 – ( ). H M. Hirao. [1] *On p-frame potentials of determinantal point processes on the sphere* **13**, 21 24 2021 1 . 《日本工业与应用数学学会通 [2] *On p-frame potentials of the Beltrán and Etayo point processes on the sphere* **15**, 1 4 讯》, – ( ). H M. Hirao. . 《日本工业与应用数学学会通讯》, – (2023 1). Jung H. Jung. *Über die kleinste Kugel, [ ] die eine räumliche Figur einschließt* (德语). Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik , **123**, 241 257 1901 5 – ( ). KL G.A. Kabatiansky, V.I. Levenshtein. *Bounds for packings on a sphere and in space* (俄语). [ ] Problemy Pereda˘ci Informacii **14**, 3 25 1978 **14** 1 1 17 1978 2 3 – ( ); 译文见 [ ] *Boundaries for packings in n-dimensional Euclidean space*. 《信息传输问题》, ( ), – ( ). . Lev V.I. Levenshtein. 《苏联科学院院刊》, 245(6), 1299 1303 1979 1 2 – ( ). . Ma P. Mattila, [ ] *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. 剑桥高等数学研究丛书 (44 1995 8), 剑桥大学出版社, Cambridge ( ). Mus O.R. Musin. 《数学年刊》([ ] *The kissing number in four dimensions*. 2 **168** 1 1 32 2008 1 2), ( ), – ( ). . OS A.M. Odlyzko, [ ] *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions*. N.J.A. Sloane. 《组合理论杂志》A辑, **26** 2 210 214 1979 1 2 ( ), – ( ). . Pol A. Polyanskii. 线性代数及其应 [ ] *On almost-equidistant sets*. 用, **563**, 220 230 2019 1 1 – ( ). . Pud P. Pudlak. . 《组合数学》, ( ), [ ] ´ *Cycles of nonzero elements in low rank matrices* **22** 2 321 334 2002 1 1 – ( ). .[ ] *The closest packing of spherical caps in n dimensions* Ran R.A. Rankin. . 《格拉斯哥数学协 会会报》, **2**, 139 144 1955 3 – ( ). Ros M. Rosenfeld. *Almost orthogonal lines in E^d*. DIMACS离散数学丛书, [ ] **4**, 489 492 1991 1 1, 3 – ( ). . SvdW K. Schutte, B. L. [ ] ¨ *Das Problem der dreizehn Kugeln* 2 van der Waerden. (德语). 《数学年刊》, 125, 325 334 1953 1 – ( ). .[ ] Sid V.M. Sidel'nikov. *New estimates for the closest packing of spheres in n-dimensional Euclidean space*. 《数学文集》, **24**, 148 158 1974 2 2 – ( ). . Sz T. Szele. , [ ] *Solution to Problem 35 II* **3**, 95 1952 3 (匈牙利语). Matematikai Lapok, ( ). T F.A. Toranzos. . 《美国 [ ] *Radial Functions of Convex and Star-Shaped Bodies* 数学月刊》, 74(3), 278–280 (1967). 8

[W] L. Welch. *Lower bounds on the maximum cross correlation of signals.* IEEE 信息论汇刊，**20**，397 399 20062– ( )。。
[ ] WO C. Wickman、K.A. Okoudjou。 *Gradient Flows for Probabilistic Frame Potentials in the Wasserstein Space*。
预印本：https://arxiv.org/pdf/ 1808 09319 1 。. XX Z. Xu、Z. Xu。 *The Minimizers of the p-frame Potential*。
[ ]
Applied and Computational Harmonic Analysis，**52**，366–379 (2021 1)。Y V.A. Yudin。
[ ]
Minimum potential energy of a point system of charges(俄文，含俄文摘要)。Diskret. Mat.，**4**，第2期，115–121 (1992)，；英文译本见《离散数学与应用》，**3**(1)，75–81 (1993)。2.3

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455
Email address: dbilyk@math.umn.edu

Department of Mathematics, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium
Email address: damir.ferizovic@kuleuven.be

School of Mathematical & Statistical Sciences, The University of Texas Rio Grande Valley, Brownsville, TX 78520*Email address*: alexey.glazyrin@utrgv.eduDepartment of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240*Email address*: ryan.w.matzke@vanderbilt.eduSchool of Mathematics, Georgia Insititute of Technology, Atlanta, GA 30332*Email address*: j.park@gatech.edu
Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240*Email address*: oleksandr.vlasiuk@vanderbilt.edu