arXiv:2303.12430v2 [math.RA] 6 Apr 2023

微分中心单代数

PARUL GUPTA、YASHPREET KAUR 和 ANUPAM SINGH

Abstract. 本文综述以微分中心单代数为主要研究对象。我们回顾一些重要概念，如微分子域、微分分裂域、张量积等。我们主要关注微分分裂域，它将这些对象与经典的微分伽罗瓦理论联系起来。我们提及若干已知结果，并就此提出一些问题。

1. Introduction

设 R 是一个含单位元的环（不一定交换）。若环 R 配备一个满足莱布尼茨法则 $d_R(\alpha\beta) = \alpha d_R(\beta) + d_R(\alpha)\beta$ 的加法映射 $d_R\colon R \to R$，其中该法则对所有 α、$\beta \in R$ 都成立，则称其为微分环，而映射 d_R 称为导子。我们用有序对 (R, d_R) 表示微分环。任何环都可以通过在其上取零导子，以平凡方式赋予微分环结构。作为域（或代数）的微分环称为微分域（或微分代数）。以下是一些例子。

例 1.1. 零导子是 $\mathbb{Q}$ 上唯一的导子。

例 1.2. 设 $k = \mathbb{Q}(t)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有理函数域。对于 $a \in k$，令$d_k(t) = a$，我们得到 k 上的一个导子。对于 $a = 1$，我们得到通常的导子 $\frac{d}{dt}$。

例 1.3（内导子）。设 R 是一个环。对于任意元素 $a \in R$，映射$\partial_a\colon R \to R$ 由 $\partial_a(x) = xa - ax$ （对 $x \in R$ ）给出，是 R 上的一个导子。我们称 ∂_a 为关于 a 的内导子。注意， ∂_a 在 R 的中心上的限制是零导子。特别地，若 R 是交换的，则对于任意 $a \in R$， ∂_a 在 R 上本质上是零导子。内导子最初是在李代数的背景下引入并研究的，见 [14]。

例 1.4（矩阵代数与逐坐标导子）。设 (k, d_k) 是一个微分域。映射 $\delta^c\colon M_m(k) \to M_m(k)$ 定义为 $\delta^c((a_{ij})) = (d_k(a_{ij}))$，是

2010 *Mathematics Subject Classification.* 12H05, 16H05, 16W25.*Key words and phrases.* 导子、微分代数、微分分裂域、微分布劳尔群。第二位署名作者获得印度政府原子能部（DAE）NBHM 项目资助: 0204/16(33)/2020/R&D- II/26。第三位署名作者的这项研究由 SERB 通过 CRG/2019/000271 提供资助。

作用于 $M_m(k)$ 上的导子，且 δ^c 称为 $M_m(k)$ 上的逐坐标导子。因此，$(M_m(k)\ \delta^c)$ 是一个以 (k, d_k) 为底的微分代数。

例 1.5（四元数代数与标准导子）。设 (k, d_k) 是一个微分域，且 $\alpha, \beta \in k^\times$。设 $Q = (\alpha, \beta)_k$ 是一个四元数代数，并设 $u, v \in Q$ 满足 $u^2 = \alpha$, $v^2 = \beta$ 和 $vu = -uv$。若导子 d 作用于 Q，且满足 $d(u) \in k(u)$ 和 $d(v) \in k(v)$，则称其为 Q上的标准导子，记作 $d_{(u,v)}$。其定义见 [19]。

设 (R, d_R) 是一个微分环。满足 $d_R(c) = 0$ 的元素 $c \in R$ 称为常数。导子的核 $\{c \in R : d_R(c) = 0\}$ 构成一个环（实际上是一个带有零导子的微分环）。我们称该核为 (R, d_R) 的常数环，并将其记作 $C_{(R,d_R)}$。环同态 $\phi : (R, d_R) \to (S, d_S)$ 若对所有 $\alpha \in R$ 都满足 $d_S(\phi(\alpha)) = \phi(d_R(\alpha))$，则称为微分同态。若环 $S \supseteq R$上存在一种与 R 的微分环结构相容的微分环结构，即 $d_S|_R = d_R$，则称其为 R 的微分环扩张。微分域 (k, d_k) 的微分环扩张是一个微分 k-代数。

本文关注的主要对象是微分中心单代数。我们已经见过一些微分中心单代数的例子（例1.4、1.5）。第 3 节介绍了某些中心单代数上导子的分类。微分中心单代数的一个关键方面是其微分分裂域。这些分裂域可以作为矩阵微分方程的皮卡-维essi奥扩张得到。这将微分分裂域与微分伽罗瓦理论联系起来（见 [17]）。第 2 节回顾与矩阵微分方程的皮卡-维essi奥扩张及其微分伽罗瓦群相关的定义和结果。第 4 节汇集了若干关于微分分裂域的开放问题。第 5 节探讨微分中心单代数的张量积及相关性质。

2. Picard-Vessiot extensions

关于微分伽罗瓦理论的入门介绍，我们推荐感兴趣的读者参阅 [16]，[17] 和 [20]。本节结果主要参考 [22, 第 1] 章和[5]。

设 (k, d_k) 为一个微分域，其常数域 C_k 是代数闭域。设 $P \in M_m(k)$。矩阵微分方程 $\delta^c(Y) = PY$ 的皮卡-万维尔环 (R, d_R)（在 (k, d_k) 上）是满足以下条件的环：

(a) 满足 $d_R(I) \subseteq I$ 的 R 的唯一理想 I 是 (0) 和 R。(b) 存在一个矩阵 $F \in \mathrm{GL}_m(R)$, 满足 $\delta^c(F) = PF$。(c) 环 R 由 k、F 的各分量以及 F的行列式的逆元作为环生成。

对于矩阵微分方程 $\delta^c(Y) = PY$在（k, d_k）上，存在一个皮卡-万维尔环，并且在 k-微分同构意义下唯一。皮卡-万维尔环是一个整环，皮卡-万维尔环的分式域称为皮卡-维西奥扩张域，它在 k 上，简称为**PVE** (参见 [22, 命题 1.20，定义 1.21]）。下一个命题描述 PVE 的性质：

命题 2.1。 [22, 命题 1.22] 设 (k, d_k) 是一个微分域，且 $P \in M_m(k)$。微分域扩张 $(K, d_K) \supset (k, d_k)$ 是矩阵微分方程 $\delta^c(Y) = PY$ 的一个 PVE，当且仅当满足以下条件。

(a) 存在 $F \in \mathrm{GL}_m(K)$，使得 $\delta^c(F) = PF$。(b) 域 K 是由 F 的各项在 k 上生成的。(c) 常数域 $C_K = C_k$。

设 $(K, d_K) \supset (k, d_k)$ 是矩阵方程 $\delta^c(Y) = PY$ 的一个 PVE，其中 $P \in M_m(k)$。K 的微分 k-自同构群称为微分伽罗瓦群，记作 $\mathrm{DGal}(K/k)$。微分伽罗瓦群可视为 $\mathrm{GL}_m(C_k)$ 的一个子群（参见 [22, 观察 1.26]），因此是一个线性代数群。K 对 k 的超越次数等于 $\mathrm{DGal}(K/k)$ 的维数。

类似于经典的伽罗瓦对应，也存在微分伽罗瓦对应。对于子群 $H \subset \mathrm{DGal}(K/k)$，令 K^H 表示 K 中被 H里的每个微分自同构固定的元素集合。对于微分域 $k \subset L \subset K$，令 $\mathrm{DAut}(L/k)$ 表示 $\mathrm{DGal}(K/k)$ 中固定 L每个元素的微分自同构集合。下面的定理给出微分伽罗瓦对应。

定理 2.2. [5, 定理 1] 设对于 $P \in M_m(k)$，(K, d_K) 是矩阵方程 $\delta^c(Y) = PY$在 (k, d_k) 上的一个 PVE。那么
(a) 对每个（扎里斯基）闭子群 $H \subset \mathrm{DGal}(K/k)$，都存在一个包含 k 的微分子域 $L \subset K$，使得 $K^H = L$，反之亦然。(b) 包含 k 的微分子域 $L \subset K$ 是 k 上的 PVE，当且仅当 $\mathrm{DGal}(K/L)$ 是 $\mathrm{DGal}(K/k)$ 的正规子群。

在 [5], 中，作者为一般的初值问题建立了伽罗瓦对应，即不要求 C_k 是代数闭的。

3. Differential central simple algebras

设 k 是一个域。中心单 k代数指的是有限维的k代数，它没有非平凡双边理想，且其中心为 k。关于中心单代数的标准理论，可参阅 [6],[7]或 [4], 。

设 A 是一个中心单 k 代数。设 d_k 是 k 上的一个导子，d 是 d_k 到 A 的一个延拓。那么 (A, d) 是 (k, d_k) 上的微分中心单代数。全体

在 A 上延拓 d_k 的所有导子记作 $Der(A/(k,d_k))$。单代数上的导子见 [1], [12] 和 [14]。最初，人们提出了关于导子延拓是否存在的问题，这些问题已在 [11], [3],[23] 和 [2] 中得到研究。

定理 3.1. [2, 定理、命题 1] 域 k 上的导子 d_k 总能扩张为中心单代数 k-代数 A。若 d, $d' \in Der(A/(k,d_k))$，则存在某个 $a \in A$，使得 $d' = d + \partial_a$。

特别地，上述结果表明，中心单 k-代数A 上的一个导子决定了整个集合 $Der(A/(k,d_k))$。

例 3.2. 令 d_k 为 k 上的零导子。则 $Der(A/(k,d_k))$ 由 A 上的内导子构成。

在某些情况下，我们可以在 $Der(A/(k,d_k))$ 中定义一个特殊元素，并根据代数的参数或结构称之为“标准”元素。在下面的例子中，我们将看到矩阵代数 $M_m(k)$ 的 $Der(M_m(k)/(k,d_k))$ 结构。

例 3.3。对于矩阵代数 $M_m(k)$，我们有 $Der(M_m(k)/(k,d_k)) = \{d_P = \delta^c + \partial_P \mid P \in M_m(k),\ \mathrm{tr}(P) = 0\}$（见[2, 定理 2]）。

符号代数是中心单代数的另一个重要例子，其特定导子可由代数的定义参数确定。对于$m \geq 2$，假设 k 含有一个本原的 m次单位根 ζ。对于 $\alpha, \beta \in k^\times$，符号代数 $A = (\alpha, \beta)_{k,\zeta}$是一个 m^2维的 k-代数，由满足关系 $u^m = \alpha, v^m = \beta$ 和 $vu = \zeta uv$ 的 $u, v \in A$生成。任意 4 维中心单 k代数都同构于一个 $m = 2$的符号代数；这类代数也称为四元数代数。我们用 A^0表示 A 中迹为零的元素集合。

例 3.4（符号代数与标准导子）。设 A 是 k 上的 m^2 维符号代数。若存在 u、$v \in A^0$ 使得 u^m、$v^m \in k^\times$、$vu = \zeta uv$、$d(u) \in k(u)$ 且 $d(v) \in k(v)$，则称导子 $d \in Der(A/(k,d_k))$ 是 A 上的标准导子，并将此导子记作 $d_{(u,v)}$。对于每个 $d \in Der(A/(k,d_k))$，都存在唯一的元素 $a \in A^0$ 使得 $d = d_{(u,v)} + \partial_a$（见 [8, 命题 3.1]）。

现在我们将上述定义推广到任意中心除代数。设 D 是一个有限维中心除 k 代数。作为双中心化子定理的一个简单应用，可得 D 由两个元素 $D = k[u,v]$ 生成，其中 u、v 满足某些关系（见 [10, 推论 3]）。若存在 u、$v \in D$ 使得 $D = k[u,v]$、$d(u) \in k(u)$ 且 $d(v) \in k(v)$，则称导子 $d \in Der(D/(k,d_k))$ 是 D 上的标准导子，并将此导子记作 $d_{(u,v)}$。

在这 例子 3.3 和 3.4的背景下，自然会提出以下问题 :

问题 3.5. 对于微分域（k, d_k）上的中心单代数 A，能否利用标准导子完全确定导子集 $Der(A/(k, d_k))$?

在上述问题的背景下，可以研究导子在有理数域的子域上的作用。正如我们在例 3.4 中所见，符号代数上的标准导子会稳定有理数域的两个极大子域。这促使我们研究在其下稳定的子域。若子域是某个微分子域，则称其为微分中心单代数的微分子域。如果是这种情况，限制在该子域上即为唯一的导子。在定理中已证明：给定一个中心单代数及其极大子域，存在一个微分中心单代数，使该极大子域成为其微分子域。然而，也存在没有微分子域的微分中心单代数（见及）。

问题 3.6. 对于微分域 (k, d_k) 上的中心单代数 A，分类导子集合 $d \in Der(A/(k, d_k))$，使得 A 的每个极大子域都是微分子域。

如果存在一个 k-代数同构 $\phi: A_1 \to A_2$，使得 $\phi \circ d_1 = d_2 \circ \phi$，则称微分中心单代数 (A_1, d_1) 和 (A_2, d_2) 在 (k, d_k) 上微分同构；此时，称 ϕ 为 (A_1, d_1) 与 (A_2, d_2) 之间的微分同构。

问题 3.7. 具有相同微分子域的两个微分中心单代数之间有什么关系？是否存在具有相同微分子域但不同构的微分代数 (A_1, d_1) 和 (A_2, d_2)，它们都定义在 (k, d_k) 上?

4. Differential splitting field

设 A 是一个 m^2维中心单 k代数，且 K/k 是一个域扩张。那么 $A \otimes_k K$ 仍是一个中心单 K代数。若 A 在 K 上分裂，即$A \otimes_k K \simeq M_m(K)$，我们就称之为分裂。众所周知，中心单代数在其极大子域上分裂。对于每个子域 $E \subseteq A$，都有 $[E : k]$ 整除 $\sqrt{}$维$_k(A)$。因此，特别地，存在一个域扩张 E/k，满足 $[E : k] \leq \sqrt{}$维$_k(A)$，且代数 A 在 E上分裂。有关极大子域和分裂域的相关陈述，请读者参阅 [21, 第 13] 章。

类似地，Juan 和 Magid [15] 提出了微分中心单代数的微分分裂域这一概念。若微分中心单代数 (A, d) 在微分域 (k, d_k) 上的分裂域为 (K, d_K)，则当 $\supseteq (k, d_k)$ 满足以下条件时：$(A \otimes_k K, d^* = d \otimes d_K)$ 和 $(M_m(K)\ \delta^c)$ 是关于 (K, d_K) 的微分同构代数；我们称 (K, d_K) 是 (A, d) 的微分分裂域。

设 (A, d) 是 (k, d_k) 上的微分中心单代数。设 L/k 是 A 的一个分裂域。那么存在一个迹为零矩阵 $P \in M_m(L)$，使得 $(A \otimes_k L, d^*) \simeq$

（$M_m(L)$ d_P）（参见例 3.3）。因此，要理解微分中心单代数的分裂，第一步是理解微分矩阵代数的分裂。在 [15, 命题 2], 中，得到了微分矩阵代数为分裂代数的一个充要条件。

命题 4.1. 设 $P, Q \in M_m(k)$。那么微分代数 $(M_m(k)\ d_P)$ 和 $(M_m(k)\ d_Q)$ 微分同构，当且仅当存在 $F \in GL_m(k)$ 使得 $F^{-1}\delta^c(F) + F^{-1}QF = P$。特别地，$(M_m(k)\ d_P)$ 分裂，当且仅当存在 $F \in GL_m(k)$ 使得 $\delta^c(F) = FP$。

注意，对于 F^{-1}，我们有 $\delta^c(F^{-1}) = PF^{-1}$，因此也可以说，$(M_m(k)\ d_P)$ 分裂，当且仅当存在 $F \in GL_m(k)$ 使得 $\delta^c(F) = PF$。由此得到以下关于任意微分中心单代数的结果。

定理 4.2。[15, 推论 1] 一个在（k, d_k）上的微分中心单代数可在（k, d_k）的一个 PVE 上分裂。

微分中心单代数的微分分裂域不一定是代数扩张（参见 [19, 例 4.3、定理 4.5], [8, 定理 5.5] 以及 [9, 例 5.2、定理 6.5]）。确定给定微分中心单代数的微分分裂域的超越次数颇为有趣。我们定义

$$\mathsf{Ddeg}_k(A,d) := \min\{\mathrm{tr.deg}_k(E) \mid (E,d_E) \supseteq (k,d_k) \text{ splits } (A,d)\}$$

并称 Ddeg_k（A, d）为（A, d）的微分分裂次数。

由命题 4.1 可知，Ddeg_k（A, d）受 $\dim_k$（A）限制。设（K, d_K）是（k, d_k）的一个 PVE，它分裂（A, d），并设 DGal（K/k）为其微分伽罗瓦群。由于我们可以选择矩阵 P 使其为迹为零矩阵，根据 [22, 习题 1.35（5a）], DGal（K/k）可视为 $\mathbf{SL}_m$（C_k）的一个子群。于是

$$\mathrm{tr.deg}_k(K) = \dim_k(\mathsf{DGal}(K/k)) \leq m^2 - 1.$$

因此，$\mathsf{Ddeg}_k(A,d)$ 不超过 m^2-1。

问题 4.3. 设 A 是一个中心单纯 k代数。对于导子 $d \in Der(A/(k,d_k))$, $0 \leq i \leq m^2-1$ 之间的哪些数 i 可以作为 $\mathsf{Ddeg}_k(A,d)$ 出现?

文献 [9] 中给出了微分四元数代数 (Q,d)（定义在 (k,d_k) 上）的例子，使得对于每个 $0 \leq i \leq 3$，$\mathsf{Ddeg}_k(Q,d) = i$。

例4.4. [9, 例 5.2 和定理 6.5] 设 $(k = \mathbb{Q}(t)\ d_k)$ 是一个微分域，且 $d_k(t) = 1$。设 $Q = (1,t)_k$ 是一个四元数代数，并设 $u, v \in Q^0$ 满足$u^2 = 1$, $v^2 = t$ 和 $vu = -uv$。考虑 Q上的一个导子 $d = d_{(u,v)} + \partial_a$，其中 $a \in Q$。那么

(a) 对于 $a = 0$, $\mathsf{Ddeg}_k(Q,d) = 0$。

(b) 对于 $a = \frac{1}{t}v$，$\mathrm{Ddeg}_k(Q,d) = 1$。(c) 对于 $a = \frac{1}{4t}(-u - 2v + 2uv)$，$\mathrm{Ddeg}_k(Q,d) = 2$。(d) 对于 $a = -\frac{1}{4t}u - v$，$\mathrm{Ddeg}_k(Q,d) = 3$。

利用 [9, 定理 6。5], 可以构造出若干微分四元数代数的例子，其 $\mathrm{Ddeg}_k(Q, d) = 0$, 1。另一方面，对于 $\mathrm{Ddeg}_k(Q, d) = 2$，3，我们目前只知道分裂四元数代数的例子。因此，我们提出以下问题。

问题 4.5。是否存在一个微分除四元数代数 (Q,d)，使得 $\mathrm{Ddeg}_k(Q,d)$ 等于 2 或 3?

由于有理数域 k 上的 PVE 的微分伽罗瓦群可以视为 $\mathrm{SL}_m(C_k)$ 的子群，因此微分中心单代数的微分分裂域与 $\mathrm{SL}_m(C_k)$ 的子群之间可能存在某种联系。

问题 4.6。$\mathrm{SL}_m(C_k)$ 的哪些线性代数子群可以作为有理数域 k 上、能够分裂 k 上微分中心单代数的 PVE 的伽罗瓦群?

将微分子域与微分分裂域联系起来也很有意思。例如，[8, 定理 5.4], 指出，带有标准导子的符号代数 $(\alpha,\beta)_{k,\ \zeta}$（其中我们有同时也是极大子域的微分子域）可被 k的一个有限扩张分裂。

问题 4.7. 设 (L,d_L) 是 (k,d_k) 的一个 PVE，将 (A,d) 分裂。探究 (A,d) 与 (L,d_L) 的微分子域之间的关系。更具体地说，我们可以问：假设存在一个极大子域 $M \subseteq A$，它同时也是 A 的微分子域，那么关于 $\mathrm{Ddeg}_k(A,d)$，我们能得出什么结论?

问题 4.8. 设 A 是一个中心单 k-代数，并设 $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}A/(k,d_k)$。假设 (A,d_1) 和 (A,d_2) 具有相同的微分分裂域。(A,d_1) 是否 $\simeq (A,d_2)$?

下面给出了 (k,d_k) 上的微分四元数代数在 (k,d_k) 的有限微分域扩张上分裂的判别。

定理 4.9. [9, Theorem7.3] 微分四元数代数在 k 的有限域扩张上分裂，当且仅当该四元数代数上的导子在 k 的某个有限扩张上变为标准导子。

问题 4.10. 定理 *4.9*是否也适用于符号代数和除代数?

5. Tensor products of differential central simple algebras

给定（k,d_k）上的两个微分中心单代数（A_1,d_1）和（A_2,d_2），我们按如下方式得到张量微分代数。代数 $A_1 \otimes_k A_2$ 仍然是一个中心

单 k-代数，而映射 $d_1 \otimes d_2 : A_1 \otimes_k A_2 \to A_1 \otimes_k A_2$ 由 $(d_1 \otimes d_2)(a_1 \otimes a_2) = d_1(a_1) \otimes a_2 + a_1 \otimes d_2(a_2)$ 定义，是 $A_1 \otimes_k A_2$ 上的一个导子。我们将 $(A_1, d_1) \otimes_{(k,d_k)} (A_1, d_1)$ 记作 $(A_1 \otimes_k A_2, d_1 \otimes d_2)$ 上的微分中心单代数。

问题 5.1. 设 A 是一个中心单 k-代数，且 $d_1, d_2 \in \in \mathrm{Der}(A/(k, d_k))$。假设 $(A, d_1) \otimes_k (A, d_2)$ 在 (k, d_k) 上分裂。那么 (A, d_1) 与 (A, d_2) 是否微分同构?

域 k 的布劳尔群记作 $\mathrm{Br}(k)$，它是由中心单代数生成的群模去由矩阵代数生成的子群所得的商群。根据韦德伯恩定理，每个中心单 k-代数 A 都布劳尔等价于一个唯一的除代数（同构意义下）。

与域的通常布劳尔群定义类似，文献 [13] 中给出了微分布劳尔群的定义。然而，根据 [13] 中的定义，当基域具有零特征时，微分布劳尔群与通常的布劳尔群相同，因此不包含任何额外信息。在 [15], 中，微分布劳尔群记作 $Br^{diff}(k, d_k)$，定义为由 (k, d_k) 上的微分矩阵代数生成的群，模去由配备逐坐标导子的矩阵代数生成的子群所得的商群。注意，$Br^{diff}(k, d_k)$ 仅包含有关微分矩阵代数的信息。当 k 是代数闭域（或 C_1-域）时，所有中心单代数都是矩阵代数。

众所周知，$\mathrm{Br}(k)$ 是一个挠群，也就是说，$\mathrm{Br}(k)$ 中的每个元素都有有限阶。对于中心除 k-代数 D，众所周知，D 在 $\mathrm{Br}(k)$ 中的类的阶整除 $\sqrt{\dim_k(D)}$。然而，可以构造一个微分矩阵代数 $(M_m(k)\ d)$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，在一个非分裂微分代数中，$(M_m(k)\ d) \otimes_k \cdots \otimes_k (M_m(k)\ d)$（$n$ 次）。称定义在 (k, d_k) 上的微分中心单代数 (A, d) 具有有限阶，如果存在整数 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(A, d) \otimes_k \cdots \otimes_k (A, d)$（$n$ 次）是定义在 (k, d_k) 上的分裂微分代数。以下问题受 K. Singla 和 A. Kulshrestha 的工作启发[18, 定理 5.1],，他们证明，对于某些矩阵微分代数，有限阶意味着可通过有限扩张使其分裂，即 $\mathrm{Ddeg} = 0$。

问题 5.2. 设 (A, d) 是 (k, d_k) 上的有限阶微分中心单代数。这是否意味着 $\mathrm{Ddeg}(A, d) = 0$?

由于 $\mathrm{Br}(k)$ 中的每个元素都具有有限阶，因此只需针对矩阵代数考虑上述问题。也可以尝试分别处理四元数代数或符号代数的情形。

问题 5.3. 求两个 Brauer 等价的微分中心单代数的微分分裂次数之间的关系。

致谢。作者谨向 Varadharaj R. Srinivasan 和 Amit Kulshrestha 致以谢意，感谢他们就这一主题进行的多次富有见地的讨论，这些讨论引发了本文中的许多问题。我们还感谢 Kanika Singla 在 Varadharaj R. Srinivasan 组织的系列研讨会期间就这一主题进行的讨论。我们还感谢审稿人提出宝贵意见，帮助改进本文稿件。

References

[1] S. A. Amitsur, *Derivations in simple rings*, 《伦敦数学会会刊》，第 s3-7 卷第 1 期（1957），87–112 页。[2] S. A. Amitsur, *Extensions of derivations to central simple algebras*, 《通讯代数》，第 10 卷第 8 期（1982），797–803 页。[3] M. Barr, M. A. Knus, *Extensions of derivations*, 美国数学会会刊，第 28 卷第 1 期（l97l），313–314 页。[4] G. Berhuy and F. Oggier, *An introduction to central simple algebras and their applications to wirelesscommunication*, 美国数学会: 数学调查与专著，第 191 卷，2013 年。[5] T. Crespo, Z. Hajto and E. Sowa-Adamus, *Galois Correspondence Theorem for Picard-Vessiot Ex-tensions*, 《阿诺德数学杂志》2（2016），21–27 页。[6] P. Draxl. *Skew fields*。伦敦数学会讲义系列，第 81 卷。剑桥大学出版社，1983 年。[7] P. Gille and T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, 剑桥高等数学研究丛书，第 101 卷，剑桥大学出版社，2006 年。[8] P. Gupta, Y. Kaur, A. Singh, *Splitting fields of differential symbol algebras*, 《纯粹与应用代数杂志》第 227 卷第 5 期（2023），1-16 页。[9]P. Gupta, Y. Kaur, A. Singh *Splitting of differential quaternion algebras*, 预印本（2022），https://arxiv.org/abs/2210.02103。[10] I. N. Herstein, A. Ramer, *A note on division algebras*, 《加拿大数学杂志》，第 24 卷（1972），734–736 页。[11]G. Hochschild, *Restricted Lie algebras and simple associative algebras of characteristic p*《美国数学会汇刊》80（1955），135–147 页。[12] K. Hoechsmann, *Simple algebras and derivations*, 《美国数学会汇刊》108 卷第 1 期（1963），1–12 页。[13] R. T. Hoobler, *The differential Brauer group*, https://arxiv.org/abs/1003.1421（2010）。[14] N. Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras*, 《美国数学会汇刊》第 42 卷第 2 期（1937），206–224 页。[15] L. Juan and A. R. Magid, *Differential central simple algebras and Picard-Vessiot representations*, 美国数学会会刊，第 136 卷第 6 期（ 2008 ），1911–1918 页。[16] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Actualit´ es Sci. Ind., 1251, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 第 5 卷，Hermann，巴黎，1957 年。[17] E. R. Kolchin, *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, 《数学年刊》第 49 卷第 1 期（1948），1–42 页。[18]A. Kulshrestha and K. Singla, *Finite splittings of differential matrix algebras* （2022），https://arxiv.org/abs/2212.00995。[19] A. Kulshrestha and V. R. Srinivasan, *Quaternion algebras with derivations*, 《纯粹与应用代数杂志》第 226 卷第 2 期（2022），1–14 页。[20] A. R. Magid, *Lectures on differential Galois theory*, 美国数学会大学讲义系列，1994 年，第 2 版。[21] R. S. Pierce, *Associative algebras* 数学研究生教材，第 88 卷，施普林格出版社，纽约-柏林，1982 年。

[22] M. van der Put, M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, 328, 数学科学基础丛书, 施普林格, 海德堡, 2003 年。[23] A. Roy, R. Sridharan, *Derivations in Azumaya algebras*, 《京都大学数学杂志》第 7 卷第 2 期（1967）, 161–167 页。*Email address*: parulgupta1211@gmail.com
Email address: yashpreetkm@gmail.com*Email address*: anupamk18@gmail.comIISER Pune,
Dr. Homi Bhabha Road, Pashan, Pune 411 008, India