arXiv:2303.12389v1 [math.AP] 22 Mar 2023

球面区域诺伊曼特征值的数值优化

Eloi Martinet

摘要。本文研究了在带有诺伊曼边界条件的欧几里得球面上，区域的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的前三个特征值的数值优化。我们探讨了两种方法：第一种是对初始问题进行推广，从而引出密度方法；另一种则是通过水平集方法进行形状优化。最初采用这些方法的目的是考察如下猜想：在某些条件下，测地球对于第一个非平凡特征值是最优形状。这些计算深入揭示了此类特征值问题的最优形状，并表明随着区域所占球面表面积比例的变化，形状呈现出丰富的多样性。最后，我们将相同的算法用于环面，并开展了同样的研究。

1. 引言

令 $n \geq 1$。本文第一部分所研究的问题涉及单位球面 $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$上区域的拉普拉斯算子的谱。设 $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ 是一个开、有界的利普希茨集合。谱定理保证该问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_k(\Omega) u \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

对于 $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ 具有一列特征值

$$0 = \mu_0(\Omega) \leq \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq ... \to +\infty.$$

相应的特征函数满足众所周知的变分公式

$$\mu_k(\Omega) = \min_{V \in \mathcal{V}_{k+1}} \max_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{V}_k$ 是 $H^1(\Omega)$ 中维数为 k 的子空间族。我们关注以下问题：对于 $m > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，求解

$$\sup\{\mu_k(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{S}^n, |\Omega| = m, \Omega \text{ bounded, open and Lipschitz}\}. \tag{2}$$

本文旨在从数值角度研究这一优化问题。

近年来，欧几里得空间中区域的诺伊曼特征值数值形状优化受到了广泛关注（例如参见 [6] [5] [4][10]），而关于曲空间中区域这些特征值优化的文献则较为稀少。

日期：2023年3月23日。关键词与短语。纽曼特征值、拉普拉斯-贝尔特拉米算子、形状优化、球面、常曲率空间、环面。

本研究将通过考察球面 $\mathbb{S}^n$ 上以及环面上区域的多个诺伊曼特征值的优化来探讨这一问题。

过去和近期的理论研究都致力于证明球面上区域的第一诺伊曼特征值以球冠为最优，无论是假设最优区域是单连通的 [8] [17] ，还是遵循 Weinberger 的开创性研究 [21], ，采用所谓的“质量移植技术”。然而，所有这些结果都要求对区域施加某些限制：例如，区域必须位于半球内 [7]，或位于某个球冠之外 [9]。

在这项研究中，我们将提供关于球面上最优区域性质的一些数值证据。特别是，我们将看到，一些基于密度的方法强烈表明，对于区域及其质量密度足够大的情形，无法通过质量移植论证来解决区域第一诺伊曼特征值的优化问题。此外，我们将看到，针对第二个非平凡诺伊曼特征值的数值研究表明，最优形状是两个互不相交的测地球 [9]。我们还将通过数值计算观察到第三个非平凡特征值对应的最优形状种类繁多。最后一部分将探讨环面上的相同问题。

如前所述，其中一种数值方法将通过对原问题进行某种松弛来实现，即将关系式 (1) 扩展到以下密度类 $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{S}^n,\ [0,1])$：

$$\mu_k(\rho) := \inf_{V\in\mathcal{V}_{k+1}} \max_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n} \rho|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n} \rho u^2}, \tag{3}$$

其中，$\mathcal{V}_{k+1}$ 是维数为 $k+1$ 的子空间族，位于

$$\{u \cdot 1_{\{\rho(x)>0\}} : u \in C_c^\infty(\mathbb{S}^n)\}. \tag{4}$$

这种松弛已在 [10]，中得到广泛应用，在 [11] 中也可找到更一般的形式。

随后，原问题将替换为

$$\sup\left\{\mu_k(\rho) : \rho : \mathbb{S}^n \to [0,1], \int_{\mathbb{S}^n} \rho = m\right\}. \tag{5}$$

其适定性将在下文证明。

这种表述使我们能够对变量 ρ 使用梯度下降等经典优化方法，而不必考虑涉及拓扑变化的复杂形状优化问题。然而，密度方法严格来说比问题 (2) 更一般，因为最优密度未必对应于区域的示性函数。这促成了一种形状优化方法的实现，即水平集方法；该方法直接求解问题 (2)，并允许发生拓扑变化。

在接下来的几节中，我们首先考察松弛（3）带来的理论层面内容。随后，我们讨论上述两种方法的实际实现，并给出与前三个特征值相关的数值结果。我们还将探讨这些计算在理论层面可能带来的一些影响。

2. 最优密度的存在性与逼近

我们首先建立一个理论框架，使问题 (5) 成为适定问题。结果可沿用 [10] 中的相同思路得出。因此，我们不再过多讨论细节。

一个自然会直接提出的问题是，最优密度是否存在。在欧几里得情形 $\mathbb{R}^n$ 中，我们必须依靠某些集中紧性结果，才能得到一类密度的存在性。在这里，由于球面的测度有限，我们可以轻松给出完整的存在性结果：

定理 1 (最优密度的存在性)。设 $0 \leq m \leq |\mathbb{S}^n|$。那么问题 *(5)* 有解。

证明。我们实际上证明，特征值关于弱-* 收敛是上半连续的。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\rho, (\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{S}^n, [0,1])$ 是满足 $\rho_n \rightharpoonup \rho$ 的函数。设 $\epsilon > 0$ 和 $V = 张成\{v_0 1_{\{\rho>0\}}, \ldots\ldots, v_k 1_{\{\rho>0\}}\}$，使得

$$\mu_k(\rho) \geq \max_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n} \rho|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n} \rho u^2} - \epsilon.$$

考虑 $V_n =< v_0 1_{\{\rho_n>0\}} \cdots, v_k 1_{\{\rho_n>0\}} >$，以及 $u_n = \sum_{i=0}^k \alpha_i^n v_i$ 中的一个极大化序列

$$\max_{u\in V_n\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n u^2}.$$

当 n 足够大时，V_n 的维数为 $k+1$，因此

$$\mu_k(\rho_n) \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n|\nabla u_n|^2}{\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n u_n^2}.$$

注意，根据齐次性，我们可以假设对所有 n，$\sum_{i=0}^k (\alpha_i^n)^2 = 1$。取一个子序列后，可得对所有 i，$\alpha_i^n \to \alpha_i \in \mathbb{R}$。令 $\tilde{v} = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$，便得到

$$\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n|\nabla u_n|^2 \to \int_{\mathbb{S}^n} \rho|\nabla \tilde{v}|^2$$

and

$$\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n u_n^2 \to \int_{\mathbb{S}^n} \rho\tilde{v}^2.$$

Thus

$$\mu_k(\rho) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_k(\rho_n) - \epsilon.$$

由于该关系对所有 ϵ 均成立，我们得到

$$\mu_k(\rho) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_k(\rho_n).$$

现在设 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是问题 (5) 的某个极大化序列。存在一个$\rho \in \mathrm{L}^1(\mathbb{S}^n, [0,1])$，使得经过选取一个子序列后，$\rho_n \rightharpoonup \rho$ 弱收敛。由上半连续性，我们得到 $\mu_k(\rho) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_k(\rho_n)$，并且事实 $1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$ 保证条件 $\int_{\mathbb{S}^n} \rho_n = m$ 在极限处仍然成立。□

从数值角度来看，由于 ρ 可能在 $\mathbb{S}^n$ 的某些不可忽略部分上消失，通常无法通过 有限元法计算广义特征值。我们可以用非零密度对应的良定义广义特征值来近似这些广义特征值：

定理 2 (逼近). 设 $\rho \in \mathrm{L}^1(\mathbb{S}^n, [0,1])$，$\int_{\mathbb{S}^n} \rho = m > 0$. 我们引入以下量：

$$\mu_k^\epsilon(\rho) := \min_{V\in\mathcal{V}_{k+1}} \max_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n} (\rho+\epsilon)|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n} (\rho+\epsilon^2)u^2}$$

其中，V_{k+1} 是 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n)$ 中维数为 $k+1$ 的子空间族。

于是：

$$\mu_k^\epsilon(\rho) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \mu_k(\rho).$$

欧几里得情形的证明，参见 [10,引理 14]。

注 3. $\mu_k^\epsilon(\rho)$ 是适定椭圆问题的第 k 个非平凡特征值

$$-\operatorname{div}[(\rho+\epsilon)\nabla u] = \mu_k^\epsilon(\rho)(\rho+\epsilon^2)u$$

在 $\mathbb{S}^n$ 上。

证明。 证明分为证明上极限和下极限两部分。上极限的证明与前一定理相同；下面我们重点讨论下极限。

令 u_0^ϵ，……，$u_k^\epsilon \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n)$ 为与特征值 μ_0^ϵ，……，μ_k^ϵ对应的特征函数，并且它们彼此正交且归一化，满足

$$\int_{\mathbb{S}^n} (\rho+\epsilon^2) u_i^\epsilon u_j^\epsilon = \delta_{i,j}. \tag{6}$$

这意味着

$$\int_{\mathbb{S}^n} (\rho+\epsilon)|\nabla u_i^\epsilon|^2 = \mu_i^\epsilon(\rho) \tag{7}$$

并且可以认为该量存在一个与 i 和 ϵ 无关的上界 M。否则，上极限将为无穷大，而根据前一种情况，我们便可得出结论。由方程 6 可知，对于所有 i，$(\epsilon u_i^\epsilon)_\epsilon$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^n)$ 中有界。因此，我们可以找到一个子序列，使得对于所有 $0 \le i \le k$，序列 (ϵu_i^ϵ) 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^n)$ 中弱收敛于某个函数 g_i。记 $\bar{v} = \frac{1}{|\mathbb{S}^n|}\int_{\mathbb{S}^n} v$，则对于所有 i，有 $\epsilon\bar{u_i^\epsilon} \longrightarrow \bar{g_i}$，其中常值函数 1 属于 L^2。此外，序列 $(\sqrt{\epsilon}\nabla u_i^\epsilon)_\epsilon$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^n)$ 中有界，因此由庞加莱-维尔廷格不等式可得：

$$\|\epsilon u_i^\epsilon - \epsilon\bar{u_i^\epsilon}\|_{\mathrm{L}^2} \le C\|\epsilon\nabla u_i^\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} \longrightarrow 0.$$

我们推得 $\epsilon u_i^\epsilon \longrightarrow \bar{g_i}$ 在 L^2 中强收敛。注意到 $\bar{g_i} = 0$，即可得出结论：

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \int_{\mathbb{S}^n} \rho(u_i^\epsilon)^2 = \int_{\mathbb{S}^n} \rho \bar{g_i}^2 = \bar{g_i}^2 m.$$

由柯西-施瓦茨不等式可知，这意味着 $\int_{\mathbb{S}^n} u_i^\epsilon u_j^\epsilon \longrightarrow 0$，进而得到$\int_{\mathbb{S}^n} \epsilon^2 (v^\epsilon)^2 \mathrm{d}x \longrightarrow 0$，对所有 $v^\epsilon \in \operatorname{span}\{u_0^\epsilon, ..., u_k^\epsilon\}$均成立。利用这一极限以及当 ϵ 足够小时，$\operatorname{span}\{u_0^\epsilon 1_{\{\rho>0\}}, ..., u_k^\epsilon 1_{\{\rho>0\}}\}$ 的维数为 $k+1$ 这一事实，最终得到

$$\mu_k(\rho) = \inf_{V\in\mathcal{V}_{k+1}^\rho} \max_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n}\rho|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n}\rho u^2} \le \liminf_{\epsilon\to 0} \max_{v\in\operatorname{span}\{u_0^\epsilon,...,u_k^\epsilon\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^n}(\rho+\epsilon)|\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{S}^n}(\rho+\epsilon^2)u^2} = \liminf_{\epsilon\to 0} \mu_k^\epsilon(\rho)$$

由此即完成证明。 □

定理 4（最大值的近似）。 设 $0 < m \le |\mathbb{S}^n|$。则

$$\max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k^\epsilon(\rho) = \max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k(\rho). \tag{8}$$

证明。设 $(\rho^\epsilon)_\epsilon$ 满足 $\mu_k^\epsilon(\rho^\epsilon) = \max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k^\epsilon(\rho)$，且 ρ^* 满足 $\mu_k(\rho^*) = \max^{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k(\rho)$。与定理 1 中上半连续性的证明相同，我们有

$$\limsup_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu_k^\epsilon(\rho^\epsilon) \leq \mu_k(\tilde{\rho}) < \max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k(\rho) < +\infty$$

每当 $\rho^\epsilon \rightharpoonup \tilde{\rho}$ 在 L^∞ 中弱收敛时。因此，序列 $(\mu_k^\epsilon(\rho^\epsilon))_\epsilon$ 有界。于是，先前的下半连续性结果意味着

$$\max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k(\rho) = \mu_k(\rho^*) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \mu_k^\epsilon(\rho^\epsilon) = \liminf_{\epsilon \to 0} \max_{\|\rho\|_{\mathrm{L}^1}=m} \mu_k^\epsilon(\rho^\epsilon)$$

由此完成证明。 □

3. 密度方法

本节讨论密度方法的数值实现，其基本思路与 [10]相同，但在球面上处理时会遇到一些新的技术难题。假设球面由一个网格离散化，且该网格在优化过程中保持不变。令 $V_h = \mathrm{span}(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n) \subset \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^N)$ 为一个有限元空间。若 $v = \sum_i v_i \phi_i$ 记 $\bar{v} = (v_1, \ldots\ldots, v_n)^T$ 为其在基 $(\phi_i)_i$ 上的坐标。尽管此处我们选择在同一个有限元空间 V_h 中离散密度和特征函数，但也可以像我们先前引用的工作中那样采用不同的空间。设 $\rho \in V_h$ 为一个密度（即 $\rho : \mathbb{S}^n \to [0,1]$）。我们用 $\bar{\mu}_k^\epsilon(\rho)$ 表示有限维特征值问题的特征值：

$$\boldsymbol{M}^\epsilon(\rho)\bar{u}_k^\epsilon(\rho) = \bar{\mu}_k^\epsilon(\rho)\boldsymbol{K}^\epsilon(\rho)\bar{u}_k^\epsilon(\rho) \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{M}^\epsilon(\rho) = \left(\int_{\mathbb{S}^n} (\rho + \epsilon)\nabla\phi_i \nabla\phi_j\right)_{i,j}$$

and

$$\boldsymbol{K}^\epsilon(\rho) = \left(\int_{\mathbb{S}^n} (\rho + \epsilon^2)\phi_i\phi_j\right)_{i,j}.$$

由于我们使用基于梯度的优化方法，因此需要对基 $(\phi_i)_i$ 中的坐标（$\rho_1, \ldots\ldots, \rho_n$）求 $\bar{\mu}_k^\epsilon(\rho)$ 的导数。假设 $\bar{\mu}_k^\epsilon(\rho)$ 是单根，我们可以对方程（9）求导，并在左侧乘以 $(\bar{u}_k^\epsilon(\rho))^T$，得到

$$\partial_l \bar{\mu}_k^\epsilon = \frac{(\bar{u}_k^\epsilon)^T \left(\partial_l \boldsymbol{M}^\epsilon - \bar{\mu}_k^\epsilon \partial_l \boldsymbol{K}^\epsilon\right) \bar{u}_k^\epsilon}{(\bar{u}_k^\epsilon)^T \boldsymbol{K}^\epsilon(\rho)\bar{u}_k^\epsilon} \tag{10}$$

其中矩阵的导数分别为

$$\partial_l \boldsymbol{M}^\epsilon(\rho) = \left(\int_{\mathbb{S}^n} \phi_l \nabla\phi_i \nabla\phi_j\right)_{i,j}$$

and

$$\partial_l \boldsymbol{K}^\epsilon(\rho) = \left(\int_{\mathbb{S}^n} \phi_l\phi_i\phi_j\right)_{i,j}.$$

需要注意的是，由于我们是在球面上，特征值不具有尺度齐次性，而在 $\mathbb{R}^n$ 中则是如此。因此，我们必须施加条件 $\int_{\mathbb{S}^n} \rho = m$；在离散情形下，该条件变为 $\bar{\rho} \cdot \boldsymbol{g} = m$ 其中

$$\boldsymbol{g} = \left(\int_{\mathbb{S}^n} \phi_l\right)_l.$$

3.1. 多重特征值。谱形状优化的主要难点之一是处理特征值的重数。事实上，在实践中，预计最优密度会具有较高的重数。 [10] 中提出的方法是添加一个约束，迫使彼此接近的特征值（接近程度取决于某个阈值 σ）进一步靠拢。虽然该方法在平面情形下取得了良好效果，但在这里却有一个特殊问题，尤其是在 μ_1 的情况下。事实上，即使最优密度看起来具有 2 重重数，也会观察到第三个特征值接近 μ_2，这导致先前的方法要么在 σ 过高时陷入重数为 3 的局部最大值，要么在 σ 过小时过于不稳定而无法收敛。解决这一问题的一种方法是计算一个比 μ_k 的梯度所给方向更好的方向。为此，人们研究了多种数值方法，例如将方向 h 求解为以下问题的解

$$\max_{h\in V_h,\|h\|=1} \min\left\{\mathrm{d}\mu_k^\epsilon(\rho).h, ..., \mathrm{d}\mu_{k+m-1}^\epsilon(\rho).h\right\}$$

其中 m 是“猜测的”重数，其选取满足 $\mu_{k+m-1}^\epsilon(\rho) - \mu_k^\epsilon(\rho) \leq \sigma$ 且 $\mu_{k+m}^\epsilon(\rho) - \mu_k^\epsilon(\rho) > \sigma$。例如，[5]中就采用了这种方法。从启发式角度看，该方法会产生一个方向，使所有选定的特征值都以最大幅度增加。另一种更严谨的方法是考虑多重特征值沿方向 h 的真实方向导数（该导数总是存在），即

$$(\mu_k^\epsilon)'(\rho)(h) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu_k^\epsilon(\rho+th) - \mu_k^\epsilon(\rho)}{t}$$

并像之前那样，寻找使这一变化最大化的方向：

$$\max_{h\in V_h,\|h\|=1} (\mu_k^\epsilon)'(\rho)(h).$$

对此， [14] 进行了出色的研究，作者指出，利用半定规划方法可以高效地求解方向搜索问题。

然而，在我们的情形中，这些方法似乎并不比之前的方法表现更好。事实证明，只需对问题进行简单修改，就能获得很好的收敛效果。我们不再基于方向导数搜索方向，而是对问题进行正则化，使其变得可微。这样，内点优化器就能更好地处理该问题。思路如下：假设在整个优化过程中， $\mu_k^\epsilon(\rho)$始终与 $\mu_{k-1}^\epsilon(\rho)$保持一定距离（实践中总是如此），并且属于一个特征值簇 $\mu_k^\epsilon(\rho) ..., \mu_{k+m-1}^\epsilon(\rho)$，其中各特征值之间的距离小于 σ。那么显然

$$\mu_k^\epsilon(\rho) = \min\left\{\mu_k^\epsilon(\rho), ..., \mu_{k+m-1}^\epsilon(\rho)\right\}. \tag{11}$$

但是对于 $x_0, ..., x_{m-1} > 0$，我们有

$$\min\left\{x_0, ..., x_{m-1}\right\} = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_i x_i^{-p}\right)^{-1/p} \tag{12}$$

因此，通过取足够大的 p，我们可以近似地写成

$$\min\left\{x_0, ..., x_{m-1}\right\} \approx \left(\sum_i x_i^{-p}\right)^{-1/p}. \tag{13}$$

基于这一思路，我们转而优化泛函

$$\rho \mapsto \left(\sum_i \mu^{\epsilon}_{k+i}(\rho)^{-p} \right)^{-1/p}. \tag{14}$$

由于该函数是特征值的对称函数，因此当 m 是 $\mu^{\epsilon}_k(\rho)$ [16]的实际重数时，预期它在 ρ 附近是光滑的。否则，簇中最大的特征值大多会被忽略。

3.2. **一维**。在球面上进行一系列模拟后，我们发现，在 μ_1的情况下，最优密度似乎是轴对称的。为了进一步深入了解密度问题，随后我们仅在一维情形下进行模拟，将密度 ρ 视为纬度 $\theta \in [0, \pi]$的实函数，即从一个极点到球面上一点的夹角。根据变量分离，若 $\rho : \mathbb{S}^2 \to [0, 1]$ 是轴对称且非退化的，那么 $\mu_1(\rho)$ 是以下两个特征值问题中的最小非零特征值

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\rho(\theta) \sin(\theta) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) + \frac{\rho(\theta)}{\sin^2(\theta)} y = \rho(\theta) \bar{\mu} y \text{ on } (0, \pi) \\ y(0) \text{ and } y(\pi) \text{ are finite} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\rho(\theta) \sin(\theta) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) = \rho(\theta) \tilde{\mu} y \text{ on } (0, \pi) \\ y(0) \text{ and } y(\pi) \text{ are finite} \end{cases}.$$

更多详情请参见 [7] 。形式上，通过展开第一个微分方程中的导数，可以看出条件 $y(0) = y\pi) = 0$ 是由 $^1 \sin(\theta)$项所强制的，该项会惩罚 y 在 0 和 π处的较大取值。同样，我们可以看出，在第二个微分方程中，边界条件必须为 $y'(0) = y'(\pi) = 0$。

和之前一样，由于我们允许 ρ 取零，因此需要对问题进行正则化，使其成为椭圆型。实际求解的问题为

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left((\rho(\theta) \sin(\theta) + \epsilon) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) + \frac{\rho(\theta) + \epsilon}{\sin(\theta)} y = (\rho(\theta) \sin(\theta) + \epsilon^2) \bar{\mu} y \text{ on } (0, \pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left((\rho(\theta) \sin(\theta) + \epsilon) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) = (\rho(\theta) \sin(\theta) + \epsilon^2) \tilde{\mu} y \text{ on } (0, \pi) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

其中 ϵ 应当很小。

3.3. **数值考量**。 我们的优化过程通过 IPOPT[20] 执行，而有限元计算则在 GetFEM [18] 中进行。首先，在一个由 2246 个顶点构成的粗网格上，使用 P_1 有限元进行一次优化。随后，以前一次优化的结果作为初始化，在一个包含 35401 个单元的网格上进行第二次优化（所用网格可见图1）。对于每个 m，都会使用不同的初始化多次执行优化，最终保留得到最佳值的密度。

对于这两种优化，我们取 $p = 20$ 和 $\epsilon = 10^{-4}$。

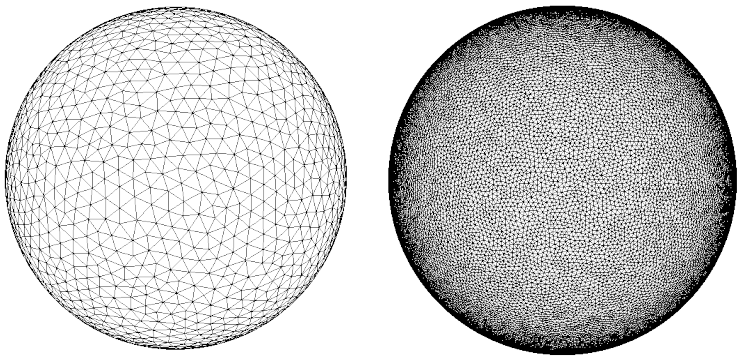


图1. 密度方法所用的网格。

4. 结果：密度方法。

本节讨论通过上述密度方法得到的结果。我们只关注前三个特征值，因为它们已经呈现出丰富的变化。在每张图像中，优化后的特征值以绿色绘出，作为总质量 m 的函数；对应的密度记为 ρ^m。为了进行比较，对于每个 μ_k，我们用红色绘出由 k 个互不相交、表面积为 m/k 的测地球组成的并集所对应的特征值（记为 UB_k^m）。这些数值是通过对以下一维特征值问题进行有限元分解而近似得到的：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}y=\mu y \text{ on } (0,\theta_m) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}(\theta_m)=0 \\ y(0) \text{ is finite} \end{cases} \tag{15}$$

其中，$\theta_m=\arccos\left(1-\frac{m}{2\pi}\right)$ 是表面积为 m on $\mathbb{S}^2$ 的球的测地半径。实际计算中，使用具有 10000 个自由度的 P_1 有限元对解进行近似。

4.1. 验证：μ_1 带约束。为了验证我们的优化过程，我们依据 [9], 的以下结果，该结果指出，如果在一个面积适当的球之外进行优化，那么最优解就是一个球：

定理5。设 $m\in(0,|\mathbb{S}^n|/2)$，并设B^m 是 $\mathbb{S}^n$ 中测度为 m 的测地球。设$\Omega\subset\mathbb{S}^n$ $|\mathrm{B}^m$ 是一个开利普希茨集合，满足 $|\Omega|=m$。则 $\mu_1(\Omega)\leq\mu_1(\mathrm{B}^m)$。

因此，这个借助某种“仿照 Weinberger”的质量移植技术证明的定理，也适用于密度，可重新表述如下：

定理6。设 $m\in(0,|\mathbb{S}^n|/2)$，并设 B^m 是 $\mathbb{S}^n$中的一个测度为 m 的测地球。设$\rho:\mathbb{S}^n\to[0,1]$，满足 $\rho=0$ 在B^m 上成立，且 $\int_{\mathbb{S}^n}\rho=m$。则 $\mu_1(\rho)\leq\mu_1(\mathrm{B}^m)$。

在实践中，我们在整个球面上执行优化过程，但加入约束，要求位于某个球 B^m 内部的 ρ 的所有自由度都保持为 0。IPOPT 可以轻松处理这一约束。图2和图3中的图示表明，最优密度确实是一个球的示性函数。

4.2. 一个有趣的情形：μ_1 在整个球面上。现在我们考虑ρ 可以填满整个球面的情形。首先可以观察到，最优特征值预计不会小于 n。实际上，这个特征值对应于常数

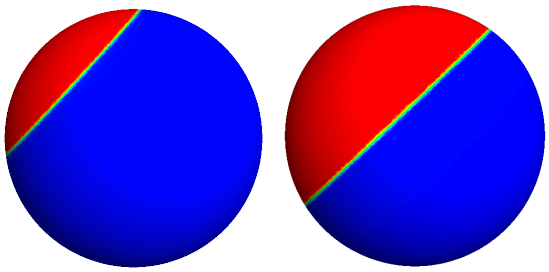


图2. 当 ρ支撑在球外时， μ_1 在 $m \in \{2.17,5.0\}$ 下的最优密度示例。

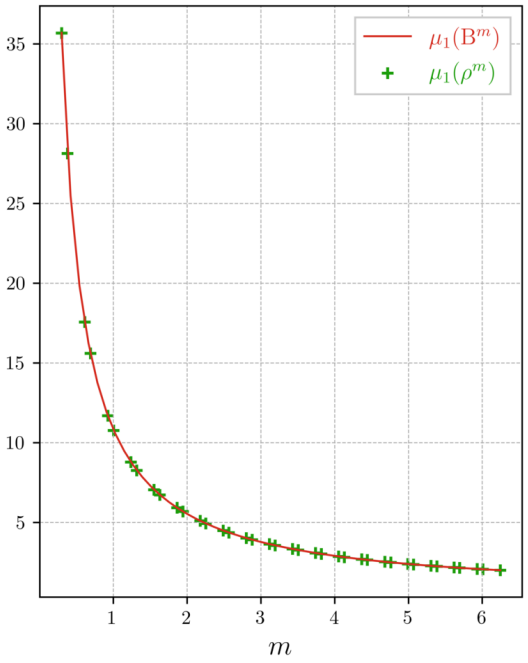


图3. 采用密度方法得到的 μ_1 最优值，其中约束条件为 ρ 的支撑集位于球外。

密度，因此我们可以选择密度 $\rho = \frac{m}{|\mathbb{S}^n|}$，使得$\mu_1(\rho) = \mu_1(\mathbb{S}^n) = n$。模拟结果表明，只有在接近 $m = |\mathbb{S}^n|$ 时才能达到这一数值，如图4所示。

由于当 m 趋于0时，特征值趋于无穷大，因此图像采用两种不同的比例尺绘制，以便于阅读。读者应特别留意各坐标轴所示的范围。有趣的是，当 m 大于 $m \approx 4.5$时，球冠似乎并非最优。这是因为ρ 可以填满整个球面，而球约束不允许这样做。图5展示了范围 $m \in [3.5, 6.5]$ 的放大图。

图6展示了不同 m取值下最优 ρ 的表现。深蓝色对应 $\rho = 0$，红色对应 $\rho = 1$。

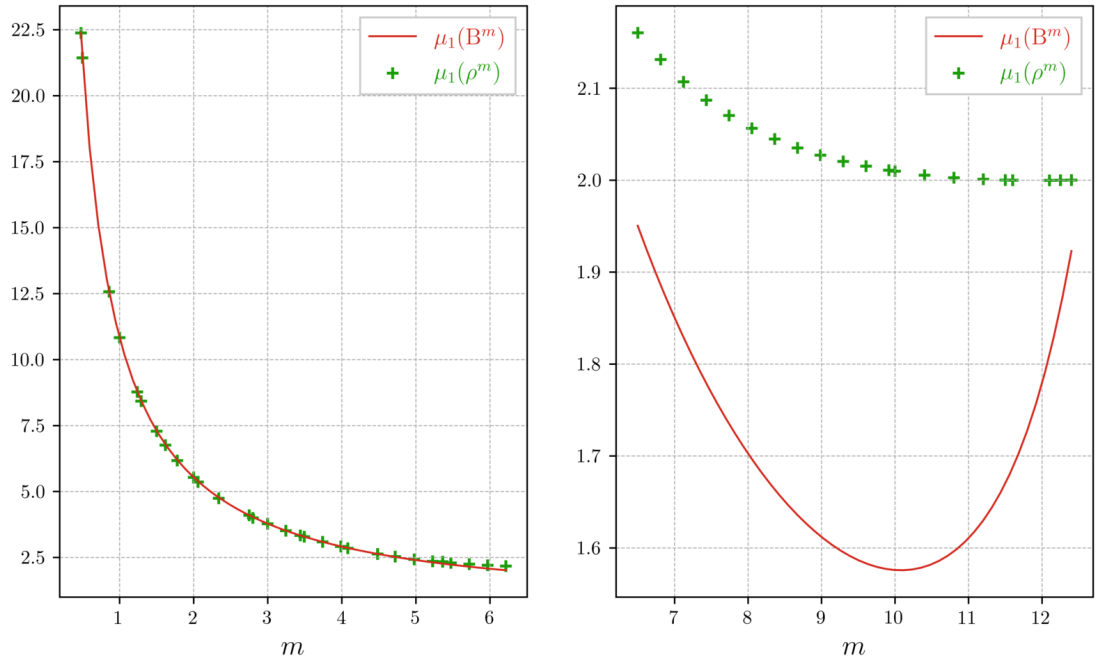


图4. 通过密度方法获得的 μ_1 最优值。

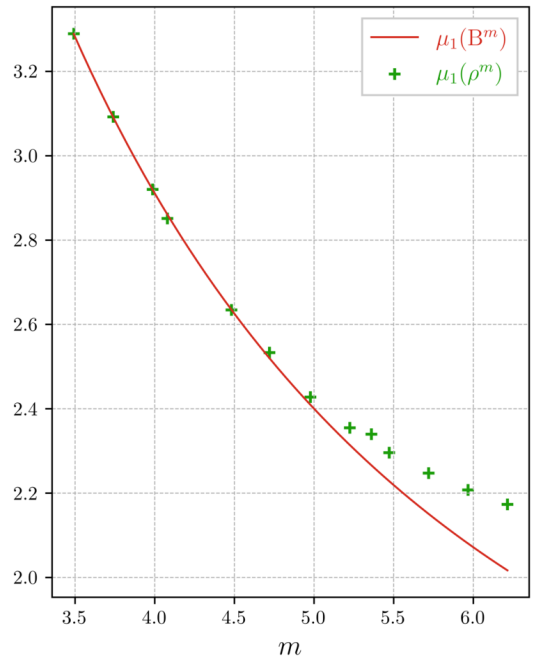


图5. $m \approx 5.0$ 附近的 μ_1 最优值。

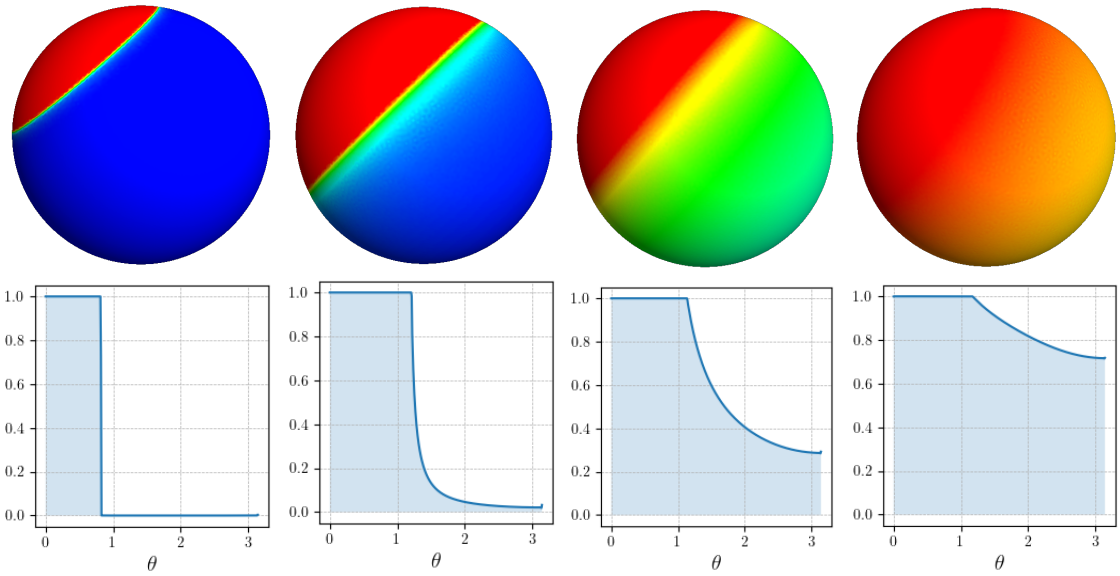


图6. μ_1 取m $\in\{2.0,4.98,8.05,11.2\}$时最优密度的示例（上），以及相应的纬度剖面（下）。

注7. 除了 $m = 2.0$ 似乎是测地球的示性函数之外，最优密度似乎是某种“均匀化”的球冠。这一出人意料的结果具有重要的理论意义：即使球 B^m 对于 μ_1在满足 $|\Omega| = m \leq |\mathbb{S}^n|/2$ 的形状Ω 中是最优的，也无法用 ***Weinberger*** 的标准质量移植技术证明 [21]。事实上，该证明同样适用于密度，但数值结果强烈表明，对 $m > 0.5$而言这一结论并不成立。进一步来说，值得研究的是，能否通过某个实际区域序列实现球面的这种“均匀化”。例如，这可能表明，对于足够大的 m，最优区域并不存在。

对这些结果的考察引出了以下猜想：

猜想1。 设 $m \in (0, |\mathbb{S}^n|)$。则该问题的最优密度 ρ^m

$$\max\left\{\mu_1(\rho) : \rho : \mathbb{S}^n \to [0,1], \int_{\mathbb{S}^n} \rho = m\right\}.$$

是轴对称的。

基于这一猜想，我们在同一张图6中展示了通过一维优化过程得到的密度 ρ 。

请注意，进一步了解 $m = 4.5$ 附近密度的行为会很有意思，因为密度似乎从这里开始趋于均匀。若最优密度确实对应一个区域，那么一个有力的迹象是，在网格细化过程中，集合 $\rho^m \notin \{0,1\}$ 的大小始终与一个单元的大小成正比。相反，若 ρ^m是密度，那么该集合的大小应与单个单元的大小无关。令 N为线段 $[0,\pi]$上的单元数。对于 $N \in \{100,200,400,800\}$，我们计算以下量

$$h_m(N) = \frac{N}{\pi}\int_0^\pi \rho^m(1-\rho^m).$$

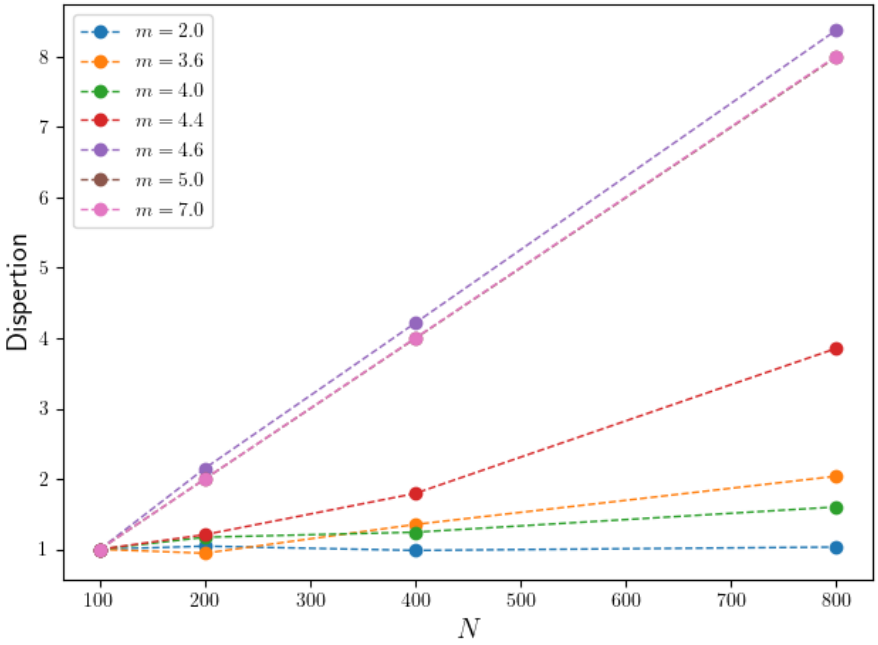


图7。不同 m 值下的 1D 网格细化过程。

由于 π/N 是一个单元的大小，基于前述原因，若 ρ^m 是一个区域，该量应在 N 中保持恒定。若 ρ^m 不是区域，则我们预计将网格中的点数加倍时，$h_m(N)$也会加倍。为了比较不同 N 下的这一量，我们将其在 $N = 100$ 处归一化，并定义

$$\text{Dispertion}_m(N) = \frac{h_m(N)}{h_m(100)}$$

我们在图7中绘制了不同 m 值下的 Dispertion_m 图像

从这幅图像中可以推断出一些结论。当 m 足够大（约为 $m > 4.6$）时，其表现与非区域密度的情况相同，因为离散度会随点数增加而增大。另一方面，当 m 足够小时，ρ^m 似乎是一个区域，因为其离散度保持不变。这正是下面这个猜想的主题。

猜想2。 存在 $\delta > 0$，使得对所有 $m \in (0,\ \delta)$，$\rho^m = 1_{\mathrm{B}^m}$，即最优密度就是测地球的密度。

根据上述数值观察，δ 的值应介于 3.5 和 4.6 之间。

4.3. 关于 μ_2的结果。 关于 μ_2 的结果最为稳定。事实上，无论 m取何值，相应的最优密度总是由两个测度相同的球的并集的示性函数取得，如图8所示。这一数值实验有力地印证了 [9] 的定理 2，该定理断言，对于两个球的不交并 $B^{\frac{m}{2}} \sqcup B^{\frac{m}{2}}$，$\mu_2$ 达到最大值。图9展示了在 m取某些值时得到的最优密度。

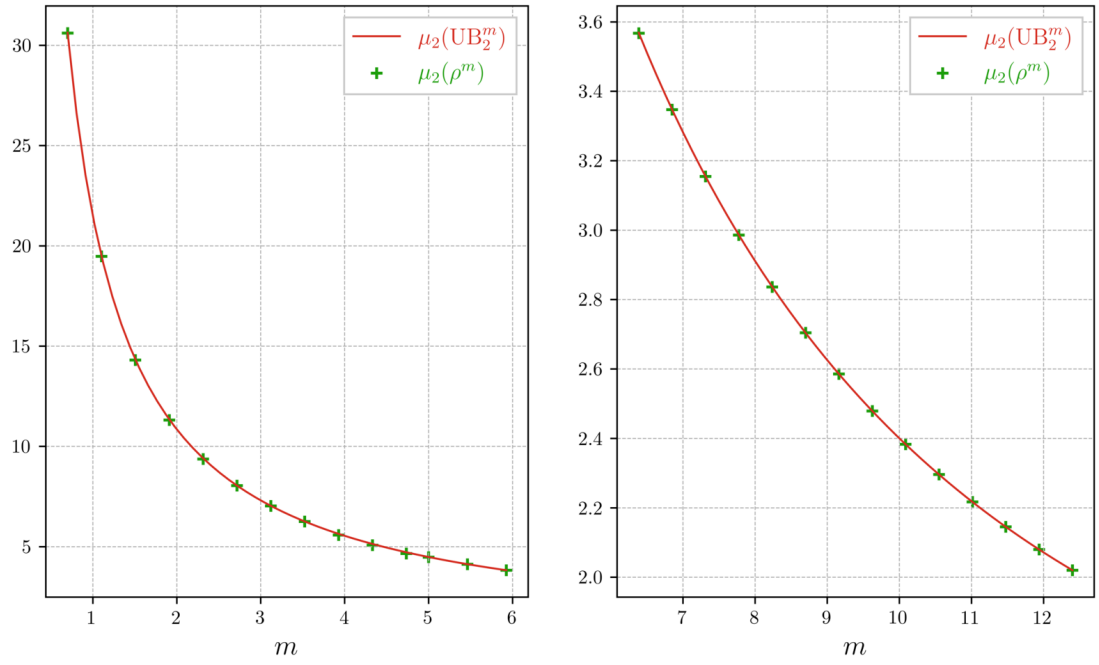


图8. 使用密度方法得到的 μ_2 最优值。

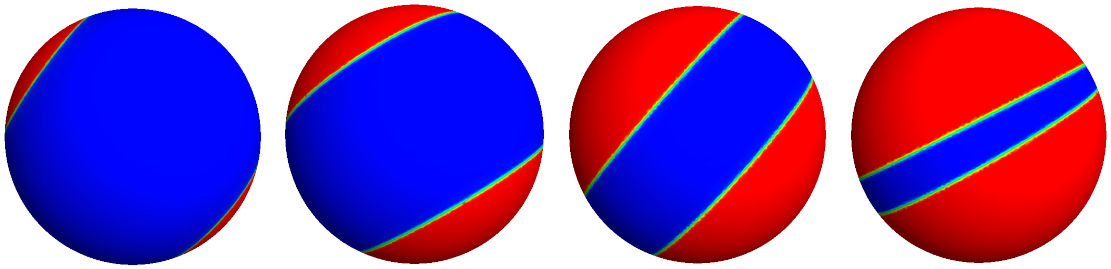


图 9. μ_2 在 $m \in \{2.31,\ 5.46,\ 8.23,\ 11.01\}$时的最优密度示例。

4.4. 关于 μ_3的结果。 与 μ_1的情形类似，针对 μ_3 的优化过程会根据 m的取值呈现出多种不同表现。值得注意的是，如图 10 所示，三个表面积相同的球的并集似乎从来都不是最优解。

图 11 展示了使用密度方法可以得到的不同类型的密度。正如预期的那样，当 m 较小时，我们得到的结果类型与平面 [10] 中相同。只有最后一种情况，在 m 较大时，似乎是某个餐巾环形区域的实际示性函数。对于 $m \approx 8.0$，我们得到一个均质化测地环带。在二维球面上，预期当 m 较大时，特征值趋于 2，因为 $\mu_1(\mathbb{S}^2)$ 的重数为 3，且 $\mu_1(\mathbb{S}^2) = 2$。

4.5. 数据。 所有最终解均以 MEDIT 格式提供，见 `https://github.com/EloiMartinet/Neumann_Sphere/`。此外还提供了一个 FreeFem++ [15] 脚本，用于读取解并计算特征值，以便复现。更多信息请参阅 README 文件。

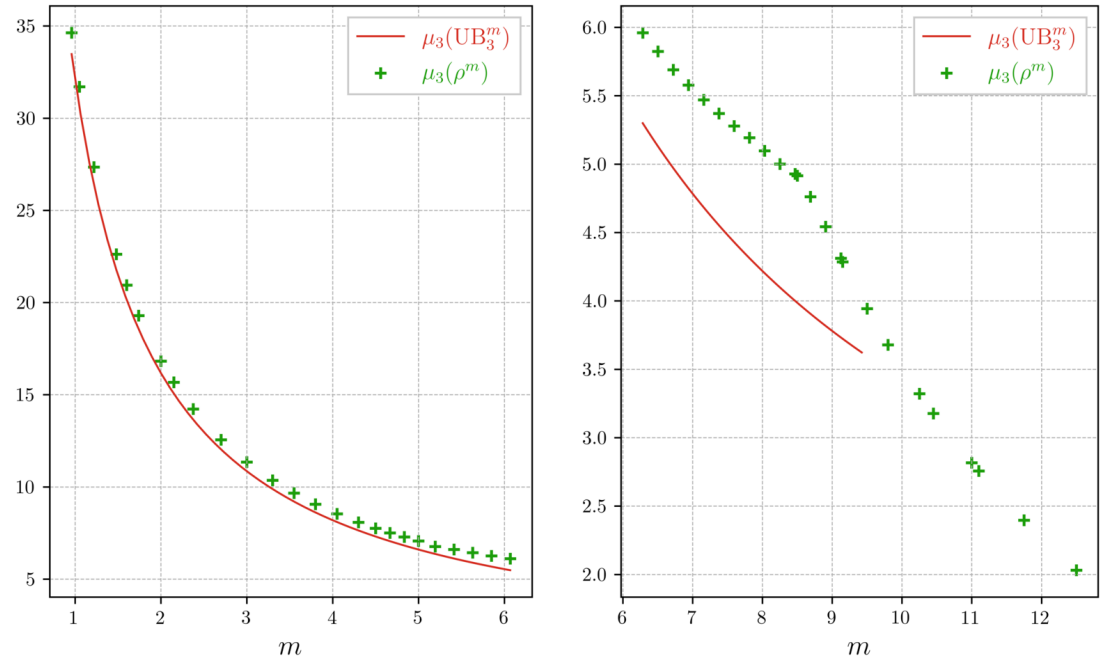


图 10. 通过密度方法得到的 μ_3 最优值。

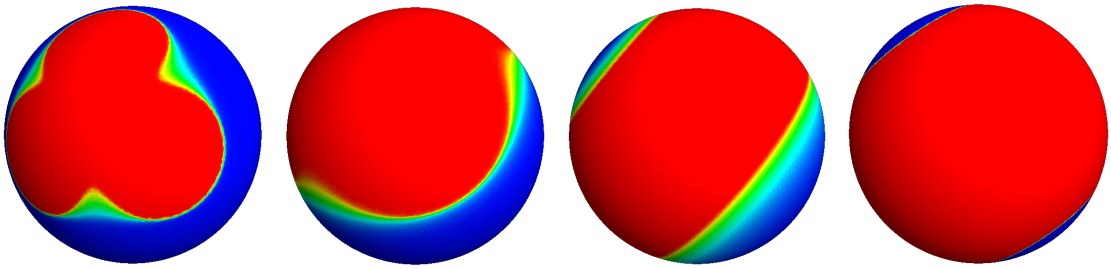


图 11. μ_3 在 $m \in \{2.0,5.0,8.03,11.0\}$时的最优密度示例。

5. 水平集方法

本节重点介绍如何通过水平集方法优化原问题 (2)。当先前密度方法得到的最优解与实际形状的示性函数不符时，这有助于为原始形状优化问题提供更多信息。将区域 Ω 表示为某个函数的水平集，这种方法已广泛应用于形状优化，包括柔顺性优化和特征值优化（例如，参见 [14], [3], [1]等）。按照 [1] 的思路，为统一记号，我们回顾水平集方法的主要思想。

设 $t \in [0,T]$ 和 $\Omega(t) \subset \mathbb{S}^n$ 是一个随时间演化的区域，其演化遵循速度场V： $[0,T] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{TS}^n$。更准确地说，若 Ω_0 是 $\mathbb{S}^n$ 中的一个区域，且 χ 是 V的流

定义为下列微分方程的解

$$\begin{cases}\chi'(x_0,t)=V(t,\chi(x_0,t))\\ \chi(x_0,0)=x_0\in\Omega_0\end{cases}$$

那么我们可以定义

$$\Omega(t):=\chi(\Omega_0,t).$$

在水平集方法的框架下，我们用一个函数 ϕ:$[0,T]\times\mathbb{S}^N\to\mathbb{R}$ 来表示我们的区域，使得

$$\forall x\in\mathbb{S}^N,\forall t\in[0,T],\begin{cases}\phi(t,x)<0 & \text{if } x\in\Omega(t)\\ \phi(t,x)=0 & \text{if } x\in\partial\Omega(t)\\ \phi(t,x)>0 & \text{if } x\in\mathbb{S}^N\setminus\Omega(t)\end{cases}. \tag{16}$$

$\Omega(t)$ 的运动等价于 ϕ 按照下列方程进行平流

$$\partial_t\phi(t,x)+V(t,x)\cdot\nabla\phi(t,x)=0 \text{ on } (0,T)\times\mathbb{S}^n. \tag{17}$$

注意到$n_{\Omega(t)}:=\frac{\nabla\phi_{(t,.)}}{|\nabla\phi(t,.)|}$对于所有 t 而言，都是 $\Omega(t)$ 单位外法向量的延拓；并且如果 V具有 $V(t,x)=v(t,x)n_{\Omega(t)}(x)$ 的形式，其中 $v(t,x)\in\mathbb{R}$，我们可以将前一个方程改写为

$$\partial_t\phi(t,x)+v(t,x)|\nabla\phi(t,x)|=0 \text{ on } (0,T)\times\mathbb{S}^n. \tag{18}$$

在我们的情形中，$[0,T]$ 表示一个单独的时间步，因此 T足够小，可以认为对于所有 $t\in[0,T]$，$v(t,x)\approx v(x)$，最终得到所谓的 *Hamilton-Jacobi* 方程:

$$\partial_t\phi(t,x)+v(x)|\nabla\phi(t,x)|=0 \text{ on } (0,T)\times\mathbb{S}^n. \tag{19}$$

数值上，该方程通过特征线法求解，这得益于可在 `https://github.com/ISCDtoolbox/Advection/`找到的“平流”工具箱。该方法支持定义在曲面网格上的 P_1 函数。衷心感谢作者们所做的宝贵工作。

5.1. 形状导数。 在每个时间步，目标是找到某个向量场 v，使得在这个较小的时间步内按照（19）对 ϕ 进行平流后，所考虑的特征值增大。为了解决这个问题，我们需要计算 $\mathbb{S}^n$ 的区域的特征值的形状导数。该形状导数由以下结果给出（例如参见 [22]）：

定理 8（形状导数）。 我们假设Ω 是 C^1 且边界非空。设$k\in\mathbb{N}$ 和 $V:\ \mathbb{S}^N\to\mathbb{TS}^n$ 为一个在Ω_0邻域内具有紧支集的光滑向量场。记

$$\mu_k'(\Omega_0,V):=\lim_{t\to0^+}\frac{\mu_k(\Omega(t))-\mu_k(\Omega_0)}{t}.$$

此外，我们假设 μ_k（Ω_0）是单的。那么该极限存在，且

$$\mu_k'(\Omega_0,V)=\int_{\partial\Omega_0}\left(|\nabla u|^2-\mu_k(\Omega_0)u^2\right)(V.n)\mathrm{d}\sigma \tag{20}$$

其中 u 是与 $\mu_k(\Omega_0)$ 相关的特征函数，具有单位 L^2 范数，且 n 是外法向量。

前述定理使我们只需考虑边界的法向变分。根据这一考虑，$\mu_k'(\Omega_0, V) = \mu_k'(\Omega_0, v)$，其中 $v = V.n$。此外，该定理表明，我们可以选择 $v = |\nabla u|^2 - \mu_k(\Omega_0)u^2$ 作为梯度方向。不过，正如我们接下来将看到的，这可能并非最佳选择。

5.2. **处理面积约束**。尽管我们能够计算梯度方向 (20)，但还必须满足原问题 (2) 中的约束 $|\Omega| = m$。我们可以选择添加一个惩罚项，并最大化函数

$$\Omega \mapsto \mu_k(\Omega) - b(|\Omega| - m')^2$$

作为替代，其中 $b > 0$，而 m' 是一个用于控制总质量 m 的参数。不过，若考虑半径为 $\epsilon > 0$ 的测地球序列 $B(\epsilon)$，则可以发现

$$\mu_k(B(\epsilon)) - b(|B(\epsilon)| - m')^2 \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} +\infty$$

这表明，对于正面积，最优值永远无法取到。不过，Strichartz 的一个结果允许我们将无界量 $\mu_k(\Omega)$ 替换为量 $|\Omega|^{\frac{2}{n}}\mu_k(\Omega)$，即使我们不像欧几里得情形那样具有伸缩不变性。事实上，在特殊情形 $n = 2$ 下使用 [19] 的公式 (3.15) 和 (3.16)，可得以下性质：

命题9。设 $\Omega \subset \mathbb{S}^2$。那么

$$|\Omega|\mu_k(\Omega) \leq 2\pi k^2. \tag{21}$$

这个一般性界使得我们可以最大化函数

$$J(\Omega) := |\Omega|\mu_k(\Omega) - b(|\Omega| - m')^2 \tag{22}$$

这可以防止函数发散。那么，如果 Ω^* 使（22）达到最大值，它就是满足 $m = |\Omega^*|$ 的（2）的解。

水平集方法有两种实现方式。所谓的替代材料法采用固定网格，并在“空”部分填充具有良好性质的材料。另一种方式则是根据水平集函数，在每一步对区域重新网格划分。虽然第二种方式更精确，但有两个主要缺点，其中最明显的是计算成本高。第二个缺点与 $\Omega(t)$ 的连通性有关：假设我们想优化 μ_k，并从一个拓扑结构复杂的区域开始。水平集方法允许拓扑变化，因此很可能在某个时刻 t，$\Omega(t)$ 分裂为 $k+1$ 个连通分支。于是 $\mu_0(\Omega(t)) = \ldots = \mu_k(\Omega(t)) = 0$，且相应的特征函数在每个连通分支上均为常数。这导致形状导数等于

$$\mu_k'(\Omega, v) = -\mu_k(\Omega)\int_{\partial\Omega} v \mathrm{d}\sigma.$$

读者可能会注意到，这与函数 $\Omega \to |\Omega|$ 的形状导数成正比。这意味着优化过程只会针对体积进行优化。另一方面，“替代材料”方法可以自然地处理拓扑变化，而且比第二种方法更快，因为它不需要在每次迭代时重新划分网格。因此，我们先使用替代材料方法进行初步优化，再采用重新网格划分的方法进行最终优化，以获得更高的精度。

5.3. 带替代材料的水平集。本节假设特征值是单特征值。根据逼近定理 2，我们固定一个较小的 $\epsilon > 0$ 并求解问题

$$-\operatorname{div}[(1_\Omega + \epsilon)\nabla u] = \mu_k^\epsilon(1_\Omega)(1_\Omega + \epsilon^2)u$$

在每一步中。根据上述定理，我们预期当 ϵ 较小时，此特征值会接近实际值。然而，定义在网格上的函数 $1_\Omega = 1_{\{\phi<0\}}$ 可能非常不规则。因此，我们按以下方式对其进行近似

$$1_\Omega \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \sigma^2}}\right)$$

其中 $\sigma > 0$ 较小。这避免了分母退化。该框架中也采用过类似的正则化，例如参见 [2]出于相同原因，扩展法向场近似为

$$n_\Omega \approx \frac{\nabla\phi}{\sqrt{|\nabla\phi|^2 + \sigma^2}}$$

5.4. 初始化。 众所周知，水平集方法对初始化十分敏感，因此容易陷入局部最优解。为解决这一问题，水平集函数通过随机三角函数和初始化，其形式为

$$\phi(\theta,\psi) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} c_{j,k}\exp\{i(j\theta + k\psi)\}\right\}$$

其中 $c_{i,j}$ 随机选取， $\theta,\psi \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$ 分别表示 $\mathbb{S}^2$ 上的纬度和经度。预期 q 和 p 越大， ϕ 就越复杂，进而 Ω 也越复杂。

5.5.多重特征值。 实践中总会出现多重特征值情形，其处理方式与密度情形相同。

5.6. 数值考量。 在我们的模拟中，我们取 $\epsilon = 10^{-4}$ 和 $\sigma = 10^{-5}$。此外，为了准确捕捉 Ω(*t*) 的变化，并且由于水平集函数在迭代过程中会在 $\partial\Omega(t)$ 附近变陡，我们借助 MMG 库 [12] 对区域重新网格划分，并借助 mshdist 工具 [13]每 20 次迭代重新计算有符号距离函数。单元的最大尺寸为 $h_{max} = 10^{-1}$ ，最小尺寸为 $h_{min} = 10^{-3}$。与前文一样，我们使用 P_1 有限元，有限元计算在 GetFEM 中进行。优化算法是一个简单的梯度算法，步数固定为 $N = 600$ 。步长 δt 的选取满足：若 v是在某一时刻的梯度方向，则 $\delta t = \quad^{\gamma}\|v\|_\infty$ ，其中 $\gamma = 3.10^{-2}$。惩罚项 b 取 5，而 m' 取 0.5 到 4π之间的多个值。为清晰起见，算法在算法 1 中给出。请注意，该算法是在固定 m'的情况下执行的。最后，与密度情形一样，使用不同的初始水平集函数进行多次优化，并保留其中最优的结果。

5.7. 带重新网格化的水平集。当前一种方法收敛后，便会启动以下方法，因此我们预计拓扑不会发生可能造成问题的重大变化，正如前文所述。在此过程中，我们对球面重新网格划分，使得在每个时间步， $\partial\Omega = \{\phi = 0\}$ 都是网格的一条折线。这样便可以提取描述 Ω 的网格，并在其上求解原始特征值问题，而无需计算逼近 μ_k^ϵ。不过，优化方向 $v = |\nabla u|^2 - \mu_k(\Omega)u^2$

算法 1 替代材料水平集算法。

要求： $k > 0$ ▷ 我们要优化的特征值
要求： MEDIT 格式的网格
初始化水平集 ϕ
对于 i 从 0 到 N **执行**
如果 $N = 0$ 模 20 **则**
使用 MMG 重新网格划分。
重新初始化水平集函数 ϕ。
结束如果
使用有限元计算 $\mu_k^\epsilon(\Omega)$ 及其对应的特征函数。
计算 v 最大化方向。
在时间 δt内平流 ϕ 。
结束循环

（其中 u 是 $\mu_k(\Omega)$ 的一个特征函数）仅在 Ω 上有定义，而我们需要它在整个球面 $\mathbb{S}^n$ 上有定义，以便平流水平集函数。为此，我们采用广为人知的“延拓正则化”方法，顾名思义，该方法可以将速度场延拓到所有 $\mathbb{S}^n$ 上，同时对其进行正则化 [14]。仍假设特征值是单重的，我们可知 $v \mapsto \mu_k'(\Omega_0, v)$ 是 v 上的连续线性形式。因此，我们可以求得变分问题的唯一解 w

$$\forall v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n), \int_{\mathbb{S}^n} \alpha \nabla v \nabla w + vw = \mathrm{d}\mu_k(\Omega_0, v) \tag{23}$$

其中 $\alpha > 0$。那么 w 确实是 $|\nabla u|^2 - \mu_k u^2$ 在 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n)$ 上的延拓，其正则性取决于 α。此外，w 是一个有效的梯度方向，因为

$$\mathrm{d}\mu_k(\Omega_0, w) = \int_{\mathbb{S}^n} \alpha |\nabla w|^2 + w^2 \geq 0.$$

5.8. **数值考量**。这次优化所选用的数值大多与前一过程相同。我们添加了正则化参数 $\alpha = 0.1$ ，现在 h_{max} 等于 5.10^{-2}。步长 δt_i 现在是自适应的：如果在某次迭代 i 中，我们有 $\mu_k(\Omega_i) > \mu_k(\Omega_{i+1})$，那么 $\delta t_{i+1} = \delta t_i/2$。否则$\delta t_{i+1} = 1.1\delta t_i$。当 $\delta t_i < 10^{-7}$ 时，优化停止，并保留代价最佳的网格。固定 m' 时该算法的伪代码见算法 2。

算法 2 替代材料水平集算法。

要求： $k > 0$ 。 我们要优化的特征值
要求： 通过前述过程得到的网格和最优区域 Ω。
将水平集 ϕ 初始化为 Ω 的水平集。
当 $\delta t > 10^{-7}$ **时**
使用 MMG 重新网格划分。
重新初始化水平集函数 ϕ。
提取子网格 Ω
使用有限元计算 μ_k(Ω) 及其对应的特征函数。
计算 v 在 $\partial\Omega$ 上的最大化方向
通过延拓正则化将 v 延拓到 $\mathbb{S}^2$ 的整个网格
平流 ϕ 持续时间 δt
如果 代价函数增加了 **则**
$\delta t \leftarrow 1.1\delta t$
else
$\delta t \leftarrow \delta t/2$
结束 if
结束 while

6. 结果：水平集方法。

这里报告 $k \in \{1,2,3\}$的优化结果。我们用Ω^m 表示通过水平集过程计算得到且满足 $|\Omega^m| = m$的最优解。最优特征值$\mu_k(|\Omega^m|)$以绿色绘出，并与对应的表面积 m对照。与密度方法相同，我们也用红色绘出了由 k 个互不相交的球组成、总面积为 m的并集的特征值 $\mu_k(UB(|\Omega^m|, k))$。由于当 $|\Omega^m|$ 趋于 0 时，特征值趋于 ∞ ，为便于阅读，我们将图分成两部分： $0 < |\Omega^m| \leq 2\pi$ 和 $2\pi < |\Omega^m| \leq 4\pi$ 。

6.1. 优化 μ_1。 图12展示了对μ_1进行优化的结果。球冠似乎是直到 $m \approx 8.0$为止的最优形状，之后显然不再是最优形状。从这一点到 $m = 4\pi$，出现了复杂的形状，由一个平坦的半球和另一侧的许多孔洞组成。图13展示了其中一种形状的不同视图，其中 $m \approx 11.13$ 和 $\mu_1(\Omega^m) \approx 1.77$ （例如，具有这一表面积的球冠会得到 $\mu_1(B^m) = 1.62$）。这种奇特的行为结合上述密度方法，可能表明实际的最优形状可以通过某种均匀化过程获得。我们为此进行了一些简单但尚无定论的数值测试，不过这个问题显然还需要进一步研究，并可能带来有趣的数值和理论进展。

图14展示了更多最优形状。观察 $m = 8.0$ 时的 Ω^m （从左数第三个），可以想象，测地球冠可能在远低于 8.0 的 m 处不再是最优形状，但数值过程无法“看到”这一点，因为这需要构造出比网格单元尺寸还细的细节。不过，球冠似乎不太可能在相同的质量 m 下不再是最优形状，正如密度方法所示：

猜想3. 令 δ 与猜想*2*中的相同。那么存在 $\delta' > \delta$ ，使得对所有 $0 < m < \delta'$，$\Omega^m = B^m$

注10。 $\delta' \geq \delta$ 这一事实显而易见；有趣之处在于证明该不等式是严格的。

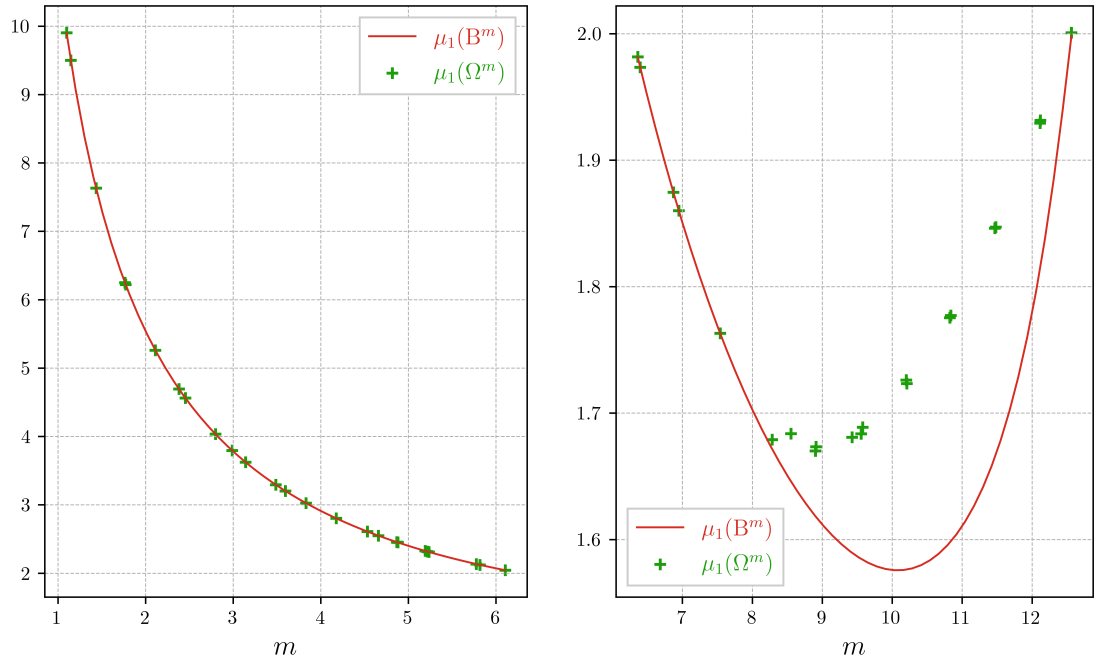


图12. 通过水平集方法得到的 μ_1 最优值。

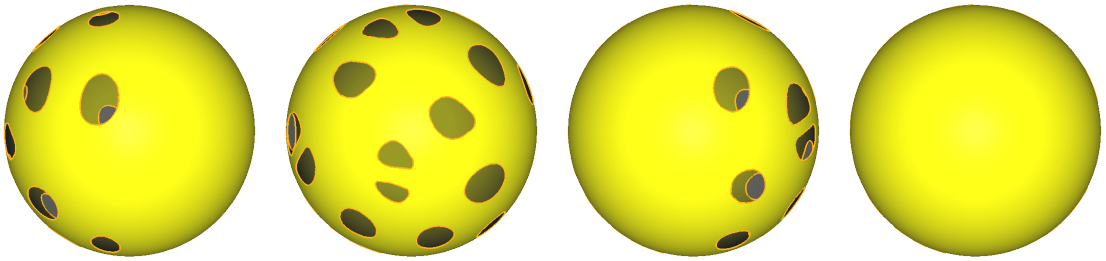


图13. 当 m较大时，通过水平集方法得到的最优形状的旋转视图。

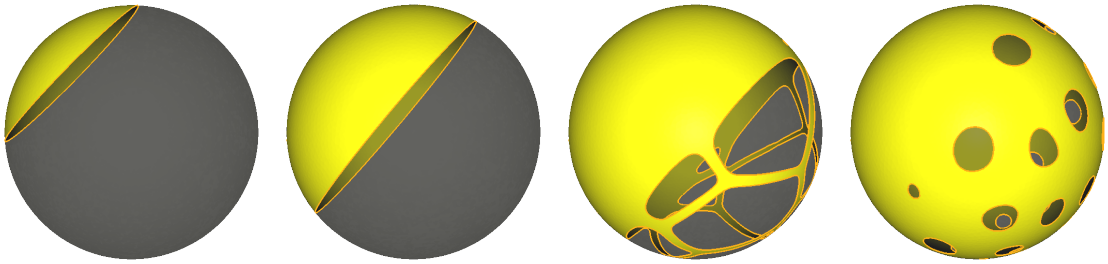


图14. μ_1 取 $m \in \{2.03,\ 5.1,\ 8.0,\ 10.85\}$时最优区域的示例。

6.2. **对 μ_2的优化。** μ_2 的最优结果见图15。我们可以清楚地看到，最优形状始终是两个球冠的并集，因为它已经

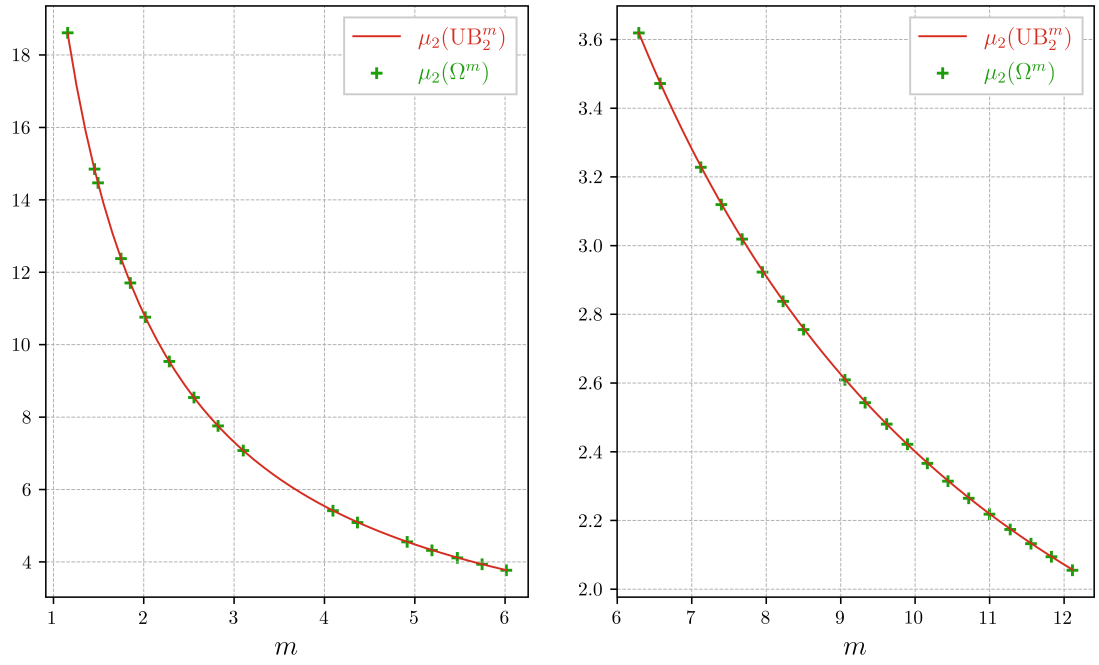


图15. 使用水平集方法得到的 μ_2 最优值。

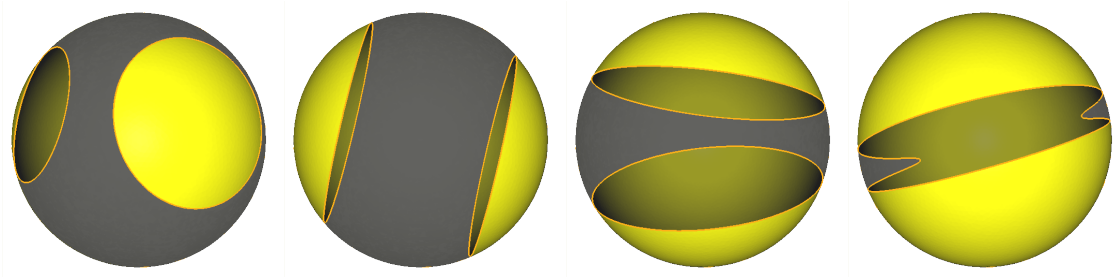


图16. $m \in$ 取$\{2.12, 5.1, 8.13, 11.17\}$时， μ_2 的最优区域示例。

已在 [9] 中证明。因此，该情形可作为测试用例，用于验证该方法的有效性。图16展示了最优形状。对于 $m = 1.17$，我们可以看到，计算得到的形状并非两个互不相交圆盘的并集。事实上，当 m 较大时，由于数值不稳定性，第一次水平集过程难以将一个区域分割成两个圆盘。不过，该特征值与两个圆盘对应的特征值非常接近。

6.3. 对 μ_3进行优化。 图17展示了对μ_3进行优化的结果。与密度情形一样，该特征值会随 m 的取值而呈现出丰富多样的行为（见图 18 ）。

结果似乎与密度方法所得结果一致。

6.4. 数据。关于密度方法的结果，所有最终解均可在 `https://github.com/EloiMartinet/Neumann_Sphere/` 处以 MEDIT 格式获取，并附有 FreeFem++ 脚本，可用于计算每个解的特征值和表面积。

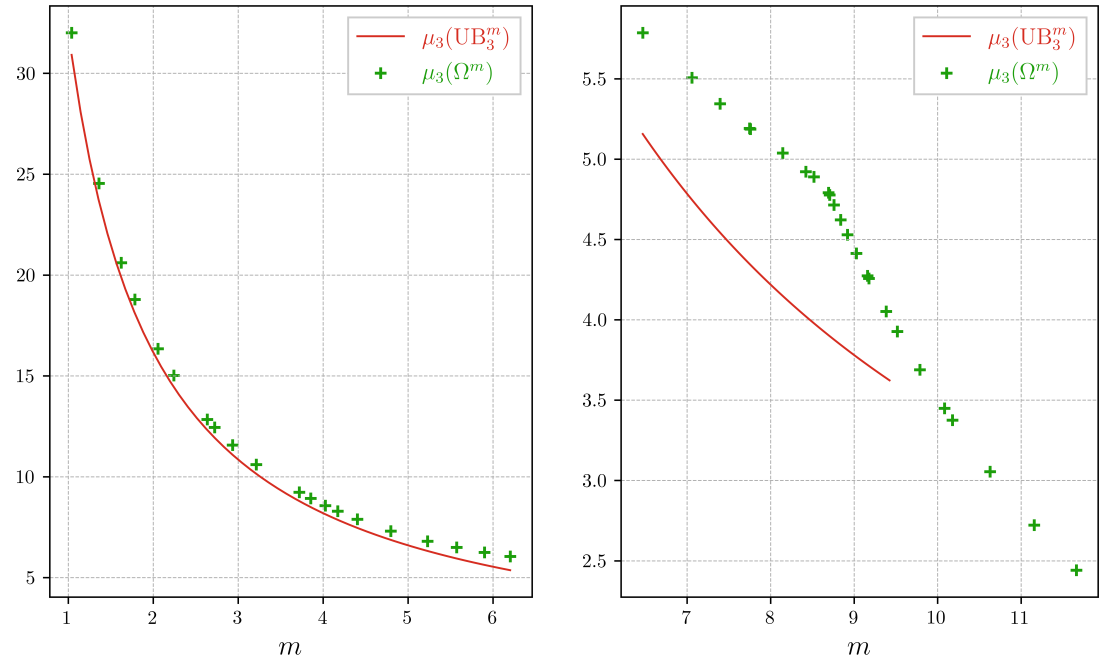


图17. 通过水平集方法得到的 μ_3 最优值。

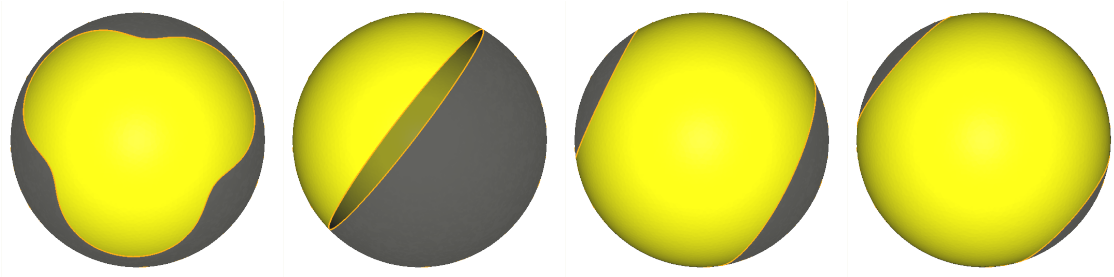


图18. 当 $m \in \{2.0, 5.22, 8.0, 11.04\}$时， μ_3的最优区域示例。

7. 环面上的探索

正如引言中所述，最后这一部分致力于环面上的特征值优化。具体而言，我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 中由下式参数化的环面 $\mathbb{T}$

$$(u, v) \mapsto ((R + r\cos v)\cos u, r\sin v, (R + r\cos v)\sin u),$$

也就是说，大半径为 R 、小半径为 r的环面。接下来，我们将选择$R = 2$ 和 $r = 1$。已知 $\mathbb{T}$ 的表面积由下式给出

$$|\mathbb{T}| = 4\pi^2 Rr$$

在我们的情形下，我们有 $|\mathbb{T}| \approx 78.96$。

我们现在考虑的问题与球面上的问题类似。设 $\Omega \subset \mathbb{T}$ 为一个 Lipschitz 开域，特征值问题为

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu_k(\Omega) u \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}.$$

我们同样采用密度 ρ 的广义特征值的定义： $\mathbb{T} \to [0,1]$，定义如下

$$\mu_k(\rho) := \inf_{V \in \mathcal{V}_{k+1}} \max_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{T}} \rho |\nabla u|^2}{\int_{\mathbb{T}} \rho u^2},$$

其中 $\mathcal{V}_{k+1}$ 是维数为 $k+1$ 的子空间族，属于

$$\{u \cdot 1_{\{\rho(x)>0\}} : u \in C_c^\infty(\mathbb{T})\}.$$

接下来我们考虑这两个优化问题

$$\sup \{\mu_k(\Omega) \text{ s.t. } \Omega \subset \mathbb{T}, |\Omega| = m, \Omega \text{ bounded, open and Lipschitz}\}$$

and

$$\sup \left\{ \mu_k(\rho) \text{ s.t. } \rho : \mathbb{T} \to [0,1], \int_{\mathbb{T}} \rho = m \right\}.$$

其中 $0 < m < |\mathbb{T}|$ 和 $k > 0$。

这一最后的表述使我们能够在球面上执行相同的密度方法。以下将介绍所得结果，随后介绍水平集方法得到的结果。

7.1. **密度优化**。我们说明，所采用的优化参数与球面情形所用的参数相同。我们先展示图 19 中的一些最优密度。为便于观察，我们提醒读者，所有网格和密度均可在 `https://github.com/EloiMartinet/Neumann_Sphere/` 获取。

我们可以注意到，对于足够小的质量，$k \in 1$、2、3 的最优密度似乎是测地球的示性函数。然而，与平面和球面的情形相比，μ_3 的情形必须谨慎看待。一个显著的事实是，与球面的情形相反，μ_1 的最优密度似乎仍是示性函数，而在 μ_2 中则可以观察到一些均匀化现象。以 m 为函数绘制的最优特征值见图 20。

7.2. **水平集优化**。图 21 展示了通过水平集方法得到的 μ_1、μ_2、μ_3 在不同质量下的最优区域。

以 m 为函数绘制的最优特征值见图 22。

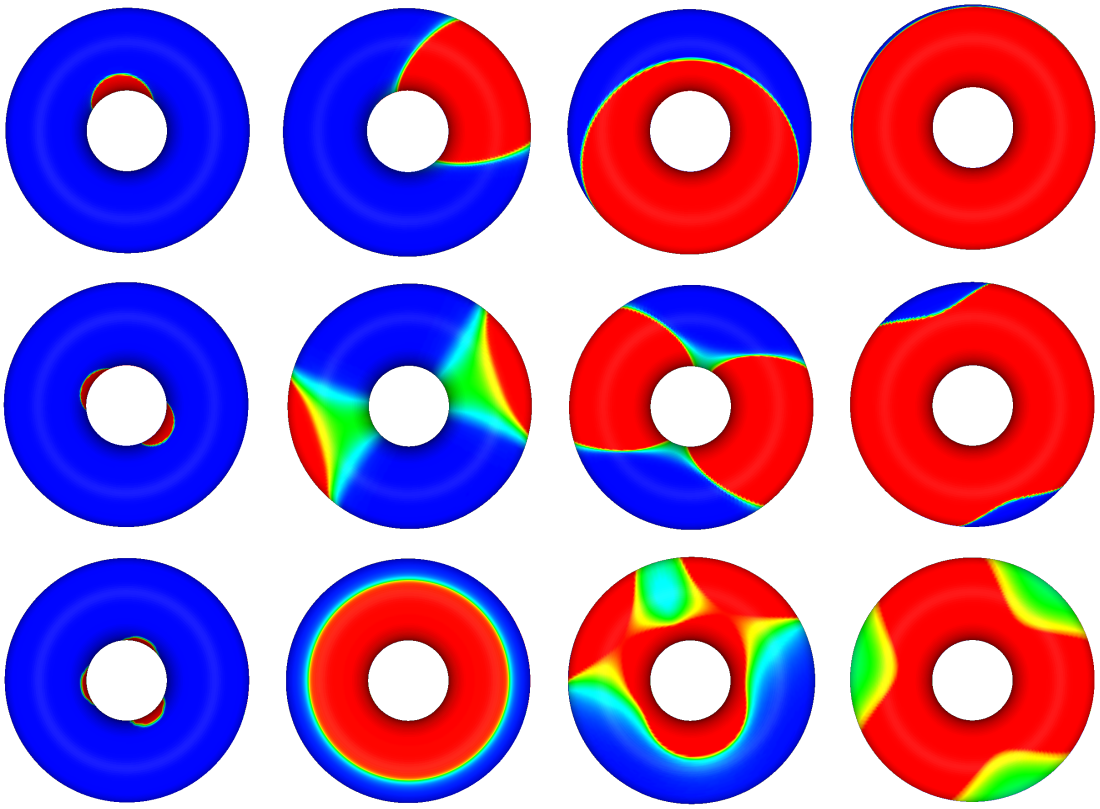


图 19。 μ_1、μ_2 和 μ_3 （分别对应第一、第二和第三行）的最优密度，对于 $m \in \{3、22、43、 68\}$ 的近似值。

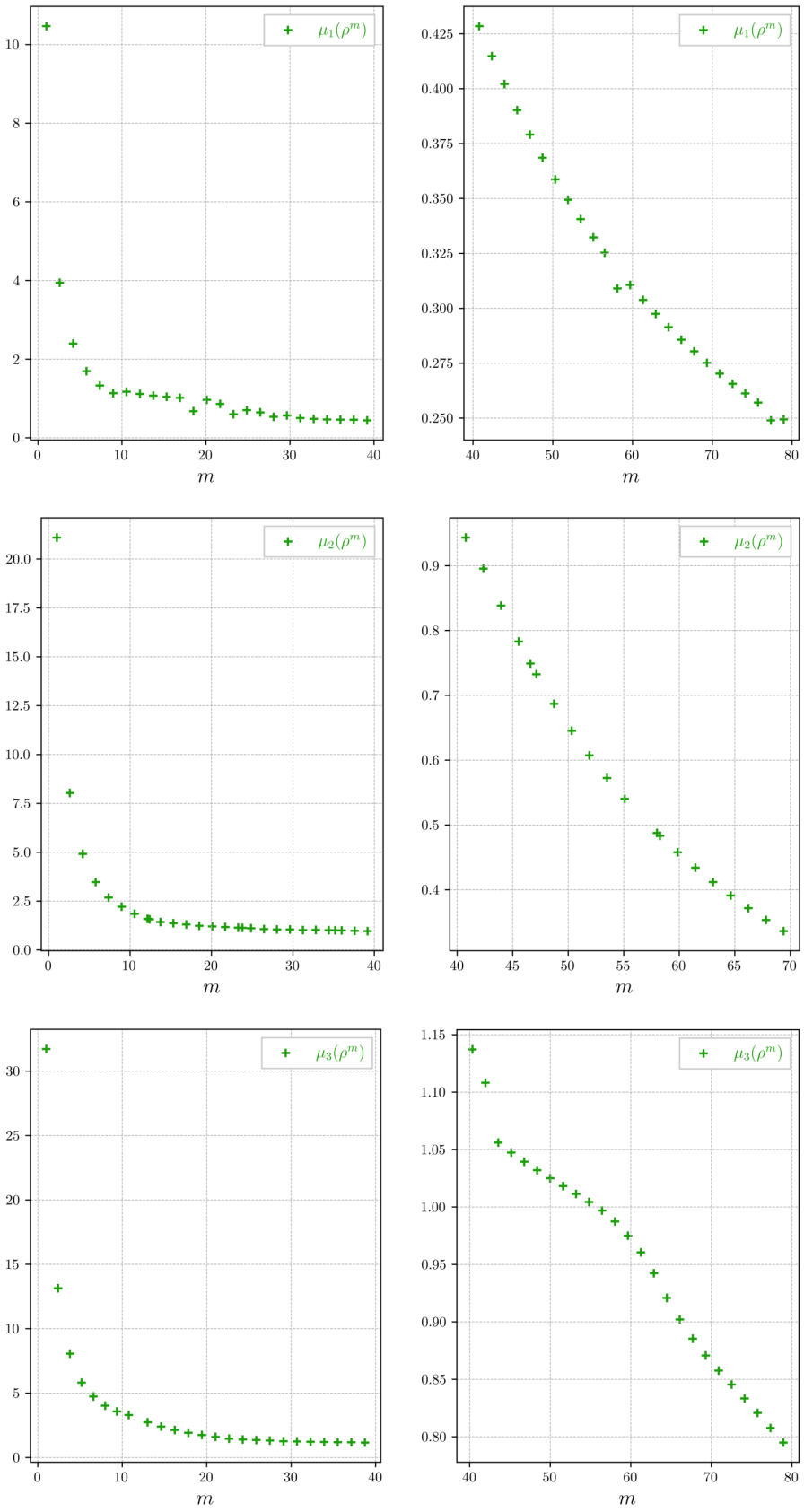


图 20. 通过密度方法得到的 μ_1, μ_2 和 μ_3 的最优值（分别对应第一、第二和第三行）。

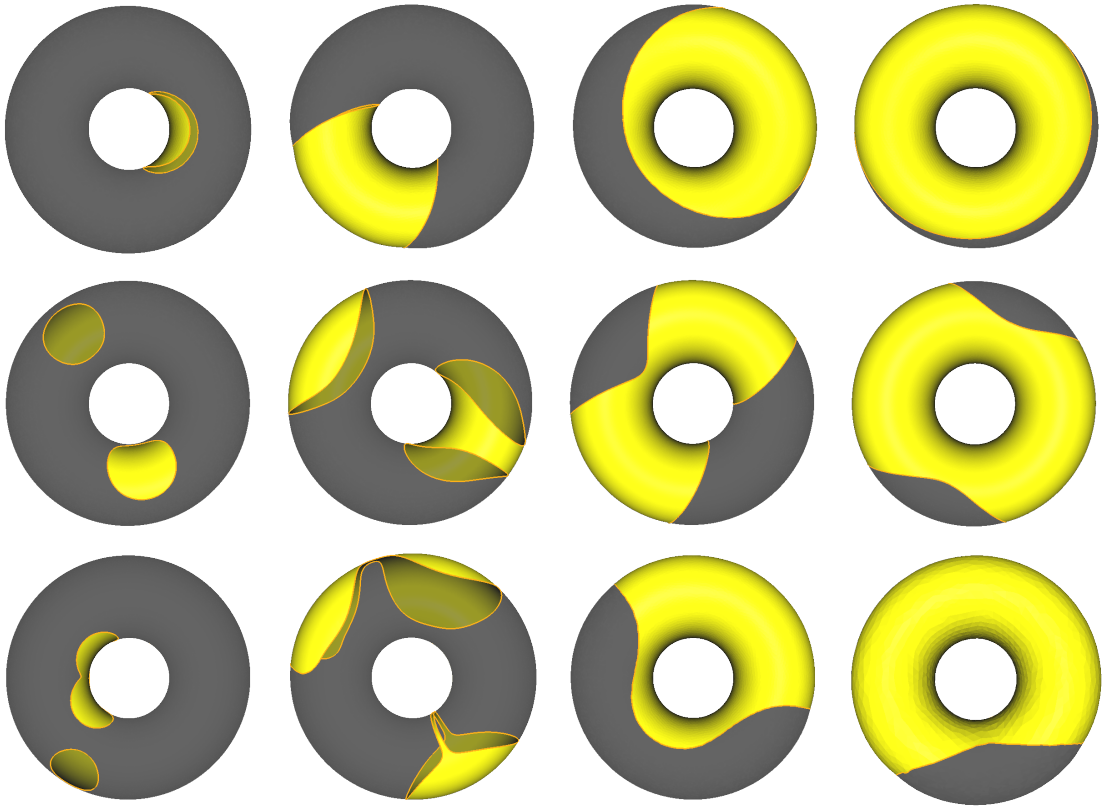


图 21. μ_1, μ_2 和 μ_3 的最优区域（分别对应第一、第二、第三行），对于 $m \in \{4, 22, 42, 60\}$ 的近似结果。

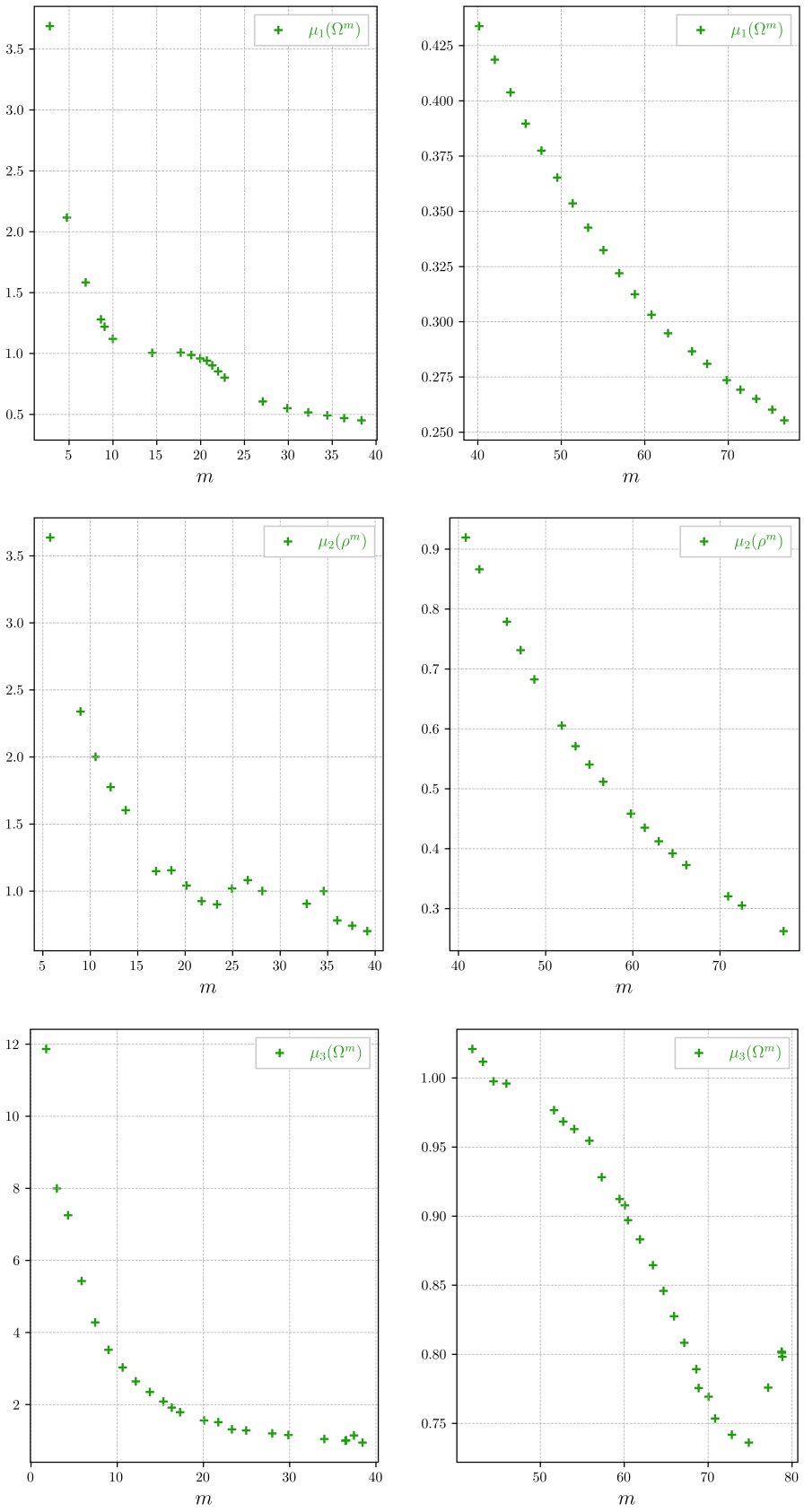


图 22. 通过水平集方法得到的 μ_1, μ_2 和 μ_3 （分别对应第一、第二和第三行）的最优值。

8. 讨论

我们介绍了两种数值探索方法，用于研究球面和环面区域上具有诺伊曼边界条件的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征值优化。第一种方法推广了区域特征值的概念，因此不受拓扑因素的影响。另一方面，第二种方法基于区域的水平集表示，因而能够处理拓扑变化。

在球面上的优化问题中，这种灵活性被证明是一项重要特性，因为某些球面上的 μ_1 最优区域具有很高的拓扑复杂性。事实上，密度优化得到的最优解并不对应于区域，而水平集方法则会尝试生成具有大量孔洞的区域；这可能表明，当表面积足够大时，最优区域并不存在。相反，显然，当表面积足够小时，球面上 μ_1 的最优密度（因而也是最优区域）是一个测地球。由此可见，球面上 μ_2 的行为十分明确。事实上，最优区域始终是两个测地球的并集，正如 [9]中所示。对于 μ_3 ，理论上描述最优解如何随总表面积变化或许很困难，但若能证明这类区域必须满足的一些必要条件（例如对称性），将会很有意义。

在环面上的优化问题中，我们注意到，这次均匀化发生在 $\mu 2$ 而非 μ_1。或许需要进一步研究，以更好地了解这一现象如何随环面的大小而演变，以及类似的均匀化是否会发生在诸如$(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$这样的扁平环面中。

无论如何，进一步弄清流形上最优区域存在与否，将是一个有趣的研究结果。

9. 致谢

作者得到 ANR SHAPO（ANR-18-CE40-0013）的资助。

参考文献

[1] G. Allaire、C. Dapogny 和 P. Frey。采用基于水平集的网格演化方法进行形状优化。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，282：22–53，2014年12月。[2] Grégoire Allaire、Charles Dapogny、Gabriel Delgado 和 Georgios Michailidis。通过水平集方法进行多相结构优化。ESAIM：《控制、优化与变分法》，20(2)：576–611，2014年。[3] Grégoire Allaire 和 François Jouve。用于振动与多重载荷结构优化的水平集方法。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，194(30-33)：3269–3290，2005年8月。[4] P. R. S. Antunes 和 E. Oudet。拉普拉斯算子特征值极值问题的数值结果。载于《形状优化与谱理论》，第398–411页。De Gruyter Open，华沙，2017年。[5] Pedro R. S. Antunes 和 Édouard Oudet。四维几何中狄利克雷拉普拉斯特征值的数值最小化。《SIAM科学计算杂志》，39(3)：B508–B521，2017年1月。[6] Pedro RS Antunes 和 Pedro Freitas。狄利克雷和诺伊曼拉普拉斯算子低阶特征值的数值优化。《优化理论与应用杂志》，154(1)：235–257，2012年。[7] Mark S. Ashbaugh 和 Rafael D. Benguria。常曲率空间中有界区域首个非零诺伊曼特征值的精确上界。《伦敦数学学会杂志》，52(2)：402–416，1995年10月。[8] Catherine Bandle。非均匀自由薄膜若干特征值的等周不等式。《SIAM应用数学杂志》，22(2)：142–147，1972年3月。[9] Dorin Bucur、Eloi Martinet 和 Mickaël Nahon。球面上诺伊曼特征值的精确不等式，2022年8月。arXiv:2208.11413。[10] Dorin Bucur、Eloi Martinet 和 Edouard Oudet。诺伊曼特征值最大化，2022年。[11] Bruno Colbois 和 Ahmad El Soufi。带权拉普拉斯算子的谱。《全球分析与几何年刊》，55(2)：149–180，2019年。[12] Charles Dapogny、Cécile Dobrzynski 和 Pascal Frey。三维自适应区域重新网格划分、隐式域网格划分及其在自由边界和移动边界问题中的应用。《计算物理杂志》，262：358–378，2014年。[13] Charles Dapogny 和 Pascal Frey。在自适应三角剖分上计算离散轮廓的有符号距离函数。《Calcolo》，49(3)：193–219，2012年。[14] Frédéric de Gournay。水平集方法中的速度延拓及形状优化中的多重特征值。《SIAM控制与优化杂志》，45(1)：343–367，2006年1月。[15] F. Hecht。Freefem++ 的新进展。《数值数学杂志》，20(3-4)：251–265，2012年。[16] Tosio Kato。《线性算子扰动理论》，第132卷。Springer Science & Business Media，2013年。[17] Jeffrey J Langford 和 Richard S Laugesen。超越半球的第二诺伊曼特征值最大化者。《数学年刊》，第1–27页，2022年。[18] Yves Renard 和 Konstantinos Poulios。GetFEM：基于通用弱形式语言的多物理场问题自动有限元建模。《ACM数学软件汇刊》，47(1)：第4篇，31页，2021年。[19] Robert S. Strichartz。齐性空间中区域的特征值之和估计。《泛函分析杂志》，137(1)：152–190，1996年4月。[20] Andreas Wächter 和 Lorenz T Biegler。大规模非线性规划中内点滤波线搜索算法的实现。《数学规划》，106(1)：25–57，2006年。[21] H. F. Weinberger。N维自由薄膜问题的等周不等式。《J. Rational Mech. Anal.》，5：633–636，1956年。[22] D.Z. Zanger。诺伊曼问题的特征值变分。《应用数学快报》，14(1)：39–43，2001年。

（Eloi Martinet）萨瓦-勃朗峰大学，法国国家科学研究中心，LAMA，73000 尚贝里，法国 电子邮件地址，E. Martinet： eloi.martinet@univ-smb.fr