arXiv:2303.12288v1 [math.AP] 22 Mar 2023

根据边界信息确定热弹性系统的系数

XIAOMING TAN

ABSTRACT. 给定一个带有光滑边界∂M的紧黎曼流形（M, g），我们给出具有变系数$\lambda, \mu, \alpha, \beta \in C^\infty(M)$的热弹性狄利克雷到¯诺伊曼映射 Λ_g的全符号的显式表达式。我们证明， Λ_g可以唯一确定边界上系数的任意阶偏导数。此外，对于一个非空开子集 $\Gamma \subset \partial M$，假设流形和系数在 Γ上实解析，我们证明 Λ_g 可以唯一确定整个流形 M 上的¯系数。

1. INTRODUCTION

本文将研究热弹性卡尔德龙问题，即能否通过边界信息唯一确定热弹性体的拉梅系数 λ, μ 以及另外两个物理系数 α, β？设（M, g）为一个维数为 n 、带有光滑边界 ∂M的紧黎曼流形。我们将流形 M 视为非均匀各向同性热弹性体。假设热弹性体的系数 $\beta \in C^\infty(M)$、拉梅系数 $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$和热传导系数 $\alpha \in C^\infty(M)$满足 $\mu > 0$, $\lambda + \mu \geqslant 0$ 和 $\alpha > 0$。

对于位移向量场 $\boldsymbol{u} \in (C^\infty(M))^n$ 以及温度变化$\theta \in C^\infty(M)$，我们将具有变系数的热弹性算子定义为 T_g （参见[25, 32, 36, 51]）

$$T_g \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \theta \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} L_g + \rho\omega^2 & -\beta \operatorname{grad} \\ i\omega\theta_0 \beta \operatorname{div} & \alpha\Delta_g + i\omega\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \theta \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其中，具有变系数的 Lam´e 算子 L_g 定义为（见 [51]）

$$\begin{aligned} L_g \boldsymbol{u} := \mu\Delta_B \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu \operatorname{Ric}(\boldsymbol{u}) \\ + (\operatorname{grad} \lambda) \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (S\boldsymbol{u})(\operatorname{grad} \mu). \end{aligned} \tag{1.2}$$

这里我们分别用 grad、div Δ_g、 Δ_B 和 Ric 表示梯度算子、散度算子、拉普拉斯–贝尔特拉米算子、博赫纳拉普拉斯算子以及

2020 年数学学科分类：35R30、74F05、74E05、58J32、58J40。关键词与短语：热弹性系统；热弹性 Calder´on 问题；热弹性狄利克雷到诺伊曼映射；反问题；伪微分算子。

北京理工大学数学与统计学院，Xiaoming Tan，中国北京 100081。电子邮箱：xtan@bit.edu.cn。

关于度量 g的里奇张量。应力张量 S (也称为变形张量)，其类型为 (1, 1)，定义如下（见 [53, 第 562]）

$$S\boldsymbol{u} := \nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^t,$$

¯系数 $\beta \in C^\infty(M)$取决于热弹性体的 Lam´e 系数和线膨胀系数， γ 为单位体积比热， θ_0 为参考温度， ρ 为热弹性体的密度， ω 为角频率，且$i = \sqrt{-1}$。特别地，欧几里得区域中的常系数 Lam´e 算子具有如下形式：$L\mathrm{u} = \mu\Delta\mathrm{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathrm{u})$（见 [25, 26]）。

我们考虑热弹性系统的以下狄利克雷边值问题

$$\begin{cases} T_g \boldsymbol{U} = 0 & \text{in } M, \\ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}\ \theta)^t$ 且上标 t 表示转置。问题 (1.3) 是经典弹性系统边值问题的推广。特别地，当M 为有界欧几里得区域且不考虑温度时，问题 (1.3) 化为相应的经典弹性系统问题。

对于任意边界值 $\boldsymbol{V} \in (H^{1/2}(\partial M))^{n+1}$，根据椭圆算子理论，存在唯一解 $\boldsymbol{U}$ 满足上述问题（1.3）。因此，我们将与热弹性算子 Λ_g相关的热弹性狄利克雷到诺伊曼映射定义为 $H^{1/2}(\partial M))^{n+1} \to (H^{-1/2}(\partial M))^{n+1}$（见 T_g）[36]

$$\Lambda_g(\boldsymbol{U}|_{\partial M}) := \begin{bmatrix} \lambda\nu \operatorname{div} + \mu\nu S & -\beta\nu \\ 0 & \alpha\partial_\nu \end{bmatrix} \boldsymbol{U} \quad \text{on } \partial M, \tag{1.4}$$

其中 ν 是边界 ∂M的外单位法向量。热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 是定义在边界上的一阶椭圆自伴伪微分算子。本文将研究黎曼流形上的热弹性 Calder´on 问题，即通过热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g确定系数λ、 μ、 α、 $\beta \in C^\infty$（M）。通过给出 Λ_g 及其全符号 σ（Λ_g）的显式表达式，我们证明 Λ_g 能够唯一确定系数 λ、 μ、 α、 β。

我们简要回顾经典 Calder´on 问题和弹性 Calder´on 问题的一些唯一性结果。经典 Calder´on 问题[4]：能否通过在介质边界进行电压和电流测量，唯一确定该介质的电导率？这一问题已被研究数十年。对于具有光滑边界 $\partial\Omega n \geqslant 2$的有界欧几里得区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ， Kohn 和 Vogelius[21] 证明了关于边界上C^∞-电导率的著名唯一性结果；也就是说，若$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$，则对所有多重指标$J \in \mathbb{N}^n$都有 $\frac{\partial^{|J|}\gamma_1}{\partial x^J}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^{|J|}\gamma_2}{\partial x^J}\Big|_{\partial\Omega}$。这解决了实解析范畴中的边界唯一性问题。他们在[22]中将唯一性结果推广到了分片实解析电导率。在维数为 $n \geqslant 3$的情形下，Sylvester 和 Uhlmann 在著名论文 [50] 中通过构造复几何光学

解。数十年来，经典 Calder´on 问题一直备受关注（例如，参见 [2,3,5,10,13,21,22,27,38,38,48–50] 及其中的参考文献）。关于经典 Calder[55, 56] on 问题及相关主题，读者还可参阅综述文章´。

对于弹性 Calder´on 问题，已有一些部分唯一性结果，用于根据边界测量确定 Lam´e 系数。对于边界为光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界欧几里得区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，Nakamura 和 Uhlmann [43]证明，在所有维度下都可以确定边界上的 Lam´e 系数的完整泰勒级数 $n \geqslant 2$；对于二维情形中的一般各向异性弹性张量，也可以如此。在 [16]Imanuvilov 和 Yamamoto 还证明了 Lam´e 系数 $\lambda, \mu \in C^{10}(\bar{\Omega})$ 的全局唯一性。在三维欧几里得区域中，Nakamura 和 Uhlmann [41, 42] 以及 Eskin 和 Ralston [9] 证明，只要 $\nabla\mu$ 在适当范数下足够小，Lam´e 系数便具有全局唯一性。然而，在维数 $n \geqslant 3$ 的情形下，若不作小性假设（$\|\nabla\mu\| < \varepsilon_0$ 对某个小的正数 ε_0），Lam´e 系数 $\lambda, \mu \in C^\infty(\Omega)$ 的全局唯一性仍是一个未解决问题（见 [17, p. 210]）。关于弹性 Calder´on 问题，读者还可参阅 [1, 14, 15, 40]。

最近，Tan 和 Liu [51] 给出了黎曼流形 M 上弹性狄利克雷到诺伊曼映射全符号的显式表达式，并证明弹性狄利克雷到诺伊曼映射唯一确定边界上 Lam´é 系数的所有阶偏导数。此外，对于一个非空开子集 $\Gamma \subset \partial M$，假设流形及 Lam´é 系数在 Γ 上实解析，他们证明弹性狄利克雷到诺伊曼映射唯一确定整个流形 M 上的 Lam´é 系数。

数十年来，数学、物理和工程领域研究了许多反问题。这里不一一列举与这些主题相关的参考文献。关于麦克斯韦方程组，请参阅 [6,19,33,37,44,46]；关于不可压缩流体，请参阅 [7,8,11,23,24,28,34,39,45]，此外还有许多其他相关文献。关于其他类型的狄利克雷到诺伊曼映射的研究，也请参阅[29–31,35,36] 及其中的参考文献。

为简便起见，我们用 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵，

$$[a_\beta^\alpha] := \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix},$$

and

$$\begin{bmatrix} [a_k^j] & [b^j] \\ [c_k] & d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} [a_\beta^\alpha] & [a_n^\alpha] & [b^\alpha] \\ [a_\beta^n] & a_n^n & b^n \\ [c_\beta] & c_n & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n & b^n \\ c_1 & \dots & c_n & d \end{bmatrix},$$

其中 $1 \leqslant \alpha、\ \beta \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant j、\ k \leqslant n$。

本文的主要结果如下三个定理所示。

定理 1.1. 设 (M,g) 是一个维数为 n 、具有光滑边界 ∂M 的紧黎曼流形。假设系数 $\beta \in C^\infty(M)$、Lam ´ 系数_ _$\lambda, \mu \in C^\infty(M)$ 以及热传导系数 $\alpha \in C^\infty(M)$ 满足 $\mu > 0, \lambda+\mu \geqslant 0$ 和 $\alpha > 0$。设 $\sigma(\Lambda_g) \sim \sum_{j\leqslant 1} p_j(x,\xi')$ 为热弹性 Dirichlet-to-Neumann 映射 Λ_g的全符号。那么

$$p_1 = \begin{bmatrix} \mu|\xi'|I_{n-1} + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+3\mu)|\xi'|}[\xi^\alpha\xi_\beta] & -\frac{2i\mu^2}{\lambda+3\mu}[\xi^\alpha] & 0 \\ \frac{2i\mu^2}{\lambda+3\mu}[\xi_\beta] & \frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}|\xi'| & 0 \\ 0 & 0 & \alpha|\xi'| \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

$$p_0 = \begin{bmatrix} \mu I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} q_0 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda[\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}] & \lambda\Gamma^\alpha_{\alpha n} & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

$$p_{-m} = \begin{bmatrix} \mu I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} q_{-m}, \quad m \geqslant 1, \tag{1.7}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $\xi' = (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_{n-1})$, $\xi^\alpha = g^{\alpha\beta}\xi_\beta$, $|\xi'| = \sqrt{\xi^\alpha\xi_\alpha}$和 $q_{-m}\,(m \geqslant 0)$ 由 (2.11) 在第 2 节中给出。

对于黎曼流形上具有常系数的热弹性狄利克雷到诺伊曼映射，其对应的全符号已在 [36] 中得到。对于具有常系数的弹性狄利克雷到诺伊曼映射，其对应的全符号已在 [32] 中得到。在欧几里得背景下的热弹性波动方程研究中，热弹性狄利克雷到诺伊曼映射的主符号也已在 [57] 和 [58] 中得到研究。

通过研究热弹性狄利克雷到诺伊曼映射的全符号 Λ_g，我们证明了以下结果：

定理 1.2. 设 (M,g) 是一个维数为 n 、具有¯光滑边界 ∂M的紧黎曼流形。假设系数 $\beta \in C^\infty(M)$、拉梅系数 ´_ _λ、 $\mu \in C^\infty(M)$ 以及热传导系数 $\alpha \in C^\infty(M)$ 满足 $\mu > 0$、 $\lambda+\mu \geqslant 0$和 $\alpha > 0$。那么，对于所有多重指标 J，热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 能够唯一确定边界上的$\frac{\partial^{|J|}\lambda}{\partial x^J}$ 、 $\frac{\partial^{|J|}\mu}{\partial x^J}$ 、 $\frac{\partial^{|J|}\alpha}{\partial x^J}$ 和 $\frac{\partial^{|J|}\beta}{\partial x^J}$ 。

定理 1.2 中的唯一性结果可推广到实解析情形下的整个流形。

定理 1.3. 设 (M,g) 是一个维数为 n 、具有光滑边界 ∂M的紧黎曼流形，且 $\Gamma \subset \partial M$ 是一个非空开子集。假设该流形直至 Γ 均为实解析，且系数 λ、 μ、 α、 β 直至Γ 也均为实解析，并满足 $\mu > 0$、 $\lambda+\mu \geqslant 0$ 和 $\alpha > 0$。那么，热弹性狄利克雷到诺伊曼¯映射 Λ_g 能够唯一确定 M上的 λ、 μ、 α 和 β 。

定理 1.3 表明，实解析黎曼流形上的实解析系数具有全局唯一性。据我们所知，这是首个全局

热弹性中黎曼流形上的变系数唯一性结果。显然，定理 1.3 对于实解析有界欧几里得区域同样成立。

本文的主要思路如下。首先，在 [32] Liu 建立了一种方法，可用于计算常系数弹性狄利克雷到诺伊曼映射的全符号。在 [51], 中，得到了变系数弹性狄利克雷到诺伊曼映射的全符号。在 [36]中，得到了常系数热弹性狄利克雷到诺伊曼映射的全符号。结合 [32, 36, 51] 中的方法和结果，我们可以处理热弹性中变系数的情形。随后，我们将边界展平，并在边界邻域内引入黎曼度量，给出边界法坐标下变系数热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 的局部表示，即

$$\Lambda_g = A\Big(-\frac{\partial}{\partial x_n}\Big) - D,$$

其中， A 和 D 是两个矩阵。接着，我们寻找热弹性算子 T_g的如下因式分解，并得到

$$A^{-1}T_g = I_{n+1}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + B\frac{\partial}{\partial x_n} + C = \Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n} + B - Q\Big)\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n} + Q\Big),$$

其中， B、 C 是两个微分算子， Q 是一个伪微分算子。因此，我们得到方程

$$Q^2 - BQ - \Big[\frac{\partial}{\partial x_n}, Q\Big] + C = 0,$$

其中， $[\cdot,\cdot]$ 是交换子。最后，我们求解全符号方程

$$\sum_J \frac{(-i)^{|J|}}{J!}\partial_{\xi'}^J q\,\partial_{x'}^J q - \sum_J \frac{(-i)^{|J|}}{J!}\partial_{\xi'}^J b\,\partial_{x'}^J q - \frac{\partial q}{\partial x_n} + c = 0,$$

这是一个矩阵方程，其中求和遍历所有多重指标 $J, \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ 和 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$。这里， b, c 和 q 分别是算子 B, C 和 Q 的全符号。因此，我们根据 Q 的全符号，得到 Λ_g的全符号 $\sigma(\Lambda_g) \sim \sum_{j\leqslant 1} p_j(x,\xi')$。需要注意的是，计算矩阵值伪微分算子的全符号相当困难。通常，上述全符号方程无法精确求解，换言之，不存在一个以矩阵方程系数表示其解的一般公式。因此，为了克服计算伪微分算子符号以及求解变系数符号方程的困难，我们发展了前期工作 [32, 36, 51] 中的方法，以处理热弹性中黎曼流形上的变系数唯一性问题。符号 $p_j(x,\xi')$包含了边界上系数 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ 及其导数的信息，因此我们可以证明，这些系数可由热弹性狄利克雷到诺伊曼映射唯一确定。此外，我们证明，若流形和系数均为实解析，则热弹性狄利克雷到诺伊曼映射可以唯一确定整个¯流形 M 上的系数。

本文结构安排如下。在第2 节中，我们给出边界法坐标下热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 的显式表达式，并推导变系数热弹性算子 T_g 的因式分解，随后计算 Λ_g 和伪微分算子 Q的全符号。在第3节中，我们证明关于边界确定的定理1.1 和定理1.2 。最后，第4 节用于证明关于实解析情形下全局唯一性的定理1.3 。

2. Symbols of the pseudodifferential operators

设 (M, g) 是一个维数为 n 、具有光滑边界 ∂M 的紧黎曼流形。在局部坐标 $\{x_j\}_{j=1}^n$ 中，我们分别用 $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1}^n$ 和 $\{dx_j\}_{j=1}^n$ 表示点 $x \in M$ 处切空间 T_xM 和余切空间 T_x^*M 的自然基。下文将使用爱因斯坦求和约定。除非另有说明，希腊指标的取值范围为 1 到 $n-1$，而罗马指标的取值范围为 1 到 n。于是，黎曼度量 g 由 $g = g_{jk}\, dx_j \otimes dx_k$ 给出。

设 $\nabla_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$ 为关于 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $\nabla^j = g^{jk}\nabla_k$ 的协变导数。对于位移向量场 $\boldsymbol{u}$，我们用 div 表示散度算子，即

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla_j u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x_j} + \Gamma^j_{jk} u^k, \quad \boldsymbol{u} = u^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

这里的克里斯托费尔符号

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{ml} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \Big),$$

以及 $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$。对于光滑函数 $f \in C^\infty(M)$，梯度算子为

$$\operatorname{grad} f = \nabla^j f \frac{\partial}{\partial x_j} = g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad f \in C^\infty(M). \tag{2.2}$$

拉普拉斯–贝尔特拉米算子为

$$\Delta_g f = g^{jk} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \Gamma^l_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Big), \quad f \in C^\infty(M). \tag{2.3}$$

The Lam´e 算子（1.2）可改写为变系数形式（参见 [51]）

$$\begin{aligned} (L_g \boldsymbol{u})^j = {} & \mu \Delta_g u^j + (\lambda + \mu) \nabla^j \nabla_k u^k + (\nabla^j \lambda) \nabla_k u^k + (\nabla^k \mu)(\nabla_k u^j + \nabla^j u_k) \\ & + \mu g^{kl} \Big(2\Gamma^j_{km} \frac{\partial u^m}{\partial x_l} + \frac{\partial \Gamma^j_{kl}}{\partial x_m} u^m \Big), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

这里简要介绍相对于边界 ∂M 的测地坐标的构造（参见 [27] 或 [52, 第 532] 页）。对于每个边界点 $x' \in \partial M$，令 $\gamma_{x'}\colon [0, \varepsilon) \to M$ 表示从 x' 出发且垂直于 ∂M 的单位速度测地线。如果 $x' := \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ 是 ∂M 在 $x_0 \in \partial M$ 附近的任意局部坐标，我们可以将 $\bar{}$ 平滑地延拓为 M 中 x_0 邻域上的函数，方法是令它们保持常数

沿每条法向测地线 $\gamma_{x'}$ 取值。然后，若定义 x_n 为沿每条$\gamma_{x'}$的参数，则容易得出，$\{x_1,\dots,x_n\}$ 构成 M 在 x_0 某个邻域内的坐标，我们称之为由 $\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ 确定的边界法坐标。在这些坐标中，M 中的 $x_n>0$，且 ∂M 局部由 $x_n=0$ 刻画。标准计算表明，度量具有形式 $g=g_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta+dx_n^2$。

命题 2.1. 在边界法坐标中，热弹性系统的狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 可写为

$$\Lambda_g=A\Big(-\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)-D, \tag{2.5}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}\mu I_{n-1} & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$D=\begin{bmatrix}0 & \mu\big[g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & 0\\ \lambda\big[\frac{\partial}{\partial x_\beta}+\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\big] & \lambda\Gamma^\alpha_{\alpha n} & -\beta\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

证明。 此证明与 [36, 命题 2.1] 的证明类似。 □

In 在边界法坐标中，我们将拉普拉斯–贝尔特拉米算子写为

$$\Delta_g=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\Gamma^\alpha_{\alpha n}\frac{\partial}{\partial x_n}+g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\Big(g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}+\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\Big)\frac{\partial}{\partial x_\beta}. \tag{2.8}$$

结合此式与（1.1）、（1.2）、（2.1）–（2.4），我们可推出（参见 [36, 51]）

$$A^{-1}T_g=I_{n+1}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+B\frac{\partial}{\partial x_n}+C, \tag{2.9}$$

其中 A 由（2.6）给出，$B=B_1+B_0$，$C=C_2+C_1+C_0$，以及

$$B_1=(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\mu}\big[g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & 0\\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\big[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix}\Gamma^\alpha_{\alpha n}I_{n-1}+2[\Gamma^\alpha_{n\beta}] & 0 & 0\\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}[\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}] & \Gamma^\alpha_{n\alpha} & -\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\\ 0 & \frac{i\omega\beta\theta_0}{\alpha} & \Gamma^\alpha_{n\alpha}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_n}I_{n-1} & \frac{1}{\mu}[\nabla^\alpha\lambda] & 0\\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\big[\frac{\partial\mu}{\partial x_\beta}\big] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial(\lambda+2\mu)}{\partial x_n} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta})I_{n-1}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\big[g^{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x_\gamma\partial x_\beta}\big] & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} & 0\\ 0 & 0 & g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}\big((g^{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}+\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha})\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big)I_{n-1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\big(g^{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}+\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\big)\frac{\partial}{\partial x_\beta} & 0\\ 0 & 0 & \big(g^{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}+\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\big)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\end{bmatrix}$$
$$+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\begin{bmatrix}\big[g^{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\rho\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & \big[g^{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\rho n}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}2\big[g^{\gamma\rho}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & 2\big[g^{\gamma\rho}\Gamma^{\alpha}_{\rho n}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & -\frac{\beta}{\mu}\big[g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big]\\ \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\big[g^{\gamma\rho}\Gamma^{n}_{\rho\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & 0 & 0\\ \frac{i\omega\beta\theta_0}{\alpha}\big[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu}(\nabla^\alpha\mu\frac{\partial}{\partial x_\alpha})I_{n-1}+\frac{1}{\mu}\big[\nabla^\alpha\lambda\frac{\partial}{\partial x_\beta}+g^{\alpha\gamma}\frac{\partial\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\big] & \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_n}\big[g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & 0\\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\big[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\big] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\nabla^\alpha\mu\frac{\partial}{\partial x_\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$C_0=(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu}\big[g^{\alpha\gamma}\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\rho\beta}}{\partial x_\gamma}\big] & \frac{1}{\mu}\big[g^{\alpha\gamma}\frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\rho n}}{\partial x_\gamma}\big] & 0\\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\big[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}}{\partial x_n}\big] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\alpha n}}{\partial x_n} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\big[g^{ml}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ml}}{\partial x_\beta}\big] & \big[g^{ml}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ml}}{\partial x_n}\big] & 0\\ \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\big[g^{ml}\frac{\partial\Gamma^{n}_{ml}}{\partial x_\beta}\big] & \frac{\mu}{\lambda+2\mu}g^{ml}\frac{\partial\Gamma^{n}_{ml}}{\partial x_n} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\frac{\rho\omega^2}{\mu}I_{n-1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} & 0\\ \frac{i\omega\beta\theta_0}{\alpha}[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}] & \frac{i\omega\beta\theta_0}{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\alpha n} & \frac{i\omega\gamma}{\alpha}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu}\big[(\nabla^\alpha\lambda)\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}-\frac{\partial\mu}{\partial x_\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}\big] & \frac{1}{\mu}\big[(\nabla^\alpha\lambda)\Gamma^{\beta}_{\beta n}-\frac{\partial\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_n}\big] & 0\\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\Gamma^{\alpha}_{\alpha n} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

然后我们推导热弹性算子 T_g 的微局部因式分解。

命题 2.2. 存在一个关于 x' 的一阶伪微分算子 $Q(x,\partial_{x'})$，它关于 x_n 平滑依赖，满足

$$A^{-1}T_g=\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}+B-Q\Big)\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}+Q\Big)$$

模去一个平滑算子。此外，设 $q(x,\xi')\sim\sum_{j\leqslant 1}q_j(x,\xi')$ 为 $Q(x,\partial_{x'})$ 的全符号。那么

$$q_1=|\xi'|I_{n+1}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}F_1, \tag{2.10}$$

$$q_{-m-1}=\frac{1}{2|\xi'|}E_{-m}-\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+3\mu)|\xi'|^2}(F_2E_{-m}+E_{-m}F_1)$$
$$-\frac{(\lambda+\mu)^2}{4(\lambda+3\mu)^2|\xi'|^3}F_2E_{-m}F_1,\quad m\geqslant -1, \tag{2.11}$$

其中

$$F_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{|\xi'|}[\xi^\alpha\xi_\beta] & i[\xi^\alpha] & 0\\ i[\xi_\beta] & -|\xi'| & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

$$F_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{|\xi'|}[\xi^\alpha\xi_\beta] & -\frac{i(\lambda+2\mu)}{\mu}[\xi^\alpha] & 0\\ -\frac{i\mu}{\lambda+2\mu}[\xi_\beta] & -|\xi'| & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$\xi^\alpha=g^{\alpha\beta}\xi_\beta$, $|\xi'|=\sqrt{\xi^\alpha\xi_\alpha}$, E_1, E_0 和 E_{-m} $(m\geqslant 1)$ 由以下各式给出：（2.17）、（2.19）和（2.21）。

证明。由（2.9）可得

$$I_{n+1}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+B\frac{\partial}{\partial x_n}+C=\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}+B-Q\Big)\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}+Q\Big).$$

等价地,

$$Q^2-BQ-\Big[I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n},Q\Big]+C=0, \tag{2.14}$$

其中对易子 $\big[I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n},Q\big]$ 的定义如下：对于任意光滑函数 $f\in C^\infty(M)$,

$$\Big[I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n},Q\Big]f:=I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}(Qf)-Q\Big(I_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)f$$
$$=\frac{\partial Q}{\partial x_n}f.$$

设 $q=q(x,\xi')$ 为算子 $Q(x,\partial_{x'})$ 的全符号，我们记作

$$q(x,\xi')\sim\sum_{j\leqslant 1}q_j(x,\xi')$$

其中 $q_j(x,\xi')$ 关于 ξ' 是 j 次齐次的。令

$$b(x,\xi')=b_1(x,\xi')+b_0(x,\xi')$$

and

$$c(x,\xi')=c_2(x,\xi')+c_1(x,\xi')+c_0(x,\xi')$$

分别为 B 和 C 的全符号。我们用 $\xi^\alpha = g^{\alpha\beta}\xi_\beta$ 和 $|\xi'| = \sqrt{\xi^\alpha \xi_\alpha}$ 表示。因此，我们有 $b_0 = B_0$、$c_0 = C_0$ 和

$$b_1 = i(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu}[\xi^\alpha] & 0 \\ \frac{1}{\lambda+2\mu}[\xi_\beta] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c_2 = -\begin{bmatrix} |\xi'|^2 I_{n-1} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}[\xi^\alpha\xi_\beta] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu}|\xi'|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\xi'|^2 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = i\begin{bmatrix} \big(\xi^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\big) I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\big(\xi^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\big) & 0 \\ 0 & 0 & \xi^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{i(\lambda+\mu)}{\mu}\begin{bmatrix} [\xi^\alpha \Gamma^\gamma_{\gamma\beta}] & \Gamma^\beta_{\beta n}[\xi^\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2i[\xi^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}] & 2i[\xi^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma n}] & -\frac{i\beta}{\mu}[\xi^\alpha] \\ \frac{2i\mu}{\lambda+2\mu}[\xi^\gamma \Gamma^n_{\gamma\beta}] & 0 & 0 \\ -\frac{\omega\beta\theta_0}{\alpha}[\xi_\beta] & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ i\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}(\xi_\alpha \nabla^\alpha \mu) I_{n-1} + \frac{1}{\mu}\big[\xi_\beta \nabla^\alpha \lambda + \xi^\alpha \frac{\partial \mu}{\partial x_\beta}\big] & \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_n}[\xi^\alpha] & 0 \\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial x_n}[\xi_\beta] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\xi_\alpha \nabla^\alpha \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，我们得到以下关于（2.14）的全符号方程

$$\sum_J \frac{(-i)^{|J|}}{J!}\partial^J_{\xi'} q\, \partial^J_{x'} q - \sum_J \frac{(-i)^{|J|}}{J!}\partial^J_{\xi'} b\, \partial^J_{x'} q - \frac{\partial q}{\partial x_n} + c = 0, \tag{2.15}$$

其中，求和遍及所有多重指标 J。

我们将递归地确定 q_j，使得（2.15）模 $S^{-\infty}$成立。将（2.15）中二次齐次项归组，得到

$$q_1^2 - b_1 q_1 + c_2 = 0.$$

通过求解上述矩阵方程，我们得到主符号 q_1 的显式表达式（2.10），其中 Q。这里我们取 q_1 为正定矩阵（参见 [32,36,51]）。

将（2.15）中的一次齐次项归组，得到以下西尔维斯特方程：

$$(q_1 - b_1)q_0 + q_0 q_1 = E_1, \tag{2.16}$$

其中

$$E_1 = i\sum_\alpha \frac{\partial(q_1 - b_1)}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial q_1}{\partial x_\alpha} + b_0 q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial x_n} - c_1. \tag{2.17}$$

将（2.15）中的零次齐次项归组，可得

$$(q_1 - b_1)q_{-1} + q_{-1} q_1 = E_0, \tag{2.18}$$

其中

$$E_0 = i\sum_{\alpha}\Big(\frac{\partial(q_1-b_1)}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial q_0}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial q_0}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial q_1}{\partial x_\alpha}\Big)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 q_1}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\beta}\frac{\partial^2 q_1}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}$$
$$-q_0^2+b_0q_0+\frac{\partial q_0}{\partial x_n}-c_0. \tag{2.19}$$

递归进行，并将次数为 $-m$ $(m\geqslant 1)$ 的齐次项在 (2.15) 中分组，可得

$$(q_1-b_1)q_{-m-1}+q_{-m-1}q_1=E_{-m}, \tag{2.20}$$

其中

$$E_{-m}=b_0q_{-m}+\frac{\partial q_{-m}}{\partial x_n}-i\sum_{\alpha}\frac{\partial b_1}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial q_{-m}}{\partial x_\alpha}-\sum_{\substack{-m\leqslant j,k\leqslant 1\\ |J|=j+k+m}}\frac{(-i)^{|J|}}{J!}\partial_{\xi'}^J q_j\,\partial_{x'}^J q_k \tag{2.21}$$

对于 $m\geqslant 1$。利用[32,36,51] 中建立的方法，我们求解方程 (2.16) 和 (2.20)，得到 (2.18)
q_{-m-1} 对于 $m\geqslant -1$，见 (2.11)。 □

由上述命题 2.2 可得伪微分算子 Q的全符号。这意味着在边界上，模去一个平滑算子后可得 Q 。

命题 2.3。在边界法坐标下，热弹性狄利克雷到诺依曼映射 Λ_g 可表示为

$$\Lambda_g = AQ-D \tag{2.22}$$

模平滑算子，其中 A 和 D 分别由 (2.6) 和 (2.7)给出。

证明。这一证明与 [36, 命题 3.2] 的证明类似。 □

3. Determining coefficients on the boundary

本节将利用热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 λ的全符号，证明边界上系数 μ、α 和 β的唯一性结果。我们首先证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。 设 $\sigma(\Lambda_g)\sim\sum_{j\leqslant 1}p_j(x,\xi')$ 为热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 的全符号。根据 (2.22) 和 (2.7)，我们有

$$p_1 = Aq_1-d_1, \tag{3.1}$$
$$p_0 = Aq_0-d_0, \tag{3.2}$$
$$p_{-m} = Aq_{-m},\quad m\geqslant 1, \tag{3.3}$$

其中 A 由 (2.6) 给出，且

$$d_1 = \begin{bmatrix} 0 & i\mu[\xi^\alpha] & 0 \\ i\lambda[\xi_\beta] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda[\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}] & \lambda\Gamma^\alpha_{\alpha n} & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

因此，很容易得到（1.5）–（1.7）。 □

接下来，我们证明边界上系数的唯一性。

定理1.2的证明。由（1.5）–（1.7）可知，Lam´e 系数 λ 和 μ只出现在 $n \times n$ 子矩阵中。在 Lam´e 系统中，$\frac{\partial^{|J|}\lambda}{\partial x^J}$ 和$\frac{\partial^{|J|}\mu}{\partial x^J}$ 在边界上的唯一性已针对所有多重指标 J 在 [51]中得到证明。显然，这一特定结果在热弹性系统中同样成立，且证明与[51]相同。因此，我们只需证明系数 α 和 β 在边界上的唯一性。

由（1.5）可知，$n+1$，$n+1$）项 p_1 为

$$(p_1)^{n+1}_{n+1} = \alpha|\xi'|.$$

这表明 p_1 唯一确定了边界上的 α。此外，$\frac{\partial\alpha}{\partial x_\gamma}$的 $1 \leqslant \gamma \leqslant n-1$ 切向导数也可由边界上的 p_1 唯一确定。利用 [51] 中的方法，我们求解（2.16）并得到

$$q_0 = \tilde{q_0} + \frac{1}{2|\xi'|}E_1' - \frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+3\mu)|\xi'|^2}(F_2E_1' + E_1'F_1) - \frac{(\lambda+\mu)^2}{4(\lambda+3\mu)^2|\xi'|^3}F_2E_1'F_1,$$

其中，$\tilde{q_0}$ 是相应常系数方程的解（参见 [36,第 13]页），F_1 而 F_2 分别由（2.12）和（2.13）给出。

$$E_1' = b_0'q_1 - c_1'.$$

Here

$$b_0' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_n}I_{n-1} & \frac{1}{\mu}[\nabla^\alpha\lambda] & 0 \\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial\mu}{\partial x_\beta}\right] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial(\lambda+2\mu)}{\partial x_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$c_1' = i\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}(\xi_\alpha\nabla^\alpha\mu)I_{n-1} + \frac{1}{\mu}\left[\xi_\beta\nabla^\alpha\lambda + \xi^\alpha\frac{\partial\mu}{\partial x_\beta}\right] & \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_n}[\xi^\alpha] & 0 \\ \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}[\xi_\beta] & \frac{1}{\lambda+2\mu}\xi_\alpha\nabla^\alpha\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，我们看到 q_0 具有如下形式（见 [36, 第 13] 页）

$$q_0 = \begin{bmatrix} * & * & \frac{i\beta}{(\lambda+3\mu)|\xi'|}[\xi_\alpha] \\ * & * & -\frac{\beta}{\lambda+3\mu} \\ \frac{\mu\omega\beta\theta_0}{\alpha(\lambda+3\mu)|\xi'|}[\xi_\beta] & \frac{i\mu\omega\beta\theta_0}{\alpha(\lambda+3\mu)} & * \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

其中， $*$ 表示我们不关心的项（当然，这些项可以显式计算）。

因此，结合式（3.5）、（3.2）和（3.4），我们得到（n，$n+1$）项 $(p_0)^{\ n}_{n+1}$，即

$$(p_0)^n_{n+1} = \beta - \frac{\beta(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} = \frac{\beta\mu}{\lambda+3\mu}.$$

这意味着，对于 $1 \leqslant \gamma \leqslant n-1$， p_0 唯一确定边界上的 β 以及边界上的切向导数$\frac{\partial\beta}{\partial x_\gamma}$，因为根据前面的论证， λ 和 μ 已在边界上确定。

根据上述讨论，由式（3.2）可知， q_0 由 p_0唯一确定，因为 λ、 μ、 α和 β的边界值已被唯一确定。由式（2.16），我们可以根据 q_0确定 E_1 。对于 $k \geqslant 0$，我们用$\mathcal{T}_{-k} = \mathcal{T}_{-k}(\lambda, \mu, \alpha, \beta)$表示仅涉及 λ、 μ、 α、 β的边界值及其阶数至多为 k 的法向导数的项（这些量已被唯一确定）。注意，在不同的表达式中， $\mathcal{T}_{-k}$ 可能不同。

由（2.17），可得

$$E_1 = b_0 q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial x_n} - c_1 + \mathcal{T}_0. \tag{3.6}$$

根据（3.3）和（2.18），我们知道 q_{-1} 由 p_{-1}唯一确定，且 E_0 可根据 q_{-1}确定。由（2.19）可知

$$E_0 = \frac{\partial q_0}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-1}. \tag{3.7}$$

由（3.5）可得，n、$n+1$）项（$\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$）$^{\ n}_{n+1}$ 以及第（$n+1$、n）项（$\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$）$^{\ n+1}_{\ n}$在$\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$中分别为

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial q_0}{\partial x_n}\right)^{\ n}_{n+1} &= -\frac{\frac{\partial\beta}{\partial x_n}(\lambda+3\mu) - \beta(\frac{\partial\lambda}{\partial x_n} + 3\frac{\partial\mu}{\partial x_n})}{(\lambda+3\mu)^2} \\
&= -\frac{1}{\lambda+3\mu}\frac{\partial\beta}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-1}, \qquad (3.8) \\
\left(\frac{\partial q_0}{\partial x_n}\right)^{\ n+1}_{\ n} &= \frac{-\beta\mu(\lambda+3\mu)\frac{\partial\alpha}{\partial x_n} + \alpha\mu(\lambda+3\mu)\frac{\partial\beta}{\partial x_n} + \alpha\beta(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x_n} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial x_n})}{\alpha^2(\lambda+3\mu)^2} \\
&= -\frac{\beta\mu}{\alpha^2(\lambda+3\mu)}\frac{\partial\alpha}{\partial x_n} + \frac{\mu}{\alpha(\lambda+3\mu)}\frac{\partial\beta}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-1}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

由于 α、β、λ、μ、$\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}$ 和 $\frac{\partial\mu}{\partial x_n}$ 已在边界上确定，因此可通过边界上的（$\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$）$^{\ n}_{n+1}$ 确定 $\frac{\partial\beta}{\partial x_n}$，并可通过边界上的（$\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$）$^{\ n+1}_{\ n}$ 确定 $\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}$。这意味着 p_{-1} 在边界上唯一确定$\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}$ 和 $\frac{\partial\beta}{\partial x_n}$。

由（2.16）可得

$$(q_1 - b_1)\frac{\partial q_0}{\partial x_n} + \frac{\partial q_0}{\partial x_n}q_1 = \frac{\partial E_1}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-1}.$$

这意味着， $\frac{\partial E_1}{\partial x_n}$ 可由 $\frac{\partial q_0}{\partial x_n}$ 的知识确定。由（3.3）和（2.20）可知， q_{-2} 由 p_{-2} 唯一确定，而 E_{-1} 可由 q_{-2} 的知识确定。由（2.21）可知

$$E_{-1} = \frac{\partial q_{-1}}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-2}.$$

由（2.20）可得

$$(q_1 - b_1)\frac{\partial q_{-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial q_{-1}}{\partial x_n} q_1 = \frac{\partial E_0}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-2}.$$

这意味着， $\frac{\partial E_0}{\partial x_n}$ 可以根据 $\frac{\partial q_{-1}}{\partial x_n}$ 得到。由（3.7）可得

$$\frac{\partial E_0}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_n^2} + \mathcal{T}_{-2}.$$

因此，由（3.8）和（3.9）可得

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_n^2}\Big)_{n+1}^{n} &= -\frac{1}{\lambda + 3\mu}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_n^2} + \mathcal{T}_{-2}, \\
\Big(\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_n^2}\Big)_{n}^{n+1} &= -\frac{\beta\mu}{\alpha^2(\lambda + 3\mu)}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2} + \frac{\mu}{\alpha(\lambda + 3\mu)}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_n^2} + \mathcal{T}_{-2}.
\end{aligned}$$

由于 $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n}, \frac{\partial \mu}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_n^2}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}$ 和 $\frac{\partial \beta}{\partial x_n}$ 已在边界上确定，因此 $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_n^2}$ 可由边界上的 $(\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_n^2})_{n+1}^{n}$ 确定，而 $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2}$ 可由边界上的 $(\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_n^2})_{n}^{n+1}$ 确定。这意味着 p_{-2} 唯一确定了边界上的 $\frac{\partial \alpha^2}{\partial x_n^2}$ 和 $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_n^2}$。

最后，我们考虑 p_{-m-1} 对于 $m \geqslant 1$。由（3.3）和（2.20）可得 p_{-m-1} 唯一确定 q_{-m-1}，而 E_{-m} 可由 q_{-m-1} 的已知信息确定。由（2.21）可得

$$E_{-m} = \frac{\partial q_{-m}}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-m-1}.$$

由（2.20）可知

$$(q_1 - b_1)\frac{\partial q_{-m}}{\partial x_n} + \frac{\partial q_{-m}}{\partial x_n} q_1 = \frac{\partial E_{-m+1}}{\partial x_n} + \mathcal{T}_{-m-1}.$$

这意味着，可以根据 $\frac{\partial q_{-m}}{\partial x_n}$ 的已知信息确定 $\frac{\partial E_{-m+1}}{\partial x_n}$。

我们用归纳法结束这个证明。假设我们已经证明，通过迭代， E_{-m} 唯一确定

$$\frac{\partial^m E_0}{\partial x_n^m} = \frac{\partial^{m+1} q_0}{\partial x_n^{m+1}} + \mathcal{T}_{-m-1}, \tag{3.10}$$

由于我们有，因此可以进一步确定边界上的 $\frac{\partial^{m+1}\alpha}{\partial x_n^{m+1}}$ 和 $\frac{\partial^{m+1}\beta}{\partial x_n^{m+1}}$

$$\Big(\frac{\partial^{m+1} q_0}{\partial x_n^{m+1}}\Big)_{n+1}^{n} = -\frac{1}{\lambda + 3\mu}\frac{\partial^{m+1}\beta}{\partial x_n^{m+1}} + \mathcal{T}_{-m-1},$$

$$\left(\frac{\partial^{m+1}q_0}{\partial x_n^{m+1}}\right)_n^{n+1} = -\frac{\beta\mu}{\alpha^2(\lambda+3\mu)}\frac{\partial^{m+1}\alpha}{\partial x_n^{m+1}} + \frac{\mu}{\alpha(\lambda+3\mu)}\frac{\partial^{m+1}\beta}{\partial x_n^{m+1}} + \mathcal{T}_{-m-1}.$$

根据（3.3）和（2.20），我们知道 q_{-m-2} 由 p_{-m-2}唯一确定，而 E_{-m-1}可以根据 q_{-m-2}确定。因此， E_{-m-1} 通过迭代唯一确定$\frac{\partial^{m+2}q_0}{\partial x_n^{m+2}}$。由此可得

$$\left(\frac{\partial^{m+2}q_0}{\partial x_n^{m+2}}\right)_{n+1}^{n} = -\frac{1}{\lambda+3\mu}\frac{\partial^{m+2}\beta}{\partial x_n^{m+2}} + \mathcal{T}_{-m-2},$$
$$\left(\frac{\partial^{m+2}q_0}{\partial x_n^{m+2}}\right)_n^{n+1} = -\frac{\beta\mu}{\alpha^2(\lambda+3\mu)}\frac{\partial^{m+2}\alpha}{\partial x_n^{m+2}} + \frac{\mu}{\alpha(\lambda+3\mu)}\frac{\partial^{m+2}\beta}{\partial x_n^{m+2}} + \mathcal{T}_{-m-2}.$$

这意味着， p_{-m-2} 唯一确定边界上的$\frac{\partial^{m+2}\alpha}{\partial x_n^{m+2}}$ 和 $\frac{\partial^{m+2}\beta}{\partial x_n^{m+2}}$。

因此，结合 $\frac{\partial^{|J|}\lambda}{\partial x^J}$ 的唯一性结果、 $\frac{\partial^{|J|}\mu}{\partial x^J}$ （见 [51]）以及上述论证，我们得出结论：对于所有多重指标 J，热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 唯一确定边界上的$\frac{\partial^{|J|}\lambda}{\partial x^J}$ 、$\frac{\partial^{|J|}\mu}{\partial x^J}$ 、 $\frac{\partial^{|J|}\alpha}{\partial x^J}$ 和 $\frac{\partial^{|J|}\beta}{\partial x^J}$。□

4. 全局唯一性

本节旨在证明实解析流形上的实解析系数λ、 μ、 α 和 β的全局唯一性。更具体地说，我们证明热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 唯一确定整个流形 M上的实解析系数¯。

我们回顾黎曼流形上实解析函数和实解析超曲面的定义。设 $f(x)$ 是定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数。对于 $y \in \Omega$，我们称 $f(x)$ 在 y 处实解析，如果存在 $a_J \in \mathbb{R}$ 和 N_y 的一个邻域 y，使得

$$f(x) = \sum_J a_J(x-y)^J$$

对所有 $x \in N_y$ 和 $J \in \mathbb{N}^n$ 均成立。若 $f(x)$ 在开集 Ω 中的每个 $y \in$处都实解析，则称 $f(x)$ 在开集 Ω 上实解析。

设 (M, g) 是一个黎曼流形。若 U 非空，且对于每个点 $x \in U$，都存在从单位开球 $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ 到 x 的一个开邻域 N_x 上的实解析微分同胚，使得 $B(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ 映到 $N_x \cap U$，则称 U 是 M 的一个（$n-1$）维实解析超曲面。

为了证明定理1.3，我们需要以下引理（见 [18, 第65]页）。

引理 4.1。（实解析函数的唯一延拓）设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通开集，且 $f(x)$ 是定义在 M 上的实解析函数。设 $y \in M$。那么，如果我们知道对所有 $J \in \mathbb{N}^n$，$f(x)$ 在 M 中满足 $_{(y)}\partial x^J$，则 $f(x)$ 在 M 中唯一确定。特别地， $f(x)$ 在 M ~~中由其~~在 M 的任意非空开子集上的值唯一确定。

注意，引理 4.1 对定义在实解析流形上的实解析函数仍然成立。最后，我们证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。根据定理 1.2，已证明热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 能够唯一确定边界上的 $\frac{\partial^{|J|}\lambda}{\partial x^J}$、$\frac{\partial^{|J|}\mu}{\partial x^J}$、$\frac{\partial^{|J|}\alpha}{\partial x^J}$ 和 $\frac{\partial^{|J|}\beta}{\partial x^J}$，对所有多重指标 J 均成立。因此，对于任意点 $x_0 \in \Gamma$，根据系数在 $M \cup \Gamma$ 上的解析性，可以在 x_0 的某个邻域内唯一确定这些系数。此外，由引理 4.1 可知，这些系数可以在 M 中唯一确定。因此，结合定理 1.2，我们得出结论：热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 能够在 M 上唯一确定系数 λ、μ、α 和 β。□

注 4.2. 应用 Kohn 和 Vogelius 的方法 [22], ，我们还可以证明，当流形和系数均为分段解析时，热弹性狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_g 可唯一确定系数λ、μ、α和 β在 M上的取值。

Acknowledgements

本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：12271031）和国家重点研发计划（编号：2022YFC3310300）的资助。

References

[1] M. Akamatsu, G. Nakamura 和 S. Steinberg, 《根据边界观测识别 Lam ´e 系数》, 《逆问题》7 (1991), 335–354。[2] K. Astala 和 L. P¨aiv¨arinta, 《平面上的 Calder ´on 逆电导率问题》, 《数学年刊》163 (2006), 265–299。[3] K. Astala、M. Lassas 和 L. P¨aiv¨arinta, 《平面上各向异性电导率的 Calder ´on 逆问题》, 《纯粹与应用数学通讯》30 (2005), 207–224。[4] A. Calder ´on, 《一个反问题边值问题》, 《数值分析及其在连续介质物理中的应用研讨会》, 巴西数学会, 里约热内卢, (1980), 第 65–73 页。[5] P. Caro 和 K. M. Rogers, 《利普希茨电导率下 Calder ´on 问题的全局唯一性》, Forum Math. Pi 4 (2016), e2, 28 页。[6] P. Caro 和 T. Zhou, 《时谐麦克斯韦方程初边值问题的全局唯一性》, Anal. PDE, 7 (2014), 375–405。[7] D. Dos Santos Ferreira、C. Kenig、M. Salo 和 G. Uhlmann, 《极限卡尔曼权与各向异性反问题》, Invent. Math. 178 (2009), 119–171。[8]D. Dos Santos Ferreira、C. Kenig、J. Sj¨ostrand 和 G. Uhlmann, 《根据部分柯西数据确定磁薛定谔算子》, 《数学物理通讯》271 (2007), 467–488。[9] G. Eskin 和 J. Ralston, 《线性各向同性弹性反问题边值问题》, 《逆问题》18 (2002), 第 3 期, 907–921。[10] B. Haberman 和 D. Tataru, 《利普希茨电导率下 Calder ´on 问题的唯一性》, 《杜克数学杂志》162 (2013), 497–516。

[11] H. Heck、J.-N. Wang 和 X. Li, 《不可压缩流体中黏度的识别》, 《印第安纳大学数学杂志》56 (2007), 2489–2510。[12] L. H¨ormander, 《线性偏微分算子》, 柏林: 施普林格, 1964。[13] O. Imanuvilov、G. Uhlmann 和 M. Yamamoto, 《二维情况下带部分数据的 Calder´on 问题》, 《美国数学会杂志》23 (2010), 655–691。[14] O. Imanuvilov、G. Uhlmann 和 M. Yamamoto, 《三维情况下根据部分柯西数据确定 Lam´e 系数的唯一性》, 《逆问题》28 (2012), 第 12 期, 125002, 5 页。[15] O. Imanuvilov 和 M. Yamamoto, 《根据部分柯西数据重建 Lam´e 系数》, 《逆问题与不适定问题杂志》19 (2011), 881–891。[16] O. Imanuvilov 和 M. Yamamoto, 《二维情况下纳维–斯托克斯方程和 Lam´e 系统反问题边值问题的全局唯一性》, 《逆问题》31 (2015), 第 3 期, 035004, 46 页。[17] V. Isakov, 《偏微分方程逆问题》, 第三版, 《应用数学科学》第 127 卷, 施普林格国际出版股份公司, 2017。[18] F. John, 《偏微分方程》, 第 4 版, 施普林格出版社, 纽约, 1982。[19] M. S. Joshi 和 S. R. McDowall, 《根据电磁边界信息完整确定材料参数》, 《太平洋数学杂志》193 (2000), 107–129。[20] S. Kobayashi 和 K. Nomizu, 《微分几何基础》, 第 I 卷, 约翰·威立父子公司, 美国, 1963。[21] R. Kohn 和 M. Vogelius, 《根据边界测量确定电导率》, 《纯粹与应用数学通讯》37 (1984), 289–298。[22] R. Kohn 和 M. Vogelius, 《根据边界测量确定电导率。II. 内部结果》, 《纯粹与应用数学通讯》38 (1985), 第 5 期, 643–667。[23] K. Krupchyk 和 G. Uhlmann, 《横向各向异性几何中的磁薛定谔算子逆问题》, 《数学物理通讯》361 (2018), 525–582。[24] K. Krupchyk 和 G. Uhlmann, 《有界磁势下磁薛定谔算子的反问题边值问题唯一性》, 《数学物理通讯》327 (2014), 993–1009。[25] V. Kupradze、T. Gegelia、M. Basheleishvili 和 T. Burchuladze, 《弹性力学与热弹性力学数学理论的三维问题》, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 1979。[26] L. Landau 和 E. M. Lifshitz, 《弹性理论》, 第三版, 牛津, 英格兰: 巴特沃思-海涅曼, 1986。[27] J. Lee 和 G. Uhlmann, 《根据边界测量确定各向异性实解析电导率》, 《纯粹与应用数学通讯》42(8) (1989), 1097–1112。[28] X. Li 和 J.-N. Wang, 《定常纳维–斯托克斯方程中黏度的确定》, 《微分方程杂志》242 (2007), 24–39。[29] G. Q. Liu, 《黎曼流形上双调和Steklov特征值的Weyl型渐近公式》, 《数学进展》228(4) (2011), 2162–2217。[30] G. Q. Liu, 《与狄利克雷到诺伊曼算子相关的热核迹的渐近展开》, 《微分方程杂志》259(7) (2015), 2499–2545。[31] G. Q. Liu, 《扰动多调和Steklov问题的热不变量》, 《变分法与偏微分方程》61, 125 (2022)。[32] G. Q. Liu, 《黎曼流形上热弹性狄利克雷到诺伊曼映射的等距实解析度量与谱不变量的确定》, arXiv:1908.05096。[33] G. Q. Liu, 《根据电磁边界信息确定各向异性实解析度量》, arXiv:1909.12803。[34]G. Q. Liu, 《根据边界信息确定不可压缩流体的黏度》, arXiv:2006.04310。[35] G. Q. Liu 和 X. Tan, 《黎曼流形上磁狄利克雷到诺伊曼映射的谱不变量》, arXiv:2108.07611。[36] G. Q. Liu 和 X. Tan, 《热弹性狄利克雷到诺伊曼映射热迹的渐近展开》, arXiv:2206.01374。

[37] S. R. McDowall, 《根据电磁边界信息确定材料参数》, 《逆问题》13 (1997), 153–163。[38] A. I. Nachman, 《二维反问题边值问题的全局唯一性》, 《数学年刊》143 (1996), 71–96。[39] G. Nakamura、Z. Sun 和 G. Uhlmann, 《磁场中薛定谔方程反问题的整体可识别性》, 《数学年刊》303 (1995), 377–388。[40] G. Nakamura 和 G. Uhlmann, 《通过边界测量识别 Lam ´e 参数》, 《美国数学杂志》115 (1993), 1161–1187。[41] G. Nakamura 和 G. Uhlmann, 《弹性力学中一个反问题边值问题的全局唯一性》, Invent. Math. 118 (1994), 457–474。[42] G. Nakamura 和 G. Uhlmann, 《勘误：弹性力学中一个反问题边值问题的全局唯一性》, Invent. Math. 152 (2003), 205–207。[43] G. Nakamura 和 G. Uhlmann, 《热弹性介质边界上的反问题》, 《SIAM数学分析杂志》26 (1995), 263–279。[44] P. Ola、L. P¨aiv¨arinta 和 E. Somersalo, 《电动力学中的一个反问题边值问题》, 《杜克数学杂志》70 (1993), 617–653。[45] L. P¨aiv¨arinta、M. Salo 和 G. Uhlmann, 《磁性薛定谔算子的反散射》, 《函数分析杂志》259(7) (2010), 1771–1798。[46] M. Pichler, 《具有利普希茨参数的麦克斯韦方程组反问题》, 《逆问题》34 (2018), 025006, 共21页。[47] M. Salo 和 L. Tzou, 《狄拉克算子的卡尔曼估计与反问题》, 《数学年刊》344 (2009), 161–184。[48] Z. Sun 和 G. Uhlmann, 《拟线性各向异性介质中的反问题》, 《美国数学杂志》119 (1997), 771–797。[49] Z. Sun 和 G. Uhlmann, 《二维各向异性反问题》, 《逆问题》19 (2003), 1001–1010。[50] J. Sylvester 和 G. Uhlmann, 《一个反问题边值问题的整体唯一性定理》, 《数学年刊》125 (1987), 153–169。[51] X. Tan 和 G. Q. Liu, 《黎曼流形上由弹性狄利克雷到诺伊曼映射确定 Lam ´e 系数》, arXiv:2211.06650。[52] M. Taylor, 《偏微分方程II》, 第二版, 施普林格科学与商业媒体, 纽约, 2011。[53] M. Taylor, 《偏微分方程III》, 第二版, 施普林格科学与商业媒体, 纽约, 2011。[54] F. Treves, 《伪微分算子与傅里叶积分算子导论》, 普莱纳姆出版社, 纽约, 1980。[55]G. Uhlmann, 《电阻抗层析成像与 Calder ´on 问题》, 《逆问题》25 (2009), 第12期, 123011, 共39页。[56] G. Uhlmann, 《反问题：窥见不可见之物》, 《数学科学通报》4 (2014), 第2期, 209–279。[57] G. Vodev, 《热弹性狄利克雷到诺伊曼映射的逼近》, arXiv:2201.04825。[58] Y. Zhang, 《线性弹性力学中的瑞利波与斯通利波》, arXiv:2007.14563。

School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing100081, China电子邮箱：xtan@bit.edu.cn